

MAT100

Matematikk

Kompendium 2019, del 1

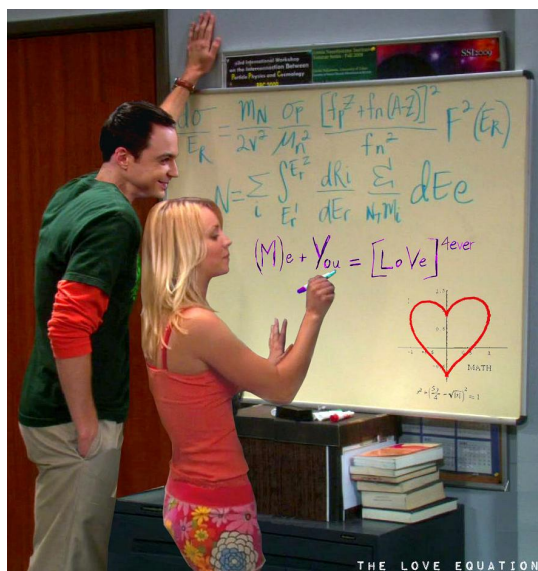
Brukes også i «MAT001 Forkurs i matematikk»

Per Kristian Rekdal

Bård-Inge Pettersen



Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk



Figur 1: Matematikk.

Innholdsfortegnelse

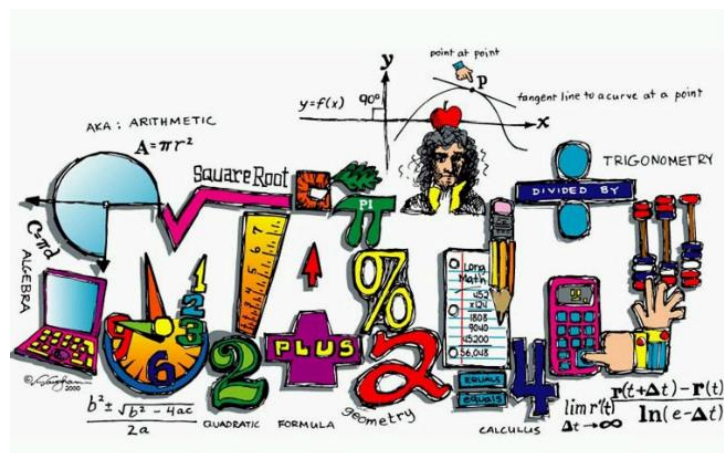
1	Grunnleggende emner	7
1.1	Logikk	8
1.1.1	Logiske utsagn	8
1.1.2	Logiske konnektiver	9
1.1.3	Logiske kvantorer	10
1.2	Mengdelære	11
1.2.1	Endelige mengder	11
1.2.2	Delmengder	16
1.2.3	Mengdeoperasjoner	18
1.2.4	Uendelige mengder	22
1.2.5	Fundamentale tallmengder	23
1.2.6	Intervaller	24
1.3	Addisjon og multiplikasjon	25
1.3.1	Addisjon og multiplikasjon	25
1.3.2	Subtraksjon og divisjon	26
1.3.3	Den kommutative lov	27
1.3.4	Den assosiative lov	29
1.3.5	Den distributive Lov ("pilmetoden")	30
1.3.6	Den generelle kvadratsetningen	32
1.3.7	Kvadratsetningene og konjugatsetningen	33
1.4	Brøkkregning	34
1.4.1	Forkorte og utvide brøker	35
1.4.2	Algebraiske operasjoner: $+$, $\cdot$, $-$ og $/$	37
1.5	Prosent	42
1.5.1	Prosentregning	42
1.5.2	Prosentvis endring	47
1.6	Potenser	49
1.6.1	Potenser	50
1.6.2	Potensregler	51

1.6.3	Cobb-Douglas produktfunksjon	54
1.6.4	Standardform	56
1.6.5	Prefikser	57
1.7	Kvadratrot	58
1.7.1	Kvadratrot	58
1.7.2	Regneregler for kvadratrot	62
1.7.3	n 'te kvadratrot	65
1.7.4	Potenser med brøk i eksponenten	69
2	Ligninger og ulikheter	73
2.1	Algebraiske uttrykk	74
2.1.1	Variabler, parametre og konstanter	77
2.1.2	Forenkle algebraiske uttrykk	79
2.2	Algebraiske ligninger	83
2.2.1	Litt historie	83
2.2.2	Koordinatsystemer	84
2.2.3	Ligninger og geometri	88
2.2.4	Algebraiske ligninger og løsningsmengden $\mathcal{L}$	96
2.2.5	Klassifisering av algebraiske ligninger	98
2.2.6	Løsningsmetodikk: Transformasjoner	99
2.3	Linære ligninger (1. gradsligninger)	104
2.4	Linære ligningssystem	111
2.5	Kvadratiske ligninger (2. gradsligninger)	115
2.5.1	Kvadratiske ligninger med en variabel - ABC -formelen	115
2.5.2	Polynomer	120
2.6	Faktorisering	122
2.6.1	Fundamentalsetningen for aritmetikk	123
2.6.2	Fundamentalsetningen for algebra	124
2.7	Ulikheter	129
2.7.1	Transformasjoner for ulikheter	133
2.7.2	Polynomulikheter	138
2.7.3	Ulikheter med rasjonale uttrykk	143
2.8	Absoluttverdi	146
3	Funksjoner	151
3.1	Funksjoner	152
3.2	Koordinatsystem	155
3.3	Lineære funksjoner (rette linjer)	156
3.3.1	Ett- og to-punktsformelen	161
3.4	Simplex-algoritmen	167
3.5	Kvadratiske funksjoner (parabler)	174
3.5.1	Noen egenskaper til kvadratiske funksjoner (parabler)	175
3.6	Rasjonale funksjoner	184
3.7	Asymptoter	196
3.7.1	Asymptoter for rasjonale funksjoner	198

4	Derivasjon	203
4.1	Derivasjon	204
4.2	Derivasjonsregler	206
4.3	Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner	224
4.4	Kjerneregelen	233
4.5	Globale og lokale ekstremalpunkt	236
4.6	Ekstremalpunkt eller ikke?	241
4.7	Lokale ekstremalpunkt: 1. derivasjonstesten	242
4.8	Lokale ekstremalpunkt: 2. derivasjonstesten	244
4.9	Globale ekstremalpunkt	249
5	Ekspontial- og logaritmefunksjoner	257
5.1	Ekspontialfunksjonen	258
5.2	Tallet e , Eulers tall	265
5.2.1	Ekspontialfunksjonen $f(x) = e^x$	269
5.2.2	Regneregler for e^x	272
5.2.3	Deriverte av e^x	273
5.3	Logaritmer	284
5.3.1	Definisjon	284
5.3.2	Regneregler	288
5.4	Deriverte av $\ln x$	295
6	Følger og rekker	301
6.1	Følger og rekker	302
6.1.1	Regneregler for summasjon	309
6.2	Aritmetiske følger og rekker	314
6.2.1	Sum av en aritmetiske rekke	318
6.3	Geometriske følger og rekker	332
6.3.1	Sum av en geometriske rekke	336
6.4	Konvergente og divergente rekker: $n \rightarrow \infty$	362
6.5	Geometriske rekker: $n \rightarrow \infty$	363
6.6	Oversikt finansmatematikk	370
7	Integrasjon	371
7.1	Motivasjon: Areal under graf	372
7.2	Definisjon av integral	378
7.3	Fundamentalsetningen for integral	382
7.4	Antideriverte og integral	387
7.4.1	Noen regneregler	393
7.5	Eksempler på integrasjon innen økonomi og logistikk	395
8	Funksjoner av flere variable	403
8.1	Funksjoner av to variable	404
8.2	Grafisk fremstilling av funksjoner av to variable	406
8.3	Grafisk fremstilling og nivåkurver	408

8.4	Partielle deriverte	410
8.5	Retningsderivert	414
8.6	Maksimum og minimum	416
8.7	Maksimering/minimering under bibetingelser	424
A	Logiske formler og sannhetstabeller	453
A.1	Logiske formler og sannhetstabeller	453
A.1.1	Formel	454
A.1.2	Formalisering	454
A.1.3	Sannhetstabeller	458

1. Grunnleggende emner



1.1 Logikk

Logikk er læren om lovene og reglene som gjør tenkningen, resonneringen og argumentasjonen gyldig («logisk»).

1.1.1 Logiske utsagn

All matematikk uttrykkes gjennom logiske utsagn som er enten *sanne* eller *falske*.

Definisjon 1.1.1 — Logisk utsagn

Et logisk utsagn er en deklarativ setning som gir en påstand som enten er *sann* eller *falsk*.

■ Eksempel 1.1 Noen eksempler på logiske utsagn:

Jorda er flat. (1.1)

Det finnes et menneske som er høyere enn 2 meter. (1.2)

Alle primtall er oddetall. (1.3)

Tallet 9 er *ikke* et primtall er oddetall. (1.4)

$2 < 5$. (1.5)

$2 < 5$ **og** $5 < 10$. (1.6)

$2 < 5$ **eller** $5 < 10$. (1.7)

*Hvis $2 < 5$ **og** $5 < 10$ så er $2 < 10$.* (1.8)

■

K Et matematisk utsagn, er et logisk utsagn basert på de matematiske grunnsetningene. Lign.(1.3) - (1.8) er eksempler på matematiske utsagn.

K Et simpelt utsagn, er et utsagn som *ikke* består av *andre* utsagn. Lign.(1.1) og (1.5) er eksempler på simple utsagn.

Et utsagn som ikke er simpelt, kalles et sammensatt utsagn. Alle utsagnene med **fet** skrift i eksempelet over er sammensatte utsagn.

■ Eksempel 1.2 Ikke alle setninger er logiske utsagn:

Lukk vinduet! (En kommando). (1.9)

Donald Trump gjør en god jobb som president. (En meningsytring). (1.10)

■

1.1.2 Logiske konnektiver

De logiske operasjonene som **slår sammen** simple logiske utsagn til sammensatte utsagn, kalles *logiske konnektiver*. De logiske konnektivene kan uttrykkes i ord som:

ikke (1.11)

og (1.12)

eller (1.13)

hvis - så. (1.14)

For å ha litt mer **symbolikk** lar vi p , q og r være de simple utsagnene:

p er utsagnet: " $2 < 5$ " (1.15)

q er utsagnet: " $1 < 2$ " (1.16)

Da vet vi at både p er et sant utsagn mens q er usant. I tabell A.1 har vi lagd noen sammensatte utsagn fra disse utsagnene:

Dersom p er sann så er *ikke* p usant og vice versa. Utsagnet p **og** q er sant *kun* dersom *både* p og q er sanne samtidig, mens p **eller** q er sant dersom minst en av p eller q er sanne.

Med ord	Med ord og formel	Kun symbolikk	Sann/Usann
<i>ikke</i> p	<i>ikke</i> $2 < 5$	$\neg 2 < 5$	Usann
p og q	$2 < 5$ og $1 < 2$	$2 < 5 \wedge 1 < 2$	Sann
p eller q	$2 < 5$ eller $1 < 2$	$2 < 5 \vee 1 < 2$	Sann
<i>hvis</i> p så q	<i>hvis</i> $2 < 5$ så $1 < 2$	$2 < 5 \rightarrow 1 < 2$	Sann

Tabell 1.1: Logiske konnektiver - **sammensatte** utsagn.

Definisjon 1.1.2 — Logisk konnektiver

La p og q være to vilkårlige logiske utsagn.

Vi definerer følgende logiske **konnektiver**:

$\neg p$ ikke p sann hvis p er usann og vice versa, (1.17)

$p \wedge q$ p og q sann hvis både p og q er sanne, (1.18)

$p \vee q$ p eller q sann hvis minst en av p eller q er sanne, (1.19)

$p \rightarrow q$ hvis p så q dersom p er sann, så må q være sann. (1.20)



Vi bruker ikke disse symbolene spesielt mye i dette kompendiet, men de dukker opp her og der, og da er det viktig å vite hva de står for. Med de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$ og $\vee$ kan vi lage mer sammensatte logiske utsagn fra simple utsagn. Slike sammensatte utsagn kalles *formler*.

1.1.3 Logiske kvantorer

Logiske *kvantorer* gir oss logiske utsagn som omhandler *eksistens* og *generalisering*.¹

Utsagn om eksistens:

Det finnes et tall x som løser ligningen $x^2 = 2$

kan skrives matematisk (x er et tall)

$$\exists x \wedge (x^2 = 2).$$

Utsagn om generalisering:

Alle primtall større enn 2 er oddetall,

setningen kan skrives matematisk

$$\forall p(p \text{ er et primtall}) \wedge (p > 2) \wedge (p \text{ er et oddetall}).$$

Symbolene $\exists$ og $\forall$ kalles *logiske kvantorer*.

Definisjon 1.1.3 — Logisk kvantorer

La x være et element i en mengde M og la $P(x)$ være et logisk utsagn om elementet x .

Vi definerer følgende *logiske kvantorer*:

$$\exists x P(x) \quad \text{sann hvis det finnes et element } x \text{ hvor } P(x) \text{ er sann} \quad (1.21)$$

$$\forall x P(x) \quad \text{sann hvis } P(x) \text{ er sann for alle } x \quad (1.22)$$

K Vi bruker ikke disse symbolene spesielt mye i dette kompendiet, men de dukker opp her og der, og da er det greit å vite hva de står for.

K Et logisk utsagn som kan bevises fra andre utsagn som vi *allerede vet* er sanne, gir opphavet til matematisk deduksjon og resultatet kalles gjerne en *formel*.

¹Utsagn om eksistens og generalisering kan ikke beskrives via de logiske konnektivene på en enkel måte.

1.2 Mengdelære

Mengdelære er den matematiske teorien om mengder, som representerer samlinger av abstrakte objekter.

1.2.1 Endelige mengder

Definisjon 1.2.1 — Endelig mengde

En **endelig mengde** M er en samling av forskjellige elementer $a_1, a_2, \dots, a_n$ omringet av klammeparentes:

$$M = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \} \quad (1.23)$$

hvor n er antall elementer i mengden.

■ **Eksempel 1.3** Noen eksempler på **endelige** mengder:

$$\{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.24)$$

$$\{ a, b, c, d \} \quad (1.25)$$

$$\{ \text{rød, grønn, gul, blå} \} \quad (1.26)$$

$$\{ \pi, 5.32423, \text{bil}, x^2 \} \quad (1.27)$$

■

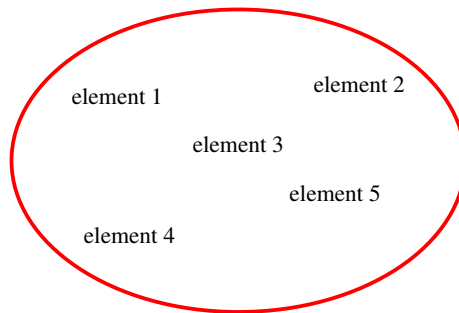
K Legg merke til at et element ikke kan forekomme to ganger i mengden, f.eks. har vi at

$$\{ 3, 6, 7, \text{9}, \text{9} \} = \{ 3, 6, 7, \text{9} \} \quad (1.28)$$

K Rekkefølgen til elementene spiller heller ingen rolle, f.eks. har vi at

$$\{ 7, 9, 3, 6 \} = \{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.29)$$

En mengde kan visualiseres som en sky med elementer i skyen, som vist i figur 1.1.



Figur 1.1: Visualisering av en mengde med 5 elementer.

Definisjon 1.2.2 — Den tomme mengden

Den **tomme mengden** $\emptyset$ er mengden med ingen elementer:

$$\emptyset = \{ \}$$

(1.30)

K Den tomme mengden $\emptyset$ er en svært viktig mengde, spesielt når vi ser på operasjoner mellom mengder som f.eks. snitt og union (mer om dette i kapittel 1.2.3).

Rekkefølgen av elementene i en endelig mengde er ofte *er* viktig.

■ Eksempel 1.4 — rekkefølge

Vi må skille mellom koordinatene i et kart, hvor første element er *lengdegraden* og andre koordinat er *breddegraden*.

Anta vi oppgir posisjonen vår som to tall i en vanlig mengde:

$$\text{posisjon} = \{ 2345.3234 , 45635.23453 \} \quad (1.31)$$

Siden rekkefølgen ikke har noe å si i en mengde, er det umulig for oss å vite hvilket tall er hvilken koordinat.

Hvordan vet vi hvilket tall er **breddegraden** og hvilket er **lengdegraden**?

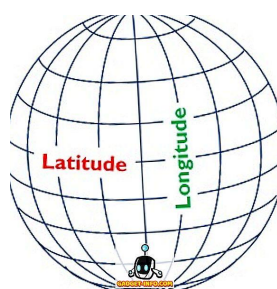
Løsning:

Løsningen er at vi bytter ut **klammetegnene** med **parenteser**:

$$\text{posisjon} = (2345.3234 , 45635.23453) \quad (1.32)$$

altså

$$\text{posisjon} = (\text{lengdegrad} , \text{breddegrad}) \quad (1.33)$$



Figur 1.2: **Breddegrad** og **lengdegrad**.

■

Parentesene i lign.(1.32) kalles en 2-tupple, og er en endelig mengde hvor **rekkefølgen** faktisk spiller inn.

Definisjon 1.2.3 — n -tupple

En **n -tupple** er en mengde T av n elementer $a_1, a_2, \dots, a_n$ hvor element a_k kommer før element a_{k+1} for alle $k = 1, 2, \dots, n-1$. En n -tupple T skrives

$$T = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1.34)$$

dvs. klammeparenteser er byttet ut med vanlige parenteser.

K Vi sier ofte bare en *tupple* dersom n er underforstått fra konteksten eller at det er ikke viktig for konteksten.

K **Rekkefølgen** til elementene i en tupple spiller en rolle:

$$(7, 9, 3, 6) \neq (3, 6, 7, 9) \quad (1.35)$$

K Elementet a_k på plass nr. k i en tupple kalles **koordinaten** på plass nr. k :

$$(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) \quad (1.36)$$

$\uparrow$
 koordinat nr. k

Definisjon 1.2.4 — Endelig **kardinalitet - antall elementer i en mengde**

La mengde M være

$$M = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \} \quad (1.37)$$

hvor n er antall elementer i mengden. **Antall elementer** n i mengden M kalles **kardinaliteten** til M . Vi skriver

$$|M| = n \quad (1.38)$$

dersom kardinaliteten til M er n .

■ **Eksempel 1.5** Eksempel på **kardinaliteten** til mengder:

$$|\{ 3, 6, 7, 9 \}| = 4 \quad (1.39)$$

$$|\{ a, b, c, d, e \}| = 5 \quad (1.40)$$

$$|\emptyset| = 0 \quad (1.41)$$

$$|\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \}| = 11 \quad (1.42)$$

$$|(x, y, z)| = 3 \quad (1.43)$$

■

For å si om et element a er i en gitt mengde M eller ikke, bruker vi symbolet $\in$ som uttales ”**er element av**”.

Definisjon 1.2.5 — Er element av - $\in$

La M være en vilkårlig mengde. Dersom a er **et element av** mengden M skriver vi

$$a \in M \quad (1.44)$$

(K) Dersom et element a **ikke** er i mengden M , skriver vi $a \notin M$.

(K) Vi bruker ofte $\in$ dersom vi skal referere til et **vilkårlig** element i en mengde. Vi sier ofte:

$$\text{”La } a \in M \text{ være et vilkårlig element i mengden } M\text{...”} \quad (1.45)$$

■ **Eksempel 1.6** Eksempel på bruk av $\in$:

$$3 \in \{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.46)$$

$$1 \notin \{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.47)$$

■

1.2.2 Delmengder

Delmengder av mengder er en svært viktig måte å konstruere nye mengder på ved hjelp av eksisterende mengder.

Definisjon 1.2.6 — Delmengde - $\subseteq$

La M være en vilkårlig mengde. En mengde N er en **delmengde** av M dersom ethvert element i N også er et element i M . Vi skriver

$$N \subseteq M \tag{1.48}$$

dersom N er en delmengde av M .

■ Eksempel 1.7 Eksempel på **delmengder**:

$$\{ 3, 6 \} \subseteq \{ 3, 6, 7, 9 \} \tag{1.49}$$

$$\{ x \} \subseteq \{ x, y, z \} \tag{1.50}$$

$$\emptyset \subseteq M \quad \text{for alle mengder } M. \tag{1.51}$$

$$M \subseteq M \quad \text{for alle mengder } M. \tag{1.52}$$

■



Legg merke til at den tomme mengden $\emptyset$ er alltid en delmengde av enhver mengde og at en mengde er alltid en delmengde av seg selv.

Vi skal nå introdusere en måte å konstruere delmengder av en gitt mengde M , ved å bruke et *logisk utsagn* som *restrikerer* hvilke elementer som tilhører delmengden. La f.eks. M være gitt ved:

$$M = \{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.53)$$

Vi ønsker å lage delmengden N hvis elementer oppfyller følgende logiske utsagn:

$$N = \{ \text{hvert element } x \in M \text{ slik at } x < 5 \} \quad (1.54)$$

Ved å se på elementene i M , vet vi at $N = \{ 3 \}$, men tanken her er å uttrykke N ved å bruke et logisk uttrykk istedet for å skrive opp elementene eksplisitt. Vi innfører følgende notasjon:

$$N = \{ x \in M \mid x < 5 \} \quad (1.55)$$

Vi leser dette uttrykket som:

$$N = \{ \underbrace{\text{alle elementer } x \text{ ifra } M}_{x \in M} \mid \underbrace{\text{slik at}}_{\text{logisk utsagn om } x \text{ er oppfylt}} \underbrace{x < 5}_{\text{logisk utsagn om } x \text{ er oppfylt}} \} \quad (1.56)$$

Definisjon 1.2.7 — Konstruksjon av **delmengder** via logiske utsagn

La M være en vilkårlig mengde. La $x \in M$ være et vilkårlig element i M .
La $p(x)$ være et logisk utsagn om elementet x . Da er

$$N = \{ x \in M \mid p(x) \} \quad (1.57)$$

delmengden av M som består av alle x i M som gjør utsagnet $p(x)$ sant.

■ **Eksempel 1.8** La $M = \{ 3, 6, 7, 9 \}$. Eksempel på konstruerte delmengder via logiske utsagn:

$$N_1 = \{ x \in M \mid \overbrace{x = 3 \vee x = 6}^{p(x)} \} = \{ 3, 6 \} \quad (1.58)$$

$$N_2 = \{ x \in M \mid x \leq 5 \} = \{ 3 \} \quad (1.59)$$

$$N_3 = \{ x \in M \mid x^2 \geq 8 \} = M \quad (1.60)$$

$$N_4 = \{ x \in M \mid x \leq 0 \vee x \geq 10 \} = \emptyset \quad (1.61)$$

■



Vi tenker gjerne på utsagnet $p(x)$ som en *restriksjon* på elementene i M .

1.2.3 Mengdeoperasjoner

Mengdeoperasjoner brukes til å konstruere nye mengder fra to gitte mengder A og B . De er nært koblet mot de logiske konnektivene *og*, *eller* og *ikke*.

Definisjon 1.2.8 — Snittet mellom to mengder

La A og B være to vilkårlige mengder.

Snittet $A \cap B$ mellom A og B er mengden hvis elementer både er elementer i A *og* i B :

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} \quad (1.62)$$

■ Eksempel 1.9 — snitt

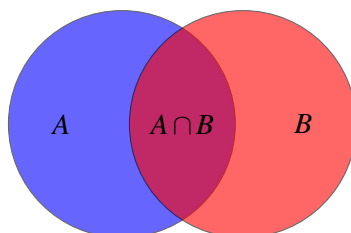
La $A = \{ 3, 6, 7, 9 \}$ og $B = \{ 1, 3, 7, 8, 10 \}$.

Da er **snittet** $A \cap B$ de tallene som både er i A og i B :

$$A \cap B = \{ 3, 7 \} \quad (1.63)$$

■

Figur 1.3 viser et såkalt *Venn-diagram* hvor hver mengde representeres som et *areal* i planet. Figuren illustrerer godt hvordan snittet tilsvarende det arealet hvor A og B *overlapper*.



Figur 1.3: Venn-diagram av **snittet** $A \cap B$ mellom to mengder A og B .

Hvis vi i definisjon 1.2.8 bytter ut og-konnektivet med eller, får vi *unionen* istedet for snittet mellom to mengder.

Definisjon 1.2.9 — **unionen** mellom to mengder

La A og B være to vilkårlige mengder. **Unionen** $A \cup B$ mellom A og B er mengden hvis elementer enten er elementer i A *eller* i B :

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \} \quad (1.64)$$

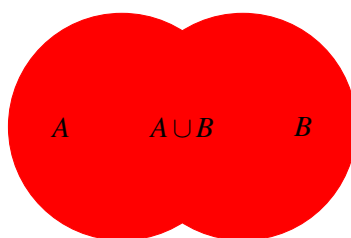
■ **Eksempel 1.10** La $A = \{ 3, 6, 7, 9 \}$ og $B = \{ 1, 3, 7, 8, 10 \}$.

Da er unionen $A \cup B$ de tallene som enten er i A eller i B :

$$A \cup B = \{ 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 \} \quad (1.65)$$

■

Figur 1.4 viser igjen *Venn-diagrammet* for A og B som illustrerer godt hvordan unionen tilsvarer det *totale* arealet dekt av A og B .



Figur 1.4: Venn-diagram av **unionen** $A \cup B$ mellom to mengder A og B .

Til slutt definerer vi *differansen* mellom to mengder som består av de elementene som er i den ene mengden som *ikke* er i den andre.

Definisjon 1.2.10 — differansen mellom to mengder

La A og B være to vilkårlige mengder.

