



# SCM200

## Lager- og produksjonsplanlegging

Løsningsforslag til eksamensoppgaver 2015 - 2019

Bård-Inge Pettersen  
Per Kristian Rekdal



**Høgskolen i Molde**  
Vitenskapelig høgskole i logistikk



# Forord

## Løsningsforslag:

Dette er en [samling av løsningsforslag](#) til gamle eksamensoppgaver i emnet “*SCM200 Lager- og produksjonsplanlegging*” ved Høgskolen i Molde.

Det finnes også en tilhørende samling med selve eksamensoppgavene til disse løsningsforslagene. Samlingen med eksamensoppgaver finnes i et eget hefte, separert fra dette løsningsheftet.

## Gratis:

Både samlingen med oppgaver og tilhørende samling med komplette løsningsforslag kan lastes ned [gratis](#) via Høgskolen i Molde sin åpne kursportal [www.himoldeX.no](http://www.himoldeX.no).

## Hvordan bruke denne samlingen av tidligere eksamensoppgaver med løsningsforslag?:

Det anbefales å [regne gjennom](#) gamle eksamensoppgaver før eksamen. Dersom man gjør det så får man en god pekepinn på hva som kreves på eksamensdagen. [Sett av 5 timer](#), prøv så godt du kan uten løsningsforslag. Etter at de 5 timene er over, rett din egen eksamensbesvarelse. Og sett gjerne karakter på deg selv.

Ikke bare i eksamensperioden, men også ellers i semesteret kan det være lurt å regne gjennom gamle eksamensoppgaver. Men gå gjennom teorien før man gjør oppgaver. Da får man bedre utbytte av oppgaveløsningen.

## Videoer:

Komplette sett med forelesningsvideoer i SCM200 finner du [her](#).

Bård-Inge Pettersen

Copyright © Høgskolen i Molde, januar 2020.

# Innhold

|    |                           |     |
|----|---------------------------|-----|
| 1  | Testeksamen 2015          | 5   |
| 2  | Hovedeksamen 2015         | 17  |
| 3  | Kontinuasjonseksamen 2015 | 36  |
| 4  | Testeksamen 2016          | 54  |
| 5  | Hovedeksamen 2016         | 86  |
| 6  | Kontinuasjonseksamen 2016 | 115 |
| 7  | Testeksamen 2017          | 143 |
| 8  | Hovedeksamen 2017         | 167 |
| 9  | Kontinuasjonseksamen 2017 | 184 |
| 10 | Testeksamen 2018          | 205 |
| 11 | Hovedeksamen 2018         | 220 |
| 12 | Kontinuasjonseksamen 2018 | 233 |
| 13 | Testeksamen 2019          | 246 |
| 14 | Hovedeksamen 2019         | 262 |
| 15 | Kontinuasjonseksamen 2019 | 280 |

# Testeksamen 2015

# LØSNING: Testeksamen mai 2015

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2015

## Oppgave 2: ( “MPS og MRP og sekvensiering” )

a )

i ) Vi setter opp masterplantabellen for Tripp-Trapp stolen:

| Uke                   | init | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|-----------------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Prognose              |      | 300 | 380 | 340 | 230 | 420 | 250 | 320 | 280 | 340 | 300 |
| Ordre                 |      | 350 | 180 | 400 | 350 | 340 | 300 | 250 | 40  | 140 | 450 |
| Lagernivå             | 800  | 450 | 270 | 670 | 320 | 700 | 400 | 80  | 600 | 260 | 760 |
| Ledig-til-reservasjon |      | 270 |     | 50  |     | -90 |     |     | 620 |     | 350 |
| MPS                   |      |     |     | 800 |     | 800 |     |     | 800 |     | 800 |

ii Det er raden som kalles ”Ledig-Til-Reservasjon”, som forteller Stokke hva de kan love forhandlerne.

Definisjonen av Ledig-Til-Reservasjon: Ledig-Til-Reservasjon er definert som differansen mellom bestilt produksjonsordre (MPS) og antall solgte ordrer (Ordre) totalt frem til neste bestilte produksjonsordre.

iii) Problemet med planen er at Ledig-Til-Reservasjon er -90 i uke 5. De har dermed lovet 90 Tripp-TRapp stoler mer enn de klarer å levere.

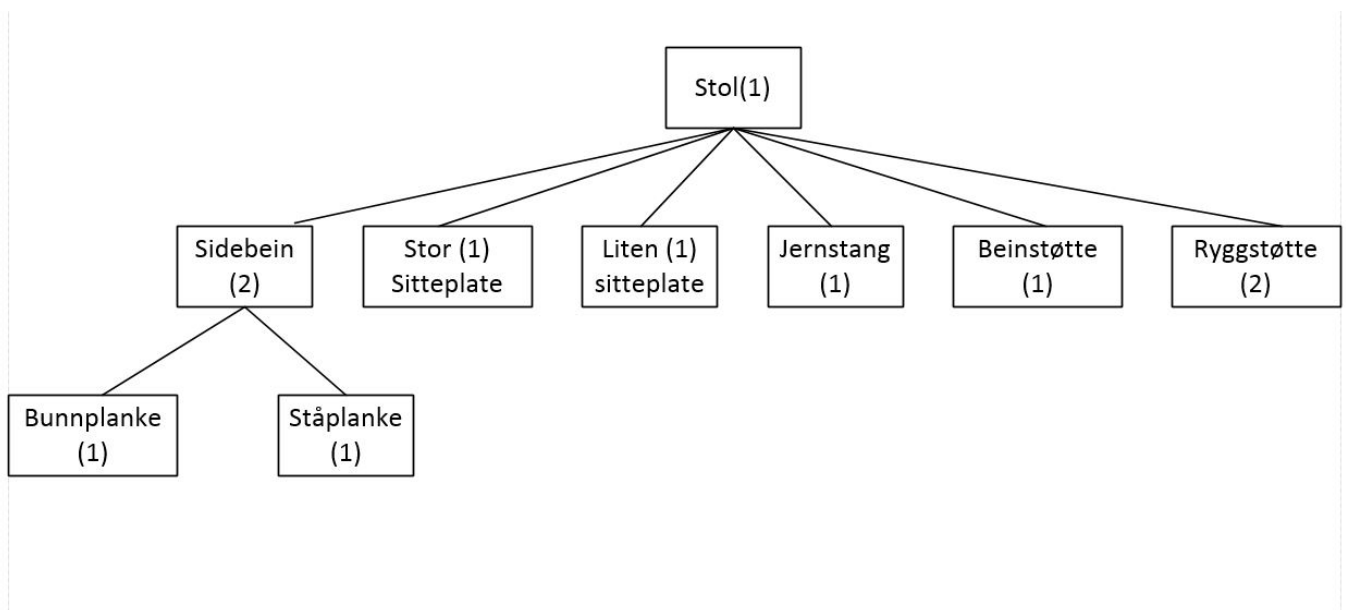
En slik situasjon kan oppstå dersom selgerne legger inn ordrer uten å ta hensyn til Ledig-Til-Reservasjon. Selgere lover ofte kundene noe som de ikke klarer å levere.

Det er mange måter å løse et slikt problem på :

- De kan øke MPS til 890 i uke 5, dette er nok den vanligste metoden. Dette vil som regel medføre eventuelt overtidsarbeid og ekstra kostnader.
- De kan ringe til kundene og be om andre leveringsdatoer, f.eks. flytte noen av ordrene til uke 8.

b) Vi skal gjennomføre MRP-beregninger for TRipp-Trapp-stolen de neste 10 ukene.

i) BOM-strukturen er gitt ved:



Figur 1: BOM-strukturen for Tripp-TRapp stolen

ii) Vi har allerede lagd en MPS-plan for selve Tripp-TRapp stolen i oppgave a) (Masterplanen). Det eneste vi må huske er at MPS-planen gir kun når stolene skal være ferdige, dvs. MPS-planen tar ikke høyde for produksjonstiden, som er 2 uker for en serie på 800 Tripp-Trapp stoler.

Det første vi avgjør er hvor mange MRP-tabeller vi skal føre. Siden jernstang, bunnplanke og beinstøtte er C-artikler, føres det ikke MRP-tabeller for disse. I tillegg er det nok med en felles MRP-tabell for stor og liten sitteplate. Vi skal altså lage 4 MRP-tabeller i denne oppgaven:

- Ryggstøtte
- Sidebein
- Felels plan for stor og liten sitteplate
- ståplanke

### Ryggstøtte

Siden vi har en MPS-bestilling i uke 3,5,8 og 10 (masterplanen), så blir nettobehovet for ryggstøtte 1600 i uke 1,3,6 og 8.

| Uke             | Init | 1    | 2 | 3    | 4    | 5 | 6    | 7 | 8    | 9 | 10 |
|-----------------|------|------|---|------|------|---|------|---|------|---|----|
| Bruttobehov     |      | 1600 |   | 1600 |      |   | 1600 |   | 1600 |   |    |
| Planlagt mottak |      | 850  |   |      |      |   |      |   |      |   |    |
| Lager           | 800  | 50   |   |      |      |   |      |   |      |   |    |
| Nettobehov      |      |      |   | 1550 |      |   | 1600 |   | 1600 |   |    |
| Planlagt ordre  |      | 1550 |   |      | 1600 |   | 1600 |   |      |   |    |

### Sidebein

Siden vi har en MPS-bestilling i uke 3,5,8 og 10 (masterplanen), så blir nettobehovet for sidebein 1600 i uke 1,3,6 og 8.

| Uke             | Init | 1    | 2    | 3    | 4   | 5   | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|-----------------|------|------|------|------|-----|-----|------|------|------|------|------|
| Bruttobehov     |      | 1600 |      | 1600 |     |     | 1600 |      | 1600 |      |      |
| Planlagt mottak |      |      |      |      |     |     |      |      |      |      |      |
| Sikkerhetslager | 200  | 200  | 200  | 200  | 200 | 200 | 200  | 200  | 200  | 200  | 200  |
| Lager           | 3800 | 2200 | 2200 | 600  | 600 | 600 | 3000 | 3000 | 1400 | 1400 | 1400 |
| Nettobehov      |      |      |      |      |     |     | 1000 |      |      |      |      |
| Planlagt ordre  |      |      |      | 4000 |     |     |      |      |      |      |      |

### Stor og liten sitteplate

Siden vi har en MPS-bestilling i uke 3,5,8 og 10 (masterplanen), så blir nettobehovet for store og små sitteplater 800 i uke 1,3,6 og 8.

| Uke             | Init | 1    | 2    | 3   | 4   | 5    | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|-----------------|------|------|------|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Bruttobehov     |      | 800  |      | 800 |     |      | 800 |     | 800 |     |     |
| Planlagt mottak |      | 1200 |      |     |     |      |     |     |     |     |     |
| Sikkerhetslager | 200  | 200  | 200  | 200 | 200 | 200  | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 |
| Lager           | 100  | 500  | 500  | 700 | 700 | 700  | 900 | 900 | 100 | 100 | 100 |
| Nettobehov      |      |      |      | 300 |     |      | 100 |     |     |     |     |
| Planlagt ordre  |      |      | 1000 |     |     | 1000 |     |     |     |     |     |

## Ståplanke

Siden vi har en ordre på 4000 i uke 3 fra sidebeinplanen, i tillegg til planlagte ordrer på 2000 i uke 3 og uke 6 for den andre varianten, får vi bruttobehov på 6000 i uke 3 og 2000 i uke 6.

I tillegg har vi svinn på lageret på 10% hver uke på grunn av reservedeler. Husk at det er 10% på det *totale* lageret, dvs. inkludert sikkerhetslageret. For å vise utregningene for svinnet, har vi lagt til to ekstra rader: "Lager før svinn" og "Svinn". Raden "Lager etter svinn", er det faktiske lageret vi er ute etter.

| Uke               | Init | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8   | 9   | 10  |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|
| Bruttobehov       |      |      |      | 6000 |      |      | 2000 |      |     |     |     |
| Planlagt mottak   |      |      |      |      |      |      |      |      |     |     |     |
| Sikkerhetslager   | 600  | 600  | 600  | 600  | 600  | 600  | 600  | 600  | 600 | 600 | 600 |
| Lager før svinn   | 3400 | 3400 | 3000 | 4640 | 4115 | 3644 | 1220 | 1038 | 874 | 727 | 594 |
| Svinn             |      | 400  | 360  | 524  | 472  | 424  | 182  | 164  | 147 | 133 | 119 |
| Lager etter svinn |      | 3000 | 2640 | 4116 | 3644 | 3220 | 1038 | 874  | 727 | 594 | 475 |
| Nettobehov        |      |      |      | 3360 |      |      |      |      |     |     |     |
| Planlagt ordre    |      | 8000 |      |      |      |      |      |      |     |     |     |

c) Vi skal se på sekvensieringen av to produkter som går gjennom de samme to stasjonene hos Stokke. Vi har en ordre på 60 Tripp-Trapp stoler og en ordre på 30 vippestoler.

i) For enkelhetsskyld kaller vi ordren for Tripp-Trapp stolene ordre A, mens ordren for vippe-stolene kaller vi for ordre B.

Vi må først beregne *bearbeidingstidene* for hver ordre for hver av stasjonene:

Ordre A:

- Stasjon 1: bearbeidingstiden er  $60 \cdot 3$  minutter = 180 minutter, dvs. 3 timer
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er  $60 \cdot 5$  minutter = 300 minutter, dvs. 5 timer

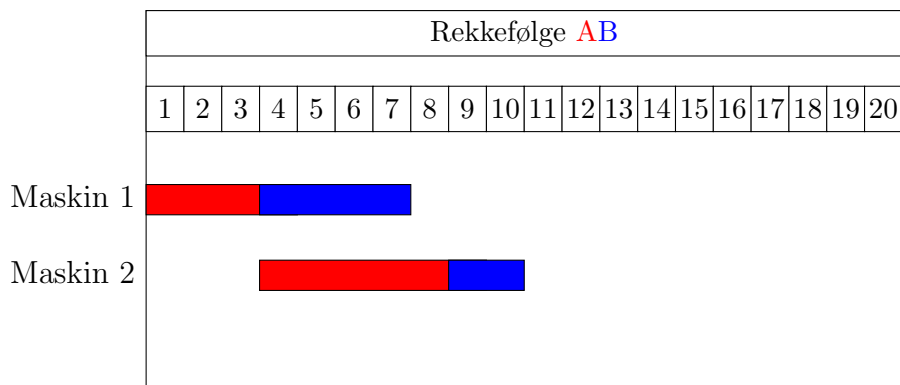
Ordre B:

- Stasjon 1: bearbeidingstiden er  $30 \cdot 8$  minutter = 240 minutter, dvs. 4 timer
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er  $30 \cdot 4$  minutter = 120 minutter, dvs. 2 timer

Siden vi har to ordrer og to stasjoner får vi  $2^2 = 4$  muligheter, men i prinsippet er kun *to* av dem aktuelle, siden hvis A prosesseres først på stasjon1, så må også A prosesseres først på stasjon 2. Å splitte ordrekkefølgen på stasjonene er åpenbart ineffektiv, så vi ser vekk ifra disse. Vi har dermed *to* muligheter: AB eller BA.

Gantt diagram for situasjonen AB, dvs. A først:

Merk: Rød er ordre A mens blå er ordre B:



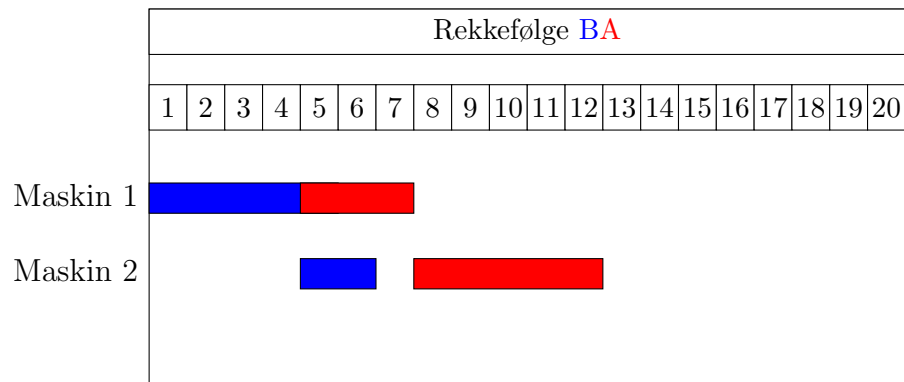
Makespan = sluttid B = 10 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B = 8+10=18 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid = Total gjennomløpstid / 2 = 18/2=9 timer

Gantt diagram for situasjonen BA, dvs. B først:

Merk: Rød er ordre A mens blå er ordre B:



Makespan = sluttid A = 12 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B = 6+12=18 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid = Total gjennomløpstid/2 = 18/2=9 timer

Konklusjon:

Vi ser at hvis vi ønsker å minimere makespan, så er det optimalt med rekkefølgen AB, mens hvis vi bruker total gjennomløpstid, så er både AB OG BA optimale.

ii ) Vi har fått inn en ny ordre, kall den C, på 120 barnebilseter, som også bearbeides gjennom de samme to stasjonene. Igjen må vi regne ut de totale bearbeidingstidene for de to stasjonene:

Ordre C:

- Stasjon 1: bearbeidingstiden er  $120 \cdot 0.5$  minutter = 60 minutter, dvs. 1 time
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er  $120 \cdot 2.5$  minutter = 300 minutter, dvs. 5 timer

Med den ny ordren C øker problemets kompleksitet. Vi har 6 mulige optimale planer:

$ABC$  = Først A, så B så C

$ACB$  = Først A, så C så B

$BAC$  = Først B, så A så C

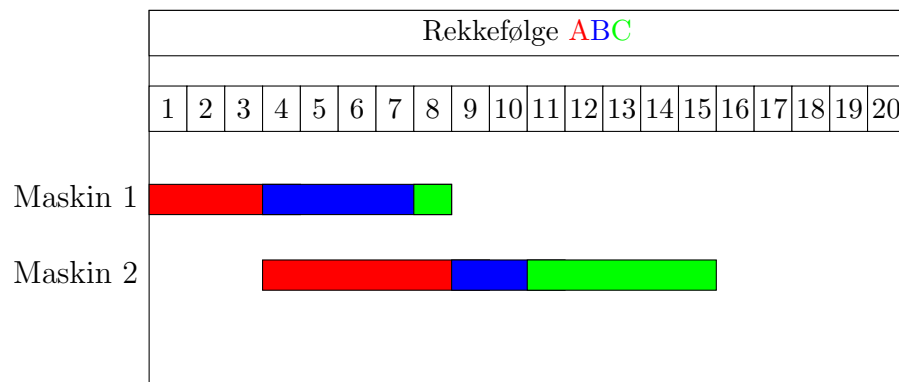
$BCA$  = Først B, så C så A

$CAB$  = Først C, så A så B

$CBA$  = Først C, så B så A

Vi må dermed lage 6 Gantt-diagrammer for å bestemme hvilke av dem som er optimale.

ABC:

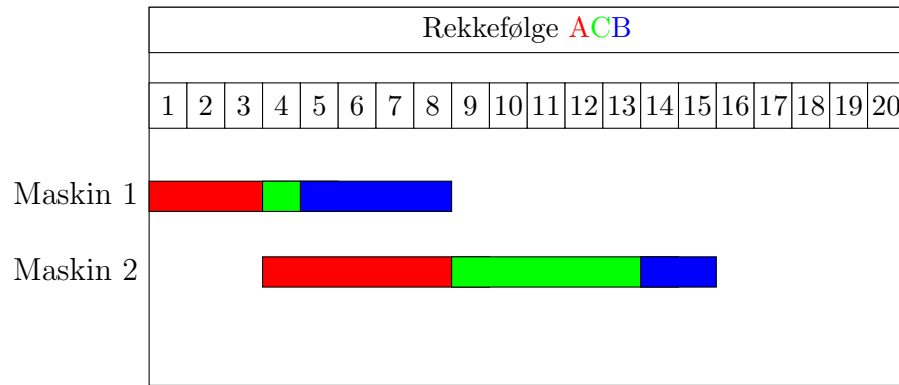


Makespan = sluttid C = 15 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B + sluttid C =  $8 + 10 + 15 = 33$  timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid = Total gjennomløpstid / 3 =  $33 / 3 = 11$  timer

ACB:

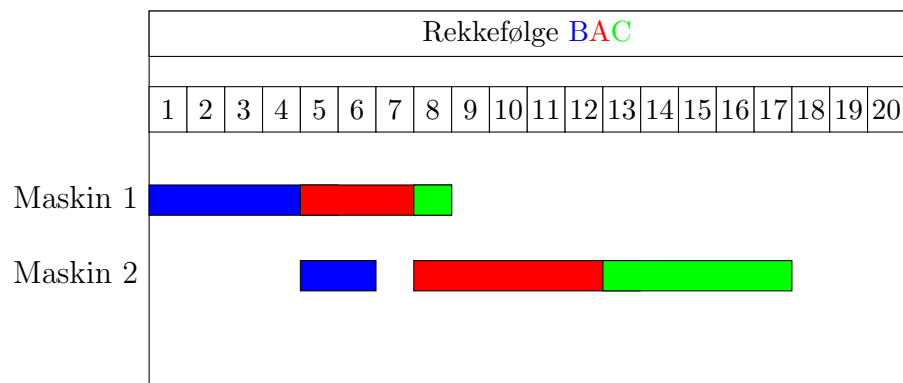


Makespan = sluttid C = 15 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid C + sluttid B = 8 + 13 + 15 = 36 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid = Total gjennomløpstid / 3 = 36 / 3 = 12 timer

BAC:

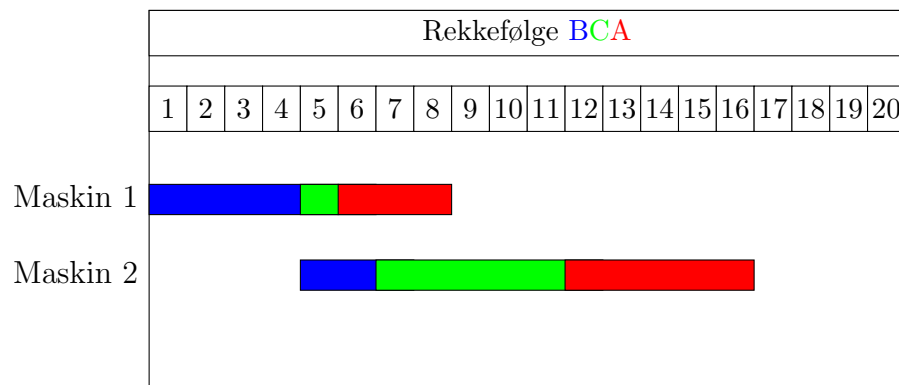


Makespan = sluttid C = 17 timer

Total gjennomløpstid = sluttid B + sluttid A + sluttid C = 6 + 12 + 17 = 35 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid = Total gjennomløpstid / 3 = 35 / 3 = 11.666 timer

BCA:

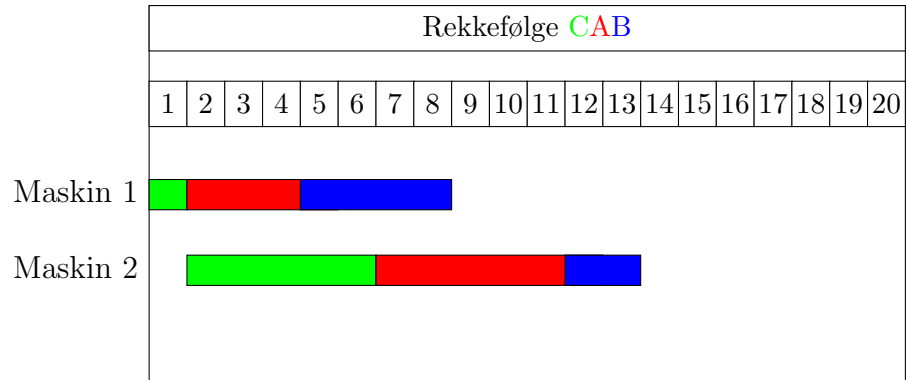


Makespan = sluttid C = 16 timer

Total gjennomløpstid = sluttid B + sluttid C +sluttid A= 6+11+16=33 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/3 = 33/3=11 timer

CAB:

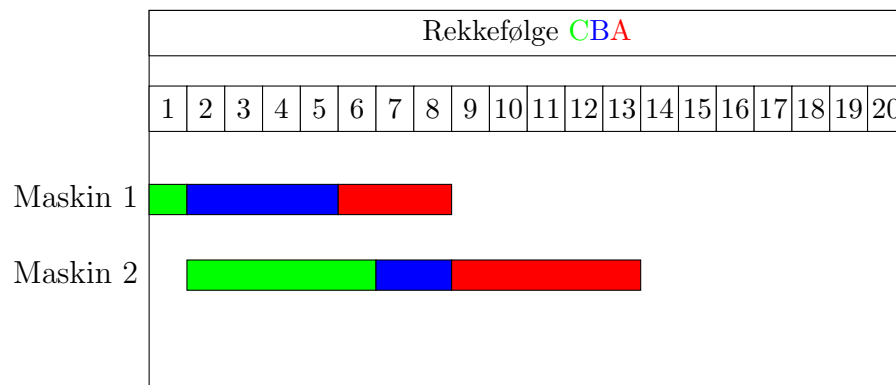


Makespan = sluttid B = 13 timer

Total gjennomløpstid = sluttid C + sluttid A +sluttid B= 6+11+13=30 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid =Total gjennomløpstid/3 = 30/3=10 timer

CBA:



Makespan = sluttid A = 13 timer

Total gjennomløpstid = sluttid C + sluttid B + sluttid A = 6+8+13=27 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid = Total gjennomløpstid/3 = 27/3=9 timer

Konklusjon:

**Minimalt makespan:** 13 timer ved rekkefølgene CAB og CBA

**Minimal gjennomsnittlig gjennomløpstid:** 9 timer ved rekkefølgen CBA

# Hovedeksamen 2015

# LØSNING: Hovedeksamen 22. mai 2015

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2015

## Oppgave 1: ( “Prognostisering, EOQ og Wagner Within” )

**a)** Ved å velge lav glattingsparameter  $\theta = 0.8$ , ønsker kontoret å glatte”ut variasjonen i observasjonene. Det vil si at de antar den virkelige etterspørselen kan ha store svingninger som figuren viser.

Å ha lav glattingsparameter, innebærer at vi vektlegger de *historiske* observasjonene mer enn den siste observasjonen (**trekt 50% dersom dette poenget ble utelatt**).

**b)** Vi husker den skrittvisse *rekurrenslikningen* for å beregne nivåene:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= x_1 \\ \hat{x}_t &= \theta \hat{x}_{t-1} + (1 - \theta)x_t, \quad t = 2, 3, \dots, N\end{aligned}$$

I vårt tilfelle har vi  $N = 8$  observasjoner:

$$\hat{x}_1 = x_1 = 3000$$

$$\hat{x}_2 = \theta \hat{x}_1 + (1 - \theta)x_2 = 0.8 \cdot 3000 + 0.2 \cdot 3500 = 3100$$

$$\hat{x}_3 = \theta \hat{x}_2 + (1 - \theta)x_3 = 0.8 \cdot 3100 + 0.2 \cdot 2800 = 3040$$

$$\hat{x}_4 = \theta \hat{x}_3 + (1 - \theta)x_4 = 0.8 \cdot 3040 + 0.2 \cdot 3200 = 3072$$

$$\hat{x}_5 = \theta \hat{x}_4 + (1 - \theta)x_5 = 0.8 \cdot 3072 + 0.2 \cdot 3700 = 3197.6$$

$$\hat{x}_6 = \theta \hat{x}_5 + (1 - \theta)x_6 = 0.8 \cdot 3197.6 + 0.2 \cdot 3600 = 3278.08$$

$$\hat{x}_7 = \theta \hat{x}_6 + (1 - \theta)x_7 = 0.8 \cdot 3278.08 + 0.2 \cdot 2900 = 3202.464$$

$$\hat{x}_8 = \theta \hat{x}_7 + (1 - \theta)x_8 = 0.8 \cdot 3202.464 + 0.2 \cdot 3300 = 3221.971$$

Siden vi ikke har flere observasjoner, må vi prognostisere nivåene for de neste 8 ukene. Vi setter disse prognosene lik nivået vi regnet ut for siste uke, siden dette er vår ferskeste prognose:

$$\underline{\underline{\hat{x}_9 = \hat{x}_{10} = \hat{x}_{11} = \hat{x}_{12} = \hat{x}_{13} = \hat{x}_{14} = \hat{x}_{15} = \hat{x}_{16} = \hat{x}_8 = 3222}}$$

c) Vi skal regne ut MAD for metoden vi brukte over. Vi har 7 observasjoner vi kan regne ut feilen på :

$$\begin{aligned} MAD &= \frac{1}{7} \sum_{t=2}^8 |E_t| \\ &= \frac{1}{7} (|3500 - 3000| + |2800 - 3100| + |3200 - 3040| + |3700 - 3072| + |3600 - 3197.6| \\ &\quad + |2900 - 3278.08| + |3300 - 3202.464|) \\ &= \frac{1}{7} (500 + 300 + 160 + 628 + 402.4 + 378.08 + 97.536) \\ &= 352.288 \end{aligned}$$

MAD er et gjennomsnittlig mål på absolutt feil, og kan således benyttes til å

- sammenlikne metoden mot andre metoder, lav MAD representerer en god prognose
- bestemme sikkerhetslager, siden målet samtidig gir et gjennomsnittlig mål på [avviket](#)

NB! Denne oppgaven ga også 100% score dersom man brukte  $E_t = X_t - \hat{X}_t$ , pga feil i kompendiet.

d)

i ) Ved å benytte EOQ formelen, har kontoret gjort hovedantakelsen om at etterspørselen er *konstant*.

ii ) Optimal ordrestørrelse (EOQ) er gitt ved Wilsons formel:

$$X^* = \sqrt{\frac{2DS}{C_H}}$$

hvor

$$\begin{aligned} D &= \text{konstant etterspørselsrate} \\ S &= \text{bestillingskostnaden} \\ C_H &= \text{lagerkostnaden} \end{aligned}$$

Kommentarer:

- Alle data må ha samme tidsenhet (år, måneder, uker etc)
- Lagerkostnaden er ofte oppgitt som en *lagerrente*, i såfall trenger vi ofte innkjøpskostnaden.