Differansen $A - B$ mellom A og B er mengden hvis elementer er i A som *ikke* er i B :

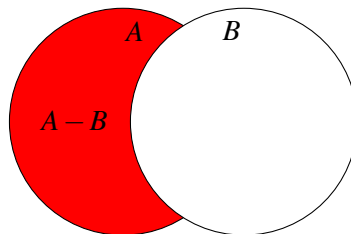
$$A - B = \{ x \in A \mid \neg x \in B \} \quad (1.66)$$

■ **Eksempel 1.11** La $A = \{ 3, 6, 7, 9 \}$ og $B = \{ 1, 3, 7, 8, 10 \}$. Da er differansen $A - B$ de tallene som er i A som ikke er i B :

$$A - B = \{ 6, 9 \} \quad (1.67)$$

■

Figur 1.5 viser igjen Venn-diagrammet for A og B som illustrerer godt hvordan *differansen* tilsvarer det arealet av A som ikke er dekt av B .



Figur 1.5: Venn-diagram av *differansen* $A - B$ mellom to mengder A og B .

Dersom vi har to mengder A og B som *ikke overlapper* med hverandre, kalles de disjunkte.

Definisjon 1.2.11 — Disjunkte mengder

To mengder A og B er disjunkte dersom

$$A \overset{\text{og}}{\cap} B = \emptyset \quad (1.68)$$

Eksempel 1.12 — disjunkte mengder

La $A = \{ 3, 6, 7, 9 \}$ og $B = \{ 1, 8, 10 \}$. Siden det er *ingen overlappende* elementer i A og B er snittet tomt:

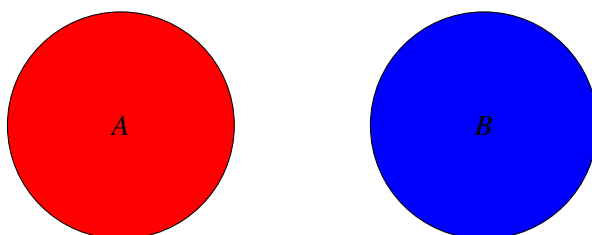
$$A \cap B = \emptyset \quad (1.69)$$

Dermed konkluderer vi at A og B er disjunkte.

■

- K Disjunkte mengder er et viktig begrep i matematikk og dukker opp flere i ulike situasjoner.
- K Legg merke til at dersom to A og B er *disjunkte*, så vil unionen representere *summen* av arealene i figur 1.6.

Figur 1.6 viser igjen *Venn-diagrammet* for A og B som illustrerer godt hvordan differansen tilsvarer det arealet av A som ikke er dekt av B .



Figur 1.6: A og B er **disjunkt**.

1.2.4 Uendelige mengder

Uendelighet er kanskje det mest omstridte begrepet vi har i matematikken (og kanskje vitenskap som sådan). Uendelighet er et svært komplekst begrep i tillegg og gjør matematikken raskt svært abstrakt.

Et av hovedspørsmålene på 1800-1900-tallet var om det i det hele tatt *finnes* uendelige mengder. Hvis vi ser på universet og naturen rundt oss, så finner vi ingen bevis på at noe er uendelig. Trenger vi da uendelige mengder? Og hva *er* en uendelig mengde. Spørsmålene blir fort abstrakte og matematiske spørsmål går over til filosofiske spørsmål som f.eks.:

Er tiden uendelig?

Vi kan fort bli fristet til å svare ”*Ja, selvfølgelig!*”, men har vi noe bevis for det? Hvordan vet vi at tiden ikke stopper opp en gang?

Flere motstridende paradokser dukket opp i forbindelse med uendelige mengder og vitenskapen var splittet, men til slutt ble det en enighet om at uendelig mengder *finnes*. Men siden dette ikke kan bevises, ble eksistensen av uendelige mengder beskrevet som et *postulat*.²

Setning 1.2.1 — Postulat: Eksistens av uendelig mengder.

Det *finnes* mengder med *uendelig* antall elementer.

Nå som vi har blitt enige om at uendelige mengder finnes, kan vi trivielt beskrive hva en uendelig mengde faktisk er:

Definisjon 1.2.12 — Uendelig mengde

En mengde som ikke er endelig er uendelig.

I neste avsnitt definerer vi de mest kjente uendelige tallmengdene.

²Et *postulat*, også kalt et *aksiom*, er en setning man tar for gitt, *uten bevis*. Matematikken har flere andre postulater som er grunnsteinene for videre deduksjon. I geometri er f.eks. den åpenbare setningen ”*Korteste avstand mellom to punkter i rommet er en linje*” ofte satt opp som et postulat, og ikke et avledet resultat teorem.

1.2.5 Fundamentale tallmengder

Noen fundamentale **tallmengder**:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \} \quad (\text{naturlige tall}) \quad (1.70)$$

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \} \quad (\text{hele tall}) \quad (1.71)$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{rasjonale tall}) \quad (1.72)$$

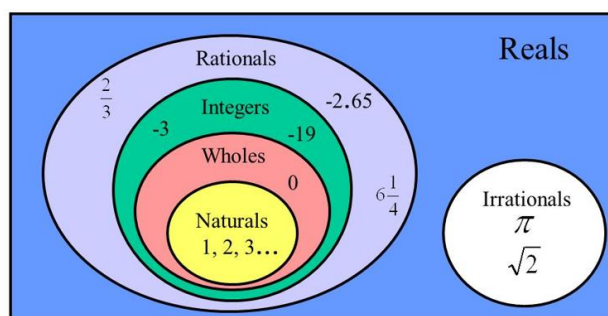
$$\mathbb{R} = \text{mengden av reelle tall} \quad (\text{alle tall på tall-linja}) \quad (1.73)$$

K Legg merke til at de naturlige tallene, $\mathbb{N}$ *ikke* inkluderer tallet **0**. Dette er mer enn **konvensjon** enn et faktum. I mange situasjoner er 0 inkludert i de naturlige tallene.

K De **reelle** tallene kan ses på som alle desimaltallene med **uendelig mange desimaler**. Lign.(1.73) gir ingen eksplisitt definisjon av de reelle tallene, siden det er utenom rammene for dette kompendiet.

K Lign.(1.73) gir ingen eksplisitt definisjon av de reelle tallene, siden den er utenom rammene for dette kompendiet.

K Som vist i figur 1.7, ser vi at de mindre tallmengdene er delmengder av de større, dvs. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.



Figur 1.7: Tallmengder: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

1.2.6 Intervaller

Alle tallmengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er *ordnede* mengder i den forstand at dersom vi har to tall a og b , så kan vi alltid bestemme om $a \leq b$.

Alle tallene som ligger mellom to vilårlige tall a og b kalles et intervall. Vi har fire typer intervaller avhengig av om endepunktene a og b er med eller ikke.

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \quad (\text{alle reelle tall mellom } a \text{ og } b) \quad (1.74)$$

(lukket intervall)

$$\langle a, b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \quad (\text{ingen endepunkt mellom } a \text{ og } b) \quad (1.75)$$

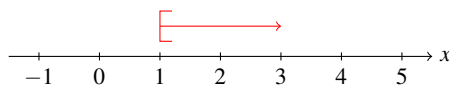
(åpent intervall)

$$\langle a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} \quad (\text{kun endepunktet } b \text{ er med mellom } a \text{ og } b) \quad (1.76)$$

(halvåpent intervall)

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \quad (\text{kun endepunktet } a \text{ er med mellom } a \text{ og } b) \quad (1.77)$$

(halvåpent intervall)



Figur 1.8: Intervallet $[1, 3)$ på tallinjen $\mathbb{R}$.

1.3 Addisjon og multiplikasjon

Vi skal i dette avsnittet se på noen viktige egenskaper til addisjon $+$ og multiplikasjon $\cdot$ for de reelle tallene.

Vi vil *ikke* ha så stor fokus på subtraksjon $-$ og divisjon $/$ siden, som vi skal vise, disse er kun avledede operasjoner fra $+$ og $\cdot$.

1.3.1 Addisjon og multiplikasjon

Vi starter med å beskrive hva vi mener med **addisjon** og **multiplikasjon**.³

Definisjon 1.3.1 **Addisjon** er en operasjon $+$ som tar to reelle tall a og b og som gir et nytt reelt tall lik summen av tallene:

$$+ \mapsto a + b. \quad (1.78)$$

Definisjon 1.3.2 **Multiplikasjon** er en operasjon $\cdot$ som tar to reelle tall a og b og som gir et nytt reelt tall lik produktet av tallene:

$$\cdot \mapsto a \cdot b. \quad (1.79)$$

K Når man multipliserer symboler som representerer tall så droppes ofte multiplikasjonstegn:

$$a \cdot b \text{ skrives som oftest } ab. \quad (1.80)$$

Når man derimot multipliserer *tall* så er multiplikasjonstegn som oftest med:

$$5 \cdot 2 = 10. \quad (1.81)$$

Når det er parentes mellom tallene så droppes imidlertid oftest multiplikasjonstegnet:

$$(-4)(-3) = 12. \quad (1.82)$$

K Når vi multipliserer to tall må vi alltid passe på *fortegnene*:

$$(+) \cdot (+) = + \quad \text{("pluss -pluss gir pluss")} \quad (1.83)$$

$$(+) \cdot (-) = - \quad \text{("pluss -minus gir minus")} \quad (1.84)$$

$$(-) \cdot (+) = - \quad \text{("minus -pluss gir minus")} \quad (1.85)$$

$$(-) \cdot (-) = + \quad \text{("minus -minus gir minus")} \quad (1.86)$$

³Disse definisjonene sier ikke direkte hva addisjon og multiplikasjon er, men forteller oss at likevel hvordan man opererer med dem på de reelle tallene.

1.3.2 Subtraksjon og divisjon

Subtraksjon og **divisjon** er egentlig addisjon og multiplikasjon i skjul.

For å innse dette må vi forstå hva som menes med *inverser* (motsatte tall).

$$a, -a \quad (\text{er inverser for } +) \quad (1.87)$$

$$b, \frac{1}{b} \quad (\text{er inverser for } \cdot) \quad (1.88)$$

Ideen er å bruke de inverse tallene for å definere subtraksjon og divisjon fra addisjon og multiplikasjon.

Definisjon 1.3.3 Subtraksjon er en operasjon $-$ som tar to reelle tall a og b og som gir et nytt reelt tall lik summen av a og $-b$:

$$a - b = a + (-b). \quad (1.89)$$

Definisjon 1.3.4 Divisjon er en operasjon $/$ som tar to reelle tall a og b og som gir et nytt reelt tall lik produktet av a og $\frac{1}{b}$:

$$a/b = a \cdot \frac{1}{b}. \quad (1.90)$$

 Subtraksjon er en **avledet** operasjon fordi det er det samme som å addere et negativt tall.

 Divisjon er en **avledet** operasjon fordi det er det samme som å multiplisere med en brøk.

Vi skal nå se på 3 fundamentale lover som $+$ og $\cdot$ oppfyller:

1. Den kommutative lov,
2. Den assosiative lov,
3. Den distributive lov.

1.3.3 Den kommutative lov

En kommutativ operasjon tillater at **rekkefølgen** på de to argumentene kan endres uten å endre resultatet.

Setning 1.3.1 — Den kommutative lov for addisjon

Den **kommutative** lov for **addisjon** av reelle tall:

$$a + b = b + a \quad (1.91)$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

Setning 1.3.2 — Den kommutative lov for multiplikasjon

Den **kommutative** lov for **multiplikasjon** av reelle tall:

$$ab = ba \quad (1.92)$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

K Legg merke til at den kommutative lov gjelder ikke for de **avledede** operasjonene subtraksjon og divisjon:

$$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}, \quad (1.93)$$

$$a - b \neq b - a. \quad (1.94)$$

■ **Eksempel 1.13** Kommutative lov for **addisjon** av reelle tall:

$$\underbrace{7+3}_{=10} = \underbrace{3+7}_{=10} \quad (1.95)$$

■

■ **Eksempel 1.14** Kommutative lov for **multiplikasjon** av reelle tall:

$$\underbrace{7 \cdot 3}_{=21} = \underbrace{3 \cdot 7}_{=21} \quad (1.96)$$

■

- **Eksempel 1.15** Den avledede operasjonen subtrasjon er ikke kommutativ:

$$\underbrace{8-2}_{=6} \neq \underbrace{2-8}_{=-6} \quad (1.97)$$

■

- **Eksempel 1.16** Den avledede operasjonen divisjon er ikke kommutativ:

$$\underbrace{\frac{8}{2}}_{=4} \neq \underbrace{\frac{2}{8}}_{=1/4} \quad (1.98)$$

■

1.3.4 Den assosiative lov

En assosiativ operasjon tillater at **parenteser** kan plasseres **fritt** i et uttrykk der operasjonen utføres flere ganger i en sekvens.

Setning 1.3.3 — Assosiative lov for addisjon

Den assosiative lov for addisjon av reelle tall:

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c \quad (1.99)$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Setning 1.3.4 — Assosiative lov for multiplikasjon

Den assosiative lov for multiplikasjon av reelle tall:

$$a(bc) = (ab)c = abc \quad (1.100)$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$.

■ **Eksempel 1.17** Den assosiative lov for addisjon av reelle tall:

$$\underbrace{(1+2)}_{=3} + 3 = 1 + \underbrace{(2+3)}_{=5} = 1 + 2 + 3 = 6 \quad (1.101)$$

■

■ **Eksempel 1.18** Den assosiative lov for multiplikasjon av reelle tall:

$$\underbrace{(4 \cdot 5)}_{=20} \cdot 6 = 4 \cdot \underbrace{(5 \cdot 6)}_{=30} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \quad (1.102)$$

■

1.3.5 Den distributive Lov (“pilmetoden”)

Den distributive loven er kanskje den viktigste loven, siden den forteller oss hvordan $+$ og $\cdot$ forholder seg til hverandre.

Setning 1.3.5 — Den distributive lov

Den distributive lov for reelle tall:

$$a(b + c) = ab + ac \quad (1.103)$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$.

K Fra kommutativitet har vi også en tilsvarende versjon av den distributive lov:

$$(b + c)a = ba + ca, \quad (1.104)$$

hvor vi har skiftet rekkefølgen i lign.(1.103). Vi kaller denne versjonen den snudde distributive lov.

■ **Eksempel 1.19** Eksempel på den distributive lov:

$$2(3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14 \quad (1.105)$$

■



Figur 1.9: Visualisering av den distributive lov i lign.(1.103).

Hvis vi bytter ut a , b eller c med sine negative inverser $-a$, $-b$ eller $-c$, får vi alternative formler av lign.(1.103).

Setning 1.3.6 — Alternative former av den distributive lov

Vi har følgende alternative former av den distributive lov:

$$a(b - c) = ab - ac \quad (1.106)$$

$$-a(b - c) = -ab + ac \quad (1.107)$$

$$-a(b + c) = -ab - ac \quad (1.108)$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$.

K De alternative formene av den distributive lov kommer som en direkte følge av *fortegnreglene* fra lign.(1.83)-(1.86).

La oss f.eks. vise hvordan vi får lign.(1.107) fra den distributive lov:

$$-a(b - c) = (-a)(b + (-c)) = (-a)b + (-a)(-c) = -ab + ac, \quad (1.109)$$

hvor vi ved siste likhet brukte fortegnreglene $(-)(+) = -$ og $(-)(-) = +$.

K Hvis vi setter $a = 1$ i den distributive lov får vi

$$1(b + c) = (b + c) = 1b + 1c = b + c \quad (1.110)$$

$$1(b - c) = (b - c) = 1b - 1c = b - c \quad (1.111)$$

$$-1(b + c) = -(b + c) = -1b - 1c = -b - c \quad (1.112)$$

$$-1(b - c) = -(b - c) = -1b + 1c = -b + c. \quad (1.113)$$

Legg merke til at vi fjerner 1-tallet foran parentesene.

■ **Eksempel 1.20** Alternative former av den distributive lov:

$$-2(2 - 5) = -2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = -4 + 10 = 6 \quad (1.114)$$

$$-2(2 + 5) = -2 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -4 - 10 = -14 \quad (1.115)$$

■

1.3.6 Den generelle kvadratsetningen

Fra den distributive lov kan vi vise *den generelle kvadratsetningen*, som viser hvordan vi kan fjerne uttrykk med parenteser.

Setning 1.3.7 — Den generelle kvadratsetningen

La a, b, c og d være reelle tall. Fra den distributive lov følger at:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd, \quad (1.116)$$

som vi kaller den generelle kvadratsetningen.

Bevis. Trikset for å bevise denne setningen er å sette

$$v = a + b \quad (1.117)$$

Da får vi ved den distributive lov:

$$(a+b)(c+d) = v(c+d) \quad (v = a + b) \quad (1.118)$$

$$= vc + vd \quad (\text{den distributive lov}) \quad (1.119)$$

$$= (a+b)c + (a+b)d \quad (v = a + b) \quad (1.120)$$

$$= ac + bc + ad + bd, \quad (\text{den snudde distributive lov}) \quad (1.121)$$

som beviser setningen. ■



Lign.(1.116) er så viktig at det er **tre spesialtilfeller** av denne ligningen som har egne navn. Disse skal vi se på i neste avsnitt.

■ **Eksempel 1.21** Bruk den **generelle** kvadratsetningen til å løse ut parentesene.

$$\begin{aligned} (2xy+x)(4xy-x) &= 2xy4xy - 2xyx + x4xy - xx = 8x^2y^2 - 2x^2y + 4x^2y - x^2 \\ &= 8x^2y^2 + 2x^2y - x^2 \end{aligned} \quad (1.122)$$

■

1.3.7 Kvadratsetningene og konjugatsetningen

Det finnes to kvadratsetninger, og dessuten den noe beslektede konjugatsetningen. Disse setningene er nyttige å kunne både fremlengs og baklengs, for å gjøre både algebra og hoderegning enklere.

Følgende setninger er kun **tre spesialtilfeller** av den **generelle kvadratsetningen** i lign.(1.116).

Setning 1.3.8 — Kvadratsetningene og konjugatsetningen

Lign.(1.116) har følgende spesialtilfeller:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1. \text{ kvadratsetning}) \quad (1.123)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2. \text{ kvadratsetning}) \quad (1.124)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad (\text{konjugatsetningen}) \quad (1.125)$$

Bevis. La oss vise konjugatsetningen, dvs. lign.(1.125). Vi bruker den generelle kvadratsetningen med $c = a$ og $d = -b$:

$$(a+b)(a-b) = aa - \cancel{ab} + \cancel{ba} - bb = a^2 - b^2 \quad (1.126)$$

som beviser setningen. ■

■ **Eksempel 1.22** 1. kvadratsetning:

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9 \quad (1.127)$$

■ **Eksempel 1.23** 2. kvadratsetning og konjugatsetningen:

$$(3x-y)^2 - (2x-3y)(2x+3y) = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 - ((2x)^2 - (3y)^2) \quad (1.128)$$

$$= 9x^2 - 6xy + y^2 - 4x^2 + 9y^2 \quad (1.129)$$

$$= 5x^2 - 6xy + 10y^2 \quad (1.130)$$

■

1.4 Brøkkregning

Brøkkregning er de vanlige operasjonene $+$, $-$, $\cdot$ og $/$ *anvendt* på de *rasjonale tallene*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \right\}, \quad (1.131)$$

som også kalles brøker. En brøk er altså et tall på formen

$$\text{brøk} = \frac{\text{teller}}{\text{nevner}} = \frac{a}{b}, \quad (1.132)$$

hvor a kalles telleren og b kalles nevneren.

■ **Eksempel 1.24** Noen eksempler på brøker:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{2349745}{234345234}, \quad \frac{-2}{7}, \quad \frac{1}{1}. \quad (1.133)$$

■

K Brøkkregning kan utvides til alle reelle tall $\mathbb{R}$, dvs. a og b kan være desimaltall, men for å introdusere regnereglene for brøker, er det vanlig å begrense at a og b er heltall.

K Legg merke til at

man kan aldri dividere med 0 ,

dvs. nevneren b kan aldri være lik null.⁴

K Alle *heltallene* er også *brøker*:

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 2 = \frac{2}{1}, \quad 3 = \frac{3}{1}, \dots \quad (1.134)$$

K En brøk $\frac{a}{b}$ kan tolkes som *forholdet* mellom a og b , dvs. hvor stor a er i forhold til b . Alternativt kan en brøk skrives som en mer tradisjonell divisjon:

$$\frac{a}{b} = a/b \quad (1.135)$$

⁴”Dele på null er tull.”

1.4.1 Forkorte og utvide brøker

En helt spesiell egenskap ved brøker er at forskjellige brøker kan representere det samme *tallet*. Vi har f.eks.:

$$0.5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots \quad (1.136)$$

Denne egenskapen ved brøker gir muligheten til å *forkorte* eller *utvide* brøker. Vi har i lign.(1.136) uthevet brøken $\frac{1}{2}$ i *rødt*, fordi denne brøken kan ikke forkortes ytterligere siden telleren og nevneren ikke har noen felles divisorer.

Definisjon 1.4.1 — Divisor

Et naturlig tall d er en divisor til et heltall a dersom a er delelig med d , dvs. a/d er et heltall.

■ **Eksempel 1.25** Noen eksempler på divisorer:

$$\text{Tallet } 7 \text{ er en divisor til } 42 \text{ siden } \frac{42}{7} = 6. \quad (1.137)$$

$$\text{Tallet } 6 \text{ er en divisor til } 42 \text{ siden } \frac{42}{6} = 7. \quad (1.138)$$

$$\text{Tallet } 23 \text{ er en divisor til } 46 \text{ siden } \frac{46}{23} = 2. \quad (1.139)$$

■

Definisjon 1.4.2 — Felles divisor

To heltall a og b har en felles divisor d , dersom d er en divisor til både a og b .

■ **Eksempel 1.26** Noen eksempler på felles divisorer:

$$\text{Tallet } 2 \text{ er felles divisor til } 42 \text{ og } 46 \text{ siden } \frac{42}{2} = 21 \text{ og } \frac{46}{2} = 23. \quad (1.140)$$

$$\text{Tallet } 13 \text{ er felles divisor til } 39 \text{ og } 104 \text{ siden } \frac{39}{13} = 3 \text{ og } \frac{104}{13} = 8. \quad (1.141)$$

■

Setning 1.4.1 — Forkorting av brøk

En brøk $\frac{a}{b}$ hvor telleren a og nevneren b har en felles divisor d kan **forkortes** ved å dividere både a og b med d :

$$\frac{a}{b} = \frac{a/d}{b/d} \quad (1.142)$$

■ Eksempel 1.27 Forkorting av brøker:

$$\frac{10}{6} = \frac{10/2}{6/2} = \frac{5}{3} \quad \text{siden 2 er felles divisor} \quad (1.143)$$

$$\frac{18}{27} = \frac{18/9}{27/9} = \frac{2}{3} \quad \text{siden 9 er felles divisor} \quad (1.144)$$

$$\frac{24}{13} \quad \text{ingen felles divisor} \quad (1.145)$$

■

Det **motsatte** av å forkorte en brøk er å **utvide** en brøk. Å utvide en brøk er mye enklere enn å forkorte en brøk siden vi kan multiplisere teller og nevner med et samme heltall, dvs. trenger ikke å finne en felles divisor.

Setning 1.4.2 — Utvidelse av brøk

En brøk $\frac{a}{b}$ **utvides** ved å multiplisere teller og nevner med et samme heltall d :

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad (1.146)$$

■ Eksempel 1.28 Utvidelse av brøker:

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{10}{6} \quad (1.147)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9} = \frac{18}{27} \quad (1.148)$$

$$\frac{24}{13} = \frac{24 \cdot 3}{13 \cdot 3} = \frac{72}{39} \quad (1.149)$$

■

1.4.2 Algebraiske operasjoner: +, ·, – og /

De vanlige algebraiske operasjonene +, ·, – og / er også definert for brøker.

Definisjon 1.4.3 — Algebraiske operasjoner: + og –

La $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ være to vilkårlige brøker.

Addisjon er definert som:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (1.150)$$

Subtraksjon er definert som:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \quad (1.151)$$

K Leddet bd i nevnerne i lign.(1.150) og (1.151) kalles en **fellesnevner** til $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$.

K I lign.(1.150) og (1.151), dersom nevnerne er like, dvs. $b = d$, kan vi slå sammen nevnerne og addere/subtrahere tellerne:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{og} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \quad (1.152)$$

K For ⁵

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \quad (1.153)$$

er bdf en **fellesnevner**, så vi utvider brøkene slik at alle brøkene har bdf i nevneren:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a \, df}{b \, df} + \frac{c \, bf}{d \, bf} + \frac{e \, bd}{f \, bd} = \frac{adf + cbf + abd}{bdf} \quad (1.154)$$

⁵ Når vi skal addere/subtrahere flere enn to brøker, må vi finne **fellesnevneren** mellom alle brøkene. En måte å finne fellesnevner på er å multiplisere alle nevnerne sammen. Etter at brøkene er slått sammen, bør vi sjekke om brøken kan forkortes.

Har vi funnet en fellesnevner, utvider vi brøkene slik at alle brøkene har samme nevner og dermed kan vi bruke lign.(1.152).

■ **Eksempel 1.29** Addisjon og subtraksjon av **to** brøker:

$$1) \quad \frac{4}{7} + \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 7}{7 \cdot 2} = \frac{8 + 35}{14} = \frac{43}{14} \quad (1.155)$$

$$2) \quad \frac{4}{7} - \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 2 - 5 \cdot 7}{7 \cdot 2} = \frac{8 - 35}{14} = -\frac{27}{14} \quad (1.156)$$

$$3) \quad \frac{4}{7} + \frac{11}{7} = \frac{4 + 11}{7} = \frac{15}{7} \quad (1.157)$$

$$4) \quad \frac{4}{7} - \frac{11}{7} = \frac{4 - 11}{7} = \frac{-7}{7} = -1 \quad (1.158)$$

$$5) \quad \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2 + 3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad (5 \text{ er felles divisor}) \quad (1.159)$$

$$6) \quad 2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{1} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2} \quad (1.160)$$

■

■ **Eksempel 1.30** Addisjon og subtraksjon av **tre** brøker:

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 4}{6 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 6 \cdot 4}{2 \cdot 6 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 6 \cdot 2}{4 \cdot 6 \cdot 2} \quad (6 \cdot 2 \cdot 4 = 48 \text{ er fellesnevner}) \quad (1.161)$$

$$= \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 24}{2 \cdot 24} + \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} \quad (1.162)$$

$$= \frac{40}{48} - \frac{24}{48} + \frac{36}{48} \quad (1.163)$$

$$= \frac{40 - 24 + 36}{48} \quad (1.164)$$

$$= \frac{52}{48} = \frac{13}{12} \cdot \frac{4}{4} \quad (4 \text{ er felles divisor}) \quad (1.165)$$

$$= \frac{13}{12} \quad (1.166)$$

■

K I eksempel lign.(1.161) brukte vi 48 som **fellesnevner** siden $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$. Men dersom det finnes en **mindre** fellesnevner, vil det være enklere å bruke denne. I dette tilfellet er også 12 en fellesnevner, siden 6, 2 og 4 er alle divisorer i 12:

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \frac{6}{6} + \frac{3}{4} \frac{3}{3} \quad (\text{bruker 12 som fellesnevner}) \quad (1.167)$$

$$= \frac{10}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} \quad (1.168)$$

$$= \frac{10 - 6 + 9}{12} \quad (1.169)$$

$$= \frac{13}{12} \quad (1.170)$$

Som vi ser brukter vi nå mange færre steg enn i eksempel 1.30.

■ **Eksempel 1.31** Brøkregning med **symboler** istedet for tall løses som om symbolene *var* tall:

$$\frac{1}{3ab} - \frac{a}{6b} + \frac{a}{9b} = \frac{1}{3ab} \frac{6}{6} - \frac{a}{6b} \frac{3a}{3a} + \frac{a}{9b} \frac{2a}{2a} \quad (18ab \text{ fellesnevner}) \quad (1.171)$$

$$= \frac{6}{18ab} - \frac{3a^2}{18ab} + \frac{2a^2}{18ab} \quad (1.172)$$

$$= \frac{6 - 3a^2 + 2a^2}{18ab} \quad (1.173)$$

$$= \frac{6 - a^2}{18ab} \quad (1.174)$$

■

Definisjon 1.4.4 — Algebraiske operasjoner: $\cdot$ og $/$

La $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ være to vilkårlige brøker.

Multiplikasjon er definert som:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (1.175)$$

Divisjon er definert som:

$$\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad (1.176)$$

K Divisjon av to brøker kan skrives på de alternative formene:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad \text{eller} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d}. \quad (1.177)$$

K Å multiplisere en brøk $\frac{a}{b}$ med et heltall c er egentlig multiplikasjon mellom to brøker:

$$c \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}, \quad (1.178)$$

hvor vi har brukt at $c = \frac{c}{1}$.

■ **Eksempel 1.32** Multiplikasjon og divisjon av to brøker:

$$1) \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21} \quad (1.179)$$

$$2) \quad \frac{1}{5} : \frac{4}{15} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{1 \cdot 15}{5 \cdot 4} = \frac{15}{20} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{4 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{4} \quad (5 \text{ felles divisor}) \quad (1.180)$$

$$3) \quad 2\frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{7} = \frac{8}{7} \quad (1.181)$$

$$4) \quad \frac{a}{b^2} \cdot \frac{3b}{4} = \frac{a \cdot 3b}{b^2 \cdot 4} = \frac{3ab}{4b^2} = \frac{3a \cdot \cancel{b}}{4b \cdot \cancel{b}} = \frac{3a}{4b} \quad (b \text{ felles divisor}) \quad (1.182)$$

■

Huskeregel:

$$\text{brøk} = \frac{\text{teller}}{\text{nevner}} = \frac{\text{teller} \cdot 7}{\text{nevner} \cdot 7} = \frac{\text{teller} (x+3)}{\text{nevner} (x+3)} = \frac{\text{teller} (a-2)}{\text{nevner} (a-2)} \quad (1.183)$$

Regelen er altså: Det er lov å multiplisere og dividere med **samme tall** i en brøk.

Huskeregelen ovenfor kan formuleres på en annen måte:

Tallet 1 kan man multiplisere og dividere med som man vil, uten at det endrer på det opprinnelige uttrykket.

$$1 = \frac{7}{7} = \frac{x+3}{x+3} = \frac{a-2}{a-2} \quad (1.184)$$

1.5 Prosent

1.5.1 Prosentregning

En brøk $\frac{a}{b}$ kan i svært mange sammenhenger tolkes som en *andel av helheten*, hvor telleren a tolkes som andelen mens nevneren b tolkes som helheten.

Hvis vi f.eks. kaster en terning 10 ganger hvor vi fikk 3 enere, sier vi at vi *fikk 3 av 10 enere*. Andelen lere er da 3 av 10 kast.

Folk flest har dårlig intuisjon når det gjelder hvor stor en brøk er. Ta f.eks. brøkene $\frac{5}{6}$ og $\frac{21}{24}$. Kan du umiddelbart si hvilke av disse to brøkene er størst? For å enklere operere med andeler innføres derfor begrepet *prosent*, som representerer *andelen ift. 100 %*.⁶

Definisjon 1.5.1 — Prosent

Andelen av a i forhold til b kan uttrykkes i prosent, dvs. “*av hundre prosent*”:

$$\frac{a}{b} \cdot 100 \% \quad (1.185)$$

■ Eksempel 1.33 — Prosentregning

$$25 \% = \frac{25}{100} = \frac{\cancel{25}}{4 \cdot \cancel{25}} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad (1.186)$$

$$80 \cdot 25 \% = 80 \cdot \frac{1}{4} = \frac{80 \cdot 1}{4} = \frac{20 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} = 20 \quad (1.187)$$

$$25 \% \cdot 25 \% = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16} = 0.0625 \quad (1.188)$$

■

⁶Hva er promille ‰?

■ Eksempel 1.34 — rente

Anta at du har kapitalen

$$K = 100\,000 \text{ NOK} \quad (1.189)$$

i banken. Renten på kapitalen er

$$r = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05 \quad (1.190)$$

per år.

Hva er den totale kapitalen etter ett år (dvs. etter en rentetermin)? ⁷



Figur 1.10: Kapital.

Løsning:

Ny kapital etter ett år er den kapitalen du setter i banken + renten du får for å ha pengene i banken det året:

$$\text{ny kapital} = \text{kapital} + \text{rente} \quad (1.191)$$

som, på matematisk form, kan skrives:

$$K_1 = K + \text{rente} \quad (1.192)$$

Det er av kapitalen K (= 100 000 NOK) man får rente av. Dermed er renten:

$$\text{rente} = K r \quad (1.193)$$

⁷En rentetermin er ikke alltid, men veldig ofte, ett år.

Dette innsatt i lign.(1.192):

$$K_1 = K + Kr \quad (1.194)$$

$$K_1 = K(1 + r) \quad (\text{faktorisering}) \quad (1.195)$$

Til slutt setter vi inn tall:

$$K_1 = K(1 + r) = 100\,000(1 + 0.05) \text{ NOK} = 105\,000 \text{ NOK} \quad (1.196)$$

som altså er total kapital etter en rentetermin.

■

■ Eksempel 1.35 — rente

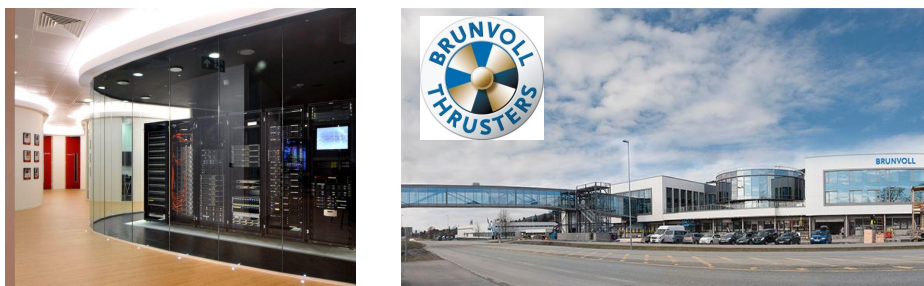
Brunvoll AS er en leverandør av thrustersystemer for manøvrering av skip.

Anta at Bruvoll ønsker å kjøpe en ekstra server til sin allerede store serverpark. Serveren de har bestemt seg for å kjøpe koster $K = 68\,200$ NOK.

MVA er altså inkludert i prisen $K = 68\,200$ NOK.

Anta at MVA er på $p = 25\% = \frac{25}{100} = 0.25$.

- a) Hvor mye koster serveren uten moms?
- b) Hvor mye betaler du i merverdiavgift **MVA**?



Figur 1.11: Serverpark.

Løsning:

- a) La

$$x = \text{prisen på serveren uten MVA} \quad (1.197)$$

Siden MVA er inkludert i $K = 68\,200$ NOK så er:

$$K = x + \underbrace{\text{MVA}}_{xp} \quad (1.198)$$

Det er beløpet x vi betaler merverdiavgift av, dvs. $\text{MVA} = xp$. Dette innsatt i lign.(1.198) gir:

$$K = x + xp \quad (1.199)$$

$$K = (1 + p)x \quad (1.200)$$

hvor vi kan løse ut x , dvs. prisen på serveren uten MVA:

$$x = \frac{K}{1+p} = \frac{68\,200}{1+0.25} \text{ NOK} = 54\,560 \text{ NOK} \quad (1.201)$$

b) MVA blir da, ved å bruke lign.(1.198):

$$\text{MVA} = K - x = (68\,200 - 54\,560) \text{ NOK} = 13\,640 \text{ NOK} \quad (1.202)$$

■

1.5.2 Prosentvis endring

I dynamiske prosesser hvor størrelser stadig endrer seg over tiden, er man ofte interessert i den prosentvise *økningen* eller *reduksjonen* av størrelsene.

Definisjon 1.5.2 — %-vis endring

Når et tall endres fra a til b så er den %-vise endringen i forhold til a :

$$\text{\%-vis endring} = \frac{b - a}{a} \cdot 100 \% \quad (1.203)$$

- (K) Dersom endringen i lign.(1.203) er *positiv* har vi en prosentvis økning. Dersom endringen er *negativ* har vi en prosentvis reduksjon.

- (K) Lign.(1.203) kan tolkes som:

$$\text{\%-vis endring} = \frac{\text{etter} - \text{før}}{\text{før}} \cdot 100\% \quad (1.204)$$

$$\text{Percent Change} = \frac{\text{New Value} - \text{Old Value}}{\text{Old Value}}$$



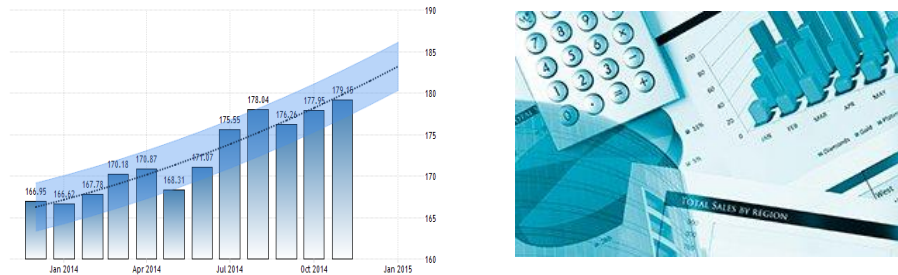
Figur 1.12: %-vis endring.

■ Eksempel 1.36 — %-vis endring

I *SØK100 Makroøkonomi* lærer man om *konsumprisindeksen KPI*.

Anta at $KPI_{10} = 150$ i år 10 og $KPI_{11} = 165$ året etter.

Hvor mye er den %-vise endringen?



Figur 1.13: Konsumprisindeks.

Løsning:

%-vis endring fra $KPI_{10} = 150$ og $KPI_{11} = 165$:

$$\% \text{-vis endring} = \frac{KPI_{11} - KPI_{10}}{KPI_{10}} \cdot 100 \% = \frac{165 - 150}{150} \cdot 100 = 10 \% \quad (1.205)$$

■

1.6 Potenser

Potenser oppstår i naturen når en prosess gjentar seg over tid på en *multiplikativ* måte. Et klassisk eksempel er *slektstreet* vårt. Anta du står på toppen av slektstreet og ønsker å finne navnet på alle forfedrene dine.

Etter n generasjoner, hvor mange forfedre a_n finnes i slektstreet?

Vi innser at for hver generasjon, *fordobles* antall forfedre, siden man alltid har *to* foreldre, se figur 1.14. Anta at du representerer 0te generasjon. Vi har da følgende rekursive prosess: ⁸

$$a_1 = 2 = 2^1 \quad (1. \text{ generasjon}) \quad (1.206)$$

$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 2 = 2^2 \quad (2. \text{ generasjon}) \quad (1.207)$$

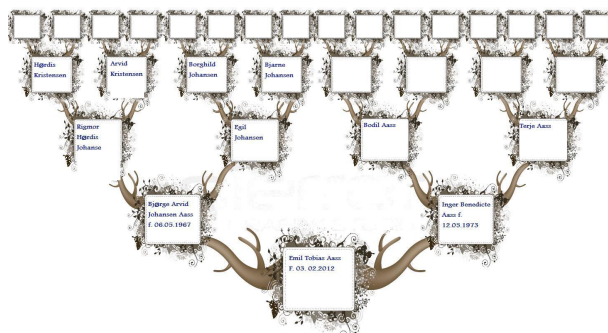
$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \quad (3. \text{ generasjon}) \quad (1.208)$$

$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \quad (4. \text{ generasjon}) \quad (1.209)$$

$$\vdots \quad (1.210)$$

$$a_n = 2a_{n-1} = 2 \cdot \overbrace{2 \cdots 2}^{n-1 \text{ ganger}} = 2^n \quad (n. \text{ generasjon}) \quad (1.211)$$

Tallet 2^n er en enkel skrivemåte for tallet 2 multiplisert med seg selv n ganger.



Figur 1.14: Slekstreet.

⁸ *Rekursiv prosess* = en prosess som gjentar seg selv.

1.6.1 Potenser

Potenser er definert rekursivt, dvs. som en gjentakende prosess.

Definisjon 1.6.1 — Potenser

La a være et reellt tall og n være et naturlige tall. Da er n 'te potens av a definert som:

$$a^0 = 1 \quad (1.212)$$

$$a^n = aa^{n-1} \quad n \geq 1. \quad (1.213)$$

(K) Tallet a kalles grunntallet og n kalles eksponenten.
I eksempelet om slektstreet vårt, var grunntallet 2 og eksponenten representerte generasjonen.

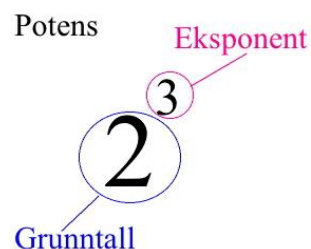
(K) Fra definisjonen følger at:

$$a^n = \underbrace{aaa \dots a}_{= n \text{ faktorer}}. \quad (1.214)$$

(K) Potenser kan *utvides* til å tillate at eksponenten er både en brøk $\frac{n}{m}$ og et reellt tall x :

$$a^{\frac{n}{m}} \quad (\text{avsnitt 1.7.4}) \quad (1.215)$$

$$a^x \quad (\text{avsnitt 2.7.3}) \quad (1.216)$$



Figur 1.15: Potens: grunntall og eksponent.

1.6.2 Potensregler

Vi har mange potensregler som er helt essensielle for regning med potenser. Felles for alle reglene er at basetallet er gitt.

Setning 1.6.1 — Potensregler

La a og b være reelle tall, og la n og m være heltall. Da gjelder:

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (1.217)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0 \quad (1.218)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m-n} \quad (1.219)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (1.220)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (1.221)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0 \quad (1.222)$$

 Lign.(1.218) kalles ofte "**kjelleromskrivning**", siden eksponenten flyttes ned i "kjelleren".

■ Eksempel 1.37 Potensregler:

$$1) \quad 3^2 3^5 = 3^{2+5} = 3^7 \quad (1.223)$$

$$2) \quad (2^{-3})^7 = 2^{-3 \cdot 7} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}} \quad (\text{kjelleromskrivning}) \quad (1.224)$$

$$3) \quad \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} \quad (1.225)$$

■

K Her er en klassisk kilde til forvirring når det gjelder potenser og *fortegn*:

$$-5^2 = -5 \cdot 5 = -25 \quad (1.226)$$

$$(-5)^2 = (-5)(-5) = 25 \quad (1.227)$$

K Legg merke til at i setning 1.6.1 har vi *ingen* regler for *addisjon* av to potenser. Det er fordi addisjon av to potenser ikke gir en ny potens:

$$a^n + a^n = 2a^n. \quad (1.228)$$

Det er feil å skrive:

$$\cancel{a^n + a^n} = a^{2n}. \quad \text{GALT} \quad (1.229)$$

K Her er også noen kilder til forvirring: ⁹

Multiplikasjon:

$$aa = a^2 \quad (1.232)$$

Addisjon:

$$a + a = 2a \quad (1.233)$$

Subtraksjon:

$$-a - a = -2a \quad (1.234)$$

⁹Husk at:

$$1a + 1a = (1+1)a = 2a \quad (1.230)$$

$$-1a - 1a = -(1+1)a = -2a \quad (1.231)$$

■ **Eksempel 1.38** Stryking/kansellering KUN ved **multiplikasjon**:

$$\frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 \quad (= 343) \quad (1.235)$$

$$\frac{7+7+7+7+7}{7+7} = \frac{5 \cdot \cancel{7}}{2 \cdot \cancel{7}} = \frac{5}{2} \quad (= 2.5) \quad (1.236)$$

Konklusjon er at man kan **kun** forkorte (stryke) i en brøk når man har **multiplikasjon** i både teller og nevner.

■

1.6.3 Cobb-Douglas produktfunksjon

I *SØK200 Mikroøkonomi* lærer man blant annet om **Cobb-Douglas** nyttefunksjon.

Det er en funksjon som beskriver sammenhengen mellom hvor mye *nytte* u man får når man bruker to *goder* x_1 og x_2 , f.eks. kapital og arbeidskraft hhv.¹⁰

Definisjon 1.6.2 — Cobb-Douglas produktfunksjon

En Cobb-Douglas produktfunksjon er en funksjon på formen: ^a

$$u = ax_1^\alpha x_2^\beta \quad (1.237)$$

hvor

$$u = \text{nytte} \quad (1.238)$$

$$x_1 = \text{kvantum gode 1} \quad (1.239)$$

$$x_2 = \text{kvantum gode 2} \quad (1.240)$$

$$a = \text{konstant} \quad (1.241)$$

$$\alpha = \text{konstant (potens)} \quad (1.242)$$

$$\beta = \text{konstant (potens)} \quad (1.243)$$

^aProduktfunksjonen kalles også nyttefunksjon.

Nytten

$$u = 3.2x_1^{1.5}x_2^3 \quad (1.244)$$

er et eksempel på notasjonen som vanligvis brukes, nemlig:

$$x_{\text{navn}}^{\text{eksponent}} \quad (1.245)$$

- Posisjonen øverst til høyre er forbeholdt **eksponenten**.
- Posisjonen nederst til høyre er brukes vanligvis til navn eller indeks.

Med eksponent lik 3 blir det

$$x_{\text{navn}}^3 = x_{\text{navn}} \cdot x_{\text{navn}} \cdot x_{\text{navn}} = x_2 x_2 x_2 \quad (1.246)$$

mens ”navn” er bare et navn og kan være hva som helst, f.eks. 2 slik som i lign.(1.246)

¹⁰Funksjoner av flere variabler skal vi lære mer om i kapittel 3.

■ **Eksempel 1.39** Noen eksempler på Cobb-Douglas funksjoner:

$$1) \quad u = x_1 x_2, \quad (\text{"enkel Cobb-Douglas"}) \quad (1.247)$$

$$2) \quad u = 3.2 x_1^{1.5} x_2^3 \quad (1.248)$$

$$3) \quad u = \frac{2}{15} x_1^2 x_2^{0.5} \quad (1.249)$$

■

1.6.4 Standardform

Potenser brukes også til å skrive tall på såkalt *standardform*.

Definisjon 1.6.3 — Standardform

Et reelt tall b er skrevet på standardform dersom det er skrevet på formen:

$$b = a \cdot 10^n \quad (1.250)$$

hvor $n \in \mathbb{Z}$ og $a \in \langle -10, 10 \rangle$.

■ Eksempel 1.40 Standardform:

$$1\,000 = 10^3 \quad (1.251)$$

$$1\,000\,000 = 10^6 \quad (\text{million}) \quad (1.252)$$

$$0,001 = 10^{-3} \quad (\text{milli}) \quad (1.253)$$

$$0,000\,000\,063 = 6,3 \cdot 10^{-8} \quad (1.254)$$

$$452\,000\,000\,000 = 4,52 \cdot 10^{11} \quad (1.255)$$

■

1.6.5 Prefikser

Ofte forekommende 10-potensene har fått egne navn som kalles prefikser. Tabell 1.2 viser de vanligste prefiksene.

10-potens	Prefiks	Symbol	Navn	Tallverdi
10^9	giga	G	milliard	1 000 000 000
10^6	mega	M	million	1 000 000
10^3	kilo	k	tusen	1 000
10^2	hekto	h	hundre	100
10^1	deka	h	ti	10
10^{-1}	desi	d	tidel	0.1
10^{-2}	centi	c	hundredel	0.01
10^{-3}	milli	m	tusendel	0.001
10^{-6}	mikro	μ	milliondel	0.000 001
10^{-9}	nano	n	milliarddel	0.000 000 001

Tabell 1.2: De mest vanlige prefiksene.

■ Eksempel 1.41 Prefiks:

$$2\,300 \text{ meter} = 2.3 \text{ kilometer} \quad (1.256)$$

$$4\,690 \text{ gram} = 4.69 \text{ kilogram} \quad (1.257)$$

$$30\,000\,000 \text{ byte} = 30 \text{ megabyte} \quad (1.258)$$

■

1.7 Kvadratrot

1.7.1 Kvadratrot

De fleste kjenner litt til *kvadratroten* $\sqrt{\cdots}$ av et tall. F.eks. har vi at

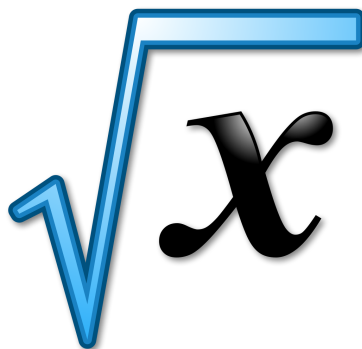
$$\sqrt{25} = 5 \quad (1.259)$$

$$\sqrt{2} = 1.414213562\dots \quad (1.260)$$

Men hva *er* egentlig kvadratrot og hvorfor er kvadratrot så viktig?

I *geometri* dukker kvadratroten helt naturlig opp i svaret på spørsmålene:

1. Hvor store må sidene være i et kvadrat hvis areal er kjent?
2. Hva er *avstanden* mellom to punkter i planet?



Figur 1.16: Kvadratrot.

Svar på spørsmål 1:

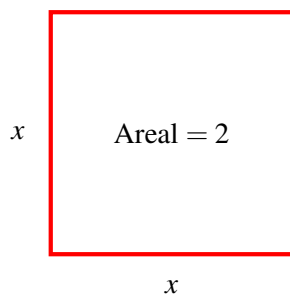
La x være lengden til de ukjente sidene i kvadrat med areal lik 2, se figur 1.17. Vi vet at arealet er lik produktet av to av sidene i et rektangel:

$$\text{areal} = x^2 = 2 \quad (1.261)$$

Siden **areal** er noe vi **vet finnes**, må det **finnes** et reelt tall x som løser denne likningen. Dette tallet kaller vi *kvadratroten* av 2 og betegnes

$$x = \sqrt{2} \quad (1.262)$$

som da er lengden på sidene i kvadratet.



Figur 1.17: Lengdene x .

Svar på spørsmål 2:

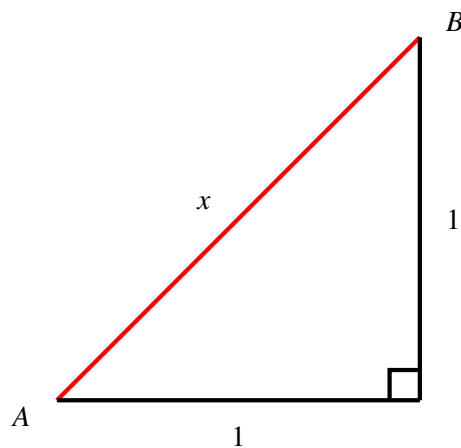
Anta du står i et punkt og lur på *avstanden* x mellom punktene A og B , se figur 1.18. Pythagoras ligning for rettvinklede trekanter gir:

$$x^2 = \underbrace{1^2 + 1^2}_{= 2} = 2 \quad (1.263)$$

Siden vi vet at denne *avstanden finnes*, må det *finnes* et reelt tall x som løser denne ligningen. Dette tallet kaller vi *kvadratroten* av 2 og betegnes

$$x = \sqrt{2} \quad (1.264)$$

som da er avstanden mellom punktene.



Figur 1.18: Avstanden x .

Som vi skjønner er definisjonen av kvadratroten av et tall a svært knyttet mot ligningen $x^2 = a$.

Definisjon 1.7.1 — Kvadratrot

La $a \geq 0$ være et reelt tall. Kvadratrot $\sqrt{a}$ av tallet a er det reelle tallet som løser ligningen

$$x^2 = a \quad (1.265)$$

dvs. $x = \sqrt{a}$.