I denne oppgaven har vi fått oppgitt at tidsenheten er *uker*:

$$\begin{aligned} D &= 3222 \text{ solgte Iphoner per uke} \\ S &= 20000 \text{ bestillingskostnaden} \\ r &= 0.1 \text{ lagerrenten per år} \\ P &= 3000 \text{ innkjøpsprisen per Iphone} \\ C_H &= \frac{rP}{52} = 5.77 \text{ lagerkostnaden pr Iphone per uke} \end{aligned}$$

Vi setter inn i formelen og får:

$$X^* = \sqrt{\frac{2DS}{C_H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3222 \cdot 20000}{5.77}} = 4726$$

**iii )** Vi skal regne ut *omløpshastigheten*  $O$  på lageret, dvs hvor lang tid det tar fra lageret er fullt (EOQ) til lageret er tomt. Siden etterspørselen er konstant, kan vi dele EOQ med etterspørslesraten:

$$O = \frac{X^*}{D} = \frac{4726}{3222} = 1.467$$

Det tar med andre ord 1.467 uker fra lageret er fullt til lageret er tomt. Vi må dermed legge inn ny bestilling etter 1.467 uker.

**iv )** Vi skal regne ut merkostnadene pr uke. Denne kostnaden er gitt ved summen av bestillingskostnaden og lagerkostnaden i løpet av en uke:

$$\begin{aligned}
C &= S \frac{D}{X^*} + C_H \frac{X^*}{2} \\
&= 20000 \cdot \frac{3222}{4726} + 5.77 \cdot \frac{4726}{2} \\
&= 27270
\end{aligned}$$

▼ ) Dersom Lefdal bruker en ordrestørrelse på 5000 Iphoner, får de en rabatt på 10% på innkjøpsprisen, dvs  $P_{ny} = P \cdot 0.9 = 3000 \cdot 0.9 = 2700$  kroner pr Iphone.

Dermed får Lefdal en ny lagerkostnad:

$$\begin{aligned}
C_{ny} &= \frac{iP_{ny}}{52} \\
&= \frac{0.1 \cdot 2700}{52} \\
&= 5.19
\end{aligned}$$

Totale ukentlige kostnader ved ordrestørrelse på  $X_R = 5000$  er dermed gitt ved:

$$C = S \frac{D}{X_R} + C_{ny} \frac{X_R}{2} = 20000 \cdot \frac{3222}{5000} + 5.19 \cdot \frac{5000}{2} = 25863$$

Siden EOQ gir ukentlig kostnad  $27313 \geq 25863$ , burde Lefdal bruke 5000 som ordrestørrelse.

e)

NB: Jeg har også godkjent oppgavene 100% dersom det ble brukt  $d = 3222$ .

i) Sikkerhetslageret ved antakelse om normalfordelt etterspørsel pr uke er gitt ved

$$SS = Z\sqrt{L}\sigma$$

hvor

- $Z$  er sikkerhetsfaktoren som vi får fra omvendt tabelloppslag for normalfordelt etterspørsel. Faktoren tilsvarer sannsynlighet for å få stockout på 0.01.
- $L$  er ledetida
- $\sigma$  er standardavviket for observasjonene

Vi får dermed (husk at vi må konvertere ledetida til antall *uker*):

$$\begin{aligned} SS &= Z\sqrt{L}\sigma \\ &= 2.33 \cdot \sqrt{6/7} \cdot 312 \\ &= 673 \end{aligned}$$

ii) Den ukentlige kostnaden på sikkerhetslageret er gitt ved

$$C_{SS} = C_H SS = 5.77 \cdot 673 = 3883$$

Den årlige kostnaden på sikkerhetslageret er dermed

$$C_{SS}^{\text{år}} = 52C_{SS} = 52 \cdot 3883 = 201927$$

iii) Bestillingspunktet er gitt ved

$$R = dL + SS$$

hvor

- $d$  er normert etterspørsel, dvs  $d = 3250$
- $L$  er ledetida

- $SS$  er sikkerhetslageret

Vi får dermed :

$$\begin{aligned} R &= dL + SS \\ &= 3250 \cdot 6/7 + 673 \\ &= 3459 \end{aligned}$$

f)

NB: Jeg har også godkjent oppgavene 100% dersom det ble brukt  $d = 3222$ .

Vi regner ut verdiene for  $X^*$  og  $B^*$ :

$$\begin{aligned} X^* &= \sqrt{\frac{2DS}{C_H}} \sqrt{\frac{C_H + b}{b}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3250 \cdot 20000}{5.77}} \cdot \sqrt{\frac{5.77 + 150}{150}} \\ &= 4837 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^* &= \sqrt{\frac{2DS}{b}} \sqrt{\frac{C_H + b}{C_H}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3250 \cdot 20000}{5.77}} \cdot \sqrt{\frac{5.77 + 150}{150}} \\ &= 4837 \end{aligned}$$

Siden Lefdal tar imot 4837 Iphoner ved bestilling, kan bestillingspunktet reduseres med tilsvarende antall Iphoner. Vi husker fra oppgave e), at bestillingspunktet var på 3459 Iphoner. Det nye

bestillingspunktet er dermed gitt ved:

$$R_{ny} = R_{gammel} - B^*$$

$$= 3459 - 4837$$

$$= -1378$$

Dette betyr at det nye bestillingspunktet er når Lefdal har igjen 1378 bestillinger av totalt 4837 mulige bestillinger.

g)

Siden vi har 8 uker i denne modellen, bruker vi indeksnotasjon. Vi har følgende indeks i denne oppgaven:

- $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ , hvor  $t$  representerer en vilkårlig uke

i) Data:

|             |                                                 |
|-------------|-------------------------------------------------|
| $I_0 = 0$   | Inngående lagerbeholdning av ordinære ordrer    |
| $I_8 = 0$   | Utgående lagerbeholdning av ordinære ordrer     |
| $C_H = 2$   | Lagerkostnad pr enhet fra en uke til neste      |
| $S = 20000$ | bestillingskostnaden per uke                    |
| $D_t$       | etterspørselen i uke $t$ hvor $t = 1, \dots, 8$ |

ii) Variabler:

Vi har tre typer variabler:

Lagervariabler:

$$I_t \quad \text{overlagring fra uke } t \text{ til uke } t + 1 \text{ hvor } t = 1, \dots, 7$$

Kvantumsvariabler:

$X_t$  antall IPhoner bestilt til uke  $t$  hvor  $t = 1, \dots, 8$

Bestille/ikke bestille variabler:

$$Y_t = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom legger inn bestilling til uke } t \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases}$$

for alle  $t = 1, \dots, 8$ .

iii ) Målfunksjon:

Målfunksjonene er gitt ved bestillingskostnader pluss lagerkostnader summert over hele horisonten

$$C = \sum_{t=1}^8 SY_t + \sum_{t=1}^7 C_H I_t$$

iv ) Føringer:

Vi har to typer føringer i denne modellen: lagerbalansen og logisk føring mellom bestilling og antall bestilte IPhoner.

Lagerbalansen:

$$I_{t-1} + X_t - D_t = I_t \quad \text{lagerbalanse for uke } t \text{ hvor } t = 1, \dots, 8$$

Logisk føring mellom  $X$  og  $Y$ :

På logisk form:

$$\text{Hvis } Y_t = 0, \text{ så må } X_t = 0, \quad \text{ingen bestilling, ingen kvanta i uke } t \text{ hvor } t = 1, \dots, 8$$

På matematisk form:

$$(1 - Y_t)X_t, \quad \text{ingen bestilling, ingen kvanta i uke } t \text{ hvor } t = 1, \dots, 8$$

h)

i) Siden vi for delproblem 4 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 3, kan vi ved hjelp av Horisontteoremet, kutte uke 1 og uke 2.

$P_5$ : Delproblem 5

$$\begin{aligned}C_5^* &= \min[(\textit{siste best. i 3. periode}), (\textit{siste best. i 4. periode}), (\textit{siste best. i 5. periode})] \\&= \min[(50800 + 2C_H D_5), (55200 + C_H D_5), (S + C_4^*)] \\&= \min[(50800 + 2 \cdot 2 \cdot 3000), (55200 + 2 \cdot 3000), (20000 + 50800)] \\&= \min[62800, \underline{61200}, 70800] \\&= 61200\end{aligned}$$

Siden vi for delproblem 5 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 4, kan vi ved hjelp av Horisontteoremet, kutte uke 3.

$P_6$ : Delproblem 6

$$\begin{aligned}C_6^* &= \min[(\textit{siste best. i 4. periode}), (\textit{siste best. i 5. periode}), (\textit{siste best. i 6. periode})] \\&= \min[(61200 + 2C_H D_6), (70800 + C_H D_6), (S + C_5^*)] \\&= \min[(61200 + 2 \cdot 2 \cdot 5000), (70800 + 2 \cdot 5000), (20000 + 61200)] \\&= \min[81200, \underline{80800}, 81200] \\&= 80800\end{aligned}$$

Siden vi for delproblem 6 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 5, kan vi ved horisontteoremet kutte uke 4.

$P_7$ : Delproblem 7

$$\begin{aligned}
C_7^* &= \min[ (sb. i 5. periode), (sb. i 6. periode), (sb. i 7. periode)] \\
&= \min[(80800 + 2C_H D_7), (81200 + C_H D_7), (S + C_6^*)] \\
&= \min[ (80800 + 2 \cdot 2 \cdot 4500), (81200 + 2 \cdot 4500), (20000 + 80800)] \\
&= \min[ 98800, \underline{90200}, 100800] \\
&= 90200
\end{aligned}$$

Siden vi for delproblem 7 har at det er optimalt at siste bestilling skjer i uke 6, kan vi nå kutte uke uke 5

$P_8$ : Det fulle problemet

$$\begin{aligned}
C_8^* &= \min[(sb. i 6. periode), (sb. i 7. periode), (sb. i 8. periode)] \\
&= \min[(90200 + 2C_H D_8), (100800 + C_H D_8), (S + C_7^*)] \\
&= \min[(90200 + 2 \cdot 2 \cdot 3700), (100800 + 2 \cdot 3700), (20000 + 90200)] \\
&= \min[\underline{105000}, 108200, 110200] \\
&= 105000
\end{aligned}$$

**ii)** Vi har dermed funnet den optimale kostnaden på 105 000 kroner. Vi må nå til slutt finne selve bestillingsplanen. Dette gjør vi ved å starte bakerst og gå fremover fra subproblem til subproblem og lese av hvor siste bestilling inntreffer.

- $C_{xxxxx100}$ , siden siste bestilling skjer i uke 7. Vi hopper dermed til delproblem 5
- $C_{xxx10100}$ , siden siste bestilling skjer i uke 4 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 3
- $C_{10010100}$ , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 3.

Vi har dermed funnet bestillingsplanen (Y-variablene):

$$Y_1 = 1$$

$$Y_2 = 0$$

$$Y_3 = 0$$

$$Y_4 = 1$$

$$Y_5 = 0$$

$$Y_6 = 1$$

$$Y_7 = 0$$

$$Y_8 = 0$$

Vi finner X-variablene ved å bruke teoremet om ”Dominante produksjonsplaner” - kun hele etter-spørselsbehov.

$$X_1 = D_1 + D_2 + D_3 = 3000 + 2000 + 2800 = 7800$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = 0$$

$$X_4 = D_4 + D_5 = 3400 + 3000 = 6400$$

$$X_5 = 0$$

$$X_6 = D_6 + D_7 + D_8 = 5000 + 4500 + 3700 = 13200$$

$$X_7 = 0$$

$$X_8 = 0$$

Fra X-variablene leser vi enkelt av lagervariablene:

$$I_1 = D_2 + D_3 = 2000 + 2800 = 4800$$

$$I_2 = D_3 = 2800$$

$$I_3 = 0$$

$$I_4 = D_5 = 3000$$

$$I_5 = 0$$

$$I_6 = D_7 + D_8 = 4500 + 3700 = 8200$$

$$I_7 = D_8 = 3700$$

iii )

Denne oppgaven ble lengre enn forventet, så denne oppgaven ble brukt som grunnlag i vippestuasjoner

Hvis vi får en kansellering på 1000 Iphoner i uke 5, så må vi beregne  $C_5^*$  på nytt med etterspørsel på 2000 Iphoner istedet ofr 3000 Iphoner.

$P_5$ : Delproblem 5

$$\begin{aligned}C_5^* &= \min[(\textit{siste best. i 3. periode}), (\textit{siste best. i 4. periode}), (\textit{siste best. i 5. periode})] \\&= \min[(50800 + 2C_H D_5), (55200 + C_H D_5), (S + C_4^*)] \\&= \min[(50800 + 2 \cdot 2 \cdot 2000), (55200 + 2 \cdot 2000), (20000 + 50800)] \\&= \min[\underline{58800}, 59200, 70800] \\&= 58800\end{aligned}$$

Siden vi nå ikke kan bruke horisontteoremet, må vi også beregne  $C_6^*$  på nytt, hvor vi nå inkluderer uke 3:

$P_6$ : Delproblem 6

$$\begin{aligned}C_6^* &= \min[(\textit{siste best. i 3. periode}), (\textit{siste best. i 4. periode}), (\textit{siste best. i 5. periode}), (\textit{siste best. i 6. per} \\&= \min[(58800 + 2C_H D_6), (59200 + 2C_H D_6), (70800 + C_H D_6), (S + C_5^*)] \\&= \min[(58800 + 3 \cdot 2 \cdot 5000), (59200 + 2 \cdot 2 \cdot 5000), (70800 + 2 \cdot 5000), (20000 + 61200)] \\&= \min[98800, 79200, 80800, \underline{78800}] \\&= 78800\end{aligned}$$

Horisontteoremet kutter nå både uke 3, 4 og 5. Vi fortsetter til delproblem 7:

$P_7$ : Delproblem 7

$$\begin{aligned}C_7^* &= \min[(sb. i 6. periode), (sb. i 7. periode)] \\&= \min[(78800 + C_H D_7), (S + C_6^*)] \\&= \min[(78800 + 2 \cdot 4500), (20000 + 78800)] \\&= \min[\underline{87800}, 98800] \\&= 87800\end{aligned}$$

Horisontteoremet kutter ingen uker her, så vi fortsetter til delproblem 8:

$P_8$ : Det fulle problemet

$$\begin{aligned}C_8^* &= \min[(sb. i 6. periode), (sb. i 7. periode), (sb. i 8. periode)] \\&= \min[(87800 + 2C_H D_8), (98800 + C_H D_8), (S + C_7^*)] \\&= \min[(87800 + 2 \cdot 2 \cdot 3700), (98800 + 2 \cdot 3700), (20000 + 87800)] \\&= \min[102600, \underline{106200}, 107800] \\&= 102600\end{aligned}$$

Vi har dermed funnet den optimale kostnaden på 102 600 kroner. Vi må nå til slutt finne selve bestillingsplanen. Dette gjør vi ved å starte bakerst og gå fremover fra subproblem til subproblem og lese av hvor siste bestilling inntreffer.

- $C_{xxxxx100}$ , siden siste bestilling skjer i uke 6. Vi hopper dermed til delproblem 5
- $C_{xx100100}$ , siden siste bestilling skjer i uke 3 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 2
- $C_{10100110}$ , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 2.

**iv)** Den nye føringen fra Apple, sier at vi ikke kan bestille to uker på rad. Siden variablene  $Y_t$ , for  $t = 1, \dots, 8$  representerer bestillingene, sier føringen at vi ikke kan ha to påfølgende Y-variabler lik 1:

$$\text{Hvis } Y_t = 1, \text{ så må } Y_{t+1} = 0, \text{ for alle } t = 1, \dots, 7$$

Denne føringen kan uttrykkes matematisk ved:

$$Y_t + Y_{t+1} \leq 1, \text{ for alle } t = 1, \dots, 7$$

**v)** Løsningen fra oppgave h.ii) er gitt ved  $C_{10101010}$ . Vi ser at løsnignen *ikke* bestiller to uker på rad (to 1ere etter hverandre). Løsningen er derfor fremdeles optimal.

**vi)** Teoremet om dominante produksjonsplaner er fremdeles oppfylt, siden vi fremdeles kan flytte etterspørsel i perioder med produksjon uten at noen av føringene brytes.

Horisontteoremet er ikke oppfylt siden vi nå må ta høyde for at to bestillinger ikke kan komme etter hverandre. Årsaken kommer av at vi ikke lenger kan splitte et problem i to subproblemer hvor det er optimalt å ha produksjon, noe som igjen kommer av at de to delproblemene er koblet gjennom den nye føringen.

Det er derimot naturlig å forvente at en variant av horisontteoremet er oppfylt, som betinger på hvor det er produksjon.

**Oppgave 2:** ( “MPS og MRP og sekvensiering” )

a )

i ) Vi setter opp masterplantabellen for ”Stokke Steps Chair” - stolen:

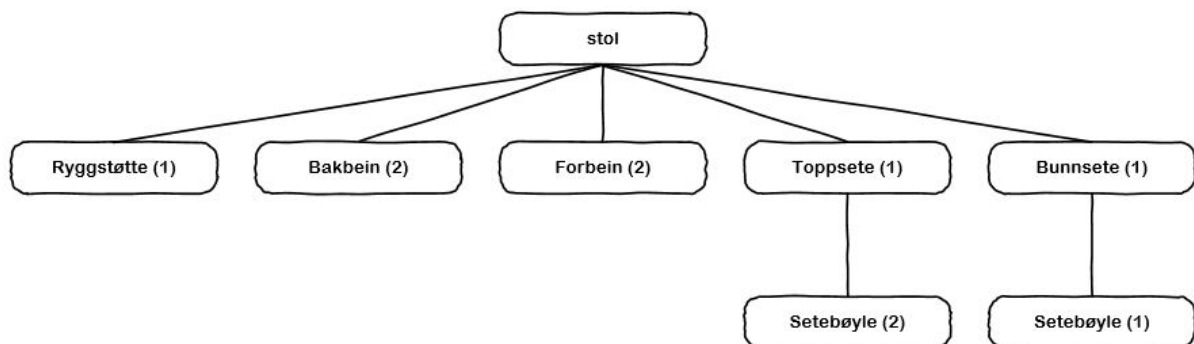
| Uke                   | init | 1   | 2   | 3   | 4   | 5    | 6   | 7   | 8   | 9   | 10   |
|-----------------------|------|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|------|
| Prognose              |      | 250 | 200 | 220 | 180 | 240  | 240 | 300 | 210 | 140 | 170  |
| Ordre                 |      | 240 | 230 | 180 | 200 | 180  | 300 | 200 | 240 | 60  | 70   |
| Lagernivå             | 1000 | 760 | 530 | 350 | 150 | 1110 | 810 | 510 | 300 | 160 | 1190 |
| Ledig-til-reservasjon |      | 150 |     |     |     | 220  |     |     |     |     | 1130 |
| MPS                   |      |     |     |     |     | 1200 |     |     |     |     | 1200 |

ii Hvis Stokke får inn to bestillinger, en i uke 3 på 80 stoler og en i uke 54 på 100 stoler, så ser vi at disse ukene dekkkes av Ledig-TilReservasjon i uke 1. Summen av bestillingene er på 180 stoler, mens Ledig-Til-Reservasjon er kun 150.

Stokke kan dermed *ikke* garantere begge ordrene.

b ) Vi skal gjennomføre MRP-beregninger for ”Stokke Steps Chair”-stolen de neste 10 ukene.

i ) BOM-strukturen er gitt ved:



Figur 1: BOM-strukturen for ”Stokke Steps Chair” - stolen

ii) Vi har allerede lagd en MPS-plan for selve ”Stokke Steps Chair” i oppgave a) (Masterplanen). Det eneste vi må huske er at MPS-planen gir kun når stolene skal være ferdige, dvs MPS-planen tar ikke høyde for produksjonstiden, som er 3 uker for en serie på 1200 ”Stokke Steps Chair” stoler.

| Uke                              | Init | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| <b>Ryggstøtte</b>                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Bruttobehov                      |      |      | 1200 |      |      |      |      | 1200 |      |      |      |
| Planlagt mottak                  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Lager                            | 800  | 800  | 1100 | 1100 | 1100 | 1100 | 1100 | 1400 | 1400 | 1400 | 1400 |
| Nettobehov                       |      |      | 400  |      |      |      |      | 100  |      |      |      |
| Planlagt ordre                   |      | 1500 |      |      |      |      | 1500 |      |      |      |      |
| <b>Bakbein</b>                   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Bruttobehov                      |      |      | 2400 | 2000 |      |      | 2000 | 2400 |      |      |      |
| Planlagt mottak                  |      | 2500 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Lager                            | 1000 | 3500 | 1100 | 1600 | 1600 | 1600 | 2100 | 2200 | 2200 | 2200 | 2200 |
| Nettobehov                       |      |      |      | 900  |      |      | 400  | 300  |      |      |      |
| Planlagt ordre                   |      |      | 2500 |      |      | 2500 | 2500 |      |      |      |      |
| <b>Forbein</b>                   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Bruttobehov                      |      |      | 2400 |      |      |      |      | 2400 |      |      |      |
| Planlagt mottak                  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Lager                            |      |      | 300  | 300  | 300  | 300  | 300  | 600  | 600  | 600  | 600  |
| Nettobehov                       |      |      | 2400 |      |      |      |      | 2100 |      |      |      |
| Planlagt ordre                   |      | 3000 |      |      |      |      | 3000 |      |      |      |      |
| <b>Toppseter &amp; bunnseter</b> |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Bruttobehov                      |      |      | 1200 |      |      |      |      | 1200 |      |      |      |
| Planlagt mottak                  |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Lager                            |      |      | 800  | 800  | 800  | 800  | 800  | 1600 | 1600 | 1600 | 1600 |
| Nettobehov                       |      |      | 1200 |      |      |      |      | 400  |      |      |      |
| Planlagt ordre                   |      | 2000 |      |      |      |      | 2000 |      |      |      |      |
| <b>Setebøyler</b>                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Bruttobehov                      |      | 6000 |      |      |      |      | 6000 |      |      |      |      |
| Planlagt mottak                  |      | 7000 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| Lager                            |      | 500  | 500  | 500  | 500  | 500  | 1500 | 1500 | 1500 | 1500 | 1500 |
| Sikkerhetslager                  |      | 500  | 500  | 500  | 500  | 500  | 500  | 500  | 500  | 500  | 500  |
| Nettobehov                       |      |      |      |      |      |      | 5500 |      |      |      |      |
| Planlagt ordre                   |      |      |      |      | 7000 |      |      |      |      |      |      |

Kommentarer:

- for bakbein har vi lagt inn ordrer fra annen stolvariant: 2000 i uke 3 og uke 6 hhv.
- for forbein har vi trekt ifra svinn fra produksjonen på 10%, som er 300 pr serie på 3000
- for setebøyler har vi multiplisert planlagt ordre fra setene med 3. Vi har også splittet lageret i uke 1 med 500 i sikkerhetslager og 500 i vanlig lager.

c ) Vi skal se på sekvensieringen av to produkter som går gjennom de samme tre stasjonene hos Stokke. Vi har en ordre på 60 "Stokke Steps Chair" stoler og en ordre på 30 Tripp-Trapp stoler.

i ) For enkelhetsskyld kaller vi ordren for "Stokke Steps Chair" stolene ordre A, mens ordren for Tripp-Trapp stolene kaller vi for ordre B.

Vi må først beregne *bearbeidingstidene* for hver ordre for hver av stasjonene:

Ordre A:

- Stasjon 1: bearbeidingstiden er  $60 \cdot 4$  minutter = 240 minutter, dvs 4 timer
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er  $60 \cdot 2$  minutter = 120 minutter, dvs 2 timer
- Stasjon 3: bearbeidingstiden er  $60 \cdot 5$  minutter = 300 minutter, dvs 5 timer

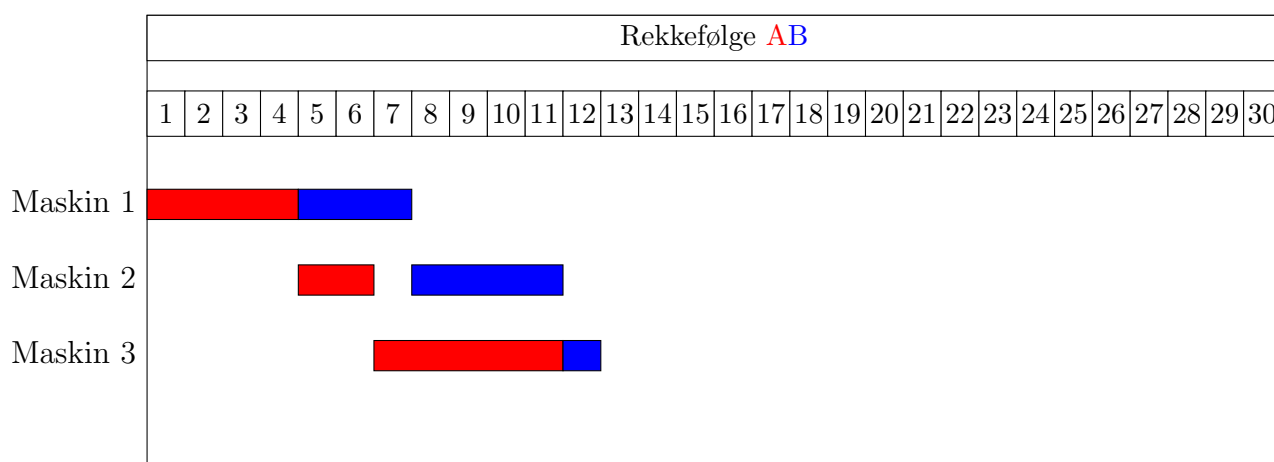
Ordre B:

- Stasjon 1: bearbeidingstiden er  $30 \cdot 6$  minutter = 180 minutter, dvs 3 timer
- Stasjon 2: bearbeidingstiden er  $30 \cdot 8$  minutter = 240 minutter, dvs 4 timer
- Stasjon 3: bearbeidingstiden er  $30 \cdot 2$  minutter = 60 minutter, dvs 1 time

Siden vi har to ordrer og tre stasjoner får vi  $2^3 = 8$  muligheter, men i prinsippet er kun *to* av dem aktuelle, siden hvis A prosesseres først på stasjon1, så må også A prosesseres først på stasjon 2 og stasjon 3 hhv. Å splitte ordrerrekkefølgen på stasjonene er åpenbart ineffektiv, så vi ser vekk ifra disse. Vi har dermed *to* muligheter: AB eller BA.

Gantt-diagram for situasjonen AB, dvs A først:

Merk: Rød er ordre A mens blå er ordre B:



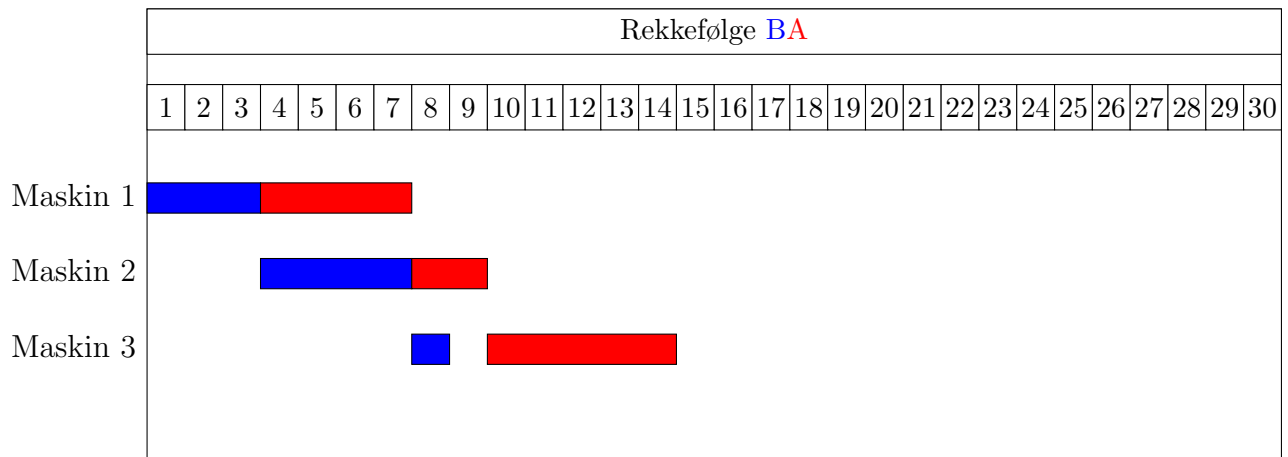
Makespan = sluttid B = 12 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B = 11+12=23 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid = Total gjennomløpstid/2 = 23/2=11.5 timer

Gantt diagram for situasjonen BA, dvs B først:

Merk: Rød er ordre A mens blå er ordre B:



Makespan = sluttid A = 14 timer

Total gjennomløpstid = sluttid A + sluttid B = 14+8=22 timer

Gjennomsnittlig gjennomløpstid = Total gjennomløpstid/2 = 22/2=11 timer

Konklusjon:

Vi ser at hvis vi ønsker å minimere makespan, så er det optimalt med rekkefølgen AB, mens hvis vi bruker total gjennomløpstid, så er BA optimal.

# Kontinuasjonseksamen 2015

# LØSNING: Kontinuasjoneksamen 6. jan 2016

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2015

## Oppgave 1d: ( “Wagner-Within” )

i ) Vi skal finne optimal produksjonsplan ved hjelp av Wagner-Within algoritmen.

Data:<sup>1</sup>

$$D_t = \text{etterspørsel uke } t \text{ etter iPhone} \quad (1)$$

$$s = \text{bestillingskostnaden for iPhone} = 100\,000 \quad (2)$$

$$h = \text{enhetslig overlagringskostnad for 1 Iphone pr uke} = 10 \quad (3)$$

Variabler:

$$X_t = \text{ordrestørrelse uke } t \quad (4)$$

$$I_t = \text{antall IPhoner overlagret fra uke } t \text{ til } t + 1 \quad (5)$$

$$Y_t = 0 \text{ eller } 1 \text{ for hvorvidt bestilling finner sted i uke } t \quad (6)$$

---

<sup>1</sup>Det er **ikke** nødvendig å skrive opp disse definisjonene på eksamen. Data og variabler er underforståtte for Wagner-Within algoritmen. Vi har kun inkludert disse her for helhetens skyld.