K Legg merke til at man kan **ikke** ta kvadratroten av et **negativt** tall. ¹¹

K Vi skrev innledningsvis at $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$. Dette er en **tilnærming** til $\sqrt{2}$, siden kvadratroten ikke kan skrives som en brøk. Hvordan regner vi ut en tilnærming av kvadratroten av et tall? Vi bruker to kjente funksjoner kalt eksponentialfunksjonen og logaritmefunksjonen. Denne sammenhengen ser vi nærmere på i kapittel 2.7.3.

■ **Eksempel 1.42** Hva er $\sqrt{9}$?

Løsning:

La oss følge definisjonen og se på ligningen

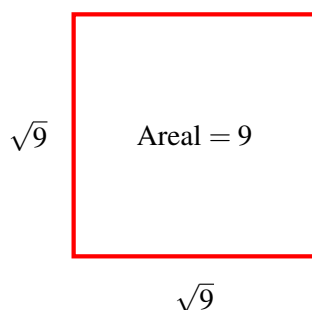
$$x^2 = 9 \quad (1.266)$$

Vi kan tolke x som lengden på sidene i et kvadrat hvis areal er 9, se figur 1.19. Siden

$$3 \cdot 3 = 3^2 = 9 \quad (1.267)$$

konkluderer vi at $x = 3$, dvs.

$$\sqrt{9} = 3 \quad (1.268)$$



Figur 1.19: Lengdene x .

¹¹ Komplekse tall er ikke pensum i MAT100.

■ **Eksempel 1.43** Noen kvadratrøtter:

$$\sqrt{16} = 4 \qquad (\text{siden } 4^2 = 16) \qquad (1.269)$$

$$\sqrt{144} = 12 \qquad (\text{siden } 12^2 = 144) \qquad (1.270)$$

$$\sqrt{5} = 2.236... \qquad (\text{siden } (2.236...) ^2 = 5) \qquad (1.271)$$

$$\sqrt{-2} = \text{ingen løsning} \qquad (\text{kompleks tall}) \qquad (1.272)$$

■

1.7.2 Regneregler for kvadratrot

Det er en tett sammenheng mellom operasjonene $\sqrt{\cdots}$ og kvadratet $(\cdots)^2$.

Setning 1.7.1 — kvadratrot og kvadrat er inverse operasjoner

La $a \geq 0$ være et reelt tall. Da gjelder:

$$\sqrt{a^2} = a \qquad (1.273)$$

$$\sqrt{a}^2 = a \qquad (1.274)$$

(K) Lign.(1.273) sier at dersom vi tar kvadratroten et kvadrat, så får vi tallet tilbake.

(K) Lign.(1.274) sier at dersom vi tar kvadratet av kvadratroten, så får vi tallet tilbake.

(K) To operasjoner som opphever hverandre, kalles inverse operasjoner.

■ **Eksempel 1.44** Kvadratrot:

$$\sqrt{5^2} = 5 \qquad (1.275)$$

$$\sqrt{5}^2 = 5 \qquad (1.276)$$

■

Setning 1.7.2 — kvadratroter av produkt og brøk

La $a \geq 0$ og $b > 0$ være et reelle tall. Da gjelder:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (1.277)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad b \neq 0 \quad (1.278)$$

K Vi husker fra avsnitt 1.6 at **potenser** oppfyller **samme type egenskap**:

$$(ab)^2 = a^2b^2 \quad (1.279)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, \quad (1.280)$$

nemlig at kvadratet av et produkt er lik produktet av kvadratene og kvadratet av en brøk er lik brøken av kvadratene.

Til slutt i dette avsnittet skal vi se at dette er ingen tilfeldighet.

K Kvadratet av en sum er **ikke** lik summen av kvadratene:

$$\cancel{\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (1.281)$$

Det samme gjelder for subtraksjon:

$$\cancel{\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}} \quad (1.282)$$

Eksempel 1.45 — kvadratroter av produkt og brøk

$$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9}\sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12 \quad (1.283)$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} \quad (1.284)$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad (1.285)$$

■

■ **Eksempel 1.46** Forenkle uttrykkene så mye som mulig.

Fjerner kvadratroten i nevneren ved å **utvide** en brøken:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \stackrel{\text{utvid}}{=} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (1.286)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \stackrel{\text{utvid}}{=} \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{6} - 2 \quad (1.287)$$

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \stackrel{\text{utvid}}{=} \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3} \quad (1.288)$$

hvor konjugatsetningen, dvs. lign.(1.125), har blitt brukt i de to siste ligningene.

■

1.7.3 n 'te kvadratrot

Kvadratrot kan **generaliseres** fra å være løsningen av ligningen

$$x^2 = a, \quad (1.289)$$

til løsningen av ligningen

$$x^n = a. \quad (1.290)$$

Både definisjon og regneregler for n 'te kvadratrot er bare direkte utvidelser av formelene for kvadratrot.

Definisjon 1.7.2 — n 'te kvadratrot

La $a \geq 0$ være et reelt tall. Den n 'te kvadratrot $\sqrt[n]{a}$ av tallet a er det reelle tallet som løser ligningen

$$x^n = a \quad (1.291)$$

dvs. $x = \sqrt[n]{a}$.

 Hvis vi setter $n = 2$, får vi vanlig kvadratrot: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$. Vi kaller derfor $\sqrt[n]{\cdots}$ **generalisert** kvadratrot.

De samme regnereglene som for kvadratrot $\sqrt{\cdots}$ er gjeldende for n 'te kvadratrot $\sqrt[n]{\cdots}$:

Setning 1.7.3 — n 'te kvadratrot og n 'te potens er inverse operasjoner

La $a \geq 0$ være et reelt tall. Da gjelder:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad (1.292)$$

$$\sqrt[n]{a}^n = a \quad (1.293)$$

Vi har tilsvarende formler for n 'te kvadratrot av et produkt og en brøk.

Setning 1.7.4 — n 'te kvadratroten av produkt og brøk

La $a \geq 0$ og $b > 0$ være et reelle tall. Da gjelder:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad (1.294)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0 \quad (1.295)$$

Eksempel 1.47 — n 'te kvadratroten og n 'te potens er inverse operasjoner

Regn ut:

$$\sqrt[4]{8.1 \cdot 10^5} = \sqrt[4]{81 \cdot 10^4} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 10^4} = \sqrt[4]{3^4} \sqrt[4]{10^4} = 3 \cdot 10 = 30 \quad (1.296)$$

$$\sqrt[4]{\frac{x^8}{625}} = \sqrt[4]{\frac{(x^2)^4}{5^4}} = \frac{\sqrt[4]{(x^2)^4}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{x^2}{5} \quad (1.297)$$

■

■ Eksempel 1.48 — n 'te kvadratrott, potenser

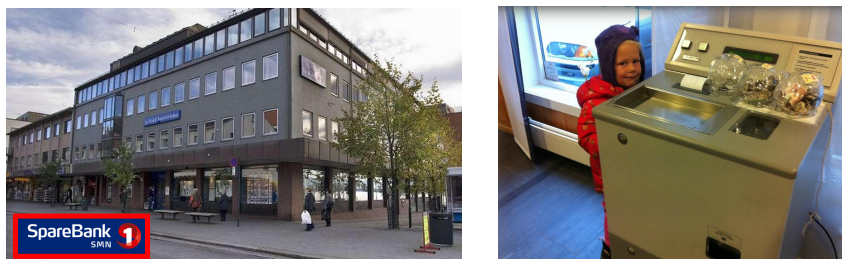
Senere i dette kurset skal vi lære om hvorfor renteformelen for rentes rente er på følgende form:¹²

$$K_n = K_0(1+r)^n \quad (1.298)$$

Kapitalen $K_0 = 100\,000$ NOK plasseres i år null i banken.

Etter 4 år er den totale kapitalen - rente inkludert - vokst til $K_4 = 125\,000$ NOK.

Finn renten r .



Figur 1.20: Ole setter penger i banken.

Løsning:

Med renten r etter 4 år skal man få $K_4 = 125\,000$:

$$K_4 = K_0 \overbrace{(1+r)^4}^{\text{vekstfaktor}} \quad \left| \cdot \frac{1}{K_0} \right. \quad (1.299)$$

Løser med hensyn på r alene.

¹²I denne oppgaven skal vi bare ta formelen i lign.(1.298) for gitt, og regne på den via de regnereglene som vi har lært om så langt.

Regn først med bokstaver så lange så mulig. Sett inn tall til slutt.

$$K_4 = K_0 \overbrace{(1+r)^4}^{\text{vekstfaktor}} \quad \bigg| \cdot \frac{1}{K_0} \quad (1.300)$$

$$\frac{K_4}{K_0} = (1+r)^4 \quad (1.301)$$

$$\sqrt[4]{\frac{K_4}{K_0}} = \sqrt[4]{(1+r)^4} \quad \text{ta 4. kvadratroten} \quad (1.302)$$

$$\sqrt[4]{\frac{K_4}{K_0}} = (1+r)^1 \quad (1.303)$$

$$1+r = \sqrt[4]{\frac{K_4}{K_0}} \quad (1.304)$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{K_4}{K_0}} - 1 \quad (1.305)$$

Til slutt setter vi inn tall:

$$r = \sqrt[4]{\frac{K_4}{K_0}} - 1 \quad (1.306)$$

$$= \sqrt[4]{\frac{125\,000 \text{ NOK}}{100\,000 \text{ NOK}}} - 1 = 0.0574 \quad (1.307)$$

Dersom renten er $r = 5.74 \%$ så øker kapitalen fra 100 000 NOK til 125 000 NOK i løpet av 4 år.

■

1.7.4 Potenser med brøk i eksponenten

Vi har tidligere nevnt i avsnitt 1.6 at det er mulig å *utvide* potenser til å omfatte *brøker i eksponenten*. Denne utvidelsen sier kort sagt at uttrykk som

$$a^{\frac{m}{n}} \tag{1.308}$$

egentlig er en n 'te kvadratroter av a opphøyd i m .

Definisjon 1.7.3 La $a \geq 0$ være et reelt tall. La $\frac{m}{n}$ være en vilkårlig brøk. *Potensen*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{1.309}$$

er veldefinert.

- K Lign.(1.309) innebærer at *kvadratrøtter* kan alltid *omskrives* til *potenser* og vice versa.
- K Dersom ikke det står eksplisitt hvilken form man skal bruke, står man fritt til å velge etter *smak og behag*. Stort sett behersker man potenser bedre enn kvadratrøtter.
- K Dersom vi setter $m = 1$ i lign.(1.309), får vi den litt enklere sammenhengen

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \tag{1.310}$$

og hvis $n = 2$ er vi tilbake til den vanlige kvadratoten:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}. \tag{1.311}$$

- K Alle regnereglene i delavsnitt 1.6.2 for vanlige potenser er *også oppfylt* for potenser med brøk i eksponenten.
- K Legg merke til at vi kan i lign.(1.309) sette m *utenfor* kvadratrottegnet:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m \tag{1.312}$$

■ **Eksempel 1.49 — potenser med brøk i eksponenten**

Skriv uttrykkene som en potens og regn ut ved hjelp av potensreglene. Skriv svaret til slutt som en kvadratrots.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} \quad (1.313)$$

$$= 2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2}} = 2^{\frac{3}{6} + \frac{4}{6}} = 2^{\frac{7}{6}} = 2^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{2^7} \quad (1.314)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}^2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \quad (1.315)$$

$$= 2^{-\frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{2}} = 2^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} + 1 \cdot \frac{6}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3}} \quad (1.316)$$

$$= 2^{-\frac{4}{6} + \frac{6}{6} + \frac{3}{6}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} \quad (1.317)$$

■

■ Eksempel 1.50 — potenser med brøk i eksponenten

Vi kan løse eksempel 1.48 alternativt ved hjelp av potenser istedet for kvadratrott. Renteformelen er gitt ved

$$K_n = K_0(1+r)^n \quad (1.318)$$

hvor

$$K_0 = 100\,000 \text{ NOK} \quad (\text{kapital etter 0 år, dvs. startkapital}) \quad (1.319)$$

$$K_4 = 125\,000 \text{ NOK} \quad (\text{kapital etter 4 år}) \quad (1.320)$$

Oppgaven var å finne renten r . Vi brukte tidligere kvadratrott, men nå skal vi alternativt løse ligningen via **potenser**:



Figur 1.21: Ole setter penger i banken.

Løsning:

Med renten r etter 4 år skal man få $K_4 = 125\,000$:

$$K_4 = K_0 \overbrace{(1+r)^4}^{\text{vekstfaktor}} \quad \left| \cdot \frac{1}{K_0} \right. \quad (1.321)$$

Løser med hensyn på r alene.

Regn først med bokstaver så lange så mulig. Sett inn tall til slutt.

$$K_4 = K_0 \overbrace{(1+r)^4}^{\text{vekstfaktor}} \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{K_0} \quad (1.322)$$

$$\frac{K_4}{K_0} = (1+r)^4 \quad (1.323)$$

$$\left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} = \left((1+r)^4\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{som er det samme som å opphøye alt i } \frac{1}{4} \text{ potens} \quad (1.324)$$

$$\left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} = (1+r)^{4 \cdot \frac{1}{4}} \quad (1.325)$$

$$\left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} = (1+r)^1 \quad (1.326)$$

$$1+r = \left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.327)$$

hvor lign.(1.327) er samme resultat som lign.(1.304).

Til slutt setter vi inn tall:

$$r = \left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \quad (1.328)$$

$$= \left(\frac{125\,000 \text{ NOK}}{100\,000 \text{ NOK}}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.0574 \quad (1.329)$$

Dersom renten er $r = 5.74 \%$ så øker kapitalen fra 100 000 NOK til 125 000 NOK i løpet av 4 år.

■

2. Ligninger og ulikheter

Make Math Fun!

$$x^2 + 3x = 8$$

2.1 Algebraiske uttrykk

Et algebraisk uttrykk er et uttrykk bygd opp av av:

1. *Konstanter*, dvs. heltall $\overbrace{\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots}^{\mathbb{Z}}$
2. *Parametre*, ofte symbolisert ved $a, b, c \dots$
3. *Variabler*, ofte symbolisert ved $x, y, z \dots$

og de algebraiske *operasjonene*:

+ addisjon,

– subtraksjon,

· multiplikasjon,

/ divisjon,

^ potenser,

√ kvadratrøtter.

■ Eksempel 2.1 — Algebraiske uttrykk

Her er noen eksempler på **algebraiske uttrykk**:

$$1) \quad ax^2 + bx + c \quad (2.1)$$

$$2) \quad \frac{3x^2 - 2xy + a}{y^3 - 3b} \quad (2.2)$$

$$3) \quad \sqrt{\frac{1 - x^4}{1 + ax^3}} \quad (2.3)$$

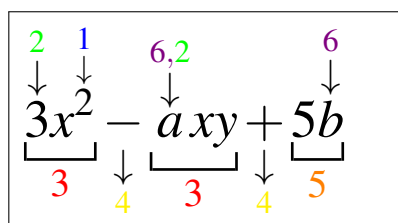
$$4) \quad \sqrt[3]{z^3 + 3b - x} \quad (2.4)$$

$$5) \quad (x_1 - c_1)(x_2 - c_2)(x_3 - c_3) \cdots (x_n - c_n) \quad (2.5)$$

$$6) \quad (z - 3)^{az^2} \quad (2.6)$$

■

K Algebra har en egen terminologi for å beskrive delene av et algebraisk uttrykk:



x, y - variabler

- 1 - eksponent
- 2 - koeffisient
- 3 - ledd
- 4 - operator
- 5 - konstantledd
- 6 - parameter

Legg merke til at en parameter også kan være en koeffisient. ¹

¹En koeffisient er konstanten som står foran en variabel.

 Ledd med **størst** eksponent er som regel skrevet til **venstre**:

$$x^{10} - 3x^5 + 2x^3 + x - 3 \quad (2.7)$$

 Andre **konvensjoner**:

$$1x = x \quad (\text{koeffisienten 1 fjernes}) \quad (2.8)$$

$$3x^1 = 3x \quad (\text{eksponenten 1 fjernes}) \quad (2.9)$$

$$2x^0 = 2 \quad (\text{noe opphøyd i 0te er alltid 1}) \quad (2.10)$$

2.1.1 Variabler, parametre og konstanter

Forskjellen mellom *variabler*, *parametre* og *konstanter* er ofte vanskelig å fange opp, men også svært viktig å forstå.

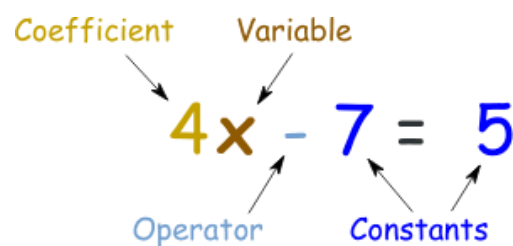
Tolkningen bak disse begrepene kommer fra *konteksten*, dvs. sammenhengen, som uttrykket stammer fra.²

Generelt har vi at:

Konstant: Representerer en fast størrelse som *ikke endrer* seg i den konteksten vi ser på.

Parameter: Representerer en *konstant* som vi *ikke kjenner*, men som er gitt i den konteksten vi ser på.

Variabel: Representerer en størrelse som kan *varierte* i den konteksten vi ser på. Svært ofte vil en variabel representerer en *beslutning* som vi må ta, hvor vi har flere alternativ.



Figur 2.1: Variabler og konstanter.

²Begrepet "*kontekst*" kommer fra det virkelige liv hvor alle størrelsene i et algebraisk uttrykk står for noe spesifikt.

■ Eksempel 2.2 — Kontekst

I det algebraiske uttrykket

$$\frac{1}{2}9.8x^2 \quad (2.11)$$

har vi én konstant 9.8 og én variabel x . Uten kontekst sier dette uttrykket oss svært lite.

Kontekst:

Anta vi holder en ball i ro i luft og deretter slipper den. La x stå for *tiden* som har gått i antall sekunder etter at vi slapp ballen. Uttrykket

$$\frac{1}{2}9.8x^2 \quad (2.12)$$

står da for avstanden ballen har falt etter x sekunder, hvor 9.8 er gravitasjonskonstanten på jorda.

Kontekst med parameter:

Anta vi står på en vilkårlig planet og slipper en ball. Uttrykket

$$\frac{1}{2}gx^2 \quad (2.13)$$

står da for avstanden ballen har falt etter x sekunder, hvor g er gravitasjonskonstanten på planeten. Parameteren g er fremdeles en konstant i denne konteksten, men verdien er avhengig av hvilken planet vi er på.



Figur 2.2: Ball faller mot bakken.

2.1.2 Forenkle algebraiske uttrykk

Det algebraiske uttrykket

$$5(2+x) + 3(5x+4) - (x^2)^2 \quad (2.14)$$

kan *reduseres* eller *forenkles* til uttrykket:

$$-x^4 + 20x + 22. \quad (2.15)$$

Vi kan *verifisere* at uttrykkene er like for en *gitt* verdi for x , f.eks. $x = 1$, ved å evaluere begge uttrykkene: ³

$$\begin{aligned} 5(2+x) + 3(5x+4) - (x^2)^2 &= 5(2+1) + 3(5 \cdot 1 + 4) - (1^2)^2 \\ &= 5 \cdot 3 + 3 \cdot 9 - 1 \\ &= 15 + 27 - 1 \\ &= 41 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} -x^4 + 20x + 22 &= -1^4 + 20 \cdot 1 + 22 \\ &= -1 + 20 + 22 \\ &= 41 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Hvilke av disse uttrykkene synes du var enklest å evaluere?

Uttrykket i lign. (2.15) kalles et forenklet uttrykk av lign.(2.14).

Men hvordan kan vi vite at uttrykkene er like for *alle* mulige verdier for x ?

Siden det er uendelig mange verdier x kan ta, kan vi ikke verifisere at uttrykkene er like for alle verdier av x , vi må utlede at uttrykkene er like.

³I lign.(2.16) og (2.17) viser vi at det uttrykkene er like for $x = 1$, ikke generelt.

Definisjon 2.1.1 — Utlede

Å **utlede** at en gitt matematisk formel er lik en annen matematisk formel, betyr å bruke formler vi allerede kjenner til å **vise at** den ene formelen er lik den andre.



Figur 2.3: Sherlock Holmes **utleder** hvem drapsmannen er.

- K Vi bruker verbet "**å utlede**" synonymt med verbet "**å vise at**".
- K Når vi skal vise at to formler er like, starter vi gjerne med en av formlene og bruker et visst antall steg på komme til den andre formelen. Hvert steg i utledningen må bruke en allerede kjent formel.

Selve **føringen** har formen

$VS = HS$	(henvisning til kjent formel)	(2.18)
$= HS$	(henvisning til kjent formel)	(2.19)
$= HS$	(henvisning til kjent formel)	(2.20)
$= HS$	(henvisning til kjent formel)	(2.21)
$= HS$	(henvisning til kjent formel)	(2.22)
$= HS$	(2.23)	

hvor vi i høyremargen henviser til en kjente formler som vi *vet* er sanne som gjør stegene korrekte.

■ **Eksempel 2.3** **Utled** eller *vis at*:

$$5(2+x) + 3(5x+4) - (x^2)^2 = -x^4 + 20x + 22. \quad (2.24)$$

Løsning:

Vi bruker den distributive lov, den kommutative lov og formelen for potens av en potens:

$$5(2+x) + 3(5x+4) - (x^2)^2 = 5 \cdot 2 + 5x + 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4 - (x^2)^2 \quad (\text{distributive lov}) \quad (2.25)$$

$$= 10 + 20x + 12 - x^{2 \cdot 2} \quad (\text{potens av potens}) \quad (2.26)$$

$$= 20x + 10 + 12 - x^4 \quad (\text{kommutative lov}) \quad (2.27)$$

$$= 20x - x^4 + 22 \quad (\text{kommutative lov}) \quad (2.28)$$

$$= -x^4 + 20x + 22 \quad (\text{kommutative lov}) \quad (2.29)$$

Etter at vi har vist det vi skal så pleier man å **avslutte** "vis at"-oppgaver **med**:

"**som skulle vises**" eller på latin **q.e.d.** (quod erat demonstrandum)

Ofte kan man **utelate kommentarene** i høyremargen dersom det er svært standard. Vi har tatt de med her for å vise god **føringskikk**. ■



I eksempel 2.3 var vi unødvendig nøyaktige og brukte mange steg som ellers vi kan ta i hodet. Når vi skal forenkle et algebraisk uttrykk, kan vi som regel dele opp prosessen i tre steg:

1. **Øse ut parenteser** (distributive lov, assosiative lov, kvadratsetningene).
2. **Fortegnsregler** (like fortegn gir +, ulike fortegn gir −).
3. **Samle like ledd** (ledd med samme potens).

■ **Eksempel 2.4** Løser ut parenteser

$$3(xy + 2y - z) = 3xy + 3 \cdot 2y - 3z \quad (\text{distributive og assosiative lov}). \quad (2.30)$$

$$= 3xy + 6y - 3z \quad (\text{fortegnsregler}). \quad (2.31)$$

■

■ **Eksempel 2.5** Løser ut parenteser og fortegnsregler:

$$-3(xy + 2y - z) = (-3)xy + (-3)2y - (-3)z \quad (\text{distributive og assosiative lov}) \quad (2.32)$$

$$= -3xy - 6y + 3z \quad (\text{fortegnsregler}). \quad (2.33)$$

■

■ **Eksempel 2.6** Løser ut parenteser, bruker fortegnsregler og samler like ledd:

$$3(3xy + y) - 2(-xy - 2y + z) = 3 \cdot 3xy + 3y - 2(-xy) - 2(-2)y + (-2)z \quad (2.34)$$

$$= 9xy + 3y + 2xy + 4y - 2z \quad (2.35)$$

$$= 11xy + 7y - 2z \quad (2.36)$$

■



Ofte kan steg 1 og steg 2 **slås sammen**, dvs. man løser ut parenteser **og** bruker fortegnsreglene i ett og samme steget. Da må man være trygg på spesielt fortegnsreglene. Det er lett å gjøre feil når man gjør begge stegene samtidig, men man sparer også tid og det gir mindre føring.

■ **Eksempel 2.7** Løser ut parentesene og bruker fortegnregler i **ett steg**. Bruk den generelle kvadratsetningen til å løse ut parentesene.

$$\begin{aligned} (2xy + x)(4xy - x) & \quad \overbrace{-4x^2(1-y)}^{\text{- tegn foran parentes}} + x^2 = 8x^2y^2 - 2x^2y + 4x^2y - \cancel{x^2} - 4x^2 + 4x^2y + \cancel{x^2} \\ & = 8x^2y^2 + 6x^2y - 4x^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

■

2.2 Algebraiske ligninger

2.2.1 Litt historie

Diophantus var en gresk matematiker født rundt 200 BC som først introduserte symbolsk algebra og skrev 13 bøker om løsning av ulike algebraiske ligninger. Han var spesielt kjent for en mengde spill og puzzler, og kanskje det mest kjente problemet var det som stod på gravsteinen hans: ⁴

How old is Diophantus?

*Here lies Diophantus,' the wonder behold.
Through art algebraic, the stone tells how old:
'God gave him his boyhood **one-sixth** of his life,
One twelfth more as youth while whiskers grew rife;
And then yet **one-seventh** ere marriage begun;
In **five years** there came a bouncing new son.
Alas, the dear child of master and sage
After attaining **half** the measure of his father's life chill fate took him. After consoling his fate by
the science of numbers for **four** years, he ended his life.*

Hvis x representerer hvor gammel Diophantus ble, kan vi sette opp følgende *ligning* basert på diktet på gravsteinen:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4. \quad (2.38)$$

Vi skal blant annet lære å løse slike ligninger i dette avsnittet. Diophantus ble forresten $x = 84$ år.



Figur 2.4: Diophantus.

⁴Skrevet på engelsk for å opprettholde diktets autentiske form (selv om det selvfølgelig var skrevet på gresk).

2.2.2 Koordinatsystemer

René Descartes (født 31. mars 1596 i Frankrike) var en fransk filosof og matematiker. Han var den første som koblet geometriske objekter som linjer, trekanter, sirkler firkanter etc. med algebraiske ligninger.

Descartes' geniale ide var å innføre *koordinatsystemet*. Han skulle etter sigende ha ligget i en sykeseng og stirret i et rutemønstret tak da han kom på ideen med å innføre koordinatsystemet.

Han innså at hvert punkt i planet kan beskrives ved hjelp av to dimensjoner: *x*-retningen og *y*-retningen. Et vilkårlig punkt *p* i planet kunne da representeres som en *2-tupplel* (x, y) . Han kalte *x* og *y* *koordinater* og hvilke verdier *x* og *y* har i punktet *p* er avhengig av *referansepunktet* $(0, 0)$ hvor aksene skjærer. Dette punktet kalles *origo*.

Vi kan konstruere et *koordinatsystem* i planet ved følgende enkle steg.

1. Vi starter med et geometrisk objekt vi ønsker å beskrive algebraisk, si for enkelthetsskyld et *punkt p* i planet, se figur 2.5.
2. Deretter velger vi et *origo* (referansepunkt) i forhold til punktet *p*, si et steg ned og et steg til venstre, se figur 2.6.
3. Videre tegner vi opp *x-aksen* og *y-aksen* som representerer de to dimensjonene i planet, se figur 2.7. Origo får da koordinatene $(0, 0)$.
4. Til slutt velger vi hvilken *enhet* aksene skal ha. La et steg representere én enhet. Siden vi gikk et steg ned og et steg til venstre når vi valgte referansepunktet, får punktet *p* koordinatene $(1, 1)$, se figur 2.8.

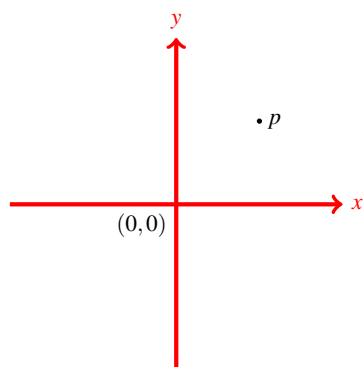
• *p*

Figur 2.5: Steg 1: Et *punkt p* i planet.

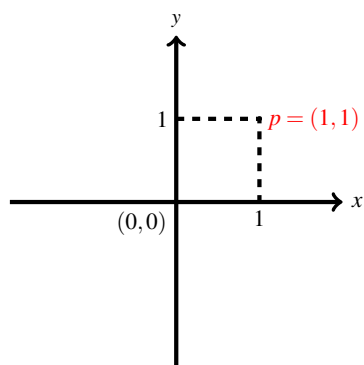
• *p*

origo •

Figur 2.6: Steg 2: Plasserer *origo* et steg ned og et steg til venstre.



Figur 2.7: Steg 3: Tegner opp x -aksen og y -aksen og gir origo koordinatene $(0,0)$.



Figur 2.8: Punktet p får koordinatene $(1,1)$.



René Descartes
«Jeg tenker, altså er jeg»

«Geometriske objekter»



«Kan beskrives ved ligninger og ulikheter»

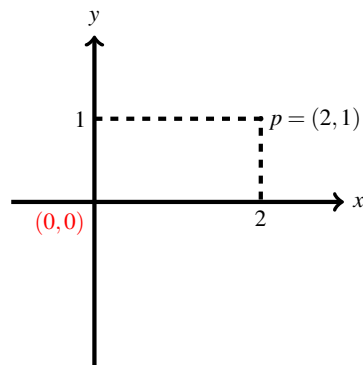
$$y = ax + b$$

$$0 \leq y \leq 5 \wedge 0 \leq x \leq 5$$

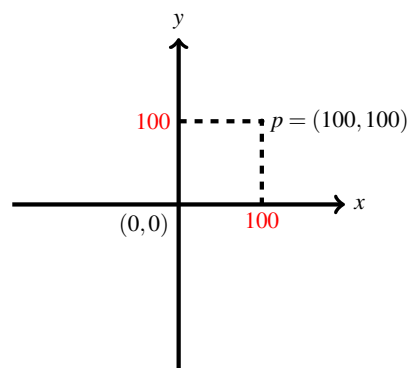
$$x^2 + y^2 = 1$$

Figur 2.9: René Descartes assosierte $ligninger$ med $geometriske$ objekter.

- (K) Vi kan **velge origo** hvor vi vil. ⁵
- (K) Vi kan også velge **enheten** selv når vi lager et koordinatsystem. ⁶
- (K) Vi kan også endre **skalaen** på koordinatsystemet. ⁷



Figur 2.10: **Origo** et steg ned og to steg til venstre gir koordinatene $p = (2, 1)$.

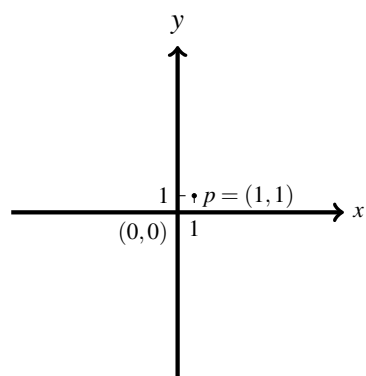


Figur 2.11: Vi kan velge fritt en annen **enhet** langs aksene.

⁵Vi kunne for eksempel gått 1 steg ned og 2 steg til venstre og satt origo der. Da hadde punktet p fått andre koordinater, nemlig $(2, 1)$, se figur 2.10.

⁶Hvis et steg representerer 100 enheter i stedet for 1 enhet, får punktet p koordinatene $(100, 100)$ i stedet for koordinatene $(1, 1)$, se figur 2.11.

⁷Å velge skala er som å ta på seg briller med en viss styrke, vi zoomer med andre ord inn eller ut. Anta vi zoomer oss 5 enheter ut. Punktet p har fremdeles koordinatene $(1, 1)$, men nå virker det som om punktet ligger 5 enheter nærmere origo, se figur 2.12.



Figur 2.12: Endre **skala**: Vi har zoomet oss 5 enheter utover.

2.2.3 Ligninger og geometri

Med oppfinnelsen av koordinatsystemet, kunne Renè Descartes begynne å beskrive geometriske figurer ved hjelp av algebraiske ligninger, eller rettere sagt ved *løsningsmengden* av algebraiske ligninger.

■ Eksempel 2.8 — Løsningsmengde - algebraisk VS geometrisk tilnærming

Ta for eksempel den enkle ligningen

$$y = 2x - 1 \quad (2.39)$$

Hvilke punkter (x, y) løser lign.(2.39)?

Løsning:

Vi ser i figur 2.13 at punktene ligger langs en rett *linje*. Vi kan dermed si at ligningen $y = 2x - 1$ representerer en rett linje, ved at *løsningsmengden*

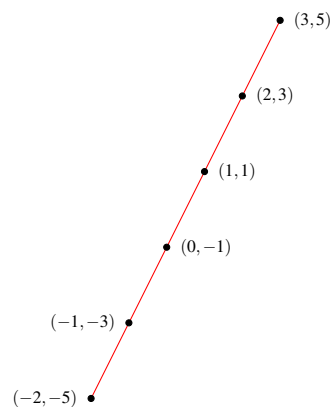
$$\mathcal{L} = \{ (x, y) \mid y = 2x - 1 \} \quad (2.40)$$

til ligningen utgjør alle punktene på den rette linja i fig.(2.13).

Algebraisk ligning: $y = 2x - 1$

x	y	(x, y)
-2	$2 \cdot (-2) - 1 = -5$	$(-2, -5)$
-1	$2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
0	$2 \cdot (0) - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$2 \cdot (1) - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$2 \cdot (2) - 1 = 3$	$(2, 3)$
3	$2 \cdot (3) - 1 = 5$	$(3, 5)$

Geometrisk figur: *linje*



Tabell 2.1: Noen punkter på $y = 2x - 1$.

Figur 2.13: Linjen $y = 2x - 1$.

■

■ Eksempel 2.9 — Nullpunkt

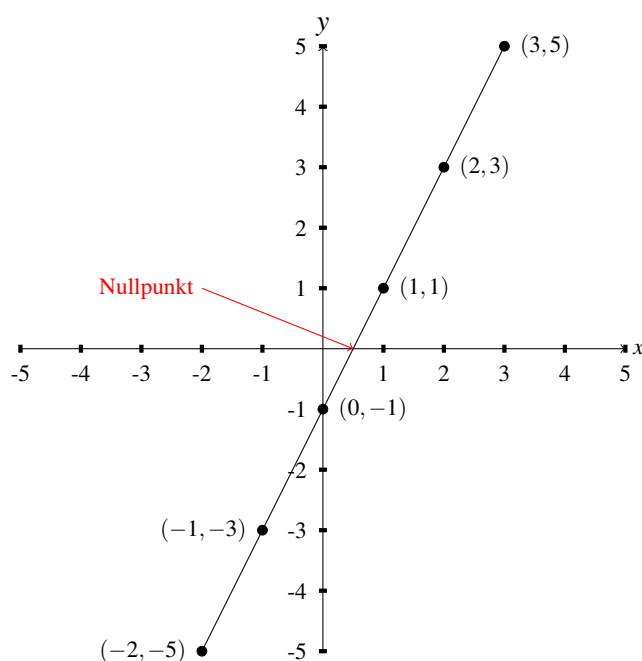
Anta vi fremdeles ser på ligningen

$$y = 2x - 1 \quad (2.41)$$

fra eksempel 2.8 som representerer linjen i figur 2.13.

Vi ønsker nå å finne punktet hvor linjen skjærer x -aksen, se figur 2.14. Dette punktet kalles *nullpunktet* til linjen, se figur 2.14.

Løsning:



Figur 2.14: I hvilket punkt skjære linjen $y = 2x - 1$ x -aksen?

Geometriske spørsmål kan nå oversettes til algebraiske ligninger:

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor **skjærer** linjen x -aksen?

Algebraisk oversettelse:

Hvilken x **løser** ligningen

$$0 = 2x - 1$$

Siden nullpunktet skjærer x -aksen, må y -koordinaten være null. Hvis vi setter $y = 0$ i lign.(2.41), får vi følgende ligning med én ukjent:

$$0 = 2x - 1. \quad (2.42)$$

Hvis vi flytter litt på leddene og deler på 2 i lign.(2.44) får vi

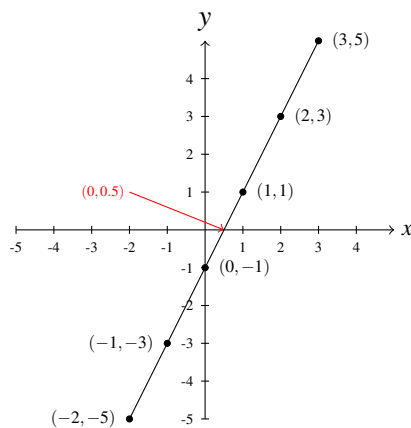
$$x = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (2.43)$$

som betyr at $x = 0.5$ er den mulige løsningen.⁸

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor skjærer linjen x -aksen?

Svar: I punktet **(0, 0.5)**



Algebraisk oversettelse:

Siden $y = 0$ hvor linjen skjærer x -aksen, kan vi oversette problemet til:

Hvilken x løser ligningen

$$0 = 2x - 1$$

Svar: **$x = 0.5$**

⁸Vi har *transformert* ligningen vi startet med til en ny ligning som er enklere å løse enn den vi startet med. Mer om transformasjoner i avsnitt 2.2.6.

■ Eksempel 2.10 — Løsningsmengde

Anta vi utvider lign.(2.39) ved å opphøye x -variabelen i 2.potens:

$$y = 2x^2 - 1 \quad (2.44)$$

Hvilke punkter (x, y) løser lign.(2.44)?

Løsning:

Vi ser i figur 2.15 at punktene *ikke* ligger langs en rett linje, men langs en såkalt *parabel*. Vi kan dermed si at ligningen $y = 2x^2 - 1$ representerer en parabel, ved at *løsningsmengden*

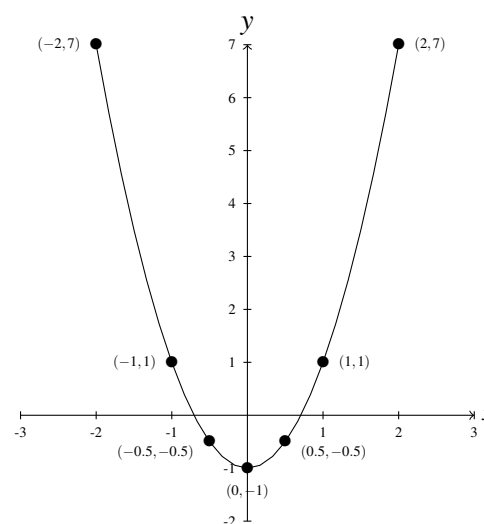
$$\mathcal{L} = \{ (x, y) \mid y = 2x^2 - 1 \} \quad (2.45)$$

til ligningen utgjør alle punktene på parabelen i fig.(2.15).

Algebraisk ligning: $y = 2x^2 - 1$

Geometrisk figur: *parabel*

x	y	(x, y)
-2	$2 \cdot (-2)^2 - 1 = 7$	$(-2, 7)$
-1	$2 \cdot (-1)^2 - 1 = -1$	$(-1, 1)$
-0.5	$2 \cdot (-0.5)^2 - 1 = -0.5$	$(-0.5, -0.5)$
0	$2 \cdot (0)^2 - 1 = -1$	$(0, -1)$
0.5	$2 \cdot (0.5)^2 - 1 = -0.5$	$(0.5, -0.5)$
1	$2 \cdot (1)^2 - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$2 \cdot (2)^2 - 1 = 7$	$(2, 7)$



Tabell 2.2: **Noen punkter** på $y = x^2 - 1$.

Figur 2.15: **Parabelen** $y = 2x^2 - 1$.

■

■ Eksempel 2.11 — Løsningsmengde

Vi fortsetter fra eksempel 2.10 og ønsker nå å finne punktene hvor parabelen skjærer x -aksen. Vi ser fra figur 2.15 at parabelen skjærer x -aksen i *to* punkter. Disse punktene kalles *nullpunktene* til parabelen.

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor *skjærer* parabelen x -aksen?

Algebraisk oversettelse:

Hvilken x *løser* ligningen

$$0 = 2x^2 - 1$$

Hvis vi setter $y = 0$ i lign.(2.44), får vi følgende ligning med én ukjent:

$$0 = 2x^2 - 1. \quad (2.46)$$

Hvis vi flytter litt på leddene og deler på 2 i lign.(2.46) får vi

$$x^2 = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (2.47)$$

som betyr at

$$x = -\sqrt{0.5} \quad \text{og} \quad x = \sqrt{0.5} \quad (2.48)$$

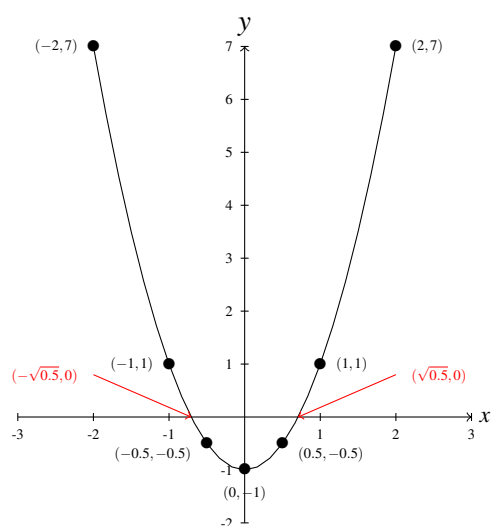
er de mulige løsningene.⁹

⁹Vi har transformert ligningen vi startet med til en ny ligning som er enklere å løse enn den vi startet med. Mer om transformasjoner i avsnitt 2.2.6.

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor skjærer linjen x -aksen?

Svar: I punktene $(-\sqrt{0.5}, 0)$ og $(\sqrt{0.5}, 0)$

Algebraisk oversettelse:

Siden $y = 0$ hvor parabelen skjærer x -aksen, kan vi oversette problemet til:

Hvilke x løser ligningen

$$0 = 2x^2 - 1$$

Svar: $x = -\sqrt{0.5}$ og $x = \sqrt{0.5}$

■

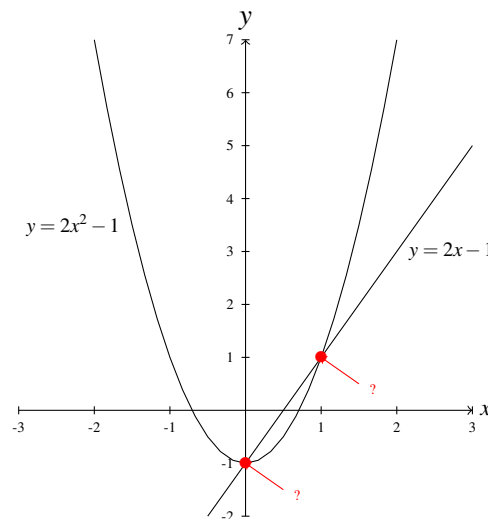
■ Eksempel 2.12 — Skjæringspunkter

Vi kan nå kombinere linjen $y = 2x - 1$ fra eksempel 2.8 og parabelen $y = 2x^2 - 1$ fra eksempel 2.10 i ett og samme koordinatsystemet, og deretter spørre følgende spørsmål:¹⁰

*Hvor **skjærer** linjen og parabelen?*

Løsning:

Figur 2.16 illustrerer problemstillingen.



Figur 2.16: Parabelen $y = 2x^2 - 1$ og linjen $y = 2x - 1$.

Vi ser fra grafen at linjen og parabelen skjærer hverandre i punktene $(0, -1)$ og $(1, 1)$, men på samme måte som før kan vi oversette et geometrisk spørsmål til det å løse en algebraisk ligning:¹¹

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor **skjære** linjen og parabelen?

Algebraisk oversettelse:

Hvilke (x, y) **løser** ligningene

$$y = 2x - 1$$

$$y = 2x^2 - 1$$

¹⁰Spørsmålet hvor forskjellige geometriske figurer skjærer hverandre forekommer svært ofte både i økonomi og logistikk og matematikk ellers.

¹¹Det er ikke alltid like enkelt som i dette tilfellet å lese av nøyaktig fra figuren hva skjæringspunktene er. Da er man avhengig av den algebraiske fremgangsmetoden.

I et punkt (x, y) hvor linjen $y = 2x - 1$ og parabelen $y = 2x^2 - 1$ skjærer, må *begge* ligningene være oppfylt *samtidig*. Punktet (x, y) må derfor oppfylle *ligningssystemet*

$$y = 2x - 1 \quad (2.49)$$

$$y = 2x^2 - 1 \quad (2.50)$$

For å løse ligningssystemet, finner vi x først ved å trekke lign.(2.49) fra lign.(2.50):

$$y - y = 2x^2 - 1 - (2x - 1) \quad (2.51)$$

som gir

$$0 = 2x^2 - 2x, \quad (2.52)$$

Vi kan skrive lign.(2.52) på formen

$$0 = 2x(x - 1), \quad (2.53)$$

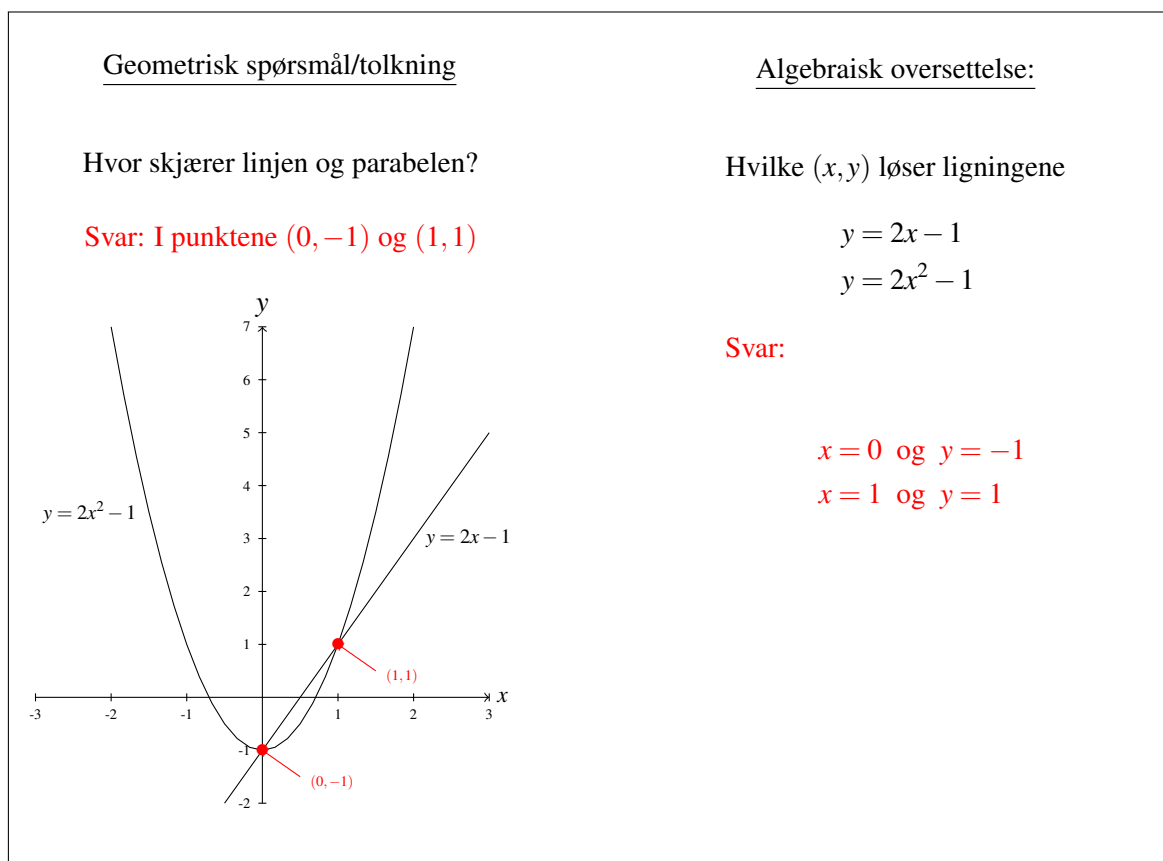
som betyr at $x = 0$ eller $x = 1$ er de verdiene for x .¹²

De tilsvarende mulige y -koordinatene finnes ved å sette inn for x i lign.(2.49) (eller lign.(2.50)):

$$x = 0: \quad y = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \quad (2.54)$$

$$x = 1: \quad y = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \quad (2.55)$$

som gir de mulige skjæringspunktene $(0, -1)$ og $(1, 1)$.



¹²Denne måten å løse ligninger på kalles *faktorisering*, som vi skal lære med om i avsnitt 2.5.2.

2.2.4 Algebraiske ligninger og løsningsmengden $\mathcal{L}$

En *algebraisk ligning* og den tilhørende *løsningsmengden* $\mathcal{L}$ er så fundamentale begreper at vi definerer disse begrepene generelt.

Definisjon 2.2.1 — Algebraisk ligning

En algebraisk ligning er en ligning på formen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.56)$$

hvor $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er to algebraiske uttrykk av n variabler $x_1, x_2, \dots, x_n$.



Når vi har bare *èn* variabel ($n = 1$) skriver vi gjerne bare x i stedet for x_1 .

Når vi har *to* variabler ($n = 2$) forekommer ofte x og y i stedet for x_1 og x_2 .

Når vi har *tre* variabler ($n = 3$) forekommer ofte x , y og z i stedet for x_1 , x_2 og x_3 .

Når vi har *fire eller flere* variabler ($n \geq 4$) forekommer nesten alltid $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

■ Eksempel 2.13 Noen *algebraiske ligninger*:

$$\overbrace{2x + x^3}^{A(x,y)} = \overbrace{4x^2 + 5}^{B(x,y)} \quad (2.57)$$

$$\frac{yz}{x} = \frac{2}{y^3 - 3z} \quad (2.58)$$

$$x^3 = \sqrt{x^2 - 1} \quad (2.59)$$

$$x_1^5 + 3x_2^2 = \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \quad (2.60)$$

■

Definisjon 2.2.2 — Løsningsmengden $\mathcal{L}$

Løsningsmengden $\mathcal{L}$ av den algebraiske ligningen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.61)$$

er definert som mengden

$$\mathcal{L} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \}. \quad (2.62)$$

dvs. mengden av alle punktene $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ som oppfyller ligning 2.61.

K Når vi *løser* en ligning, finner vi med andre ord hvilke punkter *løsningsmengden* består av.

K Det er elementene i *løsningsmengden* til en algebraiske ligning hvis punkter beskriver et *geometrisk objekt* i passende valgt koordinatsystem, men vi sier at det er *ligningen* som epresenterer objektet.

■ **Eksempel 2.14** Noen *algebraiske ligninger* med tilhørende *løsningsmengde*:

$$1) \ x = 4 \qquad \mathcal{L} = \{ x \mid x = 4 \} = \{ 4 \}. \quad (2.63)$$

$$2) \ x^2 = 9 \qquad \mathcal{L} = \{ x \mid x^2 = 9 \} = \{ -3, 3 \}. \quad (2.64)$$

$$3) \ y = 5x \qquad \mathcal{L} = \{ (x, y) \mid y = 5x \}. \quad (2.65)$$

$$4) \ x^3 = 5 \qquad \mathcal{L} = \{ x \mid x^3 = 5 \} = \{ \sqrt[3]{5} \}. \quad (2.66)$$

■

2.2.5 Klassifisering av algebraiske ligninger

Vi klassifiserer en algebraisk ligning

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.67)$$

etter to **nøkkelstørrelser**:

1. antall *variabler* (dimensjonen),
2. *graden* (høyeste potens x^k).