Vi starter som vanlig med delproblemet med kun en periode:<sup>2</sup>

$\underline{P}_1$ : ( subproblem med kun første periode )

Med en eneste periode, må vi ha produksjon siden vi må oppfylle etterspørselen i periode 1 og startslageret er null. Vi har altså følgende optimale løsning for dette subproblemet:

$$\underline{C}_1^* = s \cdot Y_1 = \underline{100} \quad (7)$$

$\underline{P}_2$ : ( subproblem med de to første periode )

$$\underline{C}_2^* = \min \left[ (\text{siste bestilling i 1. periode}) , (\text{siste bestilling i 2. periode}) \right] \quad (8)$$

$$= \min \left[ s + h \cdot D_2 , s + C_1^* \right] \quad (9)$$

$$= \min \left[ 100 + 10 \cdot 4 , 100 + 100 \right] \quad (10)$$

$$= \min \left[ \underline{145} , 200 \right] \quad (11)$$

$$= \underline{164} \quad (12)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{10}$ .

Vi vet da at fra Horisontteoremet, siden det er optimalt siste bestilling skjer før 2 periode, så kan vi se bort ifra alle periodene før 1.periode. Men vi har ingen, så her tjente vi ikke noe

---

<sup>2</sup> Vi skriver alle kostnadstall i antall 1000 for oversiktens skyld. Så setupkostnaden blir 100 mens vi beholder lagerkostnaden slik den er. Dette kan dere også gjøre til eksmanen, så lenge dere bemerker at dere gjør det.

$P_3$ : ( subproblem med de tre første periode )

$$\underline{C}_3^* = \min \left[ (s.b.1) , (s.b.2), (s.b.3) \right] \quad (13)$$

$$= \min \left[ (s + h \cdot D_2 + 2 \cdot h \cdot D_3) , (s + h \cdot D_3 + C_1^*) , (s + C_2^*) \right] \quad (14)$$

$$= \min \left[ (145 + 2 \cdot 10 \cdot 5.4) , (200 + 10 \cdot 5.4) , (145 + 100) \right] \quad (15)$$

$$= \min \left[ 253 , 254 , \underline{245} \right] \quad (16)$$

$$= \underline{245} \quad (17)$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 1. og 2. måned fra videre beregninger.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Legg merke til at vi benytter oss av at vi allerede har beregnet en del av uttrykkene i forrige delpproblem.

$P_4$ :

Legg derfor til at vi starter beregningene fra 3. periode (og ikke første som vi gjorde i delproblemene over). Dette kommer fra bruk av horisontteoremet.

$$\begin{aligned}C_4^* &= \min[ (s.b.3) , (s.b.4)] \\&= \min[(C_2^* + s + h \cdot D_4), (C_3^* + s)] \\&= \min[(245 + 10 \cdot 4, (245 + 100)] \\&= \min[\underline{285}, 345] \\&= 285\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 2. måned fra videre beregninger, noe vi allerede har gjort.

$P_5$ :

Vi starter beregningene fra 4. måned.

$$\begin{aligned}C_5^* &= \min[(s.b.3) \ (s.b.4) \ , \ (s.b.5)] \\&= \min[(C_2^* + s + h \cdot D_4 + 2 \cdot h \cdot D_5), \ (C_3^* + s + h \cdot D_5), \ (C_4^* + s)] \\&= \min[(285 + 2 \cdot 10 \cdot 3, \ (345 + 10 \cdot 3), \ (285 + 100)] \\&= \min[\underline{345}, \ 375, 385] \\&= 345\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 3. måned fra videre beregninger, noe vi allerede har gjort.

$P_6$ :

Vi starter beregningene fra 5. måned.

$$\begin{aligned}C_6^* &= \min[(s.b.3) , (s.b.4) , (s.b.5) , (s.b.6)] \\&= \min[(C_2^* + s + hD_4 + 2hD_5 + 3hD_6), (C_3^* + s + hD_5 + 2hD_6), (C_4^* + s + hD_6), (C_5^* + s)] \\&= \min[(345 + 3 \cdot 10 \cdot 5, (375 + 2 \cdot 10 \cdot 5), (385 + 10 \cdot 5), (345 + 100)] \\&= \min[495, 475, \underline{435}, 445] \\&= 435\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 3. og 4. måned fra videre beregninger.

$P_7$ :

Vi starter beregningene fra 6. måned.

$$\begin{aligned}C_7^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6) , (s.b.7)] \\&= \min[(C_4^* + s + h \cdot D_6 + 2 \cdot h \cdot D_7), (C_5^* + s + h \cdot D_7), (C_6^* + s)] \\&= \min[(435 + 2 \cdot 10 \cdot 3.8, (445 + 10 \cdot 3.8), (435 + 100)] \\&= \min[511, \underline{483}, 535] \\&= 604\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 5. måned fra videre beregninger.

$P_8$ : ( det fulle problemet )

Vi starter beregningene fra 6. måned.

$$\begin{aligned} C_8^* &= \min[ (s.b.6) , (s.b.7), (s.b.8)] \\ &= \min[(C_5^* + s + h \cdot D_7 + 2 \cdot h \cdot D_8), (C_6^* + s + h \cdot D_8), (C_7^* + s)] \\ &= \min[(483 + 2 \cdot 10 \cdot 5.1, (535 + 10 \cdot 5.1), (483 + 100)] \\ &= \min[585, 586, \underline{583}] \\ &= 636 \end{aligned}$$

Vi har nå funnet optimal kostnad. Vi finner optimale produksjonsperioder  $C_{xxxxxxx}$  ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxx} = C_{xxxxxxx1} \quad (\text{ siste bestilling i måned 8 }) \quad (18)$$

$$C_{xxxxxxx1} = C_{xxxxx101} \quad (\text{ siste bestilling i måned 6 }) \quad (19)$$

$$C_{xxxxx101} = C_{xx100101} \quad (\text{ siste bestilling i måned 3 }) \quad (20)$$

$$C_{xx100101} = C_{x10100101} \quad (\text{ siste bestilling i måned 1 }) \quad (21)$$

$$(22)$$

Vi har altså  $C_{10111100} = 583000$ . videre må vi finne optimale produksjonsmengder og lagermengder.

ii Produksjonsmengder: ( finnes ved hjelp av ”dominante produksjonsplaner” )

$$X_1 = D_1 + D_2 = 8500 \quad (23)$$

$$X_2 = 0 \quad (24)$$

$$X_3 = D_3 + D_4 + D_5 = 12400 \quad (25)$$

$$X_4 = 0 \quad (26)$$

$$X_5 = 0 \quad (27)$$

$$X_6 = D_6 + D_7 = 8800 \quad (28)$$

$$X_7 = 0 \quad (29)$$

$$X_8 = 5100 \quad (30)$$

$$(31)$$

Lagermengder:

$$I_1 = D_2 = 4500 \quad (32)$$

$$I_2 = 0 \quad (33)$$

$$I_3 = D_4 + D_5 = 7000 \quad (34)$$

$$I_4 = D_5 = 3000 \quad (35)$$

$$I_5 = 0 \quad (36)$$

$$I_6 = D_7 = 3800 \quad (37)$$

$$I_7 = 0 \quad (38)$$

$$I_8 = 0 \quad (39)$$

$$(40)$$

iii Først definerer vi den ukjente variabelen:

$$x = \text{antall enheter vi reduserer etterspørselen } D_6 \quad (41)$$

Første krav på  $x$  er at den ikke kan overskride  $D_6$ , dvs:

$$0 \leq x \leq D_6 = 5000 \quad (42)$$

For å bestemme hvor mye  $D_6$  må minke før produksjonen i uke 6 forflyttes til periode 7, må vi først se på delproblem P6 (siden det er her  $D_6$  benyttes første gang):

$$\begin{aligned} C_6^* &= \min[(s.b.3), (s.b.4), (s.b.5), (s.b.6)] \\ &= \min[(C_2^* + s + hD_4 + 2hD_5 + 3hD_6), (C_3^* + s + hD_5 + 2hD_6), (C_4^* + s + hD_6), (C_5^* + s)] \\ &= \min[(345 + 3 \cdot 10 \cdot 5, (375 + 2 \cdot 10 \cdot 5), (385 + 10 \cdot 5), (345 + 100)] \\ &= \min[495, 475, \underline{435}, 445] \\ &= 435 \end{aligned}$$

Anta nå at vi setter  $D_6 = 5 - x$ . Insatt i  $C_6^*$  gir:

$$\begin{aligned} C_6^* &= \min[495 - 3hx, 475 - 2hx, 435 - hx, 445] \\ &= \min[495 - 30x, 475 - 20x, 435 - 10x, 445] \end{aligned}$$

Vi innser at når  $x$  minker, vil siste bestilling etterhvert flytte seg fra periode 5 til periode 4 og deretter fra periode 4 til periode 3.

Optimal bestilling flytter seg fra periode 5 til periode 4 når:

$$(s.b.4) = (s.b.5) \quad (43)$$

$$475 - 20x = 435 - 10x \quad (44)$$

$$475 - 435 = 20x - 10x \quad (45)$$

$$40 = 10x \quad (46)$$

$$x = 4 \quad (47)$$

Optimal bestilling flytter seg fra periode 5 til periode 3 når:

$$(s.b.3) = (s.b.5) \quad (48)$$

$$495 - 30x = 435 - 10x \quad (49)$$

$$495 - 435 = 30x - 10x \quad (50)$$

$$60 = 20x \quad (51)$$

$$x = 3 \quad (52)$$

Så vi får følgende alternativer:

- $0 \leq x \leq 3$ : optimal bestilling fremdeles periode 5 og vi kan gå til P7 med  $C_6^* = 435 - 10x$
- $3 \leq x \leq 5$ : optimal bestilling i periode 5, og vi kan gå til P7 med  $C_6^* = 495 - 30x$

Case 1:  $0 \leq x \leq 3$

Vi overfører  $C_6^* = 435 - 10x$  direkte i P7:

$$\begin{aligned} C_7^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6) , (s.b.7) ] \\ &= \min[511 - 10x, 483, 535 - 10x], \quad x \leq 3 \end{aligned}$$

Kommentarer:

- Legge merke til at alternativet (s.b.6), dvs siste bestilling i uke 6, **ikke** er avhengig av  $D_6$  siden vi produserer alt selv i denne perioden.
- Legg også merke til at alternativet (s.b.5) alltid vil være mindre enn alternativet (s.b.7).

Vi argumenterer på samme måte som før, at siste bestilling vil flytte seg fra periode 6 til periode 5 etterhvert som  $x$  øker fra 0 til 3.

Optimal bestilling flytter seg fra periode 6 til periode 5 når:

$$(s.b.5) = (s.b.6) \tag{53}$$

$$511 - 10x = 483 \tag{54}$$

$$511 - 483 = 10x \tag{55}$$

$$28 = 10x \tag{56}$$

$$x = 2.8 \tag{57}$$

Så vi får følgende to alternativer:

- $0 \leq x \leq 2.8$  - optimal bestilling fremdeles periode 6 og vi kan gå til uendret P8
- $2.8 \leq x \leq 3$  - optimal bestilling flyttes fra periode 6 til periode 5, og P8 endres.

Case 1a:  $0 \leq x \leq 2.8$ :

P8 er uendret og  $C_7^* = 483$  mens  $C_6^* = 435 - 10x$ :

$$\begin{aligned} C_8^* &= \min[ (s.b.6) , (s.b.7), (s.b.8)] \\ &= \min[585, 586 - 10x, 583] \end{aligned}$$

Vi ser at siste bestilling i periode 8 vil flytte seg til periode 7 etterhvert som  $x$  øker fra 0 til 2.8.

Optimal bestilling flytter seg fra periode 5 til periode 3 når:

$$(s.b.7) = (s.b.8) \tag{58}$$

$$586 - 10x = 583 \tag{59}$$

$$586 - 583 = 10x \tag{60}$$

$$3 = 10x \tag{61}$$

$$x = \frac{3}{10} \tag{62}$$

## Konklusjon:

Anta  $\frac{3}{10} < x \leq 2.8$ . Da er siste bestiling i uke 7 og vi får:

$$C_{xxxxxx10} \text{ ( gå til delproblem P6 )} \quad (63)$$

$$C_{xxxx1010} \text{ ( gå til delproblem P4 )} \quad (64)$$

$$C_{xx101010} \text{ ( gå til delproblem P2 )} \quad (65)$$

$$C_{10101010} \quad (66)$$

Hvis vi reduserer  $D_6$  med  $x = \frac{3}{10} \cdot 1000 + 1 = 300 + 1 = 301$  enheter, flyttes produksjonen fra periode 6 til periode 7.<sup>4</sup>

Etterspørselen for periode 6 blir da:  $D_6 = 5000 - 301 = 4699$ .

---

<sup>4</sup>Vi legger til en ekstra enhet, siden (s.b.7) og (s.b.8) er lik når  $x = \frac{3}{10}$ .

**d iv** Vi skal utvide modellen under antakelsen at Apple har en øvre grense på ordrestørrelse lik 10000 IPhoner.

Nye data:

Vi har maksimalt antall bestilte IPhoner:

$$K = 10000 \quad \text{maksimal bestillingsmengde fra Apple} \quad (67)$$

Nye føringer:

Vi får en maksimal grense for antall bestilte IPhoner pr uke:

$$X_t \leq K \quad \text{for alle } t \quad (68)$$

**d v** For å sjekke om løsningen fra oppgave 1d.i) er oppfylt, må vi sjekke om kapasitetsføringene er oppfylt.

Vi hadde optimal produksjonsplan:

$$X_1 = D_1 + D_2 = 8500 \quad (69)$$

$$X_2 = 0 \quad (70)$$

$$X_3 = D_3 + D_4 + D_5 = 12400 \quad (71)$$

$$X_4 = 0 \quad (72)$$

$$X_5 = 0 \quad (73)$$

$$X_6 = D_6 + D_7 = 8800 \quad (74)$$

$$X_7 = 0 \quad (75)$$

$$X_8 = 5100 \quad (76)$$

$$(77)$$

Vi ser at bestillingen i uke 3 på 12400 IPHoner overskrider grensen på 10000 IPHoner.

Løsningen er dermed ikke optimal under den nye betingelsen.

Wagner-Withins kjente resultat om "Dominante produksjonsplaner" er ikke lenger gyldig under den nye policyføringen ifra Apple. Vi kan med andre ord ikke lenger bestille hele etterspørselsbehov siden bestillingen dermed overskrider grensen.

Vi må derfor dele opp bestillingen i uke 3.

Vi kan f.eks. flytte overlagringen fra periode 3 til periode 5 til bestilling i periode 5 istedet:

Ny gyldig produksjonsplan:

$$X_1 = D_1 + D_2 = 8500 \quad (78)$$

$$X_2 = 0 \quad (79)$$

$$X_3 = D_3 + D_4 = 12400 \quad (80)$$

$$X_4 = 0 \quad (81)$$

$$X_5 = D_5 = 5000 \quad (82)$$

$$X_6 = D_6 + D_7 = 8800 \quad (83)$$

$$X_7 = 0 \quad (84)$$

$$X_8 = 5100 \quad (85)$$

$$(86)$$

# Testeksamen 2016

# LØSNING: Testeksamen mai 2016

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2016

## Oppgave 1: ( prognostisering )

a) Plottet av historiske data viser et **irregulært** (tilfeldig) mønster.

Dette begrunnes ved eliminasjonsmetoden:

- Mønsteret viser **ikke** oppadstigende eller nedadstigende trend
- Mønsteret har **ikke** syklisk svingninger
- Mønsteret viser **ingen** sesongavhengigheter

Vi kan dermed konkludere at mønsteret er tilfeldig.

b) Siden produksjonsplanleggerne vektlegger en **jevn** produksjon, er det fordelaktig å **glatte** vekk variasjonen i datasettet.

Ved å velge **høy** glattingaparameter, får vi **høy** glatting ved bruk av eksponensiell glatting.

Vi velger derfor den **høye** glattingsparameteren  $\theta_2 = 0.7$ .

c) Vi skal lage en prognose for de 12 månedene i 2016 ved hjelp av eksponensiell glatting med glattingsparameter  $\theta = 0.7$ . Vi bruker den rekursive formelen for å beregne prognosene:

$$F_2 = X_1 = 30 \quad (1)$$

$$F_3 = \theta F_2 + (1 - \theta)X_2 = 0.7 \cdot 30 + 0.3 \cdot 25 = 28.5 \quad (2)$$

$$F_4 = \theta F_3 + (1 - \theta)X_3 = 0.7 \cdot 28.5 + 0.3 \cdot 40 = 32 \quad (3)$$

$$F_5 = \theta F_4 + (1 - \theta)X_4 = 0.7 \cdot 32 + 0.3 \cdot 35 = 32.87 \quad (4)$$

$$F_6 = \theta F_5 + (1 - \theta)X_5 = 0.7 \cdot 32.87 + 0.3 \cdot 20 = 29.00 \quad (5)$$

$$F_7 = \theta F_6 + (1 - \theta)X_6 = 0.7 \cdot 29.00 + 0.3 \cdot 50 = 35.3 \quad (6)$$

$$F_8 = \theta F_7 + (1 - \theta)X_7 = 0.7 \cdot 35.3 + 0.3 \cdot 40 = 36.71 \quad (7)$$

$$F_9 = \theta F_8 + (1 - \theta)X_8 = 0.7 \cdot 36.71 + 0.3 \cdot 45 = 39.2 \quad (8)$$

$$F_{10} = \theta F_9 + (1 - \theta)X_9 = 0.7 \cdot 39.2 + 0.3 \cdot 30 = 36.44 \quad (9)$$

$$F_{11} = \theta F_{10} + (1 - \theta)X_{10} = 0.7 \cdot 36.44 + 0.3 \cdot 35 = 36.01 \quad (10)$$

$$F_{12} = \theta F_{11} + (1 - \theta)X_{11} = 0.7 \cdot 36.01 + 0.3 \cdot 45 = 38.71 \quad (11)$$

$$F_{13} = \theta F_{12} + (1 - \theta)X_{12} = 0.7 \cdot 38.71 + 0.3 \cdot 15 = 31.6 \quad (12)$$

Vi har nå funnet prognosen for måned 13 (januar 2016). Siden mønsteret er **irregulært**, setter vi **alle** månedene konstant lik  $F_{13}$ :

$$\underline{\underline{F_{13} = F_{14} = F_{15} = F_{16} = F_{17} = F_{18} = F_{19} = F_{20} = F_{21} = F_{22} = F_{23} = F_{24} = 31.6 \approx 32}}$$

**d)** Vi skal beregne MAD (gjennomsnittlig absolutt avvik) for de historiske prognosene vi beregnet i oppgave 1c):

$$\underline{\underline{MAD}} = \frac{1}{11} \sum_{t=2}^{12} |X_t - F_t| \quad (13)$$

$$= \frac{1}{11} (|25 - 30| + |40 - 28.5| + |35 - 32| + |20 - 32.97| \quad (14)$$

$$+ |50 - 29| + |40 - 35.3| + |45 - 36.71| + |30 - 39.2| \quad (15)$$

$$+ |35 - 36.44| + |45 - 36.01| + |15 - 38.71|) \quad (16)$$

$$= \underline{\underline{9.981}} \quad (17)$$

2) ( aggregert planlegging )

a) Siden årlig rentesats er  $r = 0.1$ , får vi:

$$\underline{\underline{H_1}} = 100000 \cdot \frac{P_1 r}{12} = 100000 \cdot \frac{50 \cdot 0.1}{12} = 416667 \approx \underline{\underline{41700}} \quad (18)$$

$$\underline{\underline{H_2}} = 100000 \cdot \frac{P_2 r}{12} = 100000 \cdot \frac{100 \cdot 0.1}{12} = 833333 \approx \underline{\underline{83300}} \quad (19)$$

$$\underline{\underline{H_3}} = 100000 \cdot \frac{P_3 r}{12} = 100000 \cdot \frac{80 \cdot 0.1}{12} = 666667 \approx \underline{\underline{66700}} \quad (20)$$

$$\underline{\underline{H_4}} = 100000 \cdot \frac{P_4 r}{12} = 100000 \cdot \frac{120 \cdot 0.1}{12} = \underline{\underline{100000}} \quad (21)$$

hvor

$$H_i = \text{lagerkostnad pr måned pr 100 000 liter maling, for familie } i, i = 1, 2, 3, 4 \quad (22)$$

$$P_i = \text{salgsverdi pr liter maling, for familie } i, i = 1, 2, 3, 4 \quad (23)$$

$$r = \text{årlig rentesats} \quad (24)$$

b) Vi får oppgitt i oppgaven at hver familie har et gitt antall regulære produksjonstimer til rådighet hver måned for hver familie. I tillegg kan hver familie benytte opp til 100 timer overtid hver måned.

Kapasiteten for hver familie for hver måned må dermed minst oppfylle:

$$\text{timer brukt} \leq \text{antall regulære timer} + \text{maksimalt antall overtidstimer} \quad (25)$$

I tillegg til å sjekke om kapasitetsføringen over er oppfylt, må vi bokføre hvor mange timer vi har til overs i hver måned. Disse timene akkumuleres til neste periode som representerer mulighet for overlaging til påfølgende måneder med kapasitetssprekk.

Vi sjekker at kapasiteten er oppfylt for hver familie.

Familie 1 (interiør):

Siden etterspørselen for familie 1 er konstant lik 32, er det nok å sjekke at kapasiteten er oppfylt for en vilkårlig måned:

| Måned | Timer behov | Tilgjengelige timer   | Timer til overs |
|-------|-------------|-----------------------|-----------------|
| $t$   | 480         | $720 + 100 + 0 = 820$ | 340             |

Vi kan tolke denne tabellen på følgende måte:

For hver måned kreves det  $32 \cdot 15 = 480$  timer. Vi har 720 regulære timer til overs, samt mulighet for 100 timer overtid. Totalt har vi dermed  $720 + 100 = 820$  tilgjengelige timer. Vi får dermed  $820 - 480 = 340$  timer til overs i hver måned. Det er dermed ikke behov for overlaging eller bruk av overtid.

## Familie 2 (Utendørs):

Siden etterspørselen for familie 2 er varierende, må vi sjekke alle månedene hver for seg<sup>1</sup>:

| Måned | Timer behov | Tilgjengelige timer       | Timer til overs |
|-------|-------------|---------------------------|-----------------|
| 1     | 260         | $960 + 100 + 0 = 1060$    | 800             |
| 2     | 520         | $960 + 100 + 800 = 1860$  | 1340            |
| 3     | 780         | $960 + 100 + 1340 = 2400$ | 1620            |
| 4     | 1560        | $960 + 100 + 1620 = 2680$ | 1120            |
| 5     | 2080        | $960 + 100 + 1120 = 2180$ | 100             |
| 6     | 2600        | $960 + 100 + 100 = 1160$  | -1440           |
| 7     | 1820        | $960 + 100 + 0 = 1060$    | -760            |
| 8     | 1300        | $960 + 100 + 0 = 1060$    | -240            |
| 9     | 780         | $960 + 100 + 0 = 1060$    | 280             |
| 10    | 260         | $960 + 100 + 280 = 1340$  | 1080            |
| 11    | 260         | $960 + 100 + 1080 = 2140$ | 1880            |
| 12    | 130         | $960 + 100 + 1880 = 2940$ | 2810            |

Legg merke til at vi legger til timene til overs fra en måned som tilgjengelige timer i neste måned, siden dette representerer muligheten for overlaging (blå tt).

Som vi ser fra tabellen har vi tre måneder med kapasitetssprekk: måned 6, 7 og 8 (rødt).

---

<sup>1</sup>Kolonnen "Timer behov" regnes ut ved å multiplisere etterspørselen med bearbeidingstiden 26.

### Familie 3 (Båt):

Siden etterspørselen for familie 3 er varierende, må vi sjekke alle månedene hver for seg<sup>2</sup>:

| Måned     | Timer behov | Tilgjengelige timer       | Timer til overs |
|-----------|-------------|---------------------------|-----------------|
| <b>1</b>  | 40          | $240 + 100 + 0 = 1060$    | <b>300</b>      |
| <b>2</b>  | 80          | $240 + 100 + 300 = 640$   | <b>560</b>      |
| <b>3</b>  | 120         | $240 + 100 + 560 = 900$   | <b>780</b>      |
| <b>4</b>  | 160         | $240 + 100 + 780 = 1120$  | <b>960</b>      |
| <b>5</b>  | 480         | $240 + 100 + 960 = 1300$  | <b>820</b>      |
| <b>6</b>  | 600         | $240 + 100 + 820 = 1160$  | <b>560</b>      |
| <b>7</b>  | 560         | $240 + 100 + 560 = 900$   | <b>340</b>      |
| <b>8</b>  | 400         | $240 + 100 + 340 = 680$   | <b>280</b>      |
| <b>9</b>  | 160         | $240 + 100 + 280 = 620$   | <b>460</b>      |
| <b>10</b> | 80          | $240 + 100 + 460 = 800$   | <b>720</b>      |
| <b>11</b> | 40          | $240 + 100 + 720 = 1060$  | <b>1020</b>     |
| <b>12</b> | 40          | $240 + 100 + 1020 = 1360$ | <b>1320</b>     |

Legg merke til at vi legger til timene til overs fra en måned som tilgjengelige timer i neste måned, siden dette representerer muligheten for overlaging (blå tt).

Som vi ser fra tabellen har alle månedene nok kapasitet.

---

<sup>2</sup>Kolonnen "Timer behov" regnes ut ved å multiplisere etterspørselen med bearbeidingstiden 40.

#### Familie 4 (Fabrikk):

Siden etterspørselen for familie 3 er varierende, må vi sjekke alle månedene hver for seg<sup>3</sup>:

| Måned     | Timer behov | Tilgjengelige timer      | Timer til overs |
|-----------|-------------|--------------------------|-----------------|
| <b>1</b>  | 300         | $240 + 100 + 0 = 340$    | <b>40</b>       |
| <b>2</b>  | 360         | $240 + 100 + 40 = 380$   | <b>20</b>       |
| <b>3</b>  | 180         | $240 + 100 + 20 = 360$   | <b>180</b>      |
| <b>4</b>  | 480         | $240 + 100 + 180 = 520$  | <b>40</b>       |
| <b>5</b>  | 300         | $240 + 100 + 40 = 380$   | <b>80</b>       |
| <b>6</b>  | 300         | $240 + 100 + 80 = 420$   | <b>120</b>      |
| <b>7</b>  | 240         | $240 + 100 + 120 = 460$  | <b>220</b>      |
| <b>8</b>  | 120         | $240 + 100 + 220 = 560$  | <b>440</b>      |
| <b>9</b>  | 180         | $240 + 100 + 440 = 780$  | <b>600</b>      |
| <b>10</b> | 300         | $240 + 100 + 600 = 940$  | <b>640</b>      |
| <b>11</b> | 240         | $240 + 100 + 640 = 980$  | <b>740</b>      |
| <b>12</b> | 300         | $240 + 100 + 740 = 1080$ | <b>780</b>      |

Legg merke til at vi legger til timene til overs fra en måned som tilgjengelige timer i neste måned, siden dette representerer muligheten for overlaging (blå tt).

Som vi ser fra tabellen har alle månedene nok kapasitet.

---

<sup>3</sup>Kolonnen "Timer behov" regnes ut ved å multiplisere etterspørselen med bearbeidingstiden 60.

c) Siden denne modellen er nokså stor, må vi benytte indeksnotasjon. Vi har **to** indekser for dette problemet:

- **produktfamiliene**, som indekseres ved  $i = 1, 2, 3, 4$ , (interør, utendørs, båt, fabrikk)
- **månedene**, som indekseres ved  $t = 1, 2, \dots, 12$ .

$$I_{i0} = \text{startlager inn til uke 1 for familie } i \quad (26)$$

$$I_{i12} = \text{sluttlager i uke 12 for familie } i \quad (27)$$

$$D_{it} = \text{etterspørsel for familie } i \text{ i uke } t \quad (28)$$

$$h_{it} = \text{overlagringskostnad per 100 000 liter pr måned for familie } i \text{ fra uke } t \quad (29)$$

$$s_i = \text{setupkostnad for familie } i \quad (30)$$

$$r_i = \text{bearbeidingstid for familie } i \quad (31)$$

$$R_i = \text{antall regulære timer tilgjengelig for familie } i \quad (32)$$

$$O^m = \text{maksimalt antall overtidstimer tilgjengelig for hver familie i hver måned} \quad (33)$$

$$C^R = \text{kostnad pr regulær time} \quad (34)$$

$$C^{75} = \text{kostnad pr time overtid for de 75 første overtidstimene pr måned} \quad (35)$$

$$C^{25} = \text{kostnad pr time overtid for de 25 siste overtidstimene pr måned} \quad (36)$$

$$(37)$$

Vi har ikke oppgitt tallverdien på  $C^{75}$  og  $C^{25}$  så disse må vi presisere:

$$C^{75} = 1.5C^R = 15000 \quad (38)$$

$$C^{25} = 2C^R = 20000 \quad (39)$$

### Kommentar:

Det er **ikke** nødvendig å sette opp data som **ikke** benyttes i modellen. Dette gjelder for eksempel salgsverdien pr liter pr familie og rentesatsen. Disse dataene har vi allerede benyttet for å finne de enhetslige lagerkostnadene  $h_i$ .

d) Vi har tre typer beslutninger i oppgaven:

- Produksjonsmengde - hvor mange enheter produsert (i 100 000 liter)
- Overlagring - hvor mange enheter overlagret (i 100 000 liter)
- Overtid - hvor mange overtidstimer brukt

Produksjonsmengde:

$$X_{it} = \text{antall enheter produsert av familie } i \text{ i måned } t \quad (40)$$

Overlagring:

$$I_{it} = \text{antall enheter overlagret av familie } i \text{ fra måned } t \text{ til } t + 1 \quad (41)$$

Overtid:

Overtidsvariabelen krever litt mer omtanke. Problemet ligger i at overtidskostnaden er splittet i to typer:

- Type 75 - de 75 første overtidstimene tilgjengelig pr måned pr familie
- Type 25 - de 25 siste overtidstimene tilgjengelig pr måned pr familie

For å fange opp begge kostnadene, definerer vi to overtidsvariabler; en for hver type:

$$O_{it}^{75} = \text{antall type 75 overtidstimer brukt for familie } i \text{ i måned } t \quad (42)$$

$$O_{it}^{25} = \text{antall type 25 overtidstimer brukt for familie } i \text{ i måned } t \quad (43)$$

- e) Målfunksjonen består av totale lager- og overtidskostnader:

$$C = (\text{totale lagerkostnader}) + (\text{totale overtidskostnader}) \quad (44)$$

$$= (\text{tot. lagerkostn.}) + (\text{tot. overtidskostn. type 75} + \text{tot. overtidskostn. type 25}) \quad (45)$$

$$= \sum_{i=1}^4 \sum_{t=1}^{12} h_i I_{it} + \sum_{i=1}^4 \sum_{t=1}^{12} C^{75} O_{it}^{75} + \sum_{i=1}^4 \sum_{t=1}^{12} C^{25} O_{it}^{25} \quad (46)$$

Kommentar:

Legg merke til at vi har splittet den totale overtidskostnaden i to kostnadsledd: type 75 og type 25.

f) Vi identifiserer hvilke føringer vi har:

- Lagerbalanse
- Produksjonskapasitet
- Overtidskapasitet

Lagerbalanse:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} = I_{ti}, \quad \text{for alle } i \text{ og } t \quad (47)$$

Produksjonskapasitet:

$$(\text{antall timer brukt}) \leq (\text{antall timer tilgjengelig}) \quad (48)$$

$$(\text{ant. timer brukt}) \leq (\text{ant. regulære timer} + \text{ant. type 75 timer} + \text{ant. type 25 timer}) \quad (49)$$

$$r_i X_{it} \leq R_i + O_{it}^{75} + O_{it}^{25} \quad (50)$$

Maks antall overtidstimer:

$$O_{it}^{75} \leq 0.75O^m = 75 \quad (51)$$

$$O_{it}^{25} \leq 0.25O^m = 25 \quad (52)$$

$$(53)$$

g) Et sikkerhetslager er i realiteten et [minimumslager](#), dvs. et lager som aldri skal berøres. Vi får dermed en ny datastørrelse og en ny føring:

Nye data:

Ny data er sikkerhetsnivået:

$$SS = MAD = 9.9 = \text{sikkerhetslager} \quad (54)$$

Nye føring:

Siden et sikkerhetslager i realiteten er et [minimumslager](#), får vi:

$$I_{it} \geq SS \quad \text{for alle } i \text{ og } t \quad (55)$$

### 3) ( EOQ )

a)

Denne oppgaven handler om å finne de nødvendige dataene for å beregne EOQ-størrelsene for de tre LADY-produktene.

Vi har at total etterspørsel for interiørfamilien er  $D_1 = 32$ . I oppgaven får vi oppgitt at LADY-merket utgjør halvparten:

$$D_{\text{LADY}} = D_1/2 = 32/2 = 16 \quad (\text{ i 100 000 liter pr. måned } ) \quad (56)$$

Vi definerer følgende indekser:

- $i = F, T, G$ , representerer Forberedelsesprodukt, Toppstrøk og Grunning hhv. (LADY).

for å få månedslig etterspørsel, må vi dividere med 4:

$$\underline{\underline{D_F}} = \frac{0.1 \cdot D_{\text{LADY}}}{4} = \frac{0.1 \cdot 16}{4} = \underline{\underline{0.4}} \quad (\text{ i 100 000 liter pr. uke } ) \quad (57)$$

$$\underline{\underline{D_T}} = \frac{0.6 \cdot D_{\text{LADY}}}{4} = \frac{0.6 \cdot 16}{4} = \underline{\underline{2.4}} \quad (\text{ i 100 000 liter pr. uke } ) \quad (58)$$

$$\underline{\underline{D_G}} = \frac{0.3 \cdot D_{\text{LADY}}}{4} = \frac{0.3 \cdot 16}{4} = \underline{\underline{1.2}} \quad (\text{ i 100 000 liter pr. uke } ) \quad (59)$$

Vi skal videre beregne ukentlige enhets lagerkostnader. I dette tilfellet er det kostnaden for å overlagre 100 000 liter i en uke.<sup>4</sup>

Lagerkostnaden pr 100 000 liter pr uke, er kun gitt ved kapitalkostnaden, dvs rentekostnaden som vi får fra produktets salgsverdi. siden rentesatsen,  $r = 0.1$  er årlig, må vi dividere med 52 uker, for å få **ukentlig** lagerkostnad. Siden salgsverdien  $P_i$  er pr liter, må vi i tillegg multiplisere med 100 000, for å få lagerkostnad pr 100 000 liter:

$$\underline{\underline{h_F}} = \frac{P_{Fr}}{52} \cdot 100000 = \frac{30 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{5769}} \quad (\text{pr 100 000 liter pr. uke}) \quad (60)$$

$$\underline{\underline{h_T}} = \frac{P_{Tr}}{52} \cdot 100000 = \frac{80 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{15385}} \quad (\text{pr 100 000 liter pr. uke}) \quad (61)$$

$$\underline{\underline{h_G}} = \frac{P_{Gr}}{52} \cdot 100000 = \frac{50 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{9615}} \quad (\text{pr 100 000 liter pr. uke}) \quad (62)$$

Til slutt beregner vi enkelt setupkostnaden ved å multiplisere antall omstillingstimer med den regulære timekostnaden  $C_R = 10000$ :

$$\underline{\underline{S_F}} = 3 \cdot C_R = 3 \cdot 10000 = 30000 \quad (\text{ kroner pr setup }) \quad (63)$$

$$\underline{\underline{S_T}} = 5 \cdot C_R = 5 \cdot 10000 = 50000 \quad (\text{ kroner pr setup }) \quad (64)$$

$$\underline{\underline{S_G}} = 4 \cdot C_R = 4 \cdot 10000 = 40000 \quad (\text{ kroner pr setup }) \quad (65)$$

---

<sup>4</sup>Oppgaveteksten er utydelig når det gjelder denne oppgaven. På eksamen gis det enten beskjed om det hvis det oppdages under eksamen, hvis ikke, vil oppgaven gi korrekt dersom dere skulle tolke oppgaven feil.

b) Vi skal beregne optimale ordrestørrelser (EOQ) for de tre LADY-produktene samt **totale** kostnader.

Siden vi har alle de nødvendige dataene fra oppgave 3a), kan vi sette direkte inn i Wilsons formel:

$$X_F^* = \sqrt{\frac{2D_F S_F}{H_F}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.4 \cdot 30000}{5769}} = 2.04 \quad (\text{ i 100 000 liter } ) \quad (66)$$

$$X_T^* = \sqrt{\frac{2D_T S_T}{H_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.4 \cdot 50000}{15385}} = 3.95 \quad (\text{ i 100 000 liter } ) \quad (67)$$

$$X_G^* = \sqrt{\frac{2D_G S_G}{H_G}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.2 \cdot 40000}{9615}} = 3.16 \quad (\text{ i 100 000 liter } ) \quad (68)$$

Totale optimale kostnader er lik summen av kostnadene for de tre LADY-produktene:

$$\underline{\underline{C^*}} = C_F^* + C_T^* + C_G^* \quad (69)$$

$$= \left( \frac{S_F D_F}{X_F^*} + \frac{H_F X_F^*}{2} \right) + \left( \frac{S_T D_T}{X_T^*} + \frac{H_T X_T^*}{2} \right) + \left( \frac{S_G D_G}{X_G^*} + \frac{H_G X_G^*}{2} \right) \quad (70)$$

$$= H_F X_F^* + H_T X_T^* + H_G X_G^* \quad (71)$$

$$= 5769 \cdot 2.04 + 15385 \cdot 3.95 + 9615 \cdot 3.16 \quad (72)$$

$$= \underline{\underline{102914}} \quad (73)$$

Steg (??) er gyldig fordi setupkostnaden og lagerkostnaden er lik for EOQ-verdien.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Dette er altså kun gyldig for de optimale ordrestørrelsene. Grunnen til at vi skriver dette opp, er fordi utregningene blir enklere.

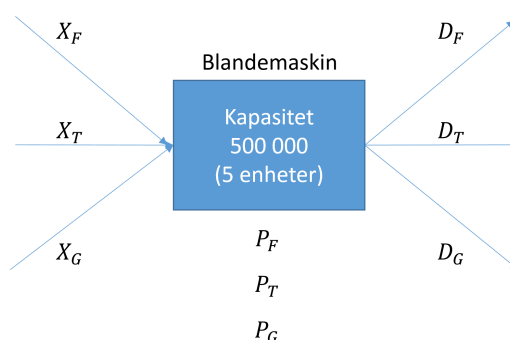
c) Vi skal regne ut omløpstidene for de tre LADY-produktene:<sup>6</sup>

$$\underline{\underline{O_F}} = \frac{X_F^*}{D_F} \frac{2.04}{0.4} = \underline{\underline{5.2}} \quad (\text{ i antall uker } ) \quad (74)$$

$$\underline{\underline{O_T}} = \frac{X_T^*}{D_T} \frac{3.95}{2.4} = \underline{\underline{1.6}} \quad (\text{ i antall uker } ) \quad (75)$$

$$\underline{\underline{O_G}} = \frac{X_G^*}{D_G} \frac{3.16}{1.2} = \underline{\underline{2.6}} \quad (\text{ i antall uker } ) \quad (76)$$

d) Vi skaffer oss oversikt over situasjonen ved hjelp figur ??.



Figur 1: Oversikt over situasjonen med produksjonsrate

Som vi ser er  $X$ -variablene **mengden** vi skal produsere, mens  $P$ -variablene er **hastigheten/raten** vi produserer i antall liter pr uke.<sup>7</sup>

<sup>6</sup>Omløpstiden er syklustiden, dvs tiden fra lageret fylles til det er tomt.

<sup>7</sup>Vi har benyttet indeksen  $i = F, T, G$  istedet for  $i = 1, 2, 3$  som opplyst i oppgaven for å få bedre forståelse.

Målfunksjonen:

Siden LADY-produktene nå er koblet med hverandre via produksjonskapasiteten på maskinen, må vi **summere** enkeltkostnadene for LADY-produktene:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C_F + C_T + C_G}} \quad (77)$$

føringer:

Vi identifiserer **to** føringer:

- policyføringer - produksjonsraten for et produkt må være større enn etterspørselsraten
- kapasitetsføring - maskinen kan ikke produsere mer enn total 5 enheter pr uke, dvs **summen** av produksjonsratene må være mindre enn 5.

Policyføringene:

$$P_i \geq D_i \quad ( \text{ for alle } i = F, T, G ) \quad (78)$$

Kapasitetsføringen

$$P_F + P_T + P_G \leq 5 \quad (79)$$

4) ( Wagner-Within )

a) Vi skal finne optimal produksjonsplan ved hjelp av Wagner-Within algoritmen.

Data:<sup>8</sup>

$$D_t = \text{etterspørsel måned } t \text{ av Drygolin Ultimat} \quad (80)$$

$$s = \text{setupkostnaden for Drygolin Ultimat} = 100000 \quad (81)$$

$$h = \text{enhetslig overlagringskostnad for Drygolin Ultimat (pr 100 000 liter) pr måned} = 8000 \quad (82)$$

Variabler:

$$X_t = \text{produksjonsmengde i måned } t \quad (83)$$

$$I_t = \text{mengde overlagret fra måned } t \text{ til } t + 1 \quad (84)$$

$$Y_t = 0 \text{ eller } 1 \text{ for hvorvidt produksjon finner sted i måned } t \quad (85)$$

---

<sup>8</sup>Det er ikke nødvendig å skrive opp disse definisjonene på eksamen. Data og variabler er underforståtte for Wagner-Within algoritmen. Vi har kun inkludert disse her for helheltens skyld.

Vi starter som vanlig med delproblemet med kun en periode:<sup>9</sup>

$\underline{P}_1$ : ( subproblem med kun første periode )

Med en eneste periode, må vi ha produksjon siden vi må oppfylle etterspørselen i periode 1 og startslageret er null. Vi har altså følgende optimale løsning for dette subproblemet:

$$\underline{C}_1^* = s \cdot Y_1 = \underline{100} \quad (86)$$

$\underline{P}_2$ : ( subproblem med de to første periode )

$$\underline{C}_2^* = \min \left[ (\text{siste bestilling i 1. periode}) , (\text{siste bestilling i 2. periode}) \right] \quad (87)$$

$$= \min \left[ s + h \cdot D_2 , s + \underline{C}_1^* \right] \quad (88)$$

$$= \min \left[ 100 + 8 \cdot 8 , 100 + 100 \right] \quad (89)$$

$$= \min \left[ \underline{164} , 200 \right] \quad (90)$$

$$= \underline{164} \quad (91)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $\underline{C}_{10}$ .

Vi vet da at fra Horisontteoremet, siden det er optimalt siste bestilling skjer før 2 periode, så kan vi se bort ifra alle periodene før 1.periode. Men vi har ingen, så her tjente vi ikke noe

---

<sup>9</sup> Vi skriver alle kostnadstall i antall 1000 for oversiktens skyld. Så setupkostnaden blir 100 mens lagerkostnaden blir 8. Dette kan dere også gjøre til eksamenen, så lenge dere bemerker at dere gjør det.

$P_3$ : ( subproblem med de tre første periode )

$$\underline{C}_3^* = \min \left[ (s.b.1) , (s.b.2), (s.b.3) \right] \quad (92)$$

$$= \min \left[ (s + h \cdot D_2 + 2 \cdot h \cdot D_3) , (s + h \cdot D_3 + C_1^*) , (s + C_2^*) \right] \quad (93)$$

$$= \min \left[ (164 + 2 \cdot 8 \cdot 10) , (200 + 80) , (164 + 100) \right] \quad (94)$$

$$= \min \left[ 324 , 280 , \underline{264} \right] \quad (95)$$

$$= \underline{264} \quad (96)$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 1. og 2. måned fra videre beregninger.<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup>Legg merke til at vi benytter oss av at vi allerede har beregnet en del av uttrykkene i forrige delpproblem.

$P_4$ :

Legg derfor til at vi starter beregningene fra 3. periode (og ikke første som vi gjorde i delproblemene over). Dette kommer fra bruk av horisontteoremet.

$$\begin{aligned}C_4^* &= \min[ (s.b.3) , (s.b.4)] \\&= \min[(C_2^* + s + h \cdot D_4), (C_3^* + s)] \\&= \min[(164 + 100 + 8 \cdot 14, (264 + 100)] \\&= \min[376, \underline{364}] \\&= 364\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 3. måned fra videre beregninger.

$P_5$ :

Vi starter beregningene fra 4. måned.

$$\begin{aligned}C_5^* &= \min[ (s.b.4) , (s.b.5)] \\&= \min[(C_3^* + s + h \cdot D_5), (C_4^* + s)] \\&= \min[(364 + 8 * 20, (364 + 100)] \\&= \min[524, \underline{464}] \\&= 464\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 4. måned fra videre beregninger.

$P_6$ :

Vi starter beregningene fra 5. måned.

$$\begin{aligned}C_6^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6)] \\&= \min[(C_4^* + s + h \cdot D_6), (C_5^* + s)] \\&= \min[(464 + 8 * 25, (464 + 100)] \\&= \min[664, \underline{564}] \\&= 564\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 5. måned fra videre beregninger.

$P_7$ :

Vi starter beregningene fra 6. måned.

$$\begin{aligned}C_7^* &= \min[ (s.b.6) , (s.b.7)] \\&= \min[(C_5^* + s + h \cdot D_7), (C_6^* + s)] \\&= \min[(564 + 8 * 5, (564 + 100)] \\&= \min[604, 664] \\&= 604\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte 5. måned fra videre beregninger. dette har vi allerede gjort.

$P_8$ : ( det fulle problemet )

Vi starter beregningene fra 6. måned.

$$\begin{aligned} C_8^* &= \min[ (s.b.6) , (s.b.7), (s.b.8)] \\ &= \min[(C_5^* + s + h \cdot D_7 + 2 \cdot h \cdot D_8), (C_6^* + s + h \cdot D_8), (C_7^* + s)] \\ &= \min[(604 + 2 \cdot 8 \cdot 2, (664 + 8 \cdot 2), (604 + 100)] \\ &= \min[636, 680, 704] \\ &= 636 \end{aligned}$$

Vi har nå funnet optimal kostnad. Vi finner optimale produksjonsperioder  $C_{xxxxxxx}$  ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxx} = C_{xxxxx100} \quad (\text{ siste bestilling i måned 6 }) \quad (97)$$

$$C_{xxxxx100} = C_{xxx1100} \quad (\text{ siste bestilling i måned 5 }) \quad (98)$$

$$C_{xxx1100} = C_{xx11100} \quad (\text{ siste bestilling i måned 4 }) \quad (99)$$

$$C_{xx11100} = C_{x111100} \quad (\text{ siste bestilling i måned 3 }) \quad (100)$$

$$C_{x111100} = C_{1011100} \quad (\text{ siste bestilling i måned 1 }) \quad (101)$$

$$(102)$$

Vi har altså  $C_{1011100} = 636000$ . videre må vi finne optimale produksjonsmengder og lagermengder.

Produksjonsmengder: ( finnes ved hjelp av ”dominante produksjonsplaner” )

$$X_1 = D_1 + D_2 = 13 \quad (103)$$

$$X_2 = 0 \quad (104)$$

$$X_3 = D_3 = 10 \quad (105)$$

$$X_4 = D_4 = 15 \quad (106)$$

$$X_5 = D_5 = 20 \quad (107)$$

$$X_6 = D_6 + D_7 + D_8 = 32 \quad (108)$$

$$X_7 = 0 \quad (109)$$

$$X_8 = 0 \quad (110)$$

$$(111)$$

Lagermengder:

$$I_1 = D_2 = 8 \quad (112)$$

$$I_2 = 0 \quad (113)$$

$$I_3 = 0 \quad (114)$$

$$I_4 = 0 \quad (115)$$

$$I_5 = 0 \quad (116)$$

$$I_6 = D_7 + D_8 = 7 \quad (117)$$

$$I_7 = D_8 = 2 \quad (118)$$

$$I_8 = 0 \quad (119)$$

$$(120)$$

b) Vi huskjer at sikkerhetslager er et **minimumslager** som aldri benyttes. Det vil med andre ord **alltid** bli overlaging.

At vi har en **tvungen** overlaging til hver måned, er i strid med Wagner-Withins **første** observasjon<sup>11</sup>, som sier at:

*"Det er aldri optimalt å overlagre til en periode med produksjon"*

c) Vi skal sjekke om problemet hvor vi **øker** etterspørselen med en enhet i hver periode, har samme optimale produksjonsperioder.<sup>12</sup>

Vi kunne nå ha beregnet Wagner-Withins algoritme på nytt, med en ekstra enhet (100 000 liter) etterspørsel i hver periode. Dette er unødvendig arbeid, da vi kun trenger å sjekke løsningen fra oppgave 4a) for de periodene hvor vi faktisk har overlaging.<sup>13</sup>

Siden vi har kun overlaging fra måned 1 til måned 2, og overlaging fra måned 6 til måned 7 og 8 hhv., trenger vi kun å sjekke subproblemene P2 og P8:

---

<sup>11</sup>Når man får en oppgave om å begrunne hvorvidt Wagner-Withins algoritme er **gyldig** eller ikke, betyr det i realiteten at man skal sjekke om de fire observasjonene som Wagner-Within algoritmen er bygd på, er oppfylt.

<sup>12</sup>En produksjonsperiode, er en periode hvor produksjon forekommer. Dvs. vi skal sjekke om  $Y$ -variablene er de samme.

<sup>13</sup>Siden når vi ikke har overlaging, kan vi øke etterspørselen **uten** at kostnadene øker.

P<sub>2</sub>: ( subproblem med de to første periode )

$$\underline{C}_2^* = \min \left[ (siste\ bestilling\ i\ 1.\ period) , (siste\ bestilling\ i\ 2.\ period) \right] \quad (121)$$

$$= \min \left[ s + h \cdot D_2 + h \cdot 1 , s + C_1^* \right] \quad (122)$$

$$= \min \left[ 100 + 8 \cdot 8 + 8 , 100 + 100 \right] \quad (123)$$

$$= \min \left[ \underline{172} , 200 \right] \quad (124)$$

$$= \underline{172} \quad (125)$$

Som vi ser, er fremdeles siste bestilling i måned 1 optimalt. Vi fikk en kostnadsøkning på 8.

P<sub>8</sub>: ( det fulle problemet )

$$C_8^* = \min [ (s.b.6) , (s.b.7) , (s.b.8) ]$$

$$= \min [ (C_5^* + h \cdot D_7 + h \cdot 1 + 2 \cdot h \cdot D_8 + 2 \cdot h \cdot 1) , (C_6^* + s + h \cdot D_8 + h \cdot 1) , (C_7^* + s) ]$$

$$= \min [ (604 + 2 \cdot 8 \cdot 2 + 8 + 2 \cdot 8) , (664 + 8 \cdot 2 + 8) , (604 + 100) ]$$

$$= \min [ \underline{636} + 24 , 680 + 8 , 704 ]$$

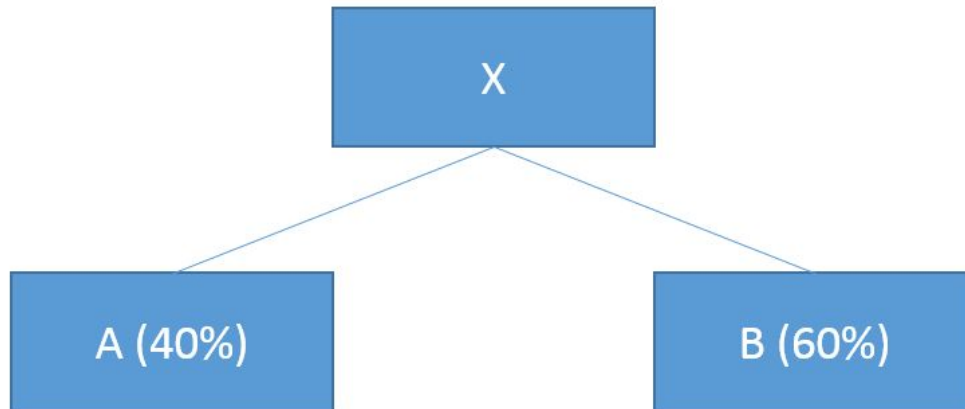
$$= \min [ \underline{660} , 688 , 704 ]$$

$$= 660$$

Som vi ser, er fremdeles siste bestilling i måned 6 optimalt. Vi fikk en kostnadsøkning på 24. Totalt økte kostnaden med  $8+24=32$ . Dvs Ny optimal kostnad er C<sub>10111100</sub> = 668.

5) ( MRP )

a) BOM-strukturen til komponent X er gitt ved figur ??:



Figur 2: BOM-strukturen til komponent X

b) Vi skal regne ut etterspørselen av komponent X fra masterplanen til Drygolin Ultimat. Det er to ting som er viktig å huske:

- Masterplan er lagerfiksert - dvs. MPS viser når produktet skal være på lager, mens MRP-planen er bestillingsfiksert - dvs planlagt produksjon viser når produktet bestilles. Vi må derfor forskyve masterplanen en ke frem i tid (ledetiden), for å få etterspørselen av X.
- Komponent X utgjør 30% av Drygolin Ultimat, så vi må multiplisere etterspørselen fra masterplanen med 0.3.

Vi får dermed følgende avhengig etterspørsel (avrundet til nærmeste heltall):

| Måned                    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7 | 8 |
|--------------------------|---|---|---|---|----|---|---|---|
| Etterspørsel komponent X | 0 | 4 | 5 | 7 | 11 | 0 | 0 | 0 |

c, d og e)

| Uke                | Init | 1  | 2  | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |
|--------------------|------|----|----|------|------|------|------|------|------|
| <b>Komponent X</b> |      |    |    |      |      |      |      |      |      |
| Bruttobehov        |      | 0  | 4  | 5    | 7    | 11   | 0    | 0    | 0    |
| Planlagt mottak    |      |    | 24 |      |      |      |      |      |      |
| Lager              |      |    | 20 | 15   | 8    | 21   | 21   | 21   | 21   |
| Nettobehov         |      |    |    |      |      | 3    |      |      |      |
| Planlagt ordre     |      |    |    | 24   |      |      |      |      |      |
| <b>Komponent A</b> |      |    |    |      |      |      |      |      |      |
| Bruttobehov        |      |    |    | 9.6  |      |      |      |      |      |
| Planlagt mottak    |      |    |    |      |      |      |      |      |      |
| Sikkerhetslager    | 5    | 5  | 5  | 5    | 5    | 5    | 5    | 5    | 5    |
| Lager              | 15   | 15 | 15 | 5.4  | 5.4  | 5.4  | 5.4  | 5.4  | 5.4  |
| Nettobehov         |      |    |    |      |      |      |      |      |      |
| Planlagt ordre     |      |    |    |      |      |      |      |      |      |
| <b>Komponent B</b> |      |    |    |      |      |      |      |      |      |
| Bruttobehov        |      |    |    | 14.4 |      |      |      |      |      |
| Planlagt mottak    |      |    |    |      |      |      |      |      |      |
| Sikkerhetslager    | 10   | 10 | 10 | 10   | 10   | 10   | 10   | 10   | 10   |
| Lager              | 12   | 12 | 12 | 37.6 | 37.6 | 37.6 | 37.6 | 37.6 | 37.6 |
| Nettobehov         |      |    |    | 2.4  |      |      |      |      |      |
| Planlagt ordre     |      |    | 40 |      |      |      |      |      |      |

Kommentarer:

- Bruttobehovet for komponent A er beregnet fra planlagt ordre for komponent X:  $0.4 \cdot 24 = 9.6$
- Det initielle lageret 20 for komponent A er splittet i sikkerhetslageret 5 og lager 15
- Bruttobehovet for komponent B er beregnet fra planlagt ordre for komponent X:  $0.6 \cdot 24 = 14.4$
- Det initielle lageret 22 for komponent B er splittet i sikkerhetslageret 10 og lager 12

# Hovedeksamen 2016

# LØSNING: Hovedeksamen 22. mai 2015

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2015

## Oppgave 1: ( prognostisering )

a) Vi skal velge et fornuftig måltall, som vi skal benytte for å bestemme hvilken av glattingsparametrene  $\theta_1$  og  $\theta_2$  vi skal benytte.

For å sammenligne to prognoser, er MSE, dvs ”Mean Square Error” mest hensiktsmessig å bruke. Årsaken er at MSE måler **avstanden** mellom observasjonene og prognosene.

vi velger den metoden som gir **lavest** MSE:<sup>1</sup>

$$MSE_{\theta_1} = \frac{1}{T - s + 2} \sum_{t=s}^T E_t^2 = \frac{1}{11} \sum_{t=2}^{11} E_t^2 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{11} (1^2 + 2.8^2 + 4.4^2 + 2.1^2 + 0.4^2 + 1.1^2 + 2.2^2 + 0.6^2 + 2.1^2 + 0.6^2 + 0.9^2) \quad (2)$$

$$= 4.11 \quad (3)$$

$$MSE_{\theta_2} = \frac{1}{T - s + 2} \sum_{t=s}^T E_t^2 = \frac{1}{11} \sum_{t=2}^{11} E_t^2 \quad (4)$$

$$= \frac{1}{11} (1^2 + 2.2^2 + 3.2^2 + 0.4^2 + 0.3^2 + 1.3^2 + 3^2 + 1.4^2 + 0.9^2 + 0.3^2 + 0.8^2) \quad (5)$$

$$= 2.78 \quad (6)$$

Siden  $MSE_{\theta_2}$  er lavest, velger vi derfor  $\theta_2$ .

---

<sup>1</sup>Legg merke til at vi har  $T = 12$  antall perioder og vi har prognoser fra periode  $s = 2$ .

b) Siden vi får oppgitt at prognosen ble 4.4 ved bruk av glattingsparameter  $\theta_2$ , har vi at spesielt at:

$$F_{13} = 4.4 \quad (7)$$

I tillegg får vi oppgitt at siste observasjon er

$$X_{12} = 5 \quad (8)$$

Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at:

$$F_{13} = \theta_2 F_{12} + (1 - \theta_2) X_{12} \quad (9)$$

Problemet her er at vi hveken kjenner  $\theta_2$  eller  $F_{12}$ . Vi har med andre ord to ukjente.

Vi trenger med andre ord en ekstra likning, slik at vi kan eliminere  $F_{12}$ . Vi har en ekstra informasjon dog: feilen  $E_{12}$  som ble gjort i periode 12:

$$E_{12} = X_{12} - F_{12} \quad (10)$$

eller ekvivalent

$$F_{12} = X_{12} - E_{12} = 5 - 0.8 = 4.2 \quad (11)$$

Vi løser dermed likning (??) med hensyn på  $\theta_2$ :

$$F_{13} = \theta_2 F_{12} + (1 - \theta_2) X_{12} \quad (12)$$

$$\Downarrow \quad (13)$$

$$F_{13} = \theta_2 F_{12} + X_{12} - \theta_2 X_{12}$$

$$\Downarrow \quad (14)$$

$$F_{13} = \theta_2 (F_{12} - X_{12}) + X_{12}$$

$$\Downarrow \quad (15)$$

$$\theta_2 (F_{12} - X_{12}) = X_{12} - F_{13}$$

$$\Downarrow \quad (16)$$

$$\theta_2 = \frac{X_{12} - F_{13}}{F_{12} - X_{12}}$$

$$\Downarrow \quad (17)$$

$$\theta_2 = \frac{5 - 4.4}{5 - 4.2}$$

$$\Downarrow \quad (18)$$

$$\underline{\underline{\theta_2}} = 0.75 \approx \underline{\underline{0.8}}$$

c) Siden vi har gitt at glattingsparameteren er  $\theta = 0.8$ , beregner vi prognosene frem til måned 4 rekursivt:

$$F_{13} = 4.4 \quad (19)$$

$$F_{14} = \theta F_{13} + (1 - \theta) X_{13} = 0.8 \cdot 4.4 + 0.2 \cdot 7 = 4.91 \quad (20)$$

$$F_{15} = \theta F_{14} + (1 - \theta) X_{14} = 0.8 \cdot 4.91 + 0.2 \cdot 6 = 5.13 \quad (21)$$

$$F_{16} = \theta F_{15} + (1 - \theta) X_{15} = 0.8 \cdot 5.13 + 0.2 \cdot 4 = 4.9 \quad (22)$$

$$(23)$$

Prognosen for måned 4 i 2016 er gitt ved  $F_{16} = 4.9$ .

2) ( aggregert planlegging )

a) Avdeling 1 har to skift hvor hvert skift gir 960 produksjonstimer. Totalt har avdelingen dermed  $960+960 = 1920$  timer produksjonstimer.

I tillegg kan avdeling 1 benytte seg av maksimalt 300 timer overtidproduksjon hver måned.

Hver måned har avdelingen dermed totalt  $1920+300 = 2220$  timer tilgjengelig til produksjon.

Kapasiteten ved avdeling 1 må minst oppfylle (for hver måned):

$$\text{timer brukt} \leq \text{timer tilgjengelig} \quad (24)$$

I tillegg til å sjekke om kapasitetsføringen over er oppfylt, må vi bokføre hvor mange timer vi har til overs i hver måned. Disse timene akkumuleres til neste periode som representerer mulighet for overlaging til påfølgende måneder med kapasitetssprekk.