■ Eksempel 2.15 Ligningen

$$2x - 1 = 0, \quad (2.68)$$

kalles en *1. gradsligning* i 1 dimensjon, siden vi har en variabel x og høyeste potens er 1. ■

■ Eksempel 2.16 Ligningen

$$x^5 - x + 1 = 0, \quad (2.69)$$

kalles en *5. gradsligning* i 1 dimensjon, siden vi har en variabel x og høyeste potens er 5. ■

■ Eksempel 2.17 Ligningen

$$y = 2x - 1, \quad (2.70)$$

kalles en *1. gradsligning* i 2 dimensjoner, siden vi har to variabler x og y og høyeste potens er 1. ■

■ Eksempel 2.18 Ligningen

$$y^3 - z^2 = 2x - 1, \quad (2.71)$$

kalles en *3. gradsligning* i 3 dimensjoner, siden vi har *tre* variabler x , y og z og høyeste potens er 3. ■

2.2.6 Løsningsmetodikk: Transformasjoner

Å løse en ligning er ofte forbundet med genialitet og oppfinnsomhet. Forskjellige ligninger krever forskjellige strategier. Vi spør derfor:

*Finnes det en **fast måte** å løse ligninger på?*

Dersom det var tilfelle, hadde vi kunnet løse ligninger mekanisk uten å faktisk tenke. ¹³

Det vi derimot *kan* gjøre er å ha en fast **strategi** for hvordan man løser ligninger. Denne strategien baserer seg på *transformasjoner*.

Definisjon 2.2.3 — Transformasjon

Anta vi har en algebraisk ligning

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.72)$$

med tilhørende løsningsmengde $\mathcal{L}$.

En **transformasjon** T av ligning 2.72, er en matematisk operasjon som transformerer de algebraiske uttrykkene A og B til to nye algebraiske uttrykk A' og B' slik at den nye ligningen

$$A'(x_1, x_2, \dots, x_n) = B'(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.73)$$

har samme løsningsmengden $\mathcal{L}$ som den opprinnelige ligningen.

K Vi skriver generelt

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \xrightarrow{T} \quad (2.74)$$

$\Updownarrow$

$$A'(x_1, x_2, \dots, x_n) = B'(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.75)$$

hvor tegnet $\Updownarrow$ betyr at ligningene har samme løsningsmengde.

K Hovedideen bak det å transformere ligninger til nye ligninger, er at den nye ligningen er på en **enklere** form enn den vi startet med.

¹³Vi kan bruke *programvare* til å løse ligninger, men husk at da får man *numeriske tilnærminger* og ikke *eksakte* løsninger.

■ Eksempel 2.19 — Transformasjoner

Løs ligningen

$$2x - 1 = 0. \quad (2.76)$$

ved å bruke de riktige transformasjonene.

Løsning:

La T være **transformasjonen** hvor vi summerer VS og HS med 1:

$$2x - 1 = 0 \quad \quad \quad / + 1 \quad (2.77)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ 2x = 1 \end{array} \quad (2.78)$$

Begge ligningene har samme **løsningsmengde** $\mathcal{L} = \{ \frac{1}{2} \}$, dvs. $x = \frac{1}{2}$ er eneste løsning. Dersom vi igjen transformerer lign.(2.78) ved å multiplisere VS og HS med $\frac{1}{2}$ blir dette enda tydeligere:

$$2x - 1 = 0 \quad \quad \quad / + 1 \quad (2.79)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ 2x = 1 \end{array} \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad (2.80)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \quad (2.81)$$

Alle ligningene har samme **løsningsmengde**, men legg merke til at lign.(2.81) er på en **enklere** form enn lign.(2.79), den sier *eksplisitt* at løsningen er $x = \frac{1}{2}$.

■

Ideen med transformasjoner er å finne et sett med transformasjoner $T_1, T_2, \dots, T_k$ slik at løsningen til den resulterende ligningen etter k transformasjoner er enkel/åpenbar:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad T_1 \quad (2.82)$$

$$\Downarrow$$

$$A_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad T_2 \quad (2.83)$$

$$\Downarrow$$

$$A_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad T_3 \quad (2.84)$$

$$\Downarrow$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$A_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad T_k$$

$$\Downarrow$$

$$A_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

■ Eksempel 2.20 — Transformasjoner

Løs ligningen

$$\frac{2x-1}{x+1} = 1. \quad (2.85)$$

ved å bruke de riktige transformasjonene.

Løsning:

Første **transformasjon** er å fjerne telleren i i brøken i VS, dvs T_1 . Det gjør vi ved å multiplisere ligningen med $x+1$.

$$\frac{2x-1}{x+1} = 1. \quad \quad \quad / \cdot (x+1) \quad \quad \quad T_1 \quad \quad \quad (2.86)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ 2x-1 = x+1 \end{array} \quad \quad \quad (2.87)$$

Neste **transformasjon** T_2 er å "flytte x fra HS til VS", dvs. vi må trekke ifra x :

$$2x-1 = x+1 \quad \quad \quad / -x \quad \quad \quad T_2 \quad \quad \quad (2.88)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ x-1 = 1 \end{array} \quad \quad \quad (2.89)$$

Siste **transformasjon** T_3 er å "flytte -1 fra VS til HS", dvs vi må addere fra 1:

$$x-1 = 1 \quad \quad \quad / +1 \quad \quad \quad T_3 \quad \quad \quad (2.90)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ x = 2 \end{array} \quad \quad \quad (2.91)$$

som viser at løsningen er $x = 2$, dvs. $\mathcal{L} = \{ 2 \}$.

■

■ **Eksempel 2.21** Noen ganger kan en transformasjon resultere i *mer enn 1 løsning*, f.eks. når vi tar kvadratroten av en ligning:

$$x^2 = 9 \quad \quad \quad / \sqrt{\dots} \quad (2.92)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ x = 3 \vee x = -3, \end{array} \quad (2.93)$$

som viser at løsningen er $x = 3$ eller $x = -3$, dvs. $\mathcal{L} = \{-3, 3\}$. ■

■ **Eksempel 2.22** Den *omvendte transformasjonen* av kvadratroten er å ta 2. potens av en ligning. Det gir kun én løsning:

$$3 = \sqrt{x+1} \quad \quad \quad / (\dots)^2 \quad (2.94)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ 9 = x+1 \end{array} \quad \quad \quad / -1 \quad (2.95)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ 8 = x \end{array} \quad (2.96)$$

som viser at løsningen er $x = 8$, dvs. $\mathcal{L} = \{8\}$.¹⁴ ■

K Når vi løser ligninger i praksis, trenger vi ikke alltid å påpeke hvilken transformasjon vi bruker, dersom det er *underforstått* hvilken det er.

K Her er noen *typiske* transformasjoner:

$$/ + \quad \quad \quad (\text{addere samme tall VS og HS}) \quad (2.97)$$

$$/ - \quad \quad \quad (\text{subtrahere samme tall VS og HS}) \quad (2.98)$$

$$/ \cdot \quad \quad \quad (\text{multiplisere samme tall VS og HS}) \quad (2.99)$$

$$/ : \quad \quad \quad (\text{dividere samme tall VS og HS}) \quad (2.100)$$

$$/ \sqrt[n]{\dots} \quad \quad \quad (\text{ta nte-kvadratroten av VS og HS}) \quad (2.101)$$

$$/ \dots^n \quad \quad \quad (\text{opphøye VS og HS i en nte-potens}) \quad (2.102)$$

I kapittel 5 introduserer vi flere transformasjoner som f.eks. e^x og $\ln x$.

¹⁴Legg merke til at $x = -8$ er *ikke* en løsning. Kvadratroten i lign.(2.94) er ikke engang definert for $x = -8$ (kompleks tall).

2.3 Lineære ligninger (1. gradsligninger)

Lineære ligninger eller 1. gradsligninger er ligninger hvor **høyeste potens** av variablene er **1**. Lineære ligninger av 1 variabel er trivielle:

$$ax - b = 0 \quad (2.103)$$

hvor $a \neq 0$ og b er parametre. Løsningen er gitt ved: $x = \frac{b}{a}$.

Definisjon 2.3.1 — Lineære ligninger med 2 variabler

En linær ligning med to variabler er definert ved

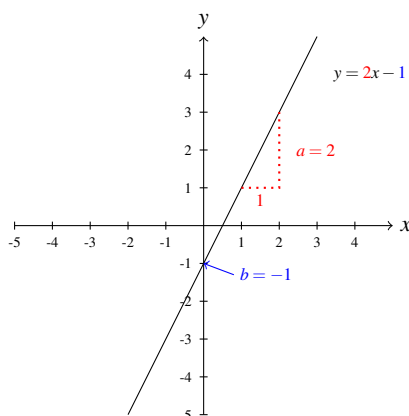
$$y = ax + b \quad (2.104)$$

hvor $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$.



Geometrisk sett representerer lign.(2.104) en **rett linje** i planet hvor parametrene har følgende tolkninger, se figur 2.17:

- a = stigningstallet til linjen (èn enhet til venstre gir a enheter opp)
- b = skjæring med y-aksen



Figur 2.17: Linjen $y = 2x - 1$.



Definisjonen i lign.(2.104) er en 1. gradsligning siden begge variablene x og y kun er opphøyd i første potens.¹⁵

¹⁵Husk $x = x^1$ og $y = y^1$.

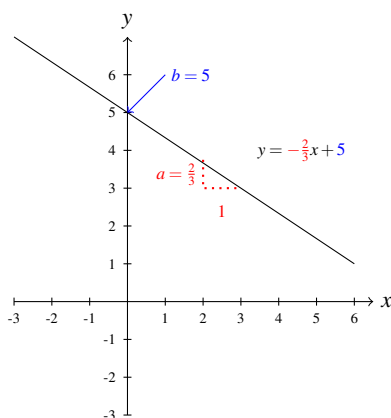
■ Eksempel 2.23 — 1. gradsligning

Hva slags **geometrisk tolkning** har 1. gradsligningen nedenfor?

$$y = -\frac{2}{3}x + 5 \quad (2.105)$$

Løsning:

De punktene (x, y) i planet som løser lign.(2.105) er en linje som skjærer y -aksen i punktet $b = 5$ og med stigningstallet $a = -\frac{2}{3}$.



Figur 2.18: Linjen $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

■

■ Eksempel 2.24 — To skjærende linjer

Anta vi har gitt to linjer:

$$y = -x + 1 \quad (2.106)$$

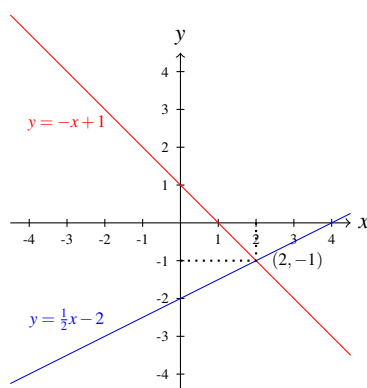
$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (2.107)$$

Disse to linjene skjærer hverandre i (x, y) -planet.

- a) Finn skjæringspunktet til linjene **grafisk**.¹⁶
- b) Finn skjæringspunktet til linjene **ved regning**.

Løsning:

- a) Grafisk løsning:



Figur 2.19: Plott av linjene $y = -x + 1$ og $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Av figuren ser vi at grafene skjærer hverandre i punktet $(2, -1)$.

¹⁶Grafisk, dvs. ved å tegne linjene i et (x, y) -koordinatsystem og finne svaret kun ved å lese av figuren, altså ingen utregninger behøves.

b) Ved regning:

"Ved regning" betyr at vi må bruke de algebraiske ligningene for linjene

$$y = -x + 1 \quad (2.108)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (2.109)$$

for å finne skjæringspunktet. Det essensielle her er at *begge* ligningene må være oppfylt i skjæringspunktet. Vi kan dermed sette y -ene lik hverandre:

$$y = y \quad (2.110)$$

$$\Downarrow$$

$$-x + 1 = \frac{1}{2}x - 2 \quad / +x \text{ og } +2 \quad (2.111)$$

$$\Downarrow$$

$$1 + 2 = \frac{1}{2}x + x \quad / \text{slår sammen like ledd} \quad (2.112)$$

$$\Downarrow$$

$$3 = \frac{3}{2}x \quad / \cdot \frac{2}{3} \quad (2.113)$$

$$\Downarrow$$

$$2 = x \quad (2.114)$$

Dette er den x -verdien hvor linjene skjærer hverandre, se figur 2.19. For å finne den tilhørende y -koordinaten kan vi bare sette inn $x = 2$ for en av linjene, vi har valgt linjen $y = -x + 1$:

$$y = -x + 1 \quad / x = 2 \quad (2.115)$$

$$= -2 + 1 \quad (2.116)$$

$$= -1 \quad (2.117)$$

Vi har dermed funnet skjæringspunktet $(2, -1)$ ved hjelp av regning.

■

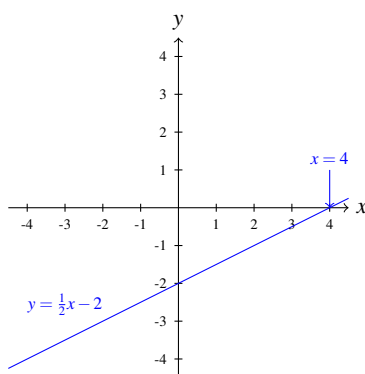
■ **Eksempel 2.25 — Skjæring med x -aksen for linjen $y = ax + b$**

La oss igjen se på linjen

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (2.118)$$

fra eksempel 2.24.

Finn **skjæringen** med **x -aksen** ved regning, se figur 2.20. D
ette punktet kalles **nullpunktet** til linjen.



Figur 2.20: Finner nullpunktet til linjen $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Løsning:

Vi ser direkte fra grafen i figur 2.20 at nullpunktet er gitt ved $x = 4$. Men oppgaven ba oss om å finne dette ved regning. Dermed må vi bruke den algebraiske representasjonen av linjen.

Skjæring med x -aksen er bestemt ved:

$$y = 0 \quad (2.119)$$

Dermed:

$$0 = \frac{1}{2}x - 2 \quad \quad \quad / + 2 \quad (2.120)$$

$$\Updownarrow \quad \quad \quad 2 = \frac{1}{2}x \quad \quad \quad / \cdot 2 \quad (2.121)$$

$$\Updownarrow \quad \quad \quad 4 = x \quad (2.122)$$

som viser at nullpunktet eller skjæringen med x -aksen er gitt ved $x = 4$.

■

■ **Eksempel 2.26** Hvor mange skjæringer med x -aksen kan en linje maksimalt ha?

Kan en linje ha ingen skjæring med x -aksen?

■

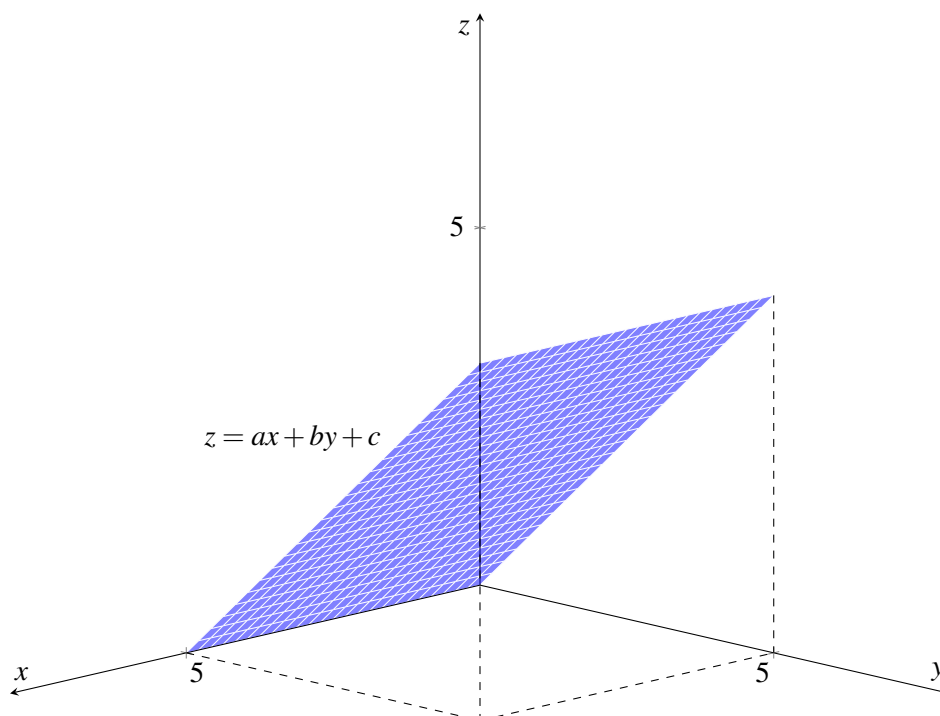
Definisjon 2.3.2 — Lineære ligninger med 3 variabler

En lineær ligning med tre variabler er definert ved

$$z = ax + by + c \quad (2.123)$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$.

K Geometrisk sett representerer *løsningsmengden* til lign.(2.123) et *plan i rommet*, se figur 2.21. ¹⁷



Figur 2.21: Ligninger på formen $z = ax + by + c$ representerer et *plan i rommet*.

¹⁷Tolkningen av parametrene a , b og c er mer komplisert enn for linjer og gåes ikke gjennom her.

■ Eksempel 2.27 — Lineær ligning med 3 variabler

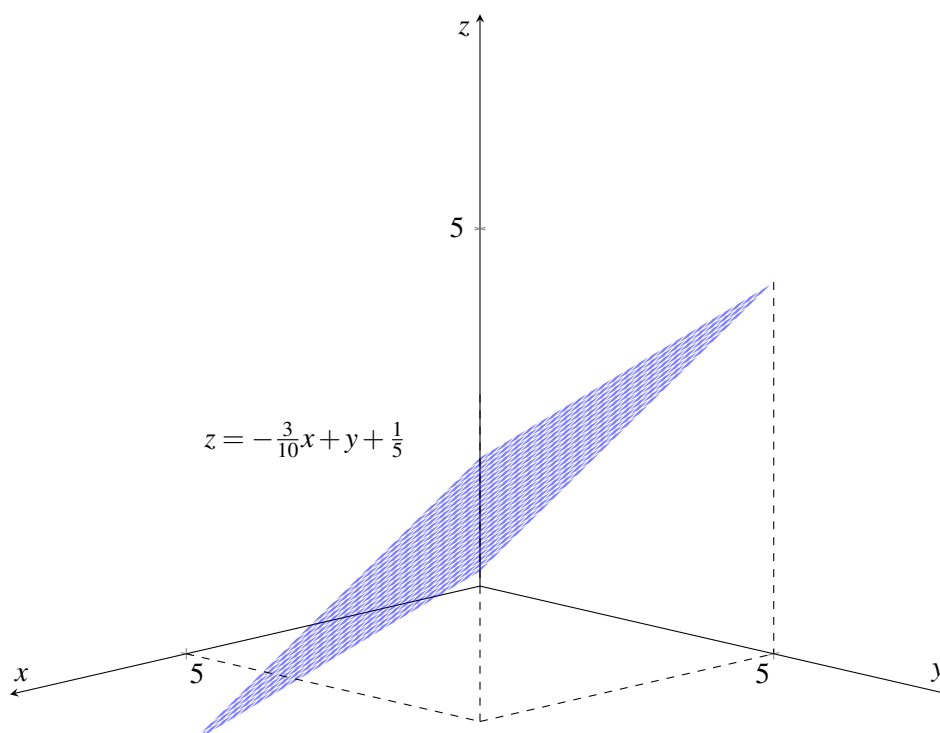
Den lineære ligningen

$$3x - 10y + 10z = 2 \quad (2.124)$$

kan omskrives med z alene på venstre side:

$$z = -\frac{3}{10}x + y + \frac{1}{5} \quad (2.125)$$

Løsningsmengden for denne ligningen er et plan i rommet, se figur 2.22.



Figur 2.22: Ligningen $z = y - \frac{3}{10}x + \frac{1}{5}$ representerer et plan i rommet.

■

2.4 Lineære ligningssystem

Dersom vi har flere lineære ligninger som skal løses samtidig, har vi et *lineært ligningssystem*.

Definisjon 2.4.1 — Lineært ligningssystem med 2 variabler

Et lineært ligningssystem med 2 variabler består av n ligninger som må løses samtidig.

$$a_1y + b_1x = c_1 \quad (2.126)$$

$$a_2y + b_2x = c_2 \quad (2.127)$$

$$\vdots$$

$$a_ny + b_nx = c_n \quad (2.128)$$

hvor $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ og $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.



Et lineært ligningssystem med 2 variabler og n ligninger, betyr gemoetrisk sett at vi har tegnet opp *n linjer i planet* og ser om alle linjene skjærer hverandre i *ett* og samme punkt.

■ Eksempel 2.28 — Lineært ligningssystem

Løs ligningssystemet:

$$x + y = 5 \quad (2.129)$$

$$3x + 2y = 10 \quad (2.130)$$

Løsning:

Vi løser ligningssystemet i 3 steg:

Steg 1: Skriv lign.(2.129) og (2.130) om på formen $y = ax + b$.

Steg 2: Tegn opp linjene i et passende koordinatsystem. Dersom linjene er parallelle, så finnes ingen løsning. Hvis de skjærer, så er skjæringspunktet løsningen.

Steg 3: Sett høyresidene i ligningene for linjene fra steg 1 lik hverandre og løs med hensyn på x .

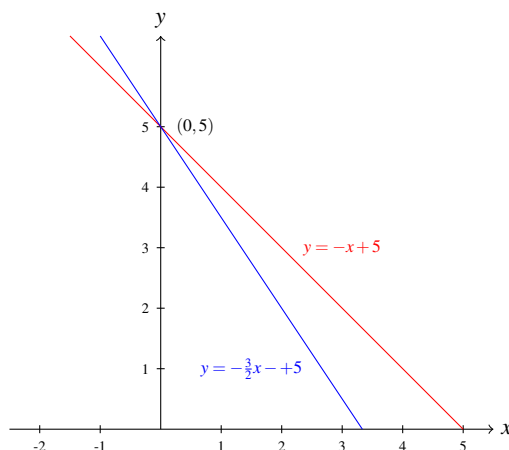
Vi utfører disse 3 stegene:

Steg 1: Skriv ligningene på formen $y = ax + b$:

$$x + y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 5 \quad (2.131)$$

$$3x + 2y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + 5 \quad (2.132)$$

Steg 2: Tegn opp linjene i et passende koordinatsystem:



Figur 2.23: Plott av linjene $y = -x + 5$ og $y = -\frac{3}{2}x + 5$.

Vi ser ved inspeksjon av figur 2.23 at linjene skjærer hverandre i punktet $(0, 5)$. Løsningsmengden til ligningssystemet er dermed $\mathcal{L} = \{ (0, 5) \}$.

La oss likevel være på den sikre siden og regne oss frem til dette svaret.

Steg 3: Sett høyresidene i ligningene for linjene fra steg 1 lik hverandre og løs med hensyn på x .

$$-x + 5 = -\frac{3}{2}x + 5 \quad \quad \quad / -5 \quad \quad \quad (2.133)$$

$$\Downarrow$$

$$-x = -\frac{3}{2}x \quad \quad \quad / + \frac{3}{2}x \quad \quad \quad (2.134)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{5}{2}x = 0 \quad \quad \quad / \cdot \frac{2}{5} \quad \quad \quad (2.135)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \quad \quad \quad (2.136)$$

Vi finner tilhørende y -verdi ved å sette inn i lign.(2.131) eller lign.(2.132): ¹⁸

$$\underline{y} = 5 - \frac{3}{2} \cdot 0 = \underline{5} \quad \quad \quad (2.137)$$

Dermed har vi vist ved regning at løsningsmengden er punktet $(0, 5)$.

■

¹⁸I skjæringspunktet er x -verdien til kurvene være like. Og det samme gjelder for y -verdiene. I skjæringspunktet kan vi derfor velge om vi vil regne ut y -verdien med den ene eller andre linjen.

■ Eksempel 2.29 — Ligningsystem - ingen løsning

Anta vi legger til ligningen $y = x$ i ligningssystemet fra eksempel 2.28. Da får vi et ligningsystem med to variable og 3 ligninger:

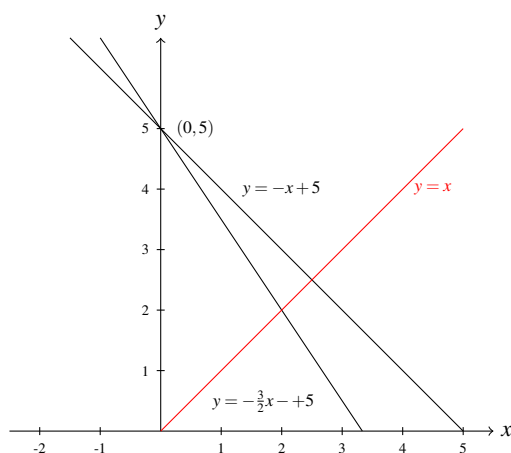
$$x + y = 5 \quad (2.138)$$

$$3x + 2y = 10 \quad (2.139)$$

$$y = x \quad (2.140)$$

Vi husker fra eksempel 2.28 at de to første linjene skjærer hverandre i punktet $(0, 5)$. Dersom det nye ligningssystemet skal ha en løsning, må også linjen $y = x$ også gå gjennom dette punktet - noe den ikke gjør, se figur 2.24.

Intet punkt der alle linjene skjærer hverandre.



Figur 2.24: Plott av linjene $y = -x + 5$, $y = -\frac{3}{2}x + 5$ og $y = x$.

Ligningssystemet har dermed **ingen løsning**, dvs.

$$\mathcal{L} = \emptyset \quad (2.141)$$

Et slikt ligningsystem, som har flere ligninger (3) enn variabler (2), kalles et overbestemt system. ■

2.5 Kvadratiske ligninger (2. gradsligninger)

Kvadratiske ligninger eller 2. gradsligninger er ligninger hvor **høyeste potens** av variablene er **2**. Vi har hovedfokus på kvadratiske ligninger med én og to variabler. ¹⁹

2.5.1 Kvadratiske ligninger med en variabel - ABC-formelen

Løsningen av en 2. gradsligning med én variabel har **maksimalt to løsninger**. Disse løsningene finnes via *ABC*-formelen.

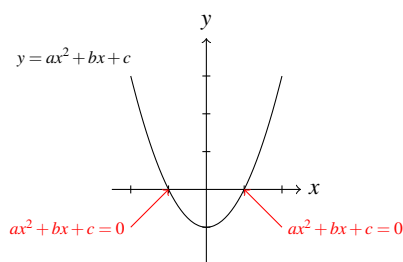
Definisjon 2.5.1 En kvadratisk ligning med 1 variabel er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2.142)$$

hvor $a \neq 0$, b og c er reelle parametre og x er den ukjente variabelen.

K Legg merke til at hvis $a = 0$, reduseres lign.(2.142) til en lineær ligning.

K Den geometriske tolkningen av lign.(2.142) er at løsningen representerer *nullpunktene* til parabellen $ax^2 + bx + c = y$, se figur 2.25.



Figur 2.25: Tolkning av løsningen av ligningen $ax^2 + bx + c = 0$.

¹⁹Kvadratiske ligninger med tre variabler representerer kurvede flater i rommet og tas ikke med her.

Løsningen av ligning 2.142 er gitt ved den velkjente ABC-formelen.

Setning 2.5.1 — ABC-formelen

Løsningen av en 2. gradsligning med en variabel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.143)$$

er gitt ved den såkalte ABC-formelen

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2.144)$$

dvs. løsningsmengden

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \quad (2.145)$$

K Lign.(2.144) skrives ofte på kortformen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.146)$$

K Vi kommer ofte til å bruke notasjonen

$$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2.147)$$

når vi tolker løsningene som *nullpunktene* til polynomet $ax^2 + bx + c$.

Vi kan da skrive lign.(2.143) på såkalt *faktorisert* form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.148)$$

$$\Updownarrow$$

$$a(x - c_1)(x - c_2) = 0 \quad (2.149)$$

Vi går mye nærmere inn i detalj om faktorisering i kap. 2.5.2.

■ **Eksempel 2.30** Løs ligningen

$$x^2 - 6x + 5 = 0, \quad (2.150)$$

og skriv den på **faktorisert** form.

Løsning:

Vi identifiserer at lign.(2.150) er på kvadratisk form med

$$a = 1 \quad (2.151)$$

$$b = -6 \quad (2.152)$$

$$c = 5. \quad (2.153)$$

Vi kan dermed bruke ABC-formelen i lign.(2.144):

$$c_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \quad (2.154)$$

$$= \frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2} \quad \text{og} \quad = \frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2} \quad (2.155)$$

$$= \frac{6 - \sqrt{16}}{2} \quad \text{og} \quad = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} \quad (2.156)$$

$$= \frac{6 - 4}{2} \quad \text{og} \quad = \frac{6 + 4}{2} \quad (2.157)$$

$$= 1 \quad \text{og} \quad = 5 \quad (2.158)$$

Nullpunktene er dermed gitt ved $c_1 = 1$ og $c_2 = 5$. Dermed kan vi skrive ligningen på **faktorisert** form:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (2.159)$$

$$\Downarrow$$

$$a(x - c_1)(x - c_2) = 0 \quad \text{faktorisert form} \quad (2.160)$$

$$\Downarrow$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0 \quad \text{faktorisert form} \quad (2.161)$$

■

Fra ABC-formelen kan vi klassifisere hvor mange løsninger lign.(2.142) har ved å se på *fortegnet* på den såkalte *diskriminanten*

$$b^2 - 4ad. \quad (2.162)$$

Setning 2.5.2 En kvadratisk ligning

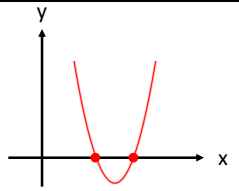
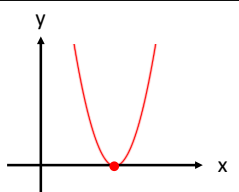
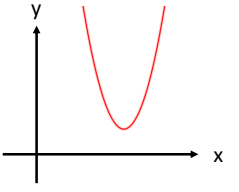
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.163)$$

har 3 mulige situasjoner for løsningsmengden avhengig av fortegnet på diskriminanten i ABC-formelen:

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{to løsninger} \quad (2.164)$$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{èn løsning} \quad (2.165)$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ingen løsning.} \quad (2.166)$$

	$b^2 - 4ac > 0$	To løsninger	$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$b^2 - 4ac = 0$	En løsning	$c = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$
	$b^2 - 4ac < 0$	Ingen løsninger	Ingen løsninger siden kvadratroten <i>ikke</i> er definert for <i>negative</i> tall (komplekse tall ikke pensum)

Figur 2.26: Antall løsninger fra ABC-formelen.

■ **Eksempel 2.31** Bruk **diskriminanten** for å avgjøre hvor mange løsninger følgende ligninger har:

$$a) \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (2.167)$$

$$b) \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$c) \quad x^2 - 4x + 5 = 0 \quad (2.168)$$

Løsning:

$$a) \quad b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{èn løsning} \quad (2.169)$$

$$a) \quad b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \text{to løsninger} \quad (2.170)$$

$$a) \quad b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ingen løsning} \quad (2.171)$$

■

2.5.2 Polynomer

Polynomer er svært fundamentalt i matematikk, og er en **generalisering** av de lineære ligningene og kvadratiske ligningene vi introduserte i avsnitt 2.2.6 og 2.5.

Definisjon 2.5.2 Et **polynom** av grad n er en ligning med 2 variabler på formen

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2.172)$$

hvor $a_n \neq 0$ og $n \in \mathbb{N}$.

■ **Eksempel 2.32** Et **1. gradspolynom** ($n = 1$) er en lineær ligning:

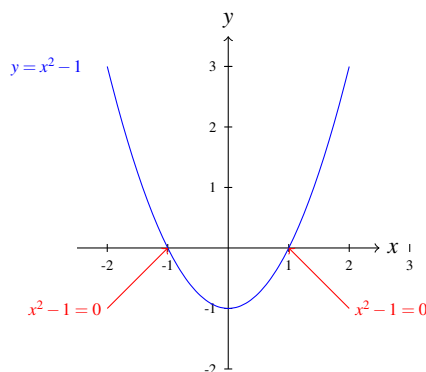
$$y = a_1 x + a_0 \quad (2.173)$$

Legg merke til at de vanlige parametrene a og b for lineære ligninger har fått **nye navn** a_1 og a_0 hhv. siden vi bruker den generelle formelen i lign.(2.172). Men rent matematisk har navnet på parametrene ingenting å si. ■

■ **Eksempel 2.33** Et **2. gradspolynom** ($n = 2$) er den kvadratiske ligningen:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2.174)$$

I figur 2.27 har vi tegnet opp grafen til 2. gradspolynomet $y = x^2 - 1$. **Nullpunktene** er gitt ved ABC-formelen.

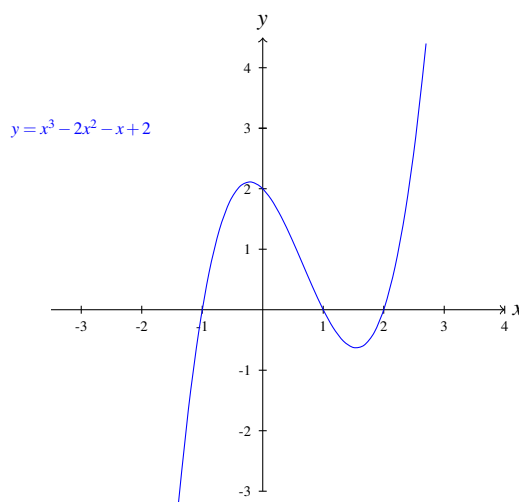


Figur 2.27: Grafen til 2. gradspolynomet $y = x^2 - 1$. ■

■ **Eksempel 2.34** Et 3. gradspolynom ($n=3$) er den kubiske ligningen:

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (2.175)$$

I figur 2.28 har vi tegnet opp grafen til 3. gradspolynomet $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Et 3. gradspolynom har maksimalt 3 nullpunkter.

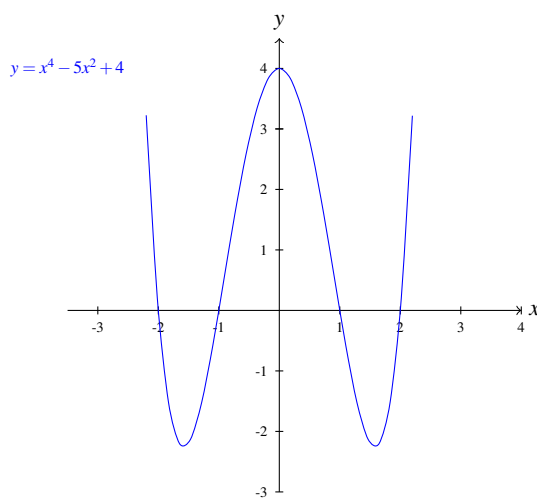


Figur 2.28: Grafen til 3. gradspolynomet $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

■ **Eksempel 2.35** Et 4. gradspolynom ($n=4$) er den bikvadratiske ligningen:

$$y = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (2.176)$$

I figur 2.29 har vi tegnet opp grafen til 4. gradspolynomet $y = x^4 - 5x^2 + 4$. Et 4. gradspolynom har maksimalt 4 nullpunkter.



Figur 2.29: Grafen til 4. gradspolynomet $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

2.6 Faktorisering

I avsnitt 2.5.2 om polynomer observerte vi at det var en sammenheng mellom maksimalt antall nullpunkter og *graden* til ligningen:

Maksimalt antall nullpunkter i et n 'te gradspolynom er n .

Denne observasjonen gir opphav til *faktorisering* av polynomer. Faktorisering er et komplisert begrep som ofte er vanskelig å forstå hensikten bak.

Definisjon 2.6.1 — Faktorisering

Faktorisering er en *dekomponering* av algebraiske uttrykk til et produkt av faktorer.

- K** Definisjon 2.6.1 er en ganske løs definisjon. Avhengig av hva vi faktoreriserer og hvilke faktorer vi har, får vi *forskjellige faktoriseringer*.
- K** Ideen bak faktorisering er ganske *fundamental*: Vi ønsker å beskrive et *komplisert* uttrykk ved hjelp av *enkle* uttrykk - faktorer - slik at vi får en dypere innsikt i egenskapene ved det kompliserte uttrykket.²⁰
- K** Vi kan se på faktorene som *byggeklossene* i en større konstruksjon. Spesielt med disse byggeklossene, er at de ikke kan faktorerises videre inn i mindre faktorer igjen.²¹

I dette avsnittet skal vi se på to fundamentale faktoriseringer:

1. Faktorisering av naturlige tall $\mathbb{N}$: — *fundamentalsetningen for aritmetikk*²²
2. Faktorisering av polynomer — *fundamentalsetningen for algebra*²³

²⁰De enkle faktorene gir oss dermed struktur og innsikt til å enkelt svare på spørsmål som ellers hadde vært svært vanskelig å svare på.

²¹I fysikk søker man å finne de minste byggeklossene i universet for å forstå hvordan all materie oppstod. Dette er en form for faktorisering.

²²Aritmetikk omhandler elementære operasjoner på tall.

²³Algebra er læren om ligninger, regning med tall, regning med variabler, regning med bokstaver.

2.6.1 Fundamentalsetningen for aritmetikk

Et heltall $n > 1$ kan enten dekomponeres i mindre naturlige tall (primtall) ²⁴ eller så er tallet et primtall som ikke kan faktorerises ytterligere:

$$2 = 2 \cdot 1 \quad (2 \text{ er primtall - er faktorisert}) \quad (2.178)$$

$$3 = 3 \cdot 1 \quad (3 \text{ er primtall - er faktorisert}) \quad (2.179)$$

$$4 = 2 \cdot 2 \quad (\text{faktorisert}) \quad (2.180)$$

$$5 = 5 \cdot 1 \quad (5 \text{ er primtall - er faktorisert}) \quad (2.181)$$

$$6 = 2 \cdot 3 \quad (\text{faktorisert}) \quad (2.182)$$

$$7 = 7 \cdot 1 \quad (7 \text{ er primtall - er faktorisert}) \quad (2.183)$$

·
·

Setning 2.6.1 — Fundamentalsetningen for aritmetikk

Ethvert naturlig tall $n > 1$ kan skrives som et entydig **produkt av primtall** p_i

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_m^{a_m} \quad (2.184)$$

hvor $i \leq m$ og $a_i \in \mathbb{N}$.

■ Eksempel 2.36 Faktorisering av naturlige tall:

$$92 = 2 \cdot 46 = 2^2 \cdot 23 \quad (2 \text{ og } 23 \text{ er primtall}) \quad (2.185)$$

$$7 = 7 \cdot 1 \quad (7 \text{ er primtall - er faktorisert}) \quad (2.186)$$

$$22 = 2 \cdot 11 \quad (2 \text{ og } 11 \text{ er primtall}) \quad (2.187)$$

$$36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2 \quad (2 \text{ og } 3 \text{ er primtall}) \quad (2.188)$$

$$64 = 8 \cdot 8 = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 2^6 \quad (2 \text{ er primtall}) \quad (2.189)$$

■

²⁴Et primtall er et naturlig tall $n \geq 1$, som bare er delelig med seg selv og 1. De første 10 primtallene er:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \quad (2.177)$$

2.6.2 Fundamentalsetningen for algebra

Neste faktorisering handler om polynomer som faktoriseres ved hjelp av nullpunktene. Som vi sa innledningsvis har et n . gradspolynom maksimalt n nullpunkter, men dette gjelder for *reelle* nullpunkter. Dersom vi utvider tallsystemet til de *komplekse tall*, $\mathbb{C}$, vil et n . gradspolynom *alltid* ha n nullpunkter. ²⁵

Setning 2.6.2 — Fundamentalsetningen for algebra

Polynomet

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.190)$$

kan faktoriseres på formen

$$y = a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_{n-1})(x - c_n) \quad (2.191)$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_n$ er nullpunktene (mulig komplekse) til polynomet.

-  Nullpunktene c_i , som også kalles *røtter*, kan generelt være komplekse. Komplekse tall er ikke pensum i dette kurset.
-  Faktorisering blir et viktig hjelpemiddel for løsning av *ulikheter* som vi tar for oss i avsnitt 2.6.2
-  Faktorisering kan også utvides til å omfatte generelle algebraiske uttrykk. Som regel vil det å finne nullpunktene da være svært komplisert og man må ofte ty til numeriske løsninger.
-  Faktorisering brukes også til å finne *felles faktorer* mellom to forskjellige polynomer.

²⁵ Komplekse tall er ikke pensum. Vi kommer kun til å se på faktoriseringer med kun reelle nullpunkter.

■ **Eksempel 2.37** Finn faktoriseringen til polynomet

$$y = x^2 + 5x \tag{2.192}$$

Løsning:

Vi trekker ut **felles faktor** x fra polynomet:

$$y = x^2 + 5x = x(x + 5) \tag{2.193}$$

som er på faktorisert form med **nullpunktene** $c_1 = 0$ og $c_2 = -5$.

■

■ **Eksempel 2.38** Finn faktoriseringen til det algebraiske uttrykket

$$xy + 7y \tag{2.194}$$

Løsning:

Vi trekker ut **felles faktor** y fra uttrykket:

$$xy + 7y = y(x + 7) \tag{2.195}$$

som er på faktorisert form.

■

■ **Eksempel 2.39** Finn faktoriseringen til polynomet

$$y = 4x^2 - 20xb + 25b^2. \quad (2.196)$$

Løsning:

ABC-formelen gir nullpunktene:

$$c_1 = \frac{-(-20b) - \sqrt{20^2b^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25b^2}}{2 \cdot 4} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-(-20b) + \sqrt{20^2b^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25b^2}}{2 \cdot 4} \quad (2.197)$$

$$= \frac{-(-20b) - \sqrt{400b^2 - 400b^2}}{8} \quad \text{og} \quad = \frac{-(-20b) + \sqrt{400b^2 - 400b^2}}{8} \quad (2.198)$$

$$= \frac{-(-20b) - \sqrt{400b^2 - 400b^2}}{8} \quad \text{og} \quad = \frac{-(-20b) + \sqrt{400b^2 - 400b^2}}{8} \quad (2.199)$$

$$= \frac{-(-20b) - 0}{8} \quad \text{og} \quad = \frac{-(-20b) + 0}{8} \quad (2.200)$$

$$= \frac{5}{2}b \quad \text{og} \quad = \frac{5}{2}b, \quad (2.201)$$

som gir **faktoriseringen**

$$4x^2 - 20xb + 25b^2 = \underbrace{\left(x - \frac{5}{2}b\right)\left(x - \frac{5}{2}b\right)}_{\text{faktorisert form}}. \quad (2.202)$$

■

■ **Eksempel 2.40** Finn faktoriseringen til det algebraiske uttrykket²⁶.

$$8x^4y^4 - 2 \quad (2.203)$$

Løsning:

Vi trekker ut **felles faktor** 8 og gjenkjenner formen til konjugatsetningen.

$$8x^4y^4 - 2 = 8\left(x^4y^4 - \frac{1}{4}\right) \quad (2.204)$$

$$= 8\left(x^2y^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x^2y^2 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{konjugatsetningen} \quad (2.205)$$

$$= 8\left(xy - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(xy + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \overbrace{\left(xy - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^{\text{kompleks}} \overbrace{\left(xy + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}^{\text{kompleks}} \quad (2.206)$$

■

■ **Eksempel 2.41** Det algebraiske uttrykket

$$ab + ac - ad = \overbrace{a(b + c - d)}^{\text{faktorisert form}} \quad (2.207)$$

er null, dvs. $a(b + c - d) = 0$, dersom

$$a = 0 \quad \vee \quad b + c - d = 0 \quad (2.208)$$

■

■ **Eksempel 2.42** Det algebraiske uttrykket

$$2a^2b - 4ab = 2a \overbrace{ab - 2ab}^{\text{faktorisert form}} = 2ab(a - 2) \quad (2.209)$$

er lik null, dvs. $2ab(a - 2) = 0$, dersom

$$a = 0 \quad \vee \quad b = 0 \quad \vee \quad a = 2 \quad (2.210)$$

■

²⁶Eksempelen viser tilfellet ved komplekse røtter for kompletthetens skyld. Her er $i = \sqrt{-1}$

■ **Eksempel 2.43** Kvadratsetningene og konjugatsetningen er faktoriseringer:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = \overbrace{(a + b)^2}^{\text{faktorisert form}} \quad (1. \text{ kvadratsetning}) \quad (2.211)$$

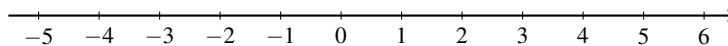
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b) = \overbrace{(a - b)^2}^{\text{faktorisert form}} \quad (2. \text{ kvadratsetning}) \quad (2.212)$$

$$a^2 - b^2 = \overbrace{(a + b)(a - b)}^{\text{faktorisert form}} \quad (\text{konjugatsetningen}) \quad (2.213)$$

■

2.7 Ulikheter

Alle tallmengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er utstyrt med en *ordningsrelasjon*. En ordningsrelasjon plasserer i prinsippet alle tallene langs en *rekkefølge*. Visuelt sett er dette den velkjente tallinjen, hvor vi bruker konvensjonen om at voksende tall går mot høyre.



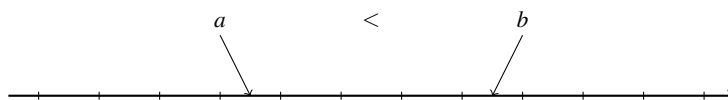
Figur 2.30: Tallene er *ordnet* langs en rett linje.

Definisjon 2.7.1 Dersom et tall b er til høyre for et annet tall a på tallinjen, sier vi at a er mindre enn b .

Matematisk skriver vi

$$a < b. \quad (2.214)$$

Figur 2.31 illustrerer lign.(2.214):



Figur 2.31: Når a er mindre enn b , dvs. $a < b$.

K Dersom vi også tillater at $a = b$, skriver vi

$$a \leq b. \quad (2.215)$$

Tegnet $\leq$ betyr "*mindre enn eller lik*".

K At a er mindre enn b , er ekvivalent med at b er *større enn* a :

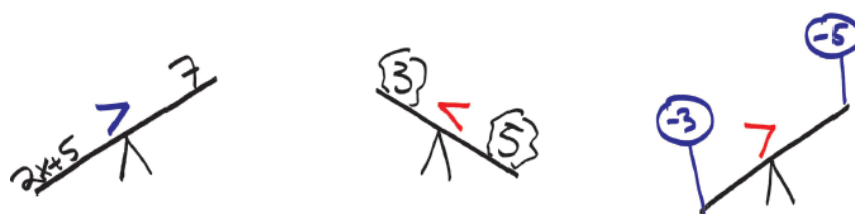
$$b > a \quad \text{som betyr "større enn "} \quad (2.216)$$

$$b \geq a \quad \text{som betyr "større enn eller lik"} \quad (2.217)$$

■ **Eksempel 2.44** Noen enkle eksempler på ordningsrelasjonen:

$3 < 5$	(2.218)
$5 > 3$	(2.219)
$5 \geq 3$	(2.220)
$3 \leq 3$	(2.221)
$-3 > -5$	(2.222)

■



Figur 2.32: Ordningsrelasjonene $<$ og $>$.

Med **ordningsrelasjonene** på plass, kan vi definere hva vi mener med en **algebraisk ulikhet**, som er svært beslektet med en algebraisk ligning.

Definisjon 2.7.2 — Algebraisk ulikhet

En algebraisk ulikhet er en ulikhet på formen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.223)$$

hvor $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er to algebraiske uttrykk med n variabler $x_1, x_2, \dots, x_n$.

K Vi kan i lign.(2.223) skifte ut $<$ med en av $>$, $\leq$ eller $\geq$.

K **Løsningsmengden** til lign.(2.223) er definert på samme måte som for algebraiske ligninger:

$$\mathcal{L} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \}. \quad (2.224)$$

■ **Eksempel 2.45** Løs ulikheten

$$0 \leq 4x - 8 \quad (2.225)$$

Løsning

Vi transformerer ulikheten til en enklere form:

$$0 \leq 4x - 8 \quad \quad \quad / + 8 \quad (2.226)$$

$$\Downarrow$$

$$8 \leq 4x \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{4} \quad (2.227)$$

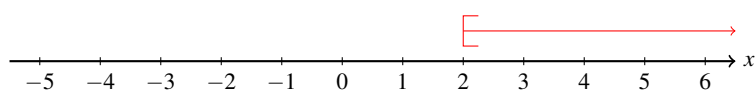
$$\Downarrow$$

$$2 \leq x \quad (2.228)$$

som gir **løsningsmengden**:

$$\mathcal{L} = \{ x \mid 2 \leq x \} = [2, \infty) \quad (2.229)$$

Figur 2.33 illustrerer løsningsmengden langs tallinjen.



Figur 2.33: Løsningsmengden til $0 \leq 4x - 8$.

■

2.7.1 Transformasjoner for ulikheter

Når vi skal løse ulikheter, dvs. finne løsningsmengden til ulikheten, kan vi bruke samme strategi som for ligninger, nemlig å *transformere* ulikheten til ekvivalente ulikheter som er *enklere*.

Noe som gjør ulikheter *vanskeligere* å løse enn ligninger, er at vi må være forsiktige med enkle transformasjoner som multiplikasjon og divisjon og potens, da disse transformasjonene ikke alltid er gyldige eller krever ekstra antagelser.

■ Eksempel 2.46 Ulikheten

$$\frac{x+1}{x-1} + x < 4 \quad (2.230)$$

kan vi *ikke* transformeres ved å multiplisere med $(x-1)$, siden uttrykket $(x-1)$ kan både være positivt eller negativt.

Siden vi ikke vet om $(x-1)$ er positiv eller negativ, vet vi ikke om vi må snu ulikhetstegnet eller ikke dersom vi multipliserer med $(x-1)$.

Vi må i tillegg *anta* at $(x-1) > 0$ eller $(x-1) < 0$ for at transformasjonen skal bli gyldig.

■

■ Eksempel 2.47 Ulikheten

$$x < -4 \quad (2.231)$$

kan vi *ikke* transformeres ved å ta 2. potensen av høyre og venstre side:

$$x^2 < (-4)^2 = 16 \quad (2.232)$$

som tillater at $x > 4$ også er løsning.

Vi må i tillegg *anta* høyre og venstre side har samme fortegn dersom vi vil transformere ulikheten ved å ta 2. potensen.

■

Setning 2.7.1 For en gitt algebraisk ulikhet

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.233)$$

har vi følgende gyldige transformasjoner:

$$\text{Addere med et tall } a \quad \quad \quad / + a \quad (2.234)$$

$$\text{Subtrahere med et tall } a \quad \quad \quad / - a \quad (2.235)$$

$$\text{Multiplisere med et positivt tall } a > 0 \quad \quad \quad / \cdot a \quad (2.236)$$

$$\text{Dividere med et positivt tall } a > 0 \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{a} \quad (2.237)$$

■ **Eksempel 2.48** Løs ulikheten

$$3x + 2 > x + 3 \quad (2.238)$$

Løsning:

Vi løser ulikheten ved hjelp av **transformasjoner**:

$$3x + 2 > x + 3 \quad \quad \quad / - x \quad (2.239)$$

$\Updownarrow$

$$2x + 2 > 3 \quad \quad \quad / - 2 \quad (2.240)$$

$\Updownarrow$

$$2x > 1 \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad (2.241)$$

$\Updownarrow$

$$x > \frac{1}{2}, \quad (2.242)$$

som gir løsningsmengden:

$$\mathcal{L} = \left\{ x \mid x > \frac{1}{2} \right\} = \left\langle \frac{1}{2}, \infty \right\rangle \quad (2.243)$$

■

Vi kan også transformere en ligning ved å multiplisere eller dividere med et *negativt* tall, men da må man huske på å *snu* ulikhetstegnet.