Vi sjekker at kapasiteten er oppfylt for avdeling 1 frem til måned 8:

Avdeling 1:

Husk at "timer brukt" er lik summen av etterspørsel\*bearbeidingstid for familie 1 og familie 2:

| Måned | Timer behov                         | Tilgjengelige timer | Timer til overs |
|-------|-------------------------------------|---------------------|-----------------|
| 1     | $30 \cdot 15 + 10 \cdot 26 = 710$   | 2220                | 1510            |
| 2     | $25 \cdot 15 + 20 \cdot 26 = 895$   | 2220                | 2835            |
| 3     | $40 \cdot 15 + 30 \cdot 26 = 1380$  | 2220                | 3675            |
| 4     | $35 \cdot 15 + 60 \cdot 26 = 2085$  | 2220                | 3810            |
| 5     | $20 \cdot 15 + 80 \cdot 26 = 2380$  | 2220                | 3650            |
| 6     | $50 \cdot 15 + 100 \cdot 26 = 3350$ | 2220                | 2520            |
| 7     | $45 \cdot 15 + 70 \cdot 26 = 2420$  | 2220                | 2320            |
| 8     | $45 \cdot 15 + 50 \cdot 26 = 1975$  | 2220                | 2565            |

Legg merke til at kolonnen "timer til overs" akkumuleres fra måneden før (lager).

Som vi ser fra tabellen har vi ingen måneder med kapasitetssprekk.

b) Siden denne modellen er nokså stor, må vi benytte indeksnotasjon. Vi har tre indekser for dette problemet:

- **produktfamiliene**, som indekseres ved  $i = 1, 2, 3, 4$ , (interør, utendørs, båt, fabrikk)
- **avdelingene**, som indekseres ved  $j = 1, 2$ .
- **månedene**, som indekseres ved  $t = 1, 2, \dots, 12$ .

$$I_{i0} = \text{startlager inn til uke 1 for familie } i \quad (25)$$

$$I_{i12} = \text{sluttlager i uke 12 for familie } i \quad (26)$$

$$D_{it} = \text{etterspørsel for familie } i \text{ i måned } t \quad (27)$$

$$h_{it} = \text{overlagringskostnad per 100 000 liter pr måned for familie } i \text{ fra uke } t \quad (28)$$

$$s_i = \text{setupkostnad for familie } i \quad (29)$$

$$r_i = \text{bearbeidingstid for familie } i \quad (30)$$

$$R_j^s = \text{antall produksjonstimer pr skift på avdeling } j \quad (31)$$

$$N_j^s = \text{antall skift på avdeling } j \quad (32)$$

$$O_j^m = \text{maksimalt antall overtidstimer tilgjengelig ved avdeling } j \quad (33)$$

$$C_j^s = \text{månedslig kostnad per skift ved avdeling } j \quad (34)$$

$$C_j^o = \text{kostnad pr overtidstime (utenom skift) ved avdeling } j \quad (35)$$

Vi har ikke oppgitt tallverdiene på  $C_1^s$ ,  $C_2^s$ ,  $C_1^o$  og  $C_2^o$  så disse må vi presisere:

$$C_1^s = 960 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 1000 = 960 \cdot 20000 \quad (36)$$

$$C_2^s = 480 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1000 = 480 \cdot 10000 \quad (37)$$

$$C_1^o = 960 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 1800 = 960 \cdot 36000 \quad (38)$$

$$C_2^o = 480 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1800 = 480 \cdot 18000 \quad (39)$$

c) Vi har tre typer beslutninger i oppgaven:

- Produksjonsmengde - hvor mange enheter produsert (i 100 000 liter)
- Overlagring - hvor mange enheter overlagret (i 100 000 liter)
- Overtid - hvor mange overtidstimer brukt

Produksjonsmengde:

$$X_{it} = \text{antall enheter produsert av familie } i \text{ i måned } t \quad (40)$$

Overlagring:

$$I_{it} = \text{antall enheter overlagret av familie } i \text{ fra måned } t \text{ til } t + 1 \quad (41)$$

Overtid:

Antall overtidstimer per avdeling er siste type beslutning:

$$O_{jt} = \text{antall overtidstimer brukt ved avdeling } j \text{ i måned } t \quad (42)$$

$$(43)$$

e) Målfunksjonen består av totale lager- og overtidskostnader:<sup>2</sup>

$$C = (\text{totale lagerkostnader}) + (\text{totale overtidskostnader}) \quad (44)$$

$$= \sum_{i=1}^4 \sum_{t=1}^{12} h_i I_{it} + \sum_{j=1}^2 \sum_{t=1}^{12} C_j^o O_{jt} \quad (45)$$

f) Vi identifiserer hvilke føringer vi har:

- Lagerbalanse
- Produksjonskapasitet
- Overtidskapasitet

Lagerbalanse:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} = I_{ti}, \quad \text{for alle } i \text{ og } t \quad (46)$$

Produksjonskapasitet:

$$(\text{antall timer brukt}) \leq (\text{antall timer tilgjengelig}) \quad (47)$$

$$(\text{ant. timer brukt}) \leq (\text{ant. timer pr skift} \cdot (\text{antall skift}) + \text{ant overtidstimer}) \quad (48)$$

$$r_i X_{it} \leq R_j^s N_j + O_{jt} \quad (49)$$

---

<sup>2</sup>Vanlige produksjonskostnader (skift) tas ikke med i målfunksjonen siden denne kostnaden er gitt.

Maks antall overtidstimer:

$$O_{jt} \leq O_j^m \quad (50)$$

$$(51)$$

g) Vi skal utvide modellen slik at beslutningen om hvorvidt vi skal benytte et tredje skift eller ikke på avdeling 1 er inkludert.

Nye data:

Ingen nye data.

Nye variabler:

Vi må inkludere hvorvidt et tredje skift skal benyttes på avdeling 1 eller ikke. Dette er en ja/nei beslutning:

$$Y_{1t} = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker et tredje skift på avdeling 1 måned } t \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases}$$

Ny målfunksjon:

Vi må inkludere kostnaden for det tredje skiftet:

$$C' = C + \sum_{t=1}^{12} C_1^s Y_t \quad (52)$$

Her er  $C$  kostnadsfunksjonen fra likning (??).

Nye føringer:

Vi må først oppdatere produksjonskapasitetsføringen

$$r_i X_{it} \leq R_j^s N_j + O_{jt} + R_j^s Y_{1t} \quad (53)$$

Vi har også en [logisk](#) føring mellom det tredje skiftet og mulighet for overtidstimer på avdeling 1:

$$\text{Hvis } Y_{1t} = 0, \text{ så må } O_{1t} = 0 \quad (54)$$

På matematisk form:

$$O_{1t}(1 - Y_{1t}) = 0 \quad (55)$$

Eller på lineær form:

$$O_{1t} \leq M Y_{1t} \quad (56)$$

hvor  $M = O_1^m$ .

### 3) ( EOQ )

a)

Denne oppgaven handler om å finne de nødvendige dataene for å beregne EOQ-størrelsene for de tre SENS-produktene.

Vi har at total etterspørsel for fabrikkmaltfamilien er  $D_4 = 32$ . I oppgaven får vi oppgitt at SENS-merket har konstant aggregert ukentlig etterspørsel lik 4:

$$D_{\text{SENS}} = 4 \quad (\text{ i 100 000 liter pr. uke } ) \quad (57)$$

Vi definerer følgende indekser:

- $i = F, T, G$ , representerer Forberedelsesprodukt, Toppstrøk og Grunning hhv. (SENS).

Vi bruker aggregeringsdata oppgitt i oppgaven og får:

$$\underline{\underline{D_F}} = 0.2 \cdot D_{\text{SENS}} = 0.2 \cdot 4 = \underline{\underline{0.8}} \quad (\text{ i 100 000 liter pr. uke } ) \quad (58)$$

$$\underline{\underline{D_T}} = 0.5 \cdot D_{\text{SENS}} = 0.5 \cdot 4 = \underline{\underline{2}} \quad (\text{ i 100 000 liter pr. uke } ) \quad (59)$$

$$\underline{\underline{D_G}} = 0.3 \cdot D_{\text{SENS}} = 0.3 \cdot 4 = \underline{\underline{1.2}} \quad (\text{ i 100 000 liter pr. uke } ) \quad (60)$$

Vi skal videre beregne ukentlige enhets lagerkostnader. I dette tilfellet er det kostnaden for å overlagre 100 000 liter i en uke.<sup>3</sup>

Lagerkostnaden pr 100 000 liter pr uke, er kun gitt ved kapitalkostnaden, dvs rentekostnaden som vi får fra produktets salgsverdi. siden rentesatsen,  $r = 0.1$  er årlig, må vi dividere med 52 uker, for å få **ukentlig** lagerkostnad. Siden salgsverdien  $P_i$  er pr liter, må vi i tillegg multiplisere med 100 000, for å få lagerkostnad pr 100 000 liter:

$$\underline{\underline{h_F}} = \frac{P_F r}{52} \cdot 100000 = \frac{40 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{7692}} \quad (\text{pr 100 000 liter pr. uke}) \quad (61)$$

$$\underline{\underline{h_T}} = \frac{P_T r}{52} \cdot 100000 = \frac{60 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{11538}} \quad (\text{pr 100 000 liter pr. uke}) \quad (62)$$

$$\underline{\underline{h_G}} = \frac{P_G r}{52} \cdot 100000 = \frac{50 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{\underline{9615}} \quad (\text{pr 100 000 liter pr. uke}) \quad (63)$$

Til slutt beregner vi enkelt setupkostnaden ved å multiplisere antall omstillingstimer med den regulære timekostnaden  $C_R = 10000$  samt legge til fastkostnaden:

$$\underline{\underline{S_F}} = 3 \cdot C_R + 5000 = 2 \cdot 10000 + 5000 = 25000 \quad (\text{ kroner pr setup}) \quad (64)$$

$$\underline{\underline{S_T}} = 5 \cdot C_R + 5000 = 4 \cdot 10000 + 5000 = 45000 \quad (\text{ kroner pr setup}) \quad (65)$$

$$\underline{\underline{S_G}} = 4 \cdot C_R + 5000 = 3 \cdot 10000 + 5000 = 35000 \quad (\text{ kroner pr setup}) \quad (66)$$

---

<sup>3</sup>Oppgaveteksten er utydelig når det gjelder denne oppgaven. På eksamen gis det enten beskjed om det hvis det oppdages under eksamen, hvis ikke, vil oppgaven gi korrekt dersom dere skulle tolke oppgaven feil.

b) Vi skal beregne optimale ordrestørrelser (EOQ) for de tre SENS-produktene samt **totale** kostnader.

Siden vi har alle de nødvendige dataene fra oppgave 3a), kan vi sette direkte inn i Wilsons formel:

$$\underline{\underline{X_F^*}} = \sqrt{\frac{2D_F S_F}{H_F}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.8 \cdot 25000}{7692}} = \underline{\underline{2.5}} \quad (\text{i 100 000 liter}) \quad (67)$$

$$\underline{\underline{X_T^*}} = \sqrt{\frac{2D_T S_T}{H_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 45000}{11538}} = \underline{\underline{4.16}} \quad (\text{i 100 000 liter}) \quad (68)$$

$$\underline{\underline{X_G^*}} = \sqrt{\frac{2D_G S_G}{H_G}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.2 \cdot 35000}{9615}} = \underline{\underline{2.96}} \quad (\text{i 100 000 liter}) \quad (69)$$

Totale optimale kostnader er lik summen av kostnadene for de tre SENS-produktene:

$$\underline{\underline{C^*}} = C_F^* + C_T^* + C_G^* \quad (70)$$

$$= \left( \frac{S_F D_F}{X_F^*} + \frac{H_F X_F^*}{2} \right) + \left( \frac{S_T D_T}{X_T^*} + \frac{H_T X_T^*}{2} \right) + \left( \frac{S_G D_G}{X_G^*} + \frac{H_G X_G^*}{2} \right) \quad (71)$$

$$= H_F X_F^* + H_T X_T^* + H_G X_G^* \quad (72)$$

$$= 7692 \cdot 2.28 + 11538 \cdot 3.95 + 9615 \cdot 2.96 \quad (73)$$

$$= \underline{\underline{91534}} \quad (74)$$

Steg (??) er gyldig fordi setupkostnaden og lagerkostnaden er lik for EOQ-verdien.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Dette er altså kun gyldig for de optimale ordrestørrelsene. Grunnen til at vi skriver dette opp, er fordi utregningene blir enklere.

c) Vi skal regne ut omløpstidene for de tre SENS-produktene:<sup>5</sup>

$$\underline{\underline{O_F}} = \frac{X_F^*}{D_F} = \frac{2.5}{0.8} = \underline{\underline{2.9}} \quad (\text{ i antall uker } ) \quad (75)$$

$$\underline{\underline{O_T}} = \frac{X_T^*}{D_T} = \frac{4.16}{2} = \underline{\underline{2.0}} \quad (\text{ i antall uker } ) \quad (76)$$

$$\underline{\underline{O_G}} = \frac{X_F^*}{D_F} = \frac{2.96}{1.2} = \underline{\underline{2.5}} \quad (\text{ i antall uker } ) \quad (77)$$

d) Vi regner først ut **justert** optimal ordrestørrelse:

$$X_T^* = \sqrt{\frac{2D_T S_T}{H_T(1 - \frac{D_T}{P_T})}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 45000}{11538(1 - \frac{2}{3})}} = 6.84 \quad (\text{ i 100 000 liter } ) \quad (78)$$

Omløpstiden  $T = T_1 + T_2$  består av to ledd:  $T_1$  og  $T_2$ , hvor:

$$T_1 = \frac{X_T^*}{P_T - D_T} = \frac{6.84}{3 - 2} = 6.84 \quad (\text{ tiden det tar å fylle opp lageret til } X_T^* ) \quad (79)$$

$$T_2 = \frac{X_T^*}{D_T} = \frac{6.84}{2} = 3.42 \quad (\text{ tiden det tar å tømme lageret } ) \quad (80)$$

Den totale omløpstiden blir dermed:

$$\underline{\underline{T}} = T_1 + T_2 = 6.84 + 3.42 = \underline{\underline{10.26}} \quad (\text{ i antall uker } ) \quad (81)$$

---

<sup>5</sup>Omløpstiden er syklustiden, dvs tiden fra lageret fylles til det er tomt.

4) ( Wagner-Within )

a) Vi skal finne optimal produksjonsplan ved hjelp av Wagner-Within algoritmen.

Data:<sup>6</sup>

$$D_t = \text{etterspørsel måned } t \text{ av Drygolin Ultimat} \quad (82)$$

$$s = \text{setupkostnaden for Drygolin Ultimat} = 100000 \quad (83)$$

$$h = \text{enhetslig overlagringskostnad for Drygolin Ultimat (pr 100 000 liter) pr uke} = 5000 \quad (84)$$

Variabler:

$$X_t = \text{produksjonsmengde i uke } t \quad (85)$$

$$I_t = \text{mengde overlagret fra uke } t \text{ til } t + 1 \quad (86)$$

$$Y_t = 0 \text{ eller } 1 \text{ for hvorvidt produksjon finner sted i uke } t \quad (87)$$

---

<sup>6</sup>Det er ikke nødvendig å skrive opp disse definisjonene på eksamen. Data og variabler er underforståtte for Wagner-Within algoritmen. Vi har kun inkludert disse her for helheltens skyld.

Vi starter som vanlig med delproblemet med kun en periode:<sup>7</sup>

$\underline{P}_1$ : ( subproblem med kun første periode )

Siden vi har initielt lager på 4, er det optimalt å benytte dette lageret for å oppfylle etterspørselen i uke 1. Vi har dermed ingen setup i første periode, dvs  $Y_1 = 0$ :

$$\underline{C}_1^* = s \cdot Y_1 = \underline{100} \cdot 0 = 0 \quad (88)$$

$\underline{P}_2$ : ( subproblem med de to første periode )

$$\underline{C}_2^* = \min \left[ (siste\ bestilling\ i\ 1.\ perioden), (siste\ bestilling\ i\ 2.\ perioden) \right] \quad (89)$$

$$= \min \left[ s + hD_2, s + h(I_0 - D_1) + C_1^* \right] \quad (90)$$

$$= \min \left[ 100 + 5 \cdot 5, 100 + 5 \cdot (4 - 2) + 0 \right] \quad (91)$$

$$= \min \left[ 125, \underline{110} \right] \quad (92)$$

$$= \underline{110} \quad (93)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{01}$ .

Horisontteoremet sier da at vi kan fryse uke 1, fra videre beregninger.

Legg merke til ekstrakostnaden som kommer i uke 2 pga. at det resterende initielle lageret overlages (i blått).

---

<sup>7</sup> Vi skriver alle kostnadstall i antall 1000 for oversiktens skyld. Så setupkostnaden blir 100 mens lagerkostnaden blir 8. Dette kan dere også gjøre til eksamen, så lenge dere bemerker at dere gjør det.

$P_3$ : ( subproblem med de tre første periodene )

Vi starter beregningene fra uke 2:

$$\underline{C}_3^* = \min \left[ (s.b.2), (s.b.3) \right] \quad (94)$$

$$= \min \left[ (s + hD_3 + C_1^*), (s + C_2^*) \right] \quad (95)$$

$$= \min \left[ (110 + 5 \cdot 10), (100 + 110) \right] \quad (96)$$

$$= \min \left[ \underline{160}, 210 \right] \quad (97)$$

$$= \underline{160} \quad (98)$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte uke 1 fra videre beregninger, noe vi allerede har gjort. <sup>8</sup>

---

<sup>8</sup>Legg merke til at vi benytter oss av at vi allerede har beregnet en del av uttrykkene i forrige delproblem.

$P_4$ : ( subproblem med de tre fire periodene )

Vi starter beregningene fra uke 2:

$$\begin{aligned}C_4^* &= \min[ (s.b.2), (s.b.3), (s.b.4)] \\&= \min[ (s + hD_3 + 2hD_4 + C_1^*), (s + hD_4 + C_2^*), (s + C_3^*)] \\&= \min[(160 + 2 \cdot 5 \cdot 8), (210 + 5 \cdot 8), (100 + 160)] \\&= \min[240, 250, 260] \\&= 240\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte uke 1 fra videre beregninger, noe vi allerede har gjort.

$P_5$ :

Vi starter beregningene fra uke 2:

$$\begin{aligned}C_5^* &= \min[ (s.b.2), (s.b.3), (s.b.4), (s.b.5)] \\&= \min[ (s + hD_3 + 2h \cdot D_4 + 3hD_5 + C_1^*), (s + hD_4 + 2h \cdot D_5 + C_2^*), \\&\quad (s + hD_5 + C_3^*), (s + C_4^*)] \\&= \min[(240 + 3 \cdot 5 \cdot 20), (250 + 2 \cdot 5 \cdot 20), (260 + 5 \cdot 20), (240 + 100)] \\&= \min[540, 450, 360, \underline{340}] \\&= 340\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan fryse uke 2, 3 og 4.

$P_6$ :

Vi starter beregningene fra uke 5:

$$\begin{aligned}C_6^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6) ] \\&= \min[(s + hD_6 + C_4^*), (s + C_5^*)] \\&= \min[(340 + 5 \cdot 8, (340 + 100)] \\&= \min[\underline{380}, 440] \\&= 380\end{aligned}$$

Horisontteoremet gir ikke noe ekstra .

$P_7$ :

Vi starter beregningene fra uke 5:

$$\begin{aligned}C_7^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6) , (s.b.7)] \\&= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7), (C_5^* + s + hD_7), (C_6^* + s)] \\&= \min[(380 + 2 \cdot 5 \cdot 6, (440 + 5 \cdot 6), (380 + 100)] \\&= \min[440, 470, 480] \\&= 440\end{aligned}$$

Horisontteoremet gir ikke noe ekstra .

$P_8$ : ( det fulle problemet )

Vi starter beregningene fra 5. måned.

$$\begin{aligned} C_8^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6) , (s.b.7), (s.b.8)] \\ &= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7 + 3hD_8), (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8), \\ &\quad (C_6^* + s + hD_8), (C_7^* + s)] \\ &= \min[(440 + 3 \cdot 5 \cdot 5), (470 + 2 \cdot 5 \cdot 5), (480 + 5 \cdot 5), (440 + 100)] \\ &= \min[515, 520, \underline{505}, 540] \\ &= 505 \end{aligned}$$

Vi har nå funnet optimal kostnad. Vi finner optimale produksjonsperioder  $C_{xxxxxxx}$  ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxx} = C_{xxxxx10} \quad (\text{ siste bestilling i uke 7 }) \quad (99)$$

$$C_{xxxx1010} = C_{xxx1100} \quad (\text{ siste bestilling i uke 5 }) \quad (100)$$

$$C_{x1001100} = C_{xx11100} \quad (\text{ siste bestilling i uke 2 }) \quad (101)$$

$$C_{x1001100} = C_{01001100} \quad (\text{ siste bestilling i uke 2 }) \quad (102)$$

Vi har altså  $C_{01001100} = 505000$ . videre må vi finne optimale produksjonsmengder og lagermengder.

Produksjonsmengder: ( finnes ved hjelp av ”dominante produksjonsplaner” )

$$X_1 = 0 \quad (103)$$

$$X_2 = D_2 + D_3 + D_4 - (I_1 - D_1) = 5 + 10 + 8 - (4 - 2) = 21 \quad (104)$$

$$X_3 = 0 \quad (105)$$

$$X_4 = 0 \quad (106)$$

$$X_5 = D_5 + D_6 = 20 + 8 = 28 \quad (107)$$

$$X_6 = 0 \quad (108)$$

$$X_7 = D_7 + D_8 = 6 + 5 = 11 \quad (109)$$

$$X_8 = 0 \quad (110)$$

$$(111)$$

Lagermengder:

$$I_1 = I_0 - D_1 = 4 - 2 = 2 \quad (112)$$

$$I_2 = D_3 + D_4 = 10 + 8 = 18 \quad (113)$$

$$I_3 = D_4 = 8 \quad (114)$$

$$I_4 = 0 \quad (115)$$

$$I_5 = D_6 = 8 \quad (116)$$

$$I_6 = 0 \quad (117)$$

$$I_7 = D_8 + I_8 = 2 + 3 = 5 \quad (118)$$

$$(119)$$

- b) La den nye ordren være ukjent variabel  $x$ , dvs vi øker etterspørselen i uke 8 med  $x$  enheter.

Vi kan skrive:

$$D_8^{ny} = D_8^{gammel} + x = 2 + x \quad (120)$$

For å finne den verdien på  $x$  slik at produksjonen flyttes fra uke 7 til uke 8, må vi se på delproblem P8, hvor vi inkluderer den nye ordren  $x$ :

$$\begin{aligned} C_8^* &= \min[(s.b.5), (s.b.6), (s.b.7), (s.b.8)] \\ &= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7 + 3hD_8 + 3hx), (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8 + 2hx), \\ &\quad (C_6^* + s + hD_8 + hx), (C_7^* + s)] \\ &= \min[515 + 15x, 520 + 10x, 505 + 5x, 540] \end{aligned}$$

Vi ser at siste bestilling i uke 7 blir større enn siste bestilling i uke 8 når:

$$505 + 5x = 540 \quad (121)$$

$$\Downarrow$$

$$5x = 540 - 505 = 35 \quad (122)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{35}{5} = 7 \quad (123)$$

Konklusjon: Produksjonen i uke 7 flyttes til uke 8 dersom den nye ordren er større enn 7.

c) Med en maksimal produksjonsrate på 2.5 millioner liter drygolin Ultimat i uken, må vi sjekke om vi har nok kapasitet til å gjennomføre planen fra oppgave 3.a.

vi har tre produksjonsperioder:

$$X_2 = 21 \tag{124}$$

$$X_5 = 28 \tag{125}$$

$$X_7 = 11 \tag{126}$$

Siden en produksjonsrate på 2.5 millioner liter i uken, svarer til 25 enheter per uke<sup>9</sup>, ser vi umiddelbart at vi har en sprekke i uke 5 på  $28-25=3$  enheter.

Vi kan dermed konkludere med at løsningen fra Wagner-Within algoritmen ikke er gyldig når vi inkluderer produksjonskapasiteten.

På grunn av produksjonskapasiteten vil Wagner-Within's teorem om "Dominante produksjonsplaner" være brutt, siden man må tillate å **splitte** produksjonen av en etterspørsel i flere produksjonsperiode.

Ny **dominant** produksjonsplan finnes ved å forsøke å løse sprekken i uke 5. Vi husker at uke 5 produserer både for uke 5 og for uke 6, dvs  $X = D_5 + D_6$ .

Billigste måte å løse sprekken på under sideinformasjonen at det finnes en **dominant plan**, er å kreve at produksjonen av  $D_6$  flyttes til uke 6, dvs:

$$X_5 = D_5 = 20 \tag{127}$$

$$I_5 = 0 \tag{128}$$

$$Y_6 = 1 \tag{129}$$

Vi må dermed finne de resterende variablene  $X_6, X_7, X_8, Y_7, Y_8, I_6$  og  $I_7$ , ved hjelp av Wagner-Within algoritmen, hvor vi starter med P7 hvor alle perioder frem til periode 6 er fryst:

---

<sup>9</sup>Husk at en enhet er 100 000 liter.

$P_7$ :

Vi starter beregningene fra uke 6:

$$\begin{aligned}C_7^* &= \min[ (s.b.6) , (s.b.7)] \\&= \min[ (C_5^* + s + hD_7), (C_6^* + s)] \\&= \min[ (440 + 5 \cdot 6), (440 + 100)] \\&= \min[ \underline{470}, 540] \\&= 470\end{aligned}$$

Legg merke til at ny  $C_6^*$  finnes ved å ta den gamle verdien fra oppgave 4a. og legge til en setup og trekke ifra lagerkostnaden for  $D_6$  fra uke 5 til uke 6:

$$C_6^* = 380 + 100 - 5 \cdot 8 = 440 \tag{130}$$

Horisontteoremet gir ikke noe nytt.

$P_8$ : ( det fulle problemet )

Vi starter beregningene fra uke 6.

$$\begin{aligned} C_8^* &= \min[(s.b.6) , (s.b.7), (s.b.8)] \\ &= \min[ (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8), (C_6^* + s + hD_8), (C_7^* + s)] \\ &= \min[ (470 + 2 \cdot 5 \cdot 5, (540 + 5 \cdot 5), (470 + 100)] \\ &= \min[\underline{520}, 565, 570] \\ &= 520 \end{aligned}$$

Vi ser dermed at det er optimalt at siste produksjon er i uke 6, dvs vi får:

$$C^* = C_{01001100} = 520 \quad (131)$$

I tillegg har vi at:

$$X_6 = D_6 + D_7 + D_8 + I_8 = 8 + 6 + 2 + 3 = 19 \quad (132)$$

$$X_7 = 0 \quad (133)$$

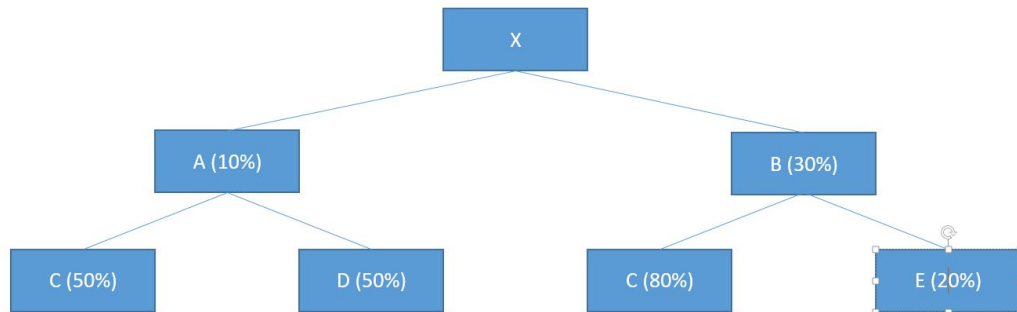
$$X_8 = 0 \quad (134)$$

$$I_6 = D_7 + D_8 + I_8 = 6 + 2 + 3 = 11 \quad (135)$$

$$I_7 = D_8 + I_8 = 2 + 3 = 5 \quad (136)$$

5) ( MRP )

a) BOM-strukturen til komponent X er gitt ved figur ??:



Figur 1: BOM-strukturen til komponent X

b)

| Uke                          | Init | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   |
|------------------------------|------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| <b>Komponent A</b>           |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| Bruttobehov                  |      |    | 1   | 1.5 | 3   |     | 4   |     |     |
| Planlagt mottak              |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| Lager                        | 4    | 4  | 3   | 1.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 |
| Nettobehov                   |      |    |     |     | 1.5 |     | 1.5 |     |     |
| Planlagt ordre               |      |    |     | 4   |     | 4   |     |     |     |
| <b>Komponent B</b>           |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| Bruttobehov                  |      |    | 3   | 4.5 | 9   |     | 12  |     |     |
| Planlagt mottak              |      | 10 |     |     |     |     |     |     |     |
| Lager                        |      | 10 | 7   | 2.5 |     |     |     |     |     |
| Nettobehov                   |      |    |     |     | 6.5 |     | 12  |     |     |
| Planlagt ordre               |      |    | 6.5 |     | 12  |     |     |     |     |
| <b>Komponent C</b>           |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| Bruttobehov                  |      |    | 5.2 | 2   | 9.6 | 2   |     |     |     |
| Planlagt mottak              |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| Sikkerhetslager <sup>5</sup> | 5    | 5  | 5   | 5   | 5   | 5   | 5   | 5   | 5   |
| Lager                        |      |    | 4.8 | 2.8 | 3.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2 |
| Nettobehov                   |      |    | 5.2 |     | 6.8 |     |     |     |     |
| Planlagt ordre               |      | 10 |     | 10  |     |     |     |     |     |
| <b>Komponent D</b>           |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| Bruttobehov                  |      |    |     | 2   |     | 2   |     |     |     |
| Planlagt mottak              |      |    | 5   |     |     |     |     |     |     |
| Lager                        | 2    | 2  | 7   | 5   | 5   | 3   | 3   | 3   | 3   |
| Nettobehov                   |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| Planlagt ordre               |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| <b>Komponent E</b>           |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| Bruttobehov                  |      |    | 1,3 |     | 2.4 |     |     |     |     |
| Planlagt mottak              |      |    |     |     |     |     |     |     |     |
| Lager                        | 1    | 1  | 0.7 | 1.7 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 |
| Nettobehov                   |      |    | 0.3 |     | 0.7 | 0.7 |     |     |     |
| Planlagt ordre               |      | 1  | 1   | 1   |     |     |     |     |     |

Kommentarer:

- Bruttobehovet for komponent C er **summen** av planlagt ordre for A og B, tatt prosentene med i betraktning, dvs  $D_C = 0.5X_A + 0.2X_B$ .
- For komponent E har vi lagt inn en ekstra planlagt ordre i uke 2 for å oppfylle bruttobehovet i uke 4.