Setning 2.7.2 For en gitt algebraisk ulikhet

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.244)$$

er følgende transformasjoner gyldige:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \bigg/ \cdot a \quad (2.245)$$

$$\Updownarrow$$

$$aA(x_1, x_2, \dots, x_n) > aB(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.246)$$

og

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{a} \quad (2.247)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{a}A(x_1, x_2, \dots, x_n) > \frac{1}{a}B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.248)$$

hvor $a < 0$ er et negativt tall.

■ **Eksempel 2.49** Multipliserer vi en ulikhet med et negativt tall, må vi *snu* ulikhetstegnet:

$$5 > 3 \quad \bigg/ \cdot (-1) \quad (2.249)$$

$$\Updownarrow$$

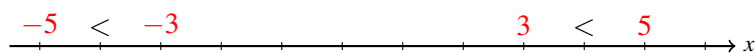
$$-5 < -3 \quad (2.250)$$

■

■ **Eksempel 2.50** Dividerer vi en ulikhet med et negativt tall, må vi *snu* ulikhetstegnet:

$$5 > 3 \qquad \qquad \qquad / \cdot (-1) \qquad \qquad \qquad (2.251)$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad -5 < -3 \qquad \qquad \qquad (2.252)$$



Figur 2.34: Negative og positive tall har **omvendt** rekkefølge.

■

K For ulikheter, har vi også følgende regel:

Aldri multiplisere eller dividere med uttrykk (2.253)
som inneholder den ukjente.

Dette er fordi vi ikke vet hvilken verdi den ukjente har. Vi må i så fall restriktene verdiene x kan ta slik at uttrykket enten kun er negativt eller positivt (ikke null).

■ **Eksempel 2.51** Løs ulikheten:

$$-4(x-2) + 3(x+4) \geq 5x - (x-1) \quad (2.254)$$

Løsning:

$$-4(x-2) + 3(x+4) \geq 5x - (x-1) \quad (\text{Løs opp parenteser}) \quad (2.255)$$

$$\Downarrow$$

$$-4x + 8 + 3x + 12 \geq 5x - x + 1 \quad (\text{Samle like ledd}) \quad (2.256)$$

$$\Downarrow$$

$$-x + 20 \geq 4x + 1 \quad / +x, -1 \quad (2.257)$$

$$\Downarrow$$

$$19 \geq 5x \quad / \cdot \frac{1}{5} \quad (2.258)$$

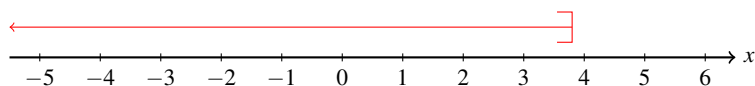
$$\Downarrow$$

$$\frac{19}{5} \geq x, \quad (2.259)$$

som gir løsningsmengden:

$$\mathcal{L} = \left\{ x \mid \frac{19}{5} \geq x \right\} = \left\langle \infty, \frac{19}{5} \right] \quad (2.260)$$

Figur 2.33 illustrerer løsningsmengden langs tallinjen. ²⁷



Figur 2.35: Løsningsmengden til lign.(2.254).

■

²⁷ $\frac{19}{5} = 3.8$

2.7.2 Polynomulikheter

Polynomeulikheter av **grad n** er ulikheter på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 > 0 \quad n > 0 \quad (2.261)$$

■ **Eksempel 2.52** Noen eksempel på polynomulikheter:

$$x^2 + 4x - 4 > 0 \quad (2.262)$$

$$x^3 - x^2 - 5 \leq 2x^2 + 4 \quad (2.263)$$

$$100x^7 - 1 < 0 \quad (2.264)$$

■

Polynomulikheter er et godt eksempel hvor **faktorisering** kommer til nytte. Følgende løsningsmetode kalles løsning ved **fortegnsskjema** og bygger på faktoriseringen av et polynom.

■ **Eksempel 2.53** Løs polynomulikheten

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \quad (2.265)$$

Løsning:

Først finner vi *faktoriseringen* til polynomet $y = x^2 + 3x - 4$. Nullpunktene finnes enkelt ved ABC-formelen: ²⁸

$$c_1 = -4 \wedge c_2 = 1 \quad (2.266)$$

som gir den faktoriserte versjonen

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \quad (2.267)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ (x+4)(x-1) > 0 \end{array} \quad (2.268)$$

av ulikheten i lign.(2.265). Legg merke til at lign.(2.268) er på formen

$$f_1 f_2 > 0 \quad (2.269)$$

hvor f_1 og f_2 er *faktorene*, dvs.

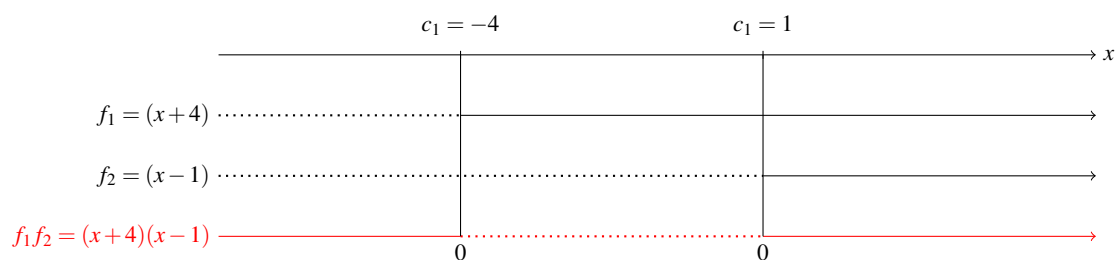
$$\overbrace{(x+4)}^{f_1} \overbrace{(x-1)}^{f_2} > 0 \quad (2.270)$$

Det eneste vi må sørge for er at produktet $f_1 f_2$ er *positivt*. **Fortegnsreglene** sier at et produkt $f_1 f_2$ er positivt dersom begge faktorene enten er bare positive eller bare negative, dvs.

$$f_1 > 0, f_2 > 0 \text{ eller } f_1 < 0, f_2 < 0 \quad (2.271)$$

En svært god og enkel måte å bestemme når lign.(2.271) er oppfylt er ved hjelp av såkalt *fortegnsskjema*. Ideen er å bestemme for hvilke x faktorene f_1 og f_2 har like/ulike fortegn på en enkel og visuell måte. Figur 2.36 viser fortegnsskjemaet for faktorene f_1 og f_2 .

²⁸Verifiser for deg selv at ABC-formelen gir $c_1 = -4$ og $c_2 = 1$.



Figur 2.36: Fortegnsskjema.

Figur 2.36 kan forstås på følgende måte:

1. Øverste linjen viser **tallinjen**. Vi merker av begge nullpunktene $c_1 = -4$ og $c_2 = 1$.
2. Linje nr. 2 viser hvor faktoren $f_1 = (x + 4)$ er negativ og positiv hhv. Den *stiplede* linjen viser hvor $f_1 < 0$ (negativ), mens den *heltrukne* linjen viser hvor $f_1 > 0$ (positiv).
3. Linje nr. 3 viser hvor faktoren $f_2 = (x - 1)$ er negativ og positiv hhv. Den *stiplede* linjen viser hvor $f_2 < 0$ (negativ), mens den *heltrukne* linjen viser hvor $f_2 > 0$ (positiv).
4. Linje nr. 4 (**rød** linje) viser hvor *produktet* $f_1 f_2 = (x + 4)(x - 1)$ er negativt og positivt hhv. ²⁹

Vi kan nå lese av løsningsmengden direkte fra figur 2.36 ved å se for hvilke x den siste linjen er *heltrukken*:

$$x < -4 \vee x > 1, \quad (2.272)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle \infty, -4 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle \quad (2.273)$$

■

²⁹Legg merke til at her bruker vi *fortegnsreglene*. Første del av linjen blir *heltrukken* (positiv) siden både f_1 og f_2 er *stiplede* (negative). Neste del av linjen blir *stiplet* (negativ) siden f_1 er *heltrukken* (positiv) mens f_2 er *stiplet* (negativ). Siste del av linjen er *heltrukken* siden både f_1 og f_2 er *heltrukne* (positive).

Løsningsmetodikken ved hjelp av fortegnsskjema som vi brukte i eksempel 2.53, kan generaliseres for polynomer av *enhver* grad n .

Setning 2.7.3 — Løsning av polynomulikheter ved fortegnsskjema

En polynomulikheter på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 > 0 \quad n > 0, a_n > 0 \quad (2.274)$$

kan løses ved hjelp av følgende metode:

1. Finn *faktoriseringen* til polynomet, dvs. finn *nullpunktene* $c_1, c_2, \dots, c_n$ og skriv ulikheten i lign.(2.274) på den ekvivalente formen

$$\underbrace{a_n}_{f_0} \underbrace{(x - c_1)}_{f_1} \underbrace{(x - c_2)}_{f_2} \cdots \underbrace{(x - c_{n-1})}_{f_{n-1}} \underbrace{(x - c_n)}_{f_n} > 0 \quad n > 0, a_n > 0 \quad (2.275)$$

2. Sett opp et *fortegnsskjema* for faktorene $f_i = (x - c_i)$ for $i = 0, 1, 2, \dots, n$.
En ny linje for hver faktor.

	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-1}	c_n	x
$f_0 = a_n$						
$f_1 = (x - c_1)$						
$f_2 = (x - c_2)$						
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f_{n-1} = (x - c_{n-1})$						
$f_n = (x - c_n)$						
$f_0 f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n$	0	0	...	0	0	

Den *røde* linjen viser hvor lign.(2.275) er oppfylt (heltrukne linjer).

Vi har her antatt at n er et *partall* og at nullpunktene c_i er sortert i *voksende* rekkefølge. Dersom n er et *oddetall*, får den siste linjen motsatt mønster.

Vi har også antatt at konstanten a_n er positiv (0te faktor f_0). Dersom konstanten a_n er *negativ*, må den *blå* linjen i fortegnsskjemaet være stiplet (negativ) istedet for heltrukken (positiv).

■ **Eksempel 2.54** Polynomet

$$y = -2x^4 - 14x^3 + 188x^2 + 656x - 1920 \quad (2.276)$$

har nullpunktene $c_1 = -12$, $c_2 = -4$, $c_3 = 2$ og $c_4 = 8$. Løs ulikheten

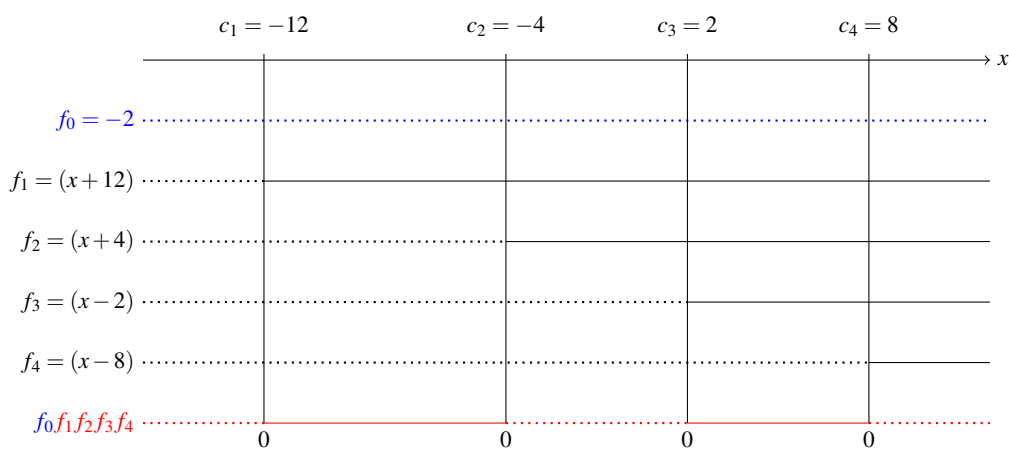
$$-2x^4 - 14x^3 + 188x^2 + 656x - 1920 < 0. \quad (2.277)$$

Løsning:

Siden vi har oppgitt nullpunktene, kan vi skrive opp den *faktoriserte* versjonen av ulikheten i lign.(2.277):

$$-2(x+12)(x+4)(x-2)(x-8) < 0 \quad (2.278)$$

Vi setter deretter opp *fortegnsskjemaet* for de 5 faktorene:



Figur 2.37: Fortegnsskjema.

Vi kan nå lese av *løsningsmengden* direkte fra figur 2.37 ved å se for hvilke x den siste linjen er *stiplet* (siden vi har $<$ i lign.(2.277)):

$$x < -12 \quad \vee \quad -4 < x < 2 \quad \vee \quad 8 < x, \quad (2.279)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle \infty, -12 \rangle \cup \langle -4, 2 \rangle \cup \langle 8, \infty \rangle \quad (2.280)$$

■

2.7.3 Ulikheter med rasjonale uttrykk

Definisjon 2.7.3 En rasjonal ulikhet er en ulikhet på formen

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad (2.281)$$

hvor $A(x)$ og $B(x)$ er polynomer av grad n og m hhv.

K Vi kan i lign.(2.281) skifte ut $<$ med en av $>$, $\leq$ eller $\geq$.

■ **Eksempel 2.55** Eksempel på rasjonale ulikheter:

$$1) \quad \frac{x^2 - 1}{x - 2} > 0 \quad (2.282)$$

$$2) \quad \frac{2x^3 + 2x - 4}{2x^2 - 3} \leq 0 \quad (2.283)$$

$$3) \quad \frac{x^{100} - 1}{x^{50} + 2} < 0 \quad (2.284)$$

■

K Rasjonale ulikheter kan løses ved hjelp av **faktorisering** og **fortegnsskjema**.
La $c_1, c_2, \dots, c_n$ være nullpunktene til polynomet $A(x)$ og la $d_1, d_2, \dots, d_m$ være nullpunktene til polynomet $B(x)$.

Da kan lign.(2.281) skrives på den ekvivalente formen

$$\frac{a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)}{b_n(x - d_1)(x - d_2) \cdots (x - d_m)} < 0. \quad (2.285)$$

Vi kan nå skrive lign.(2.285) som et produkt av $n + m + 2$ faktorer ved å observere at

$$\overbrace{a_n}^{f_0} \overbrace{(x - c_1)}^{f_1} \overbrace{(x - c_2)}^{f_2} \cdots \overbrace{(x - c_n)}^{f_n} \overbrace{b_n^{-1}}^{g_0} \overbrace{(x - d_1)^{-1}}^{g_1} \overbrace{(x - d_2)^{-1}}^{g_2} \cdots \overbrace{(x - d_m)^{-1}}^{g_m} < 0. \quad (2.286)$$

Dermed kan vi bruke setning 2.275 (fortegnsskjema) med $n + 1$ faktorer $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ fra polynomet $A(x)$ i telleren og $m + 1$ faktorer $g_0, g_1, g_2, \dots, g_m$ fra polynomet $B(x)$ i nevneren. Totalt har vi $n + m + 2$ faktorer.

■ **Eksempel 2.56** Løs ulikheten:

$$\frac{2x-5}{3x-1} > 1 \quad (2.287)$$

Løsning:

Legg merke til at lign.(2.287) *ikke* er på rett form siden høyresiden *ikke er 0*. Vi må derfor først *transformere* ligningen på rett form:

$$\frac{2x-5}{3x-1} > 1 \quad / -1 \quad (2.288)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2x-5}{x-1} - 1 > 0 \quad (\text{fellesnevner}) \quad (2.289)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2x-5-(3x-1)}{3x-1} > 0 \quad (\text{slå sammen brøken}) \quad (2.290)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-x-4}{3x-1} > 0 \quad (2.291)$$

Vi finner så faktoriseringene til polynomene i telleren $A(x)$ og nevneren $B(x)$ hhv:

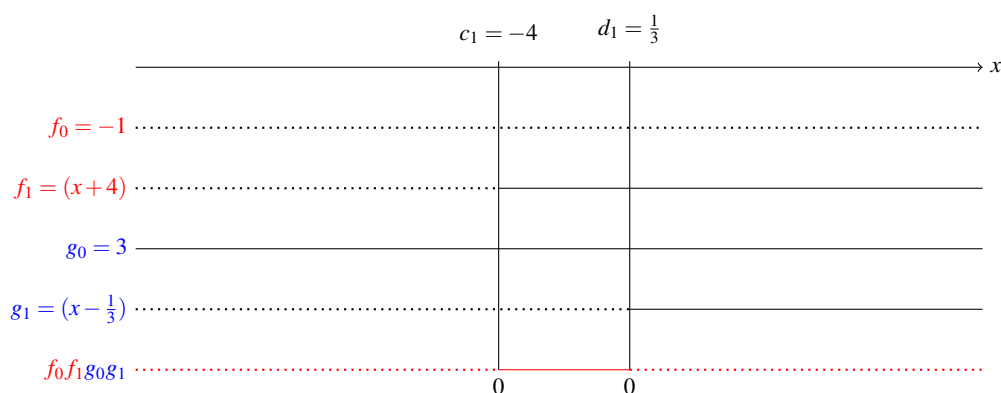
$$A(x) = -x-4 = \overbrace{-1}^{f_0} \overbrace{(x+4)}^{f_1} \quad (\text{nullpunkt: } c_1 = -4) \quad (2.292)$$

$$B(x) = 3x-1 = \overbrace{3}^{g_0^{-1}} \overbrace{\left(x-\frac{1}{3}\right)}^{g_1^{-1}} \quad (\text{nullpunkt: } d_1 = \frac{1}{3}) \quad (2.293)$$

Lign.(2.291) kan dermed skrives på den ekvivalente formen

$$\overbrace{-1}^{f_0} \overbrace{(x+4)}^{f_1} \overbrace{3}^{g_0} \overbrace{\left(x-\frac{1}{3}\right)}^{g_1} > 0 \quad (2.294)$$

Vi setter opp fortegnsskjema for faktorene f_0 , f_1 , g_0 og g_1 :



Figur 2.38: Fortegnsskjema.

Vi kan nå lese av **løsningsmengden** direkte fra figur 2.38 ved å se for hvilke x den siste linjen er *heltrukket* (siden vi har $>$ i lign.(2.294)):

$$-4 < x < \frac{1}{3} \quad (2.295)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \left\langle -4, \frac{1}{3} \right\rangle \quad (2.296)$$

■

■ **Eksempel 2.57** La oss sammenlign løsningen av ulikheten

$$\frac{2x-5}{3x-1} > 1 \quad \mathcal{L} = \left\langle -4, \frac{1}{3} \right\rangle \quad (2.297)$$

med løsningen av *likheten*

$$\frac{2x-5}{3x-1} = 1 \quad \mathcal{L} = \{ -4 \}. \quad (2.298)$$

Vi viste i eksempel 2.56 at løsningen av lign.(2.298) var gitt ved $x = -4$ (nullpunktet for polynomet i telleren).

Konklusjon: Det er uendelig mange løsninger av ulikheten, mens tilsvarende ligning hadde kun en løsning).

■

2.8 Absoluttverdi

Å ta absoluttverdien av et tall betyr å fjerne *fortegnet* fra tallet:

$$|-3| = 3 \quad (2.299)$$

$$|3| = 3 \quad (2.300)$$

dvs. en absoluttverdi er alltid positiv (eller 0).

Definisjon 2.8.1 — Absoluttverdi

Absoluttverdien av et tall $a \in \mathbb{R}$ er definert som

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{ når } a \geq 0 \\ -a & , \text{ når } a < 0 \end{cases} \quad (2.301)$$

■ Eksempel 2.58 Absoluttverdier:

$$|-17| = 17 \quad (2.302)$$

$$|0| = 0 \quad (2.303)$$

$$|145| = 145 \quad (2.304)$$

■

■ **Eksempel 2.59** Tegn opp punktene (x, y) som oppfyller ligningen:

$$y = \overbrace{|2x-3|}^{\text{alltid positivt}} \quad (2.305)$$

Løsning:

Vi må finne **nullpunktet** til uttrykket i absoluttverdien i lign.(2.305).

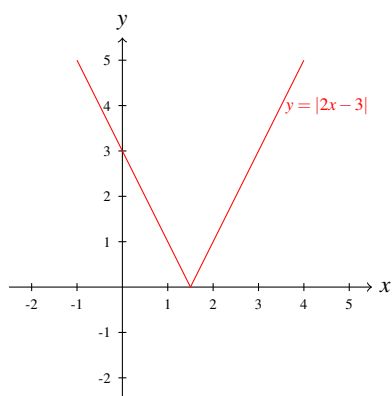
$$2x - 3 = 0 \quad \quad \quad / +3, \cdot \frac{1}{2} \quad (2.306)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ x = \frac{3}{2} \end{array} \quad (2.307)$$

Dermed vet vi at uttrykket er negativt når $x < \frac{3}{2}$ og positivt eller null når $x \geq \frac{3}{2}$. Definisjonen gir da

$$y = |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & , \text{ når } x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x - 3) & , \text{ når } x < \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (2.308)$$

Figur 2.39 viser at absoluttverdien er alltid **positiv** og **symmetrisk** rundt nullpunktet, som i dette tilfellet er $c_1 = \frac{3}{2}$.



Figur 2.39: Plott av ligningen $y = |2x - 3|$.

■

■ **Eksempel 2.60** Dersom vi først kvadrerer et tall, f.eks. $(-3)^2$, og deretter tar kvadratroten så får man absoluttverdien av tallet:

$$\sqrt{(-3)^2} = 3 \quad (2.309)$$

Dette gjelder uansett om tallet er negativt eller positivt:

$$\sqrt{3^2} = 3 \quad (2.310)$$

■

Eksempel 2.60 viser en generell sammenheng:

Setning 2.8.1 For ethvert reelt tall $a \in \mathbb{R}$ gjelder

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad (2.311)$$

uansett om a er positiv eller negativ.

■ **Eksempel 2.61** Løs ligningen:

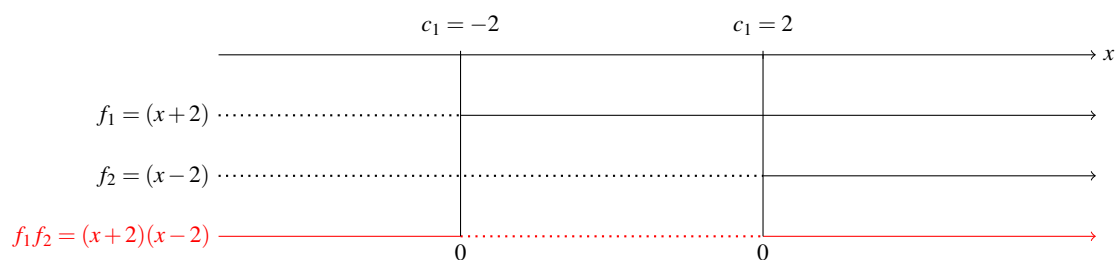
$$|x^2 - 4| + 2x + 1 = 0 \quad (2.312)$$

Løsning:

Vi må først fjerne absolutttegnet ved å finne verdiene hvor uttrykket $x^2 - 4$ er positivt og negativt hhv. For å gjøre dette bruker vi **faktorisering** og **fortegnsskjema**. Vi gjenkjenner formen på konjugatsetningen:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \quad (2.313)$$

som viser at uttrykket har faktorene $f_1 = (x + 2)$ og $f_2 = (x - 2)$. Dermed setter vi opp fortegnsskjema for faktorene:



Figur 2.40: Fortegnsskjema.

Vi ser av fortegnsskjemaet at

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & , \quad \text{når } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -(x^2 - 4) & , \quad \text{når } -2 < x < 2 \end{cases} \quad (2.314)$$

Vi får dermed to forskjellige ligninger som må løses:

$$1) \quad x \leq -2 \vee x \geq 2 \quad : \quad x^2 - 4 + 2x + 1 = 0 \quad (2.315)$$

$$2) \quad -2 < x < 2 \quad : \quad -x^2 - 4 + 2x + 1 = 0 \quad (2.316)$$

Dette er to separate 2.gradsligninger som vi løser enkelt ved ABC-formelen:

1) 1) $x \leq -2 \vee x \geq 2$:

$$x^2 - 4 + 2x + 1 = 0 \quad (2.317)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (2.318)$$

ABC-formelen gir nullpunktene:

$$c_1 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \quad (2.319)$$

$$= \frac{-2 - 4}{2} \quad \quad \quad = \frac{-2 + 4}{2} \quad (2.320)$$

$$= -3 \quad \quad \quad \neq 1 \quad (2.321)$$

2) $-2 < x < 2$:

$$-(x^2 - 4) + 2x + 1 = 0 \quad (2.322)$$

$$\Updownarrow$$

$$-x^2 + 2x + 5 = 0 \quad (2.323)$$

ABC-formelen gir **nullpunktene**

$$c_1 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} \quad (2.324)$$

$$= \frac{-2 - \sqrt{24}}{-2} \quad \quad \quad = \frac{-2 + \sqrt{24}}{-2} \quad (2.325)$$

$$= -1 - \sqrt{6} \quad \quad \quad \neq 1 \neq \sqrt{6} \quad (2.326)$$

Løsningen er dermed gitt ved

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 1 - \sqrt{6}, \quad (2.327)$$

som gir **løsningsmengden**

$$\mathcal{L} = \{ -3, 1 - \sqrt{6} \}. \quad (2.328)$$

■