# Kontinuasjonseksamen 2016

# LØSNING: Kontinuasjonseksamen 6. jan 2016

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2016

Oppgave 1: ( prognostisering, 25 % )

a) Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at:

$$\underline{F_{10}} = \theta F_9 + (1 - \theta)X_9 = 0.2 \cdot 7.63 + 0.8 \cdot 8 = \underline{7.92} \quad (1)$$

$$\underline{F_{11}} = \theta F_{10} + (1 - \theta)X_{10} = 0.2 \cdot 7.92 + 0.8 \cdot 10 = \underline{9.58} \quad (2)$$

$$\underline{F_{12}} = \theta F_{11} + (1 - \theta)X_{11} = 0.2 \cdot 9.58 + 0.8 \cdot 6 = \underline{6.72} \quad (3)$$

b) Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at:

$$\underline{F_{13}} = \theta F_{12} + (1 - \theta)X_{12} = 0.2 \cdot 6.72 + 0.8 \cdot 18 = \underline{15.7} \quad (4)$$

Problemet med denne prognosen for 2017 er at den er kraftig overestimert pga. den høye observasjonen i desember.

Siden avdelingen har valg glattingsparameter 0.2, altså at  $1 - \theta = 0.8$ , så vil prognosen vektlegge siste observasjon mest.

- c) Sesongjustert observasjon er oppgitt i oppgaven:

$$\tilde{X}_{12}^i = G_{12} \cdot X_{12}^i \quad (5)$$

og løser med hensyn på sesonfaktoren alene

$$\underline{G_{12}^i} = \frac{\tilde{X}_{12}^i}{\overline{X}_{12}^i} \quad (6)$$

Deretter bruker vi gjennomsnittet som et estimat på sesongjustert observasjon:

$$\tilde{X}_{12}^{\text{år}} = \overline{X}_{12}^{\text{år}} \quad (7)$$

som gir:

$$G_{12}^{2013} = \frac{\overline{X}_{12}^{2013}}{X_{12}^{2013}} = \frac{8.7}{15} = \underline{\underline{0.58}} \quad (8)$$

$$\underline{\underline{G_{12}^{2014}}} = \frac{\overline{X}_{12}^{2014}}{X_{14}^{2013}} = \frac{9.5}{17} = \underline{\underline{0.56}} \quad (9)$$

$$\underline{\underline{G_{12}^{2015}}} = \frac{\overline{X}_{12}^{2015}}{X_{15}^{2013}} = \frac{9.2}{18} = \underline{\underline{0.51}} \quad (10)$$

- d) Vi bruker formelen for eksponensiell glatting på de estimerte sesongfaktorene  $(??)-(??)$ . Vi betegner  $FG_{12}^{\text{år}}$  som prognosen for sesongfaktoren for det gitte året:

$$\underline{\underline{FG_{12}^{2014}}} = G_{12}^{2013} = \underline{\underline{0.58}} \quad (11)$$

$$\underline{\underline{FG_{12}^{2015}}} = \theta FG_{12}^{2014} + (1 - \theta)G_{12}^{2014} = 0.2 \cdot 0.58 + 0.8 \cdot 0.56 = \underline{\underline{0.563}} \quad (12)$$

$$\underline{\underline{FG_{12}^{2016}}} = \theta FG_{12}^{2015} + (1 - \theta)G_{12}^{2015} = 0.2 \cdot 0.563 + 0.8 \cdot 0.51 = \underline{\underline{0.522}} \quad (13)$$

- e) Vi må først regne ut prognosen for 2016,  $F^{2016}$ , med den justerte observasjonen for desember 2015:

$$\underline{\underline{F^{2016}}} = F_{13} = \theta F_{12} + (1 - \theta)\underline{\underline{X_{12}}} = 0.2 \cdot 6.72 + 0.8 \cdot 9.2 = \underline{\underline{8.7}} \quad (14)$$

Deretter må vi justere prognosen for desember 2016 ved hjelp av den estimerte sesongfaktoren  $FG_{12}^{2016}$ :

$$\underline{\underline{F_{24}}} = \frac{F_{13}}{FG_{12}^{2016}} = \frac{8.7}{0.52} = \underline{\underline{16.7}} \quad (15)$$

■

Oppgave 2: ( aggregert planlegging, 25 % )

a) Siden denne modellen er nokså stor, må vi benytte indeksnotasjon. Vi har tre indekser for dette problemet:

- **produktfamiliene**, som indekseres ved  $i = 1, 2, 3, 4$ , (interør, utendørs, båt, fabrikk)
- **månedene**, som indekseres ved  $t = 1, 2, \dots, 12$ .

$$I_{i0} = \text{startlager inn til uke 1 for familie } i \quad (16)$$

$$I_{i12} = \text{sluttlager i uke 12 for familie } i \quad (17)$$

$$D_{it} = \text{etterspørsel for familie } i \text{ i måned } t \quad (18)$$

$$h_{it} = \text{overlagringskostnad per 100 000 liter pr måned for familie } i \text{ fra uke } t \quad (19)$$

$$r_i = \text{bearbeidingstid for familie } i \quad (20)$$

$$R = \text{antall produksjonstimer pr. ansatt} \quad (21)$$

$$O_j^m = \text{maksimalt antall overtidstimer tilgjengelig ved avdeling } j \quad (22)$$

$$C_F = \text{permitteringskostnad pr arbeider} \quad (23)$$

$$C_H = \text{ansettelseskostnad pr arbeider} \quad (24)$$

$$C_R = \text{kostnaden for en regulær time} \quad (25)$$

$$W = \text{maksimalt antall ansatte} \quad (26)$$

$$W_0 = \text{antall ansatte ved starten av første måned} \quad (27)$$

$$W_{12}^{\min} = \text{minimum antall ansatte ved slutten av året} \quad (28)$$

Vi har ikke oppgitt tallverdiene på  $R$ ,  $C_F$ ,  $C_H$ ,  $C_R$  og  $W$  så disse må vi presisere:

$$R = 90 \quad (29)$$

$$C_F = 35000 \quad (30)$$

$$C_H = 30000 \quad (31)$$

$$C_R = 1000 \quad (32)$$

$$W = 30 \quad (33)$$

b) Vi har fem typer beslutninger i oppgaven:

- Produksjonsmengde - hvor **mange** enheter produsert (i 100 000 liter) hver måned
- Overlagring - hvor **mange** enheter overlagret (i 100 000 liter) fra en måned til neste
- Antall ansatte hver måned
- Antall ansatte som ansettes fra en måned til neste
- Antall ansatte som permitteres fra en måned til neste

Produksjonsmengde:

$$X_{it} = \text{antall enheter produsert av familie } i \text{ i måned } t, t = 1, \dots, 12 \quad (34)$$

Overlagring:

$$I_{it} = \text{antall enheter overlagret av familie } i \text{ fra måned } t \text{ til } t + 1, t = 1, \dots, 11 \quad (35)$$

antall ansatte:

$$W_t = \text{antall ansatte ved måned } t, t = 1, \dots, 12 \quad (36)$$

Antall ansattelser:

$$H_t = \text{antall ansattelser fra måned } t \text{ til } t + 1, t = 1, \dots, 12 \quad (37)$$

Antall permitteringer:

$$F_t = \text{antall permitteringer fra måned } t \text{ til } t + 1, t = 1, \dots, 12 \quad (38)$$

c) Målfunksjonen består av følgende kostnader:

- Lagerkostnader
- Lønnskostnader
- Ansettelseskostnader
- Permitteringskostnader

$$C = (\text{totale lagerkostnader}) + (\text{totale lønnskostnader}) \quad (39)$$

$$= (\text{totale ansettelseskostnader}) + (\text{totale permitteringskostnader}) \quad (40)$$

$$= \sum_{i=1}^4 \sum_{t=1}^{11} h_i I_{it} + \sum_{t=1}^{12} C_R W_t + \sum_{t=1}^{12} C_H H_t + \sum_{t=1}^{12} C_F F_t \quad (41)$$

d) Vi identifiserer hvilke føringer vi har:

- Lagerbalanse
- Ansattebalanse
- Produksjonskapasitet
- Maksimalt antall ansatte
- Minimum antall ansatte ved årets slutt

Lagerbalanse:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} = I_{ti}, \quad \text{for alle } i \text{ og } t \quad (42)$$

Ansattebalanse:

$$W_{t-1} + H_t - F_t = W_t, \quad \text{for alle } t \quad (43)$$

Produksjonskapasitet:

$$(\text{antall timer brukt}) \leq (\text{antall timer tilgjengelig}) \quad (44)$$

$$\sum_{i=1}^4 r_i X_{it} \leq RW_t \quad (45)$$

Maks antall ansatte:

$$W_t \leq W \quad (46)$$

$$(47)$$

Minimum antall ansatte ved årets slutt:

$$W_{12} \geq W_{12}^{min} \quad (48)$$

e) Hvis vi benytter alle 30 ansatte, får vi en månedslig produksjonskapasitet på  $30 \cdot 90 = 2700$  produksjonstimer.

Vi må bokføre hvor mange timer vi har til overs i hver måned. Disse timene akkumuleres til neste periode som representerer mulighet for overlaging til påfølgende måneder med kapasitetssprekk.

Vi sjekker at kapasiteten er oppfylt for avdelingen frem til måned 6:

Husk at produksjonsbehovet er lik **summen** av etterspørsel\*bearbeidingstid for alle familiene. Disse var oppgitt i oppgaven:

| Måned | Timer behov | Tilgjengelige timer | Timer til overs |
|-------|-------------|---------------------|-----------------|
| 1     | 1358        | 2700                | 1342            |
| 2     | 1228        | 2700                | 2814            |
| 3     | 2508        | 2700                | 3006            |
| 4     | 3263        | 2700                | 2443            |
| 5     | 3528        | 2700                | 1615            |
| 6     | 4998        | 2700                | -683            |

Som vi ser fra tabellen har vi **kapasitetssprekk på 683 timer i måned 6.**

f) Vi skal utvide modellen slik at beslutningen om overtid er inkludert.

Nye data:

$$O^m = \text{maksimalt antall overtidstimer per ansatt} \quad (49)$$

$$C^O = \text{kostnaden for en overtidstime} \quad (50)$$

Nye variabler:

Antall overtidstimer brukt totalt hver måned:

$$O_t = \text{antall overtimer benyttet i måned } t, t = 1, \dots, 12 \quad (51)$$

Ny målfunksjon:

Vi må inkludere overtidskostnaden i målfunksjonen

$$C' = C + \sum_{t=1}^{12} C^O O_t \quad (52)$$

Her er  $C$  kostnadsfunksjonen fra likning (??).

Nye føringer:

Vi må først oppdatere produksjonskapasitetsføringen

Produksjonskapasitet:

$$(\text{antall timer brukt}) \leq (\text{antall timer tilgjengelig}) \quad (53)$$

$$\sum_{i=1}^4 r_i X_{it} \leq RW_t + O_t/2 \quad (54)$$

for alle  $t = 1, 2, \dots, 12$ .

Legg merke til at vi deler antall overtidstimer med 2 siden en overtidstime gir en halv produksjonstime.

Maksimalt antall overtidstimer pr måned:

$$O_t \leq O^m \quad (55)$$

for alle  $t = 1, 2, \dots, 12$ .

g) Hvis vi i tillegg til alle 30 ansatte, benytter alle overtidstimer pr. måned, får vi en månedslig produksjonskapasitet på  $30 \cdot 90 + 720/2 = 2700 + 360 = 3060$  produksjonstimer.

Vi må bokføre hvor mange timer vi har til overs i hver måned. Disse timene akkumuleres til neste periode som representerer mulighet for overlaging til påfølgende måneder med kapasitetssprekk.

Vi sjekker at kapasiteten er oppfylt for avdelingen frem til måned 6:

Husk at produksjonsbehovet er lik [summen](#) av etterspørsel\*bearbeidingstid for alle familiene. Disse var oppgitt i oppgave 1e):

| Måned    | Timer behov | Tilgjengelige timer | Timer til overs |
|----------|-------------|---------------------|-----------------|
| <b>1</b> | 1358        | 3060                | 1702            |
| <b>2</b> | 1228        | 3060                | 3534            |
| <b>3</b> | 2508        | 3060                | 4086            |
| <b>4</b> | 3263        | 3060                | 3883            |
| <b>5</b> | 3528        | 3060                | 3415            |
| <b>6</b> | 4998        | 3060                | 1477            |

Som vi ser fra tabellen har [kapasitetssprekken i måned 6 blitt fjernet](#).

### 3) ( EOQ )

a) Denne oppgaven handler om å finne de nødvendige dataene for å beregne EOQ-størrelsene for Yachting NONSTOP supreme merket.

Lagerkostnaden pr 100 000 liter pr uke, er kun gitt ved kapitalkostnaden, dvs rentekostnaden som vi får fra produktets salgsverdi. siden rentesatsen,  $r = 0.1$  er årlig, må vi dividere med 52 uker, for å få ukentlig lagerkostnad. Siden salgsverdien  $P_i$  er pr liter, må vi i tillegg multiplisere med 100 000, for å få lagerkostnad pr 100 000 liter:

$$\underline{h} = \frac{Pr}{52} \cdot 100000 = \frac{80 \cdot 0.1}{52} \cdot 100000 = \underline{15384} \quad (\text{pr 100 000 liter pr. uke}) \quad (56)$$

(57)

Setupkostnaden fås ved å multiplisere antall omstillingstimer med den regulære timekostnaden  $C_R = 10000$ :

$$\underline{S} = 6 \cdot C_R = 6 \cdot 10000 = 60000 \quad (\text{kroner pr setup}) \quad (58)$$

(59)

- b) Vi skal beregne optimal ordrestørrelse (EOQ) for Yachting NONSTOP supreme merket.

Siden vi har alle de nødvendige dataene fra oppgave 3a), kan vi sette direkte inn i Wilsons formel:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 60000}{15384}} = \underline{\underline{2.8}} \quad (\text{ i 100 000 liter } ) \quad (60)$$

$$(61)$$

Totale optimale lager- og setupkostnader:

$$\underline{\underline{C^*}} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} = HX^* = 15384 \cdot 2.8 = \underline{\underline{42966}} \quad (62)$$

Husk at den totale setupkostnaden og lagerkostnaden er lik for EOQ-verdien.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Dette er altså kun gyldig for de optimale ordrestørrelsene. Grunnen til at vi skriver dette opp, er fordi utregningene blir enklere.

c) Vi regner ut ny **justert** optimal ordrestørrelse ved hjelp av den oppgitte formelen:

$$\underline{\underline{X^*(P)}} = \sqrt{\frac{2DS}{H \left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 60000}{15384 \left(1 - \frac{1}{2}\right)}} = \underline{\underline{3.95}} \quad (\text{ i 100 000 liter }) \quad (63)$$

d) Dersom etterspørselsraten overskrider produksjonsraten, selger vi raskere enn vi klarer å produsere. Vi klarer dermed ikke oppfylle etterspørselen og formelen for EOQ faller sammen. EOQ blir meningsløst.

e) Med produksjonsrate inkludert vil lageret *gradvis* fylles opp med en rate  $P - D$ , siden vi selger unna mens vi produserer.

Dette medfører at den totale lagermengden over en syklus øker. For å kompensere denne økningen må lagerkostnaden minkes. Dette ser vi også ifra fra formelen (??), hvor lagerkostnaden reduseres i forhold til vanlig EOQ. Vi kan definere ”justert” lagerkostnad:

$$H^P = H \left(1 - \frac{D}{P}\right) \quad (64)$$

slik at

$$X^*(P) = \sqrt{\frac{2DS}{H^P}} \quad (65)$$

Siden vi antar at etterspørselsraten  $D$  er lavere enn produksjonsraten  $P$ , har vi alltid at

$$H^P \geq H \quad (66)$$

som igjen impliserer at optimal ordrestørrelse øker:

$$X^*(P) \geq X^* \quad (67)$$

f) Lagerkapasiteten impliserer at:

$$X^*(P) \leq 5 \quad (\text{i 100 000 liter}) \quad (68)$$

Vi finner derfor grenseverdien for  $P$  ved å løse likningen:

$$X^*(P) = 5 \quad (69)$$

$$\Downarrow \quad \sqrt{\frac{2DS}{H \left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = 5 \quad (70)$$

$$\Downarrow \quad \frac{2DS}{H \left(1 - \frac{D}{P}\right)} = 25 \quad (71)$$

$$\Downarrow \quad \frac{2DS}{H} = 25 \left(1 - \frac{D}{P}\right) \quad (72)$$

$$\Downarrow \quad \frac{2DS}{25H} = 1 - \frac{D}{P} \quad (73)$$

$$\Downarrow \quad \frac{D}{P} = 1 - \frac{2DS}{25H} \quad (74)$$

$$\Downarrow \quad P = \frac{D}{1 - \frac{2DS}{25H}} = \frac{1}{1 - \frac{2 \cdot 1 \cdot 60000}{25 \cdot 15384}} = 1.45 \quad (75)$$

Produksjonsraten kan derfor ikke bli lavere enn 145 000 liter pr uke.

- 4) ( Wagner-Within )  
a) Vi skal finne optimal produksjonsplan ved hjelp av Wagner-Within algoritmen.

Data:<sup>2</sup>

$$D_t = \text{etterspørsel måned } t \text{ av Drygolin Ultimat} \quad (76)$$

$$s = \text{setupkostnaden for Drygolin Ultimat} = 100000 \quad (77)$$

$$h = \text{enhetslig overlagringskostnad for Drygolin Ultimat (pr 100 000 liter) pr uke} = 5000 \quad (78)$$

Variabler:

$$X_t = \text{produksjonsmengde i uke } t \quad (79)$$

$$I_t = \text{mengde overlagret fra uke } t \text{ til } t + 1 \quad (80)$$

$$Y_t = 0 \text{ eller } 1 \text{ for hvorvidt produksjon finner sted i uke } t \quad (81)$$

---

<sup>2</sup>Det er ikke nødvendig å skrive opp disse definisjonene på eksamen. Data og variabler er underforståtte for Wagner-Within algoritmen. Vi har kun inkludert disse her for helheltens skyld.

Vi starter som vanlig med delproblemet med kun en periode:<sup>3</sup>

$\underline{P}_1$ : ( subproblem med kun første periode )

Siden vi har initielt lager på 2, mens etterspørselen er 2 i første periode, kan vi umiddelbart bruke opp lageret slik at justert etterspørsel blir 1 i første periode. Vi har dermed setup i første periode, dvs  $Y_1 = 1$ :

$$\underline{C}_1^* = s \cdot Y_1 = \underline{100} \cdot 1 = 1 \quad (82)$$

$\underline{P}_2$ : ( subproblem med de to første periodene )

$$\underline{C}_2^* = \min \left[ (siste\ bestilling\ i\ 1.\ perioden), (siste\ bestilling\ i\ 2.\ perioden) \right] \quad (83)$$

$$= \min \left[ s + hD_2, s + C_1^* \right] \quad (84)$$

$$= \min \left[ 100 + 4 \cdot 6, 100 + 100 \right] \quad (85)$$

$$= \min \left[ \underline{124}, 200 \right] \quad (86)$$

$$= \underline{124} \quad (87)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{10}$ .

Horisontteoremet gir oss ingen frysing av uker i dette tilfellet.

---

<sup>3</sup> Vi skriver alle kostnadstall i antall 1000 for oversiktens skyld. Så setupkostnaden blir 100 mens lagerkostnaden blir 8. Dette kan dere også gjøre til eksamen, så lenge dere bemerker at dere gjør det.

$P_3$ : ( subproblem med de tre første periodene )

Vi starter beregningene fra uke 2:

$$\underline{C}_3^* = \min \left[ (s.b.1) , (s.b.2), (s.b.3) \right] \quad (88)$$

$$= \min \left[ (s + hD_2 + 2hD_3 + C_1^*) , (s + hD_3 + C_1^*) , (s + C_2^*) \right] \quad (89)$$

$$= \min \left[ (124 + 2 \cdot 4 \cdot 12) , (200 + 4 \cdot 12) , (124 + 100) \right] \quad (90)$$

$$= \min \left[ \underline{220} , 248 , 224 \right] \quad (91)$$

$$= \underline{220} \quad (92)$$

Horisontteoremet gir oss ingen frysing av uker i dette tilfellet. <sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Legg merke til at vi benytter oss av at vi allerede har beregnet en del av uttrykkene i forrige delpproblem.

$P_4$ : ( subproblem med de fire første periodene )

Vi starter beregningene fra uke 1:

$$\begin{aligned}C_4^* &= \min[ (s.b.1) , (s.b.2), (s.b.3) , (s.b.4) ] \\&= \min[ (s + hD_2 + 2hD_3 + 3hD_4) , (s + hD_3 + 2hD_4 + C_1^*) , (s + hD_4 + C_2^*) , (s + C_3^*) ] \\&= \min[(220 + 3 \cdot 4 \cdot 10), (248 + 2 \cdot 4 \cdot 10), (224 + 4 \cdot 10), (220 + 100)] \\&= \min[340, 328, \underline{264}, 320] \\&= 264\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan kutte uke 1 og uke 2 fra videre beregninger.

$P_5$ :

Vi starter beregningene fra uke 3:

$$\begin{aligned}C_5^* &= \min[ (s.b.3), (s.b.4), (s.b.5)] \\&= \min[ (s + hD_4 + 2h \cdot D_5 + C_2^*), \\&\quad (s + hD_5 + C_3^*), (s + C_4^*)] \\&= \min[(264 + 3 \cdot 4 \cdot 22), (320 + 2 \cdot 4 \cdot 222), (260 + 5 \cdot 20), (264 + 100)] \\&= \min[440, 408, \underline{364}] \\&= 364\end{aligned}$$

Horisontteoremet sier da at vi kan fryse uke 3 og 4.

$P_6$ :

Vi starter beregningene fra uke 5:

$$\begin{aligned}C_6^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6)] \\&= \min[(s + hD_6 + C_4^*), (s + C_5^*)] \\&= \min[(364 + 4 \cdot 6, (364 + 100)] \\&= \min[\underline{388}, 464] \\&= 388\end{aligned}$$

Horisontteoremet gir ikke noe ekstra .

$P_7$ :

Vi starter beregningene fra uke 5:

$$\begin{aligned}C_7^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6) , (s.b.7)] \\&= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7), (C_5^* + s + hD_7), (C_6^* + s)] \\&= \min[(388 + 2 \cdot 4 \cdot 7, (464 + 4 \cdot 7), (388 + 100)] \\&= \min[444, 492, 488] \\&= 444\end{aligned}$$

Horisontteoremet gir ikke noe ekstra .

$P_8$ : ( det fulle problemet )

Vi starter beregningene fra 5. måned.

$$\begin{aligned} C_8^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6) , (s.b.7), (s.b.8)] \\ &= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7 + 3hD_8), (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8), \\ &\quad (C_6^* + s + hD_8), (C_7^* + s)] \\ &= \min[(444 + 3 \cdot 4 \cdot 5), (492 + 2 \cdot 4 \cdot 5), (488 + 4 \cdot 5), (444 + 100)] \\ &= \min[\underline{504}, 532, 508, 544] \\ &= 504 \end{aligned}$$

Vi har nå funnet optimal kostnad. Vi finner optimale produksjonsperioder  $C_{xxxxxxx}$  ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxx} = C_{xxxx1000} \quad (\text{ siste bestilling i uke 5 }) \quad (93)$$

$$C_{xxxx1000} = C_{xx101000} \quad (\text{ siste bestilling i uke 3 }) \quad (94)$$

$$C_{xx101000} = C_{10101000} \quad (\text{ siste bestilling i uke 1 }) \quad (95)$$

Vi har altså  $C_{10101000} = 504000$ . videre må vi finne optimale produksjonsmengder og lagermengder.

Produksjonsmengder: ( finnes ved hjelp av ”dominante produksjonsplaner” )

$$X_1 = D_2 + (D_1 - I_0) = 6 - (3 - 2) = 7 \quad (96)$$

$$X_2 = 0 \quad (97)$$

$$X_3 = D_3 + D_4 = 12 + 10 = 22 \quad (98)$$

$$X_4 = 0 \quad (99)$$

$$X_5 = D_5 + D_6 + D_7 + D_8 + I_8 = 22 + 6 + 7 + 2 + 3 = 40 \quad (100)$$

$$X_6 = 0 \quad (101)$$

$$X_7 = 0 \quad (102)$$

$$X_8 = 0 \quad (103)$$

Lagermengder:

$$I_1 = D_2 = 6 \quad (104)$$

$$I_2 = 0 \quad (105)$$

$$I_3 = D_4 = 10 \quad (106)$$

$$I_4 = 0 \quad (107)$$

$$I_5 = D_6 + D_7 + D_8 + I_8 = 6 + 7 + 3 + 2 = 18 \quad (108)$$

$$I_6 = D_7 + D_8 + I_8 = 7 + 3 + 2 = 12 \quad (109)$$

$$I_7 = D_8 + I_8 = 2 + 3 = 5 \quad (110)$$

**b)** Med en maksimal lagerkapasitet på 170 000 liter drygolin Ultimat i uken, må vi sjekke om vi har nok kapasitet til å gjennomføre planen fra oppgave 4.a.

Vi har fra likning (??) at  $I_5 = 18$ , dvs lageret i uke 5 er 180 000 liter. Siden dette overskrider lagerkapasiteten, er *ikke* planen fra Wagner-Within algoritmen gyldig lenger.

**c)** På grunn av lagerkapasiteten kan Wagner-Within's teorem om "Dominante produksjonsplaner" bli brutt, siden man må tillate å **splitte** lageret av en etterspørsel i flere lagerperioder.

**d)** Ny **dominant** produksjonsplan kan vurderes ved å se på  $P_8$  problemet i oppgave 4a). Vi fant:

$$\begin{aligned} C_8^* &= \min[ (s.b.5) , (s.b.6) , (s.b.7), (s.b.8)] \\ &= \min[(C_4^* + s + hD_6 + 2hD_7 + 3hD_8), (C_5^* + s + hD_7 + 2hD_8), \\ &\quad (C_6^* + s + hD_8), (C_7^* + s)] \\ &= \min[(444 + 3 \cdot 4 \cdot 5), (492 + 2 \cdot 4 \cdot 5), (488 + 4 \cdot 5), (444 + 100)] \\ &= \min[\underline{504}, 532, 508, 544] \\ &= 504 \end{aligned}$$

Siden problemet ligger i uke 5, er det klart at vi må ha en ekstra produksjonsperiode etter uke 5. Siden vi får oppgitt at vi kan finne en dominant løsning, er det aktuelt å benytte det laveste *alternativet* til 504, nemlig 508.

Vi finner optimale produksjonsperioder  $C_{xxxxxxx}$  ved å starte bakfra og jobbe oss frem til periode 1:

$$C_{xxxxxxx} = C_{xxxxxx10} \quad (\text{ siste bestilling i uke 7 }) \quad (111)$$

$$C_{xxxxxx10} = C_{xxxx1010} \quad (\text{ siste bestilling i uke 5 }) \quad (112)$$

$$C_{xxxx1010} = C_{xx101010} \quad (\text{ siste bestilling i uke 3 }) \quad (113)$$

$$C_{xx101010} = C_{10101010} \quad (\text{ siste bestilling i uke 1 }) \quad (114)$$

Vi har altså  $C_{10101010} = 508000$ . Vi må nå sjekke om løsningen oppfyller lagerkapasiteten:

Lagermengder:

$$I_1 = D_2 = 6 \quad (115)$$

$$I_2 = 0 \quad (116)$$

$$I_3 = D_4 = 10 \quad (117)$$

$$I_4 = 0 \quad (118)$$

$$I_5 = D_6 = 6 \quad (119)$$

$$I_6 = 0 \quad (120)$$

$$I_7 = D_8 + I_8 = 2 + 3 = 5 \quad (121)$$

Som vi ser av lagerverdiene, er lagerkapasiteten oppfylt. Vi kan dermed konkludere at vi har funnet optimal løsning med totalkostnad 508 000.

# Testeksamen 2017

# LØSNING: Testeksamen mai 2017

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2017

## Oppgave 1: ( prognostisering, 25 % )

a) Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at<sup>1</sup>:

$$F_2 = X_1 = 720 \quad (1)$$

$$F_3 = \theta F_2 + (1 - \theta)X_2 = 0.8 \cdot 720 + 0.2 \cdot 700 = 716 \quad (2)$$

$$F_4 = \theta F_3 + (1 - \theta)X_3 = 0.8 \cdot 716 + 0.2 \cdot 730 = 718.8 \quad (3)$$

$$F_5 = \theta F_4 + (1 - \theta)X_4 = 0.8 \cdot 718.8 + 0.2 \cdot 710 = 717.0 \quad (4)$$

$$F_6 = \theta F_5 + (1 - \theta)X_5 = 0.8 \cdot 717 + 0.2 \cdot 690 = 711.6 \quad (5)$$

$$F_7 = \theta F_6 + (1 - \theta)X_6 = 0.8 \cdot 711.6 + 0.2 \cdot 740 = 717.3 \quad (6)$$

Prognosen for 2017 blir dermed  $F_7 = 717.3$  tusen tonn alumina.

---

<sup>1</sup>Vi har brukt den [stegvise](#) formelen for eksponensiell glatting. Alternativt kunne en ha brukt den [autokorrektive](#) formelen.

b) Vi har 5 historiske prognoser:  $F_2, F_3, F_4, F_5$  og  $F_6$ . MSE er da gitt ved:

$$\underline{\underline{MSE}} = \frac{1}{T - s + 1} \sum_{t=2}^6 (X_t - F_t)^2 \quad (7)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{t=2}^6 (X_t - F_t)^2 \quad (8)$$

$$= \frac{1}{5} \left( (700 - 720)^2 + (730 - 716)^2 + (710 - 718.8)^2 \right. \quad (9)$$

$$\left. + (690 - 717.0)^2 + (740 - 711.6)^2 \right) \quad (10)$$

$$= \underline{\underline{441.9}} \quad (11)$$

c) Vi har to forskjellige  $MSE$ -verdier:

$$MSE_1 = 300 \quad (2005 - 2011) \quad (12)$$

$$MSE_2 = 441.9 \quad (2011 - 2016) \quad (13)$$

Siden  $MSE_1$  er basert på  $n_1 = 7$  prognoser,

mens  $MSE_2$  er basert på  $n_2 = 5$  prognoser.

Totalt har vi da  $n = n_1 + n_2 = 12$  i perioden 2005 - 2016.

Ny  $MSE_{ny}$  blir dermed:

$$\underline{\underline{MSE_{ny}}} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} MSE_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} MSE_2 \quad (14)$$

$$= \frac{7}{12} 300 + \frac{5}{12} 441.9 \quad (15)$$

$$= \underline{\underline{359.1}} \quad (16)$$

d) Prognosene  $F_t$ , med  $t = 2..6$ , er oppgitt i oppgaven:

$$F_2 = X_1 = 720 \quad (17)$$

$$F_3 = \theta F_2 + (1 - \theta)X_2 = 704 \quad (18)$$

$$F_4 = \theta F_3 + (1 - \theta)X_3 = 724.8 \quad (19)$$

$$F_5 = \theta F_4 + (1 - \theta)X_4 = 713.0 \quad (20)$$

$$F_6 = \theta F_5 + (1 - \theta)X_5 = 694.6 \quad (21)$$

Deretter beregner vi  $MSE$  på nytt:

$$\underline{MSE} = \frac{1}{T - s + 1} \sum_{t=2}^6 (X_t - F_t)^2 \quad (22)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{t=2}^6 (X_t - F_t)^2 \quad (23)$$

$$= \frac{1}{5} \left( (700 - 720)^2 + (730 - 704)^2 + (710 - 724.8)^2 \right. \quad (24)$$

$$\left. + (690 - 713)^2 + (740 - 694.6)^2 \right) \quad (25)$$

$$= \underline{777.0} \quad (26)$$

Sammenligner  $MSE$  med glattingsparametere  $\theta = 0.8$  og  $\theta = 0.2$ :

$$MSE(\theta = 0.8) = 441.9 \quad (27)$$

$$MSE(\theta = 0.2) = 777.0 \quad (28)$$

$MSE(\theta = 0.8)$  er **betydelig** mindre enn  $MSE(\theta = 0.2)$ .

Siden MSE er et mål som sammenligner prognosemetoder så blir konklusjonen at

$$\underline{\underline{\text{Hydro bør bruke glattingsparameter } \theta = 0.8}} \quad (29)$$

Konklusjonen er **forventet** fordi observasjonene varierer ganske kraftig fra år til år. En høy glattingsparameter,  $\theta = 0.8$ , vil glatte ut disse variasjonene og gi en mindre  $MSE$ .

■

## Oppgave 2: ( EOQ, 25 % )

a) EOQ-formelen har følgende forutsetninger:

- **Konstant og kontinuerlig** etterspørsel - kontinuerlig alumina forbrukes i et jevnt tempo - en kan forvente at produksjonen ved Årdal verk har en jevn rate, siden fastkostnadene er svært høye.
- **Ingen stockout** - vi antar at etterspørselen oppfylles og at forsinket leveranse ikke forekommer. En rimelig antakelse for Årdal verk.
- **Uendelig prosess** - vi antar at etterspørselen hverken har en start eller slutt - produksjonsprosessen ved Årdal verk vil neppe avsluttes ila. de neste årene.
- **Inge føringer** - vi antar at det ikke finnes noen føringer på ordrestørrelsen (for eksempel lagerkapasitet, produksjonskapasitet, bestillingskapasitet, tilgjengelig kapital etc.)
- **Uendrede kostnader** - kostnadene (lagerkostnader og ordrekostnader) i modellen er konstante, dvs. de endres ikke over tiden. Langtidstariffer for bestilling av tankskip og stabile innkjøpspriser tilsvarer at disse antakelsene er godt nok oppfylt.
- **Ingen rabatter** - vi antar at økte ordrestørrelser ikke gir kvantumsfordeler som for eksempel rabatter eller kvantumsfordeler ved produksjonen.
- **Total leveranse** - vi antar at alle enhetene som ble bestilt ankommer lageret i en batch. Dette er tilfelle for bestilling av alumina, siden alt ankommer med samme tankskip.

Siden den totale kostnadsfunksjonen for EOQ er relativt flat i minimumspunktet vil "små endringer i data" gi små endringer i optimal bestillingsmengde.

"Små endringer i data" betyr i prinsippet at antakelsene kan være litt feile.

b) EOQ-formelen gir:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 717\,000 \cdot 1\,000\,000}{0.1 \cdot 10\,000}} = \underline{\underline{37\,868 \text{ tonn}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (30)$$

som er optimal bestillingsmengde alumina, hvor vi har brukt at  $H = iC$ .

Optimal omløpstid  $O^*$  i antall uker er gitt ved:

$$\underline{O^*} = 52 \frac{X^*}{D} = 52 \frac{37\,868}{717\,000} = \underline{2.7} \quad (31)$$

altså det tar 2.7 uker mellom hver gang lageret blir tomt.

Dersom lageret er fullt ved starten av året så har vi totalt

$$\frac{52}{\underline{O^*}} = \frac{52}{2.7} = \underline{19.3} \quad (32)$$

altså Hydro vil totalt gjøre 19 bestillinger i 2017.

- c) Vi vurderer totale kostnader for de to strategiene:

Strategi 1: ( to mindre skip )

Ved å benytte to skip vil bestillingskostnaden øke fra 1 000 000 NOK til  $S = 2 \cdot 700\,000 = 1\,400\,000$  NOK.  
Ny verdi for EOQ er dermed:

$$\underline{X^*} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 717\,000 \cdot 1\,400\,000}{0.1 \cdot 10\,000}} = \underline{44\,806 \text{ tonn}} \quad (33)$$

Totale kostnader blir dermed:

$$\underline{C(44\,806)} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \quad (34)$$

$$= \left( \frac{1\,400\,000 \cdot 717\,000}{44\,806} + \frac{0.1 \cdot 10\,000 \cdot 44\,806}{2} \right) \text{ NOK} \quad (35)$$

$$= \underline{44\,806\,250 \text{ NOK}} \quad (36)$$

Strategi 2: ( ett skip )

Ved å benytte ett skip blir Hydro tvunget til å redusere bestillingsmengden til  $X = 30\,000$  tonn alumina per bestilling.

Totale kostnader blir dermed:

$$\underline{C(30\,000)} = \frac{SD}{X} + \frac{HX}{2} \quad (37)$$

$$= \left( \frac{1\,000\,000 \cdot 717\,000}{30\,000} + \frac{1\,000 \cdot 30\,000}{2} \right) \text{ NOK} \quad (38)$$

$$= \underline{38\,900\,000 \text{ NOK}} \quad (39)$$

Konklusjon: Strategi 2 er den mest lønnsomme strategien.



Oppgave 3: ( Fasilitetsdesign, 25 % )

- a) Problemet er et lokaliseringsproblem siden vi har 5 potensielle lagerfasiliteter, hvor ikke alle nødvendigvis benyttes.
- b) Problemet er et allokeringsproblem siden vi har 5 potensielle lagerfasiliteter som sammen skal tjene 3 produksjonshaller (markeder).
- c) Vi har følgende indekseringer:
- lagerfasilitetene indekseres ved  $i = 1, 2, 3, 4, 5$
  - produksjonshallene indekseres ved  $j = 1, 2, 3$

Vi definerer følgende data:<sup>2</sup>

$$I_i = \text{investeringskostnad lagerfasilitet } i, \text{ hvor } i = 1, \dots, 5 \quad (40)$$

$$C_i = \text{årlig driftskostnad ved lagerfasilitet } i, \text{ hvor } i = 1, \dots, 5 \quad (41)$$

$$D_j = \text{årlig etterspørsel etter karbonanoder ved produksjonshall } j, \text{ hvor } j = 1, 2, 3 \quad (42)$$

$$C_{ij} = \text{rutekostnad fra lager } i \text{ til produksjonshall } j, \text{ hvor } i = 1, \dots, 5 \text{ og } j = 1, 2, 3 \quad (43)$$

---

<sup>2</sup>Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

d) Vi har to variabler:

1) Variabel 1:

Antall ganger en rute benyttes i løpet av et år:

$$X_{ij} = \text{antall ganger lager } i \text{ leverer til produksjonshall } j \text{ i året} \quad (44)$$

hvor  $i = 1, 2, 3$  og  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ .

2) Variabel 2:

Hvorvidt en lageret skal benyttes eller ikke:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker lagerfasilitet } i \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (45)$$

hvor  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

e) Målfunksjonen  $C$  er gitt ved totale investerings- og driftskostnader:

$$C = \sum_{i=1}^5 (I_i + C_i) Y_i + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 C_{ij} X_{ij} \quad (46)$$

f) Vi har to føringer:

1) Føring 1:

Etterspørselen ved hver produksjonshall  $j = 1, 2, 3$  må oppfylles:

$$\sum_{i=1}^5 X_{ij} = D_j \quad (47)$$

2) Føring 2:

Lagerfasilitet ikke benyttet  $\rightarrow$  ingen leveranse fra lageret. På logisk form:

$$\text{Hvis } \underbrace{Y_i = 0}_{\text{intet lager}} \text{ så er } \underbrace{X_{ij} = 0}_{\text{ingen leveranse}} \quad (48)$$

hvor  $\underbrace{i = 1, 2, 3, 4, 5}_{\text{lagerfasilitet}}$  og  $\underbrace{j = 1, 2, 3}_{\text{produksjonshall}}$ , eller på matematisk form (ikke-lineær):

$$X_{ij}(1 - Y_i) = 0 \quad (49)$$

g) Vi utvider modellen til å inkludere lagerkapasitetene:

Nye data:

$$\bar{I}_j = \text{årlig lagerkapasitet for lagerfasilitet } i, \text{ hvor } i = 1, \dots, 5 \quad (50)$$

$$E_k = \text{årlig etterspørsel etter karbonanoder for aluminiumsverk } k, \text{ hvor } k = 1, 2, 3, 4 \quad (51)$$

Nye variabler:

Vi må bokføre hvor mye vi leverer fra hvert lager til de eksterne aluminiumsverkene:

$$Z_i = \text{årlig antall anoder levert eksternt fra lager } i \quad (52)$$

hvor  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Legg merke til at det *ikke* er nødvendig å spesifiere til hvilket aluminiumsverk hvert lager leverer til, siden vi kun bryr oss om de *interne* kostnadene.

Vi har to nye føringer:

1) Ny føring 1:

Lagerkapasitet:

Vi kan nå beskrive lagerkapasiteten ved hver lagerfasilitet  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ :

$$\sum_{j=1}^3 X_{ij} + Z_i \leq \bar{I}_i \quad (53)$$

2) Ny føring 2:

Ekstern etterspørsel oppfylt:

Vi må oppfylle den *totale* etterspørselen ved de 4 aluminiumsverkene:

$$\sum_{i=1}^5 Z_i = \sum_{k=1}^4 E_k \quad (54)$$

■

Oppgave 4: ( Wagner-Whitin, 25 % )

a) Omstillingskostnaden er:

$$\underline{S} = 10 \cdot 15\,000 \text{ NOK} = \underline{150\,000 \text{ NOK}} \quad (55)$$

Lagerkostnaden:

$$H = 100 \text{ NOK per anode per uke} \quad (56)$$

som oppgitt i oppgaveteksten.

Startlager:

$$I_0 = 100 \quad (57)$$

anoder, som også er oppgitt i oppgaveteksten.

Periode 1: ( subproblem med kun første periode )

Etterspørselen i uke 1 er  $D_1 = 550$  anoder.

Det initielle lageret  $I_0 = 100$  er ikke stort nok til å dekke etterspørselen så vi må ha produksjon i første periode:

$$\underline{C_1^*} = S = \underline{150\,000 \text{ NOK}} \quad (58)$$

Periode 2: ( subproblem de 2 første periodene )

Dominante produksjonsplaner gir *to* mulige optimale løsninger:  $C_{11}$  og  $C_{10}$ .  
Vi regner ut disse verdiene:

$$\underline{C}_2^* = \min \left[ C_{10}, C_{x1} \right] \quad (59)$$

$$= \min \left[ (\text{siste bestilling i } 1. \text{ periode}), (\text{siste bestilling i } 2. \text{ periode}) \right] \quad (60)$$

$$= \min \left[ C_1^* + H \cdot D_2, C_1^* + S \right] \quad (61)$$

$$= \min \left[ 150\,000 + 100 \cdot 350, 150\,000 + 150\,000 \right] \quad (62)$$

$$= \min \left[ \underline{185\,000}, 300\,000 \right] \quad (63)$$

$$= \underline{185\,000 \text{ NOK}} \quad (64)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{10}$ .

Vi vet da at Horisontteoremet kutter ingen perioder.

Periode 3: ( subproblem de 3 første periodene )

$$\underline{C}_3^* = \min \left[ C_{100} , C_{x10} , C_{xx1} \right] \quad (65)$$

$$= \min \left[ (siste bestilling i 1. periode) , (siste bestilling i 2. periode) , \right. \\ \left. (siste bestilling i 3. periode) \right] \quad (66)$$

$$= \min \left[ (C_{10} + 2 \cdot H \cdot D_3) , (C_{x1} + H \cdot D_3) , (C_2^* + S) \right] \quad (67)$$

$$= \min \left[ (185\,000 + 2 \cdot 100 \cdot 400) , (300\,000 + 100 \cdot 400) , (185\,000 + 150\,000) \right] \quad (68)$$

$$= \min \left[ \underline{265\,000} , 340\,000 , 335\,000 \right] \quad (69)$$

$$= \underline{265\,000 \text{ NOK}} \quad (70)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{100}$ .

Vi vet da at Horisontteoremet kutter ingen perioder.

Periode 4: ( subproblem de 4 første periodene )

$$\underline{C}_4^* = \min \left[ C_{1000} , C_{x100} , C_{xx10} , C_{xxx1} \right] \quad (71)$$

$$= \min \left[ (siste\ bestilling\ i\ 1.\ period), (siste\ bestilling\ i\ 2.\ period), \right. \\ \left. (siste\ bestilling\ i\ 3.\ period), (siste\ bestilling\ i\ 4.\ period) \right] \quad (72)$$

$$= \min \left[ (C_{100} + 3 \cdot H \cdot D_4) , (C_{x10} + 2 \cdot H \cdot D_4) , (C_{xx1} + H \cdot D_4) , (C_3^* + S) \right] \quad (73)$$

$$= \min \left[ (265\ 000 + 3 \cdot 100 \cdot 850) , (340\ 000 + 2 \cdot 100 \cdot 850) , \right. \\ \left. (335\ 000 + 100 \cdot 850) , (265\ 000 + 150\ 000) \right] \quad (74)$$

$$= \min \left[ 520\ 000 , 510\ 000 , 420\ 000 , \underline{415\ 000} \right] \quad (75)$$

$$= \underline{415\ 000\ NOK} \quad (76)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{xxx1}$ .

Vi vet da at Horisontteoremet kutter periode 1, 2 og 3.

Periode 5: ( subproblem de 5 første periodene )

Siden horisontteoremet kuttet periodene 1, 2 og 3 i forrige steg, kan vi nå starte fra periode 4:

$$\underline{C}_5^* = \min \left[ C_{xxx10}, C_{xxxx1} \right] \quad (77)$$

$$= \min \left[ (\text{siste bestilling i } 4. \text{ periode}), (\text{siste bestilling i } 5. \text{ periode}) \right] \quad (78)$$

$$= \min \left[ C_{xxx1} + H \cdot D_5, C_4^* + S \right] \quad (79)$$

$$= \min \left[ 415\,000 + 100 \cdot 500, 415\,000 + 150\,000 \right] \quad (80)$$

$$= \min \left[ \underline{465\,000}, 565\,000 \right] \quad (81)$$

$$= \underline{465\,000 \text{ NOK}} \quad (82)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{xxx10}$ .

Vi vet da at Horisontteoremet kutter ingen perioder.

Periode 6: ( det fulle problemet )

Siden vi har et krav om sluttlager på  $I_6 = 200$  anoder så legger vi disse til i etterspørselen i periode 6, dvs.:

$$\underline{\tilde{D}}_6 = D_6 + I_6 = 700 + 200 = \underline{900} \quad (83)$$

Dermed:

$$\underline{C}_6^* = \min \left[ C_{xxx100} , C_{xxxx10} , C_{xxxxx1} \right] \quad (84)$$

$$= \min \left[ (siste\ bestilling\ i\ 4.\ perioden) , (siste\ bestilling\ i\ 5.\ perioden) , \right. \\ \left. (siste\ bestilling\ i\ 6.\ perioden) \right] \quad (85)$$

$$= \min \left[ (C_{xxx10} + 2 \cdot H \cdot \tilde{D}_6) , (C_{xxxx1} + H \cdot \tilde{D}_6) , (C_5^* + S) \right] \quad (86)$$

$$= \min \left[ (465\ 000 + 2 \cdot 100 \cdot 900) , (565\ 000 + 100 \cdot 900) , (465\ 000 + 150\ 000) \right] \quad (87)$$

$$= \min \left[ 645\ 000 , 655\ 000 , \underline{615\ 000} \right] \quad (88)$$

$$= \underline{615\ 000\ NOK} \quad (89)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{xxxxx1}$ .

Oppsummert:

- $C_{xxxxx1}$ , siden siste bestilling skjer i uke 6. Vi hopper dermed til delproblem 5.
- $C_{xxx101}$ , siden siste bestilling skjer i uke 4 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 3.
- $C_{100101}$ , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 3.

Optimal løsning:

$$\underline{\underline{C^*}} = C_{100101} = \underline{\underline{615\,000 \text{ NOK}}} \quad (90)$$

Bestillingsplanen: ( $Y_t$ -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (91)$$

$$Y_2 = 0 \quad (92)$$

$$Y_3 = 0 \quad (93)$$

$$Y_4 = 1 \quad (94)$$

$$Y_5 = 0 \quad (95)$$

$$Y_6 = 1 \quad (96)$$

Produksjonsmengder:

Vi finner  $X_t$ -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 + D_2 + D_3 = 550 - 100 + 350 + 400 = \underline{\underline{1\,200}} \quad (97)$$

$$X_2 = 0 \quad (98)$$

$$X_3 = 0 \quad (99)$$

$$\underline{\underline{X_4}} = D_4 + D_5 = 850 + 500 = \underline{\underline{1\,350}} \quad (100)$$

$$X_5 = 0 \quad (101)$$

$$\underline{\underline{X_6}} = D_6 + I_6 = 700 + 200 = \underline{\underline{900}} \quad (102)$$

Lagermengder:

Fra  $X_t$ -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = D_2 + D_3 = 350 + 400 = 750 \quad (103)$$

$$\underline{\underline{I_2}} = D_3 = \underline{\underline{400}} \quad (104)$$

$$I_3 = 0 \quad (105)$$

$$\underline{\underline{I_4}} = D_5 = \underline{\underline{500}} \quad (106)$$

$$I_5 = 0 \quad (107)$$

- b) Just-In-Time produksjon betyr at det ikke er noe lager:

$$I_t = 0 \quad (108)$$

Den minste kostnaden i en gitt periode må da være i siste ledd:  $C_t^* = \min [\dots, \dots, \underline{\dots}]$ .

Fordi minimum kommer i siste periode, vil horisontteoremet alltid kutte periodene før.

Derfor er det kun to perioder for hver delproblem.

Dersom vi bruker dette og følger stegene fra oppgave 4a så innser vi at:

$$C_1^* = S \quad (109)$$

$$C_2^* = \min \left[ S + HD_2, \underline{S + S} \right] \quad (110)$$

$$C_3^* = \min \left[ 2S + HD_3, \underline{2S + S} \right] \quad (111)$$

$$C_4^* = \min \left[ 3S + HD_4, \underline{3S + S} \right] \quad (112)$$

$$C_5^* = \min \left[ 4S + HD_5, \underline{4S + S} \right] \quad (113)$$

$$C_6^* = \min \left[ 5S + HD_6, \underline{5S + S} \right] \quad (114)$$

hvor vi innser den generelle formen

$$C_t^* = \min \left[ (t-1)X + HD_t, \underline{tX} \right] \quad (115)$$

hvor  $t = 2, 3, 4, 5, 6$ . Den minste kostnaden er i siste ledd når:

$$(t-1)S + HD_t \geq tS \quad (116)$$

og løser med hensyn på  $S$  alene:

$$tS - S + HD_t \geq tS \quad (117)$$

$$HD_t \geq S \quad (118)$$

Den minste etterspørselen  $D_t$  gir den minste oppstartskostnaden. Siden

$$\min_{t=2,3,4,5,6} D_t = D_2 = 350 \quad (119)$$

så er

$$\underline{S} \leq 100 \cdot 350 \text{ NOK} = \underline{35\,000 \text{ NOK}} \quad (120)$$

Dersom oppstartskostnaden reduseres til 35 000 NOK så får Hydro Just-In-Time produksjon.

Oppstartstiden må da reduseres til:

$$\frac{S}{15\,000} = \frac{35\,000}{15\,000} = 2.33 \text{ timer} \quad (121)$$

Altså Hydro må redusere oppstartstiden med  $(10 - 2.33) \text{ timer} = \underline{\underline{7.66 \text{ timer}}}$  for å oppnå Just-In-Time produksjon.

■

# Hovedeksamen 2017

# LØSNING: Hovedeksamen mai 2017

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2017

Oppgave 1: ( prognostisering, 25 % )

a) *i*) Vi bruker den feilkorrigerende for eksponensiell glatting:

$$\underline{\underline{F_{2017}}} = X_{2016} - \theta E_{2016} = (7.1 - 0.8 \cdot 0.32) \text{ TWh} = \underline{\underline{6.844 \text{ TWh}}} \quad (1)$$

*ii*) Prognosefeilen for 2016 er:

$$\underbrace{E_{2016}}_{0.32} = \underbrace{X_{2016}}_{7.1} - F_{2016} \quad (2)$$

og løser med hensyn på  $F_{2016}$  alene:

$$\underline{\underline{F_{2016}}} = X_{2016} - E_{2016} \quad (3)$$

$$= (7.1 - 0.32) \text{ TWh} = \underline{\underline{6.78 \text{ TWh}}} \quad (4)$$

- b) i) Hydro har valgt en relativt høy glattingsparameter ( $\theta = 0.8$ ).  
En høy glattingsparameter gjør at store endringer i strømforbruket glattes ut.

Dette er *ikke* en ønsket egenskap ved prognosemetoden siden metoden dermed ikke fanger opp effekten fra nye forbedrede produksjonsceller.

Ja, det er derfor fornuftig å endre glattingsparameteren.

- ii) Hydro ønsker derfor en glattingsparameter som responderer bedre med endringer i strømforbruket enn den de har.

Det er derfor fornuftig for Hydro å **redusere** glattingsparameteren slik at metoden blir mer responsiv til plutselige fall i strømforbruket.

- c) i) Forbruket i 2017 er redusert med 15.1 % sammenlignet med 2016:

$$\underbrace{X_{2017}}_{3.4} = X_{2016} - 0.151X_{2016} \quad (5)$$

Løser med hensyn på  $X_{2016}$  alene:

$$\underline{\underline{X_{2016}}} = \frac{X_{2017}}{1 - 0.151} = \frac{3.4}{1 - 0.151} \text{ TWh} = \underline{\underline{4.00 \text{ TWh}}} \quad (6)$$

Forbruket i 2017 er redusert med 14.6 % sammenlignet med 2015:

$$X_{2017} = X_{2015} - 0.146X_{2015} \quad (7)$$

Løser med hensyn på  $X_{2015}$  alene:

$$\underline{\underline{X_{2015}}} = \frac{X_{2017}}{1 - 0.146} = \frac{3.4}{1 - 0.146} \text{ TWh} = \underline{\underline{3.98 \text{ TWh}}} \quad (8)$$

- ii)* I oppgaven var forbrukene  $X_{2017}$  og  $X_{2014}$  oppgitt.  
Ovenfor regnet vi ut  $X_{2015}$  og  $X_{2016}$ .

Hydro har dermed 4 observasjoner tilgjengelig for estimering av ny glattingsparameter.

- d)** *i)*  $MSE$  er et mål på **avstanden** mellom observasjonene og de tilsvarende prognosene fra en prognosemetode.

Jo "nærmere" prognosene er observasjonene, desto bedre er prognosemetoden. Derfor er  $MSE$  et godt mål å bruke når en skal sammenlikne to prognosemetoder, f.eks. ved å bruke to forskjellige glattingsparametre ved eksponensiell glatting.

- ii)* Den mest "optimale"<sup>1</sup> måten å bestemme glattingsparameteren basert på  $MSE$ , er å skrive opp  $MSE$  som en funksjon av  $\theta_{ny}$ :

$$MSE(\theta_{ny}) = \frac{1}{3} \left( E_{2015}^2(\theta_{ny}) + E_{2016}^2(\theta_{ny}) + E_{2017}^2(\theta_{ny}) \right) \quad (9)$$

Hydro kan nå bestemme  $\theta_{ny}$  ved å minimere  $MSE(\theta_{ny})$  med hensyn på  $\theta_{ny}$  under bibetingelsen  $0 \leq \theta_{ny} \leq 1$ .

PS:

Legg merke til at selv om vi har 4 observasjoner så har vi kun  $4 - 1 = 3$  prognosefeil  $E_i$ .

■

---

<sup>1</sup>Vi gir også delvis score for andre svar som f.eks. "prøv og feil" metodikk.

Oppgave 2: ( EOQ, 25 % )

a) Setupkostnaden  $S$  er

$$\underline{S} = 30 \cdot 70\,000 \text{ NOK} = \underline{2\,100\,000 \text{ NOK}} \quad (10)$$

EOQ-formelen gir:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 204\,000 \cdot 2\,100\,000}{5\,000}} \text{ tonn} = \underline{\underline{13\,090 \text{ tonn}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (11)$$

som er optimal seriestørrelse for primæraluminium.

Optimal omløpstid  $O^*$  i antall uker er gitt ved:

$$\underline{O^*} = 52 \frac{X^*}{D} = 52 \frac{13\,090}{204\,000} = \underline{3.3} \quad (12)$$

altså det tar 3.3 uker mellom hver gang lageret blir tomt.

b) Antakelsen om total leveranse er åpenbart brutt ved Hydro. Produksjonen av primæraluminium har en gitt produksjonshastighet (204 000 tonn per året).

Det er derfor ganske urealistisk å anta at 13 090 tonn primæraluminium produseres alt-i-ett.

c) Vi skal i denne oppgaven finne forholdet

$$Z = \frac{X^*}{\tilde{X}} \quad (13)$$

slik at  $\frac{C(X^*)}{C(\tilde{X})}$  ikke overskrider 1.25:

$$\frac{C(X^*)}{C(\tilde{X})} \leq 1.25 \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{X}}{X^*} + \frac{X^*}{\tilde{X}} \right) \leq 1.25 \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z} + Z \right) \leq 1.25 \quad \Bigg| \cdot 2 \quad (16)$$

$$\frac{1}{Z} + Z \leq 2.5 \quad \Bigg| \cdot Z \quad (17)$$

$$1 + Z^2 \leq 2.5Z \quad (18)$$

$$Z^2 - 2.5Z + 1 \leq 0 \quad (19)$$

Vi finner nullpunktene til denne andregradslikning via ABC-formelen: <sup>2</sup>

$$Z = \frac{-(-2.5) \pm \sqrt{(-2.5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2.5 \pm \sqrt{2.25}}{2} = \frac{2.5 \pm 1.5}{2} \quad (20)$$

som har to løsninger:

$$\underline{Z} = \frac{2.5 - 1.5}{2} = \underline{0.5} \quad \text{eller} \quad \underline{Z} = \frac{2.5 + 1.5}{2} = \underline{2} \quad (21)$$

Vi har dermed at:

$$\underline{\underline{0.5 \leq \frac{X^*}{\tilde{X}} \leq 2}} \quad (22)$$

gir  $\frac{C(X^*)}{C(\tilde{X})}$  ikke overskrider 1.25.

---

<sup>2</sup> $a = 1, b = -2.5, c = 1.$

d) Den justerte EOQ-formelen gir:

$$\underline{\underline{\tilde{X}}} = \sqrt{\frac{2DS}{H\left(1 - \frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 204\,000 \cdot 2\,100\,000}{5\,000 \cdot \left(1 - \frac{204\,000}{408\,000}\right)}} \text{ tonn} = \underline{\underline{18\,513 \text{ tonn}}} \quad (23)$$

som gir forholdet:

$$\frac{X^*}{\underline{\underline{\tilde{X}}}} = \frac{13\,090 \text{ tonn}}{18\,513 \text{ tonn}} = \underline{\underline{0.71}} \quad (24)$$

Konklusjon:

Dersom logistikkgruppa *ikke* tar høyde for at primæraluminium har en gitt produksjonshastighet så får de under 25 % økning i kostnader enn dersom de tar høyde for det.

■

**Oppgave 3:** ( aggregert planlegging, 25 % )

a) Vi har følgende indekseringer:

- produktfamiliene indekseres ved  $i = 1, 2$
- kvartalene indekseres ved  $t = 1, 2, 3, 4$

Vi definerer følgende data: <sup>3</sup>

$$D_{it} = \text{etterspørsel (tonn) etter produktfamilie } i \text{ i kvartal } t, \quad (25)$$

hvor  $i = 1, 2$  og  $t = 1, 2, 3, 4$

$$R_i = \text{bearbeidingstid (timer per tonn) for produktfamilie } i, \quad (26)$$

hvor  $i = 1, 2$

$$H_i = \text{lagerkostnad per tonn per kvartal for produktfamilie } i, \quad (27)$$

hvor  $i = 1, 2$

$$S_i = \text{setupkostnad for produktfamilie } i, \quad (28)$$

hvor  $i = 1, 2$

$$C_{it} = \text{strømkostnader per tonn av produktfamilie } i \text{ i kvartal } t, \quad (29)$$

hvor  $i = 1, 2$  og  $t = 1, 2, 3, 4$

$$I_{i0} = \text{startslager } (t = 0) \text{ for produktfamilie } i, \quad (30)$$

hvor  $i = 1, 2$

$$I_{i4} = \text{sluttlager } (t = 4) \text{ for produktfamilie } i, \quad (31)$$

hvor  $i = 1, 2$

$$\bar{R}_i = \text{maksimalt antall timer tilgjengelig per kvartal for familie } i, \quad (32)$$

hvor  $i = 1, 2$

---

<sup>3</sup>Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

b) Vi har tre typer variabler:

1) Variabel 1:

Antall tonn produsert av hver familie per kvartal:

$$X_{it} = \text{antall tonn produsert av produktfamilie } i \text{ i kvartal } t \quad (33)$$

hvor  $i = 1, 2$  og  $t = 1, 2, 3, 4$ .

2) Variabel 2:

Hvorvidt en skal produsere en gitt produktfamilie for et gitt kvartal eller ikke:

$$Y_{it} = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi produserer produktfamilie } i \text{ i kvartal } t \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (34)$$

hvor  $i = 1, 2$  og  $t = 1, 2, 3, 4$ .

3) Variabel 3:

Antall tonn overlagret fra et kvartal til neste av hver produktfamilie:

$$I_{it} = \text{antall tonn overlagret fra kvartal } t \text{ til } t + 1 \text{ av produktfamilie } i \quad (35)$$

hvor  $i = 1, 2$  og  $t = 1, 2, 3$ .

- c) Målfunksjonen  $C$  er gitt ved totale lager, setup - og strømkostnader:

$$\underline{\underline{C = \sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^3 H_i I_{it} + \sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^4 S_{it} Y_{it} + \sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^4 C_{it} X_{it}}}} \quad (36)$$

d) Vi har tre føringer:

1) Føring 1:<sup>4</sup>

Lagerbalansen må være oppfylt:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} = I_{it} \quad (37)$$

hvor  $i = 1, 2$  og  $t = 1, 2, 3$ .

2) Føring 2:

Ingen produksjon  $\rightarrow$  ingen tonn produsert. På logisk form:

$$\text{Hvis } \underbrace{Y_{it} = 0}_{\text{ingen produksjon familie } i} \text{ så er } \underbrace{X_{it} = 0}_{\text{ingen tonn produsert familie } i} \quad (38)$$

hvor  $\underbrace{i = 1, 2}_{\text{produktfamilie}}$  og  $\underbrace{t = 1, 2, 3, 4}_{\text{kvartal}}$ , eller på matematisk form (ikke-lineær):

$$X_{it}(1 - Y_{it}) = 0 \quad (39)$$

3) Føring 3:

Maksimal produksjonskapasitet totalt for hvert kvartal (i antall timer):

$$R_i X_{it} \leq \bar{R}_i \quad (40)$$

hvor  $i = 1, 2$ .

---

<sup>4</sup>Vårt problem dreier seg om lager over flere perioder. Derfor må det være en lagerbalanseligning inne i bildet. I testeksamen for 2017, derimot, var det kun én periode. Da behøves det ingen balanseligning.

- e) Vi utvider modellen til å inkludere den oppgitte nye informasjonen:

Nye data:

$$\bar{Z} = \text{maksimalt antall tonn flytende aluminium som kan produseres per kvartal} \quad (41)$$

$$Q_i = \text{antall tonn produsert for familie } i \text{ fra 1 tonn flytende aluminum,} \quad (42) \\ \text{hvor } i = 1, 2$$

Nye variabler:

Vi har en ny type variabel:

For hvert kvartal, skal de bestemme antall tonn flytende aluminium som skal gå til produksjonen av primæraluminium, og antall tonn som skal gå til produksjonen av støperiprodukter:

$$Z_{it} = \text{antall tonn flytende aluminium som går til produksjon av} \quad (43) \\ \text{familie } i \text{ i kvartal } t$$

hvor  $i = 1, 2$  og  $t = 1, 2, 3, 4$ .

Vi har to nye føringer:

1) Ny føring 1:

Antall tonn flytende aluminium produsert per kvartal må være mindre enn maksimal kapasitet:

$$Z_{1t} + Z_{2t} \leq \bar{Z} \quad (44)$$

hvor  $t = 1, 2, 3, 4$ .

2) Ny føring 2:

Produksjonsforholdet mellom flytende aluminium og gitt familie må være oppfylt:

$$X_{it} = Q_i Z_{it} \quad (45)$$

hvor  $i = 1, 2$  og  $t = 1, 2, 3, 4$ .

■

Oppgave 4: ( Wagner-Whitin, 25 % )

a) Vi fortsetter Wagner-Whitin algoritmen med subproblemet med tre perioder:

Periode 3: ( subproblem de 3 første periodene )

$$\underline{C}_3^* = \min \left[ C_{100} , C_{x10} , C_{xx1} \right] \quad (46)$$

$$= \min \left[ (siste bestilling i 1. periode) , (siste bestilling i 2. periode) , \right. \\ \left. (siste bestilling i 3. periode) \right] \quad (47)$$

$$= \min \left[ C_{10} + 2H_1D_{13} + C_{11}D_{13} , C_{x1} + H_1D_{13} + C_{12}D_{13} , C_2^* + S_1 + C_{13}D_{13} \right] \quad (48)$$

$$= \min \left[ 80\,750\,000 + 2 \cdot 125 \cdot 80\,000 + 1250 \cdot 80\,000 , \right. \\ \left. 83\,500\,000 + 125 \cdot 80\,000 + 1400 \cdot 80\,000 , \right. \quad (49)$$

$$\left. 80\,750\,000 + 2\,000\,000 + 1300 \cdot 80\,000 \right] \\ = \min \left[ 200\,750\,000 , 205\,500\,000 , \underline{186\,750\,000} \right] \quad (50)$$

$$= \underline{186\,750\,000 \text{ NOK}} \quad (51)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{xx1}$ .

Vi vet da at Horisontteoremet kutter periode 1 og 2.

Periode 4: ( subproblem de 4 første periodene )

Siden vi skal ha et sluttlager på  $I_{14} = 20\,000$  tonn så blir etterspørselen:

$$\underline{D'_{14}} = D_{14} + I_{14} = (54\,000 + 20\,000) \text{ tonn} = \underline{74\,000 \text{ tonn}} \quad (52)$$

Dermed:

$$\underline{C_4^*} = \min \left[ \textcolor{red}{C_{xx10}}, \textcolor{green}{C_{xxx1}} \right] \quad (53)$$

$$= \min \left[ (\textit{siste bestilling i } \textcolor{red}{3} . \textit{ periode}), (\textit{siste bestilling i } \textcolor{green}{4} . \textit{ periode}) \right] \quad (54)$$

$$= \min \left[ \textcolor{red}{C_{xx1}} + H_1 D'_{14} + C_{13} D'_{14}, \textcolor{green}{C_3^*} + S_1 + C_{14} D'_{14} \right] \quad (55)$$

$$= \min \left[ 186\,750\,000 + 125 \cdot 74\,000 + 1300 \cdot 74\,000 \right. \\ \left. \textcolor{blue}{186\,750\,000} + 2\,000\,000 + 1200 \cdot 74\,000 \right] \quad (56)$$

$$= \min \left[ 292\,200\,000, \underline{277\,550\,000} \right] \quad (57)$$

$$= \underline{277\,550 \text{ NOK}} \quad (58)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $\textcolor{blue}{C_{xxx1}}$ . Vi finner de andre bestillingene ved å hoppe til korrekt delproblem:

- $C_{xxx1}$ , siden siste bestilling skjer i uke 4. Vi hopper dermed til delproblem 3.
- $C_{xx11}$ , siden siste bestilling skjer i uke 3 for delproblem 3. Vi hopper til delproblem 2.
- $C_{1011}$ , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 2.

Altså har vi vist at:

$$\underline{\underline{C_4^* = C_{1011} = 277\,550\,000 \text{ NOK}}} \quad \text{q.e.d.} \quad (59)$$

- b) Optimal bestillingsplan leser vi direkte ut fra  $C_{1011}$ :

Bestillingsplanen: ( $Y_t$ -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (60)$$

$$Y_2 = 0 \quad (61)$$

$$Y_3 = 1 \quad (62)$$

$$Y_4 = 1 \quad (63)$$

Produksjonsmengder:

Vi finner  $X_t$ -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_{11}}} = D_{11} - I_{10} + D_{12} = (40\,000 - 10\,000 + 30\,000) \text{ tonn} = \underline{\underline{60\,000 \text{ tonn}}} \quad (64)$$

$$\underline{\underline{X_{12}}} = \underline{\underline{0}} \quad (65)$$

$$\underline{\underline{X_{13}}} = D_{13} = \underline{\underline{80\,000 \text{ tonn}}} \quad (66)$$

$$\underline{\underline{X_{14}}} = D_{14} + I_{14} = (54\,000 + 20\,000) \text{ tonn} = \underline{\underline{74\,000 \text{ tonn}}} \quad (67)$$

Lagermengder:

Fra  $X_t$ -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_{11}}} = D_{12} = \underline{\underline{30\,000 \text{ tonn}}} \quad (68)$$

$$\underline{\underline{I_{12}}} = \underline{\underline{0}} \quad (69)$$

$$\underline{\underline{I_{13}}} = \underline{\underline{0}} \quad (70)$$

$$\underline{\underline{I_{14}}} = \underline{\underline{20\,000 \text{ tonn}}} \quad (\text{oppgitt i oppgaven}) \quad (71)$$

- c) Vi har 4 ulikheter vi må sjekke er mindre enn 200 000 tonn:

$t = 1$ :

$$0.98X_{11} + 0.96X_{21} = 0.98 \cdot 60\,000 + 0.96 \cdot 65\,000 = \underbrace{121\,200}_{\text{OK}} \leq 200\,000 \quad (72)$$

$t = 2$ :

$$0.98X_{12} + 0.96X_{22} = 0.98 \cdot 0 + 0.96 \cdot 120\,000 = \underbrace{115\,200}_{\text{OK}} \leq 200\,000 \quad (73)$$

$t = 3$ :

$$0.98X_{13} + 0.96X_{23} = 0.98 \cdot 80\,000 + 0.96 \cdot 0 = \underbrace{78\,400}_{\text{OK}} \leq 200\,000 \quad (74)$$

$t = 4$ :

$$0.98X_{14} + 0.96X_{24} = 0.98 \cdot 74\,000 + 0.96 \cdot 105\,000 = \underbrace{173\,320}_{\text{OK}} \leq 200\,000 \quad (75)$$

Altså **alle** kapasitetsføringene er oppfylt.

Konklusjon:<sup>5</sup>

Siden Wagner-Whitin algoritmen løser to delproblem som er **mindre** restriktert enn det fulle problemet (med kapasitetsføringene) vil Wagner-Whitin **alltid** gi en billigere plan (man kanskje ikke en **mulig** plan).

Siden vi har vist at Wagner-Whitin planene **likevel** oppfyller kapasitetsføringene kan vi konkludere at Wagner-Whitin løsningene faktisk gir optimale løsninger også når kapasitetsføringene inkluderes.

■

---

<sup>5</sup>Denne siste konklusjonen er *ikke* en del av sensuren. Den er bare med for kompletthetens skyld.

# Kontinuasjonseksamen 2017

# LØSNING: Kontinuasjonseksamen våren 2017

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2017

Oppgave 1: ( prognostisering, 25 % )

a) Vi har fra formelen for eksponensiell glatting at<sup>1</sup>:

$$F_2 = X_1 = 700 \quad (1)$$

$$F_3 = \theta F_2 + (1 - \theta)X_2 = 0.2 \cdot 700 + 0.8 \cdot 690 = 692 \quad (2)$$

$$F_4 = \theta F_3 + (1 - \theta)X_3 = 0.2 \cdot 692 + 0.8 \cdot 710 = 706.4 \quad (3)$$

$$F_5 = \theta F_4 + (1 - \theta)X_4 = 0.2 \cdot 706.4 + 0.8 \cdot 690 = 693.3 \quad (4)$$

$$F_6 = \theta F_5 + (1 - \theta)X_5 = 0.2 \cdot 693.3 + 0.8 \cdot 740 = 730.7 \quad (5)$$

$$F_7 = \theta F_6 + (1 - \theta)X_6 = 0.2 \cdot 730.7 + 0.8 \cdot 700 = 706.1 \quad (6)$$

Prognosen for 2017 blir dermed  $F_7 = 706.13$  tusen tonn alumina.

---

<sup>1</sup>Vi har brukt den [stegvise](#) formelen for eksponensiell glatting. Alternativt kunne en ha brukt den [autokorrigerende](#) formelen.

b) Vi har 5 historiske prognoser:  $F_2 \dots F_6$ .  $MFE$  er da gitt ved:<sup>2</sup>

$$\underline{\underline{MFE}} = \frac{1}{T - s + 1} \sum_{t=2}^6 E_t \quad (7)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{t=2}^6 E_t$$
$$= \frac{1}{5} \left( (690 - 700) + (710 - 692) + (690 - 706.4) \right. \quad (8)$$

$$\left. + (740 - 693.3) + (700 - 730.7) \right) \quad (9)$$

$$= \underline{\underline{1.52}} \quad (10)$$

$MFE$  er et mål på om det forekommer en nedadstigende eller oppadstigende trend i observasjonene, basert på metoden brukt.

Siden  $MFE = 1.52$  er svakt positiv, gir dette en svakt økende trend. Hvis vi videre ser på observasjonene, ser vi at  $X_{2015}$  hadde en markant økning i etterspørsel enn for de andre årene. Dette forklarer den positive trenden.

Når vi har en avvikende økning i 2015, vil denne verdien øke verdien på  $MFE$ . Hadde vi fjernet denne verdien ville  $MFE$  minket. Vi kan ikke konkludere at datasettet har en økende trend, siden verdien på  $MFE$  er forhøyet bare pga. et avvikende år. Vi må ha flere år som viser en økende trend.

---

<sup>2</sup>Vi har her satt  $T = 6$  og  $s = 2$ , at  $s = 2$  kommer av at  $ES(\theta)$  starter på  $s = 2$ , se kompendium.

c) Vi har følgende **to** fordeler:

1. Vi må ikke *lagre* alle observasjonene til enhver tid for å beregne  $MFE$  på nytt.
2. Formelen er enklere å beregne enn definisjonen, siden vi ikke bruker alle observasjonene i beregningen.

d) Vi bruker den oppgitte oppdateringsformelen til å beregne ny verdi for  $MFE_7$ :<sup>3</sup>

$$\underline{\underline{MFE_7}} = \frac{(6-1)MFE_6 + (X_7 - F_7)}{6} \quad (11)$$

$$= \frac{5 \cdot 1.52 + (750 - 706.1)}{6} \quad (12)$$

$$= \underline{\underline{8.58}} \quad (13)$$

$MFE$  har nå økt kraftig, og hentyder sterkere til en oppadstigende trend. Hydro bør derfor vurdere å bytte til en trendbasert prognosemetode.

■

---

<sup>3</sup>Vi har her satt  $t = 6$ .

Oppgave 2: ( EOQ, 25 % )

- a) Antakelsen om *total leveranse*, betyr at hele bestillingen kommer på en gang. Dette er tilfelle her *forutsett* at tankskipet har nok kapasitet til hele bestillingen.

Vi må derfor sjekke om den optimale ordrebestillingen ligger under kapasitetsgrensen til skipet (30 000 tonn Alumina):

EOQ-formelen gir:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 717\,000 \cdot 800\,000}{0.1 \cdot 15\,000}} = \underline{\underline{27\,655 \text{ tonn}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (14)$$

som er optimal bestillingsmengde for alumina, hvor vi har brukt at  $H = iC$ .

Vi kan dermed konkludere at antakelsen om total leveranse er oppfylt, siden EOQ ligger under kapasitetsgrensen til tankskipet.

- b) Med *omløpstid*, menes tiden fra lageret er fylt til lageret er tomt.

Optimal omløpstid  $O^*$  i antall uker er gitt ved:

$$\underline{\underline{O^*}} = 52 \frac{X^*}{D} = 52 \frac{27\,655}{717\,000} = \underline{\underline{2.0}} \quad (15)$$

Det tar altså 2 uker mellom hver gang lageret blir tomt.

c) Sikkerhetslageret er gitt ved:

$$\underline{\underline{SS}} = z_{99}\sigma\sqrt{L} \quad (16)$$

$$= 2.33 \cdot 50\,000 \cdot \sqrt{5/365} \quad (17)$$

$$= \underline{\underline{13\,635 \text{ tonn alumina}}} \quad (18)$$

Legg merke til at vi har skrevet om ledetiden til antall år, siden etterspørselen er oppgitt i antall tusen tonn Alumina per år.

Bestillingspunktet er dermed gitt ved:

$$\underline{\underline{R}} = DL + SS \quad (19)$$

$$= 717000 \cdot \frac{5}{365} + 13\,635 \quad (20)$$

$$= \underline{\underline{23\,457 \text{ tonn alumina}}} \quad (21)$$

Hydro bestiller ny leveranse når lageret ved Årdal verk har nådd 23 457 tonn.

■

Oppgave 3: ( Fasilitetsdesign, 25 % )

- a) Problemet er et **lokaliserings**problem siden vi har 2 potensielle lokasjoner for mellomlageret, men hvor kun ett av dem skal benyttes.
- b) Problemet er **ikke** et **allokerings**problem siden vi har kun 1 mellomlager som skal tjene alle de 3 produksjonshallene.
- c) Vi har følgende indekseringer:
- de mulige lokasjonene for mellomlageret indekseres ved  $i = 1, 2$
  - produksjonshallene indekseres ved  $j = 1, 2, 3$

Vi definerer følgende data:<sup>4</sup>

$$D_j = \text{årlig etterspørsel etter karbonanoder ved produksjonshall } j, \text{ hvor } j = 1, 2, 3 \quad (22)$$

$$T_{ij} = \text{rutekostnad fra mulig lokasjon } i \text{ til produksjonshall } j, \text{ hvor } i = 1, 2 \text{ og } j = 1, 2, 3 \quad (23)$$

---

<sup>4</sup>Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

- d) Vi har kun en variabel:

Hvorvidt en lagerlokasjon  $i$  skal benyttes eller ikke:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bruker mulig lokasjon } i \text{ for mellomlageret} \\ 0 & , \text{ hvis ikke} \end{cases} \quad (24)$$

hvor  $i = 1, 2$ .

- e) Målfunksjonen  $T$  er gitt ved totale årlige transporttider:

$$\underline{\underline{T = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 D_j T_{ij} Y_i}} \quad (25)$$

- f) Vi har kun en føring:

Kun en av de to mulige lokasjonene for mellomlageret skal benyttes:

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^2 Y_i = 1}} \quad (26)$$

- g) Problemet er nå også et [allokeringsproblem](#), siden vi må bestemme hvilke av de 5 lagrene i tillegg til mellomlageret som skal tjene produksjonshallene med anoder.

- h) Vi utvider modellen til å inkludere muligheten for direkte transport mellom lager og produksjonshall:

Ny indeksering:

Vi har følgende ny indeksering:

de 5 eksisterende lagrene indekseres ved  $k = 1, 2, 3, 4, 5$

Nye data:

$$Q_{kj} = \text{transporttid mellom lager } k \text{ og produksjonshall } j \quad (27)$$

hvor  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  og  $j = 1, 2, 3$ .

Nye variabler:

Vi må spesifisere hvor mye vi leverer fra hvert lager til produksjonshallene, inkludert mellomlageret:

$$X_{kj} = \text{antall anoder levert fra lager } k \text{ til produksjonshall } j \quad (28)$$

hvor  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  og  $j = 1, 2, 3$ .

$$Z_{ij} = \text{antall anoder levert fra lokasjon } i \text{ for mellomlageret til produksjonshall } j \quad (29)$$

hvor  $i = 1, 2$  og  $j = 1, 2, 3$ .

Legg merke til at transporten fra lagrene til mellomlageret *ikke* inkluderes! Dette kan komme av at denne transporttiden forekommer når det *ikke* er behov for å bytte ut en anode. (En slik transport vil ikke sinke produksjonen av aluminium.

Ny målfunksjon:

Vi inkluderer muligheten for direkte transport mellom lagrene og produksjonshallene, i tillegg til transporten fra de mulige lokasjonene for mellomlagret.

Den nye målfunksjonen for totale årlige transpottider blir dermed:

$$\underline{\underline{T = \sum_{k=1}^5 \sum_{j=1}^3 Q_{kj} X_{kj} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 T_{ij} Z_{ij}}} \quad (30)$$

Vi har to nye føringer:

1) Ny føring 1:

Etterspørsel oppfylt:

Vi må oppfylle den *totale* etterspørselen for anoder ved produksjonshallene:

$$D_j = \sum_{k=1}^5 X_{kj} + \sum_{i=1}^2 Z_{ij} \quad (31)$$

hvor  $j = 1, 2, 3$ .

2) Ny føring 2:

Logisk sammenheng mellom Z-variablene og Y-variablene:

Lokasjon for mellomlager ikke benyttet  $\rightarrow$  ingen leveranse fra lokasjonen. På logisk form:

$$\text{Hvis } \underbrace{Y_{\textcolor{red}{i}} = 0}_{\text{intet lager}} \text{ så er } \underbrace{Z_{\textcolor{red}{i}\textcolor{blue}{j}} = 0}_{\text{ingen leveranse}} \quad (32)$$

for alle lokasjoner for mellomlageret  $i = 1, 2$  og alle produksjonshaller  $j = 1, 2, 3$ :

$$Z_{\textcolor{red}{i}\textcolor{blue}{j}}(1 - Y_{\textcolor{blue}{i}}) = 0 \quad (33)$$

■

Oppgave 4: ( Wagner-Whitin, 25 % )

a) Omstillingskostnaden er:

$$\underline{S} = 15 \cdot 10\,000 \text{ NOK} = \underline{150\,000 \text{ NOK}} \quad (34)$$

Lagerkostnaden:

$$H = 200 \text{ NOK per anode per uke} \quad (35)$$

som oppgitt i oppgaveteksten.

Startlager:

$$I_0 = 150 \quad (36)$$

Sluttlager:

$$I_6 = 300 \quad (37)$$

anoder, som også er oppgitt i oppgaveteksten.

Periode 1: ( subproblem med kun første periode )

Etterspørselen i uke 1 er  $D_1 = 600$  anoder.

Det initielle lageret  $I_0 = 150$  er ikke stort nok til å dekke etterspørselen så vi må ha produksjon i første periode:

$$\underline{C}_1^* = S = \underline{150\,000 \text{ NOK}} \quad (38)$$

Periode 2: ( subproblem de 2 første periodene )

Dominante produksjonsplaner gir *to* mulige optimale løsninger:  $C_{10}$  og  $C_{11}$ .

Vi regner ut disse verdiene:

$$\underline{C}_2^* = \min \left[ \textcolor{blue}{C}_{10} , \textcolor{red}{C}_{x1} \right] \quad (39)$$

$$= \min \left[ (\textit{siste bestilling i } \textcolor{blue}{1} . \textit{ periode}) , (\textit{siste bestilling i } \textcolor{red}{2} . \textit{ periode}) \right] \quad (40)$$

$$= \min \left[ (\textcolor{blue}{C}_1^* + H \cdot D_2) , (\textcolor{red}{C}_1^* + S) \right] \quad (41)$$

$$= \min \left[ \textcolor{blue}{150\,000} + 200 \cdot 850 , \textcolor{red}{150\,000} + 150\,000 \right] \quad (42)$$

$$= \min \left[ 320\,000 , \underline{300\,000} \right] \quad (43)$$

$$= \underline{300\,000 \text{ NOK}} \quad (44)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $\textcolor{blue}{C}_{11}$ .

Vi vet da at Horisontteoremet kutter første periode.

Periode 3: ( subproblem de 3 første periodene )

$$\underline{C}_3^* = \min \left[ C_{x10}, C_{xx1} \right] \quad (45)$$

$$= \min \left[ (\textit{ siste bestilling i 2. periode} ), (\textit{ siste bestilling i 3. periode} ) \right] \quad (46)$$

$$= \min \left[ (C_{x1} + H \cdot D_3), (C_2^* + S) \right] \quad (47)$$

$$= \min \left[ (300\,000 + 200 \cdot 800), (300\,000 + 150\,000) \right] \quad (48)$$

$$= \min \left[ 460\,000, \underline{450\,000} \right] \quad (49)$$

$$= \underline{450\,000} \text{ NOK} \quad (50)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{xx1}$ .

Vi vet da at Horisontteoremet kutter kutter periode 1 og 2.

Periode 4: ( subproblem de 4 første periodene )

$$\underline{C_4^*} = \min \left[ C_{xx10}, C_{xxx1} \right] \quad (51)$$

$$= \min \left[ (\textit{ siste bestilling i 3. periode} ), (\textit{ siste bestilling i 4. periode} ) \right] \quad (52)$$

$$= \min \left[ (C_{xx1} + H \cdot D_4), (C_3^* + S) \right] \quad (53)$$

$$= \min \left[ (450\,000 + 200 \cdot 850), (450\,000 + 150\,000) \right] \quad (54)$$

$$= \min \left[ 620\,000, \underline{600\,000} \right] \quad (55)$$

$$= \underline{600\,000 \text{ NOK}} \quad (56)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{xxx1}$ .

Vi vet da at Horisontteoremet kutter periode 1, 2 og 3.

Periode 5: ( subproblem de 5 første periodene )

Siden horisontteoremet kuttet periodene 1, 2 og 3 i forrige steg, kan vi nå starte fra periode 4:

$$\underline{C}_5^* = \min \left[ C_{xxx10}, C_{xxxx1} \right] \quad (57)$$

$$= \min \left[ (\text{siste bestilling i } 4. \text{ periode}), (\text{siste bestilling i } 5. \text{ periode}) \right] \quad (58)$$

$$= \min \left[ C_{xxx1} + H \cdot D_5, C_4^* + S \right] \quad (59)$$

$$= \min \left[ 600\,000 + 200 \cdot 600, 600\,000 + 150\,000 \right] \quad (60)$$

$$= \min \left[ \underline{720\,000}, 750\,000 \right] \quad (61)$$

$$= \underline{720\,000 \text{ NOK}} \quad (62)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{xxx10}$ .

Vi vet da at Horisontteoremet kutter ingen nye perioder.

Periode 6: ( det fulle problemet )

Siden vi har et krav om sluttlager på  $I_6 = 300$  anoder så legger vi disse til i etterspørselen i periode 6, dvs.:

$$\underline{\tilde{D}_6} = D_6 + I_6 = 800 + 300 = \underline{1100} \quad (63)$$

Dermed:

$$\underline{C_6^*} = \min \left[ C_{xxx100} , C_{xxxx10} , C_{xxxxx1} \right] \quad (64)$$

$$= \min \left[ (siste bestilling i 4. periode) , (siste bestilling i 5. periode) , (siste bestilling i 6. periode) \right] \quad (65)$$

$$= \min \left[ (C_{xxx10} + 2 \cdot H \cdot \tilde{D}_6) , (C_{xxxx1} + H \cdot \tilde{D}_6) , (C_5^* + S) \right] \quad (66)$$

$$= \min \left[ (720\,000 + 2 \cdot 200 \cdot 1100) , (750\,000 + 200 \cdot 1100) , (720\,000 + 150\,000) \right] \quad (67)$$

$$= \min \left[ 1\,160\,000 , 970\,000 , \underline{870\,000} \right] \quad (68)$$

$$= \underline{870\,000 \text{ NOK}} \quad (69)$$

Vi ser at optimal løsning for dette subproblemet er  $C_{xxxxx1}$ .

Oppsummert:

- $C_{xxxxx1}$ , siden siste bestilling skjer i uke 6. Vi hopper dermed til delproblem 5.
- $C_{xxx101}$ , siden siste bestilling skjer i uke 4 for delproblem 5. Vi hopper til delproblem 3.
- $C_{xx1101}$ , siden siste bestilling skjer i uke 3 for delproblem 3.
- $C_{x11101}$ , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 1.
- $C_{111101}$ , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 1.

Optimal løsning:

$$\underline{\underline{C^*}} = C_{111101} = \underline{\underline{870\,000\text{ NOK}}} \quad (70)$$

Bestillingsplanen: ( $Y_t$ -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (71)$$

$$Y_2 = 1 \quad (72)$$

$$Y_3 = 1 \quad (73)$$

$$Y_4 = 1 \quad (74)$$

$$Y_5 = 0 \quad (75)$$

$$Y_6 = 1 \quad (76)$$

Produksjonsmengder:

Vi finner  $X_t$ -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 = 600 - 150 = \underline{\underline{450}} \quad (77)$$

$$X_2 = D_2 = \underline{\underline{850}} \quad (78)$$

$$X_3 = D_3 = \underline{\underline{800}} \quad (79)$$

$$\underline{\underline{X_4}} = D_4 + D_5 = 850 + 600 = \underline{\underline{1450}} \quad (80)$$

$$X_5 = 0 \quad (81)$$

$$\underline{\underline{X_6}} = D_6 + I_6 = 800 + 300 = \underline{\underline{1100}} \quad (82)$$

Lagermengder:

Fra  $X_t$ -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = 0 \quad (83)$$

$$\underline{\underline{I_2}} = 0 \quad (84)$$

$$I_3 = 0 \quad (85)$$

$$\underline{\underline{I_4}} = D_5 = \underline{\underline{600}} \quad (86)$$

$$I_5 = 0 \quad (87)$$

- b) I oppgaven skal vi *femskynde* etterspørsel fra periode 6 til periode 5 inntil lageret fra periode 4 til periode 5 blir så stort at det er billigere å produsere i periode 5.

Vi definerer den ukjente variabelen ved:

$$X = \text{antall anoder fremskyndet fra periode 6 til periode 5} \quad (88)$$

Vi må se på sluttresultatet for delproblem 5 hvor vi nå substituerer  $D_5$  med  $\tilde{D}_5 = D_5 + X = 600 + X$ :

$$\underline{C}_5^* = \min \left[ C_{xxx10}, C_{xxxx1} \right] \quad (89)$$

$$= \min \left[ (\text{siste bestilling i 4. periode}), (\text{siste bestilling i 5. periode}) \right] \quad (90)$$

$$= \min \left[ C_{xxx1} + H \cdot \tilde{D}_5, C_4^* + S \right] \quad (91)$$

$$= \min \left[ 600\,000 + 200 \cdot (600 + X), 600\,000 + 150\,000 \right] \quad (92)$$

$$= \min \left[ 720\,000 + 200 \cdot X, 750\,000 \right] \quad (93)$$

Dersom siste bestilling i periode 5 skal bli optimalt krever vi at:

$$720\,000 + 200 \cdot X \geq 750\,000 \quad (94)$$

$$\Updownarrow \quad (95)$$

$$X \geq \frac{720\,000 - 750\,000}{-200} = \frac{300\,000}{200} = 150 \quad (96)$$

Dersom vi fremskynder produksjonen av 150 anoder fra periode 6 til periode 5, så får vi at nye etterspørsler er gitt ved:

$$\tilde{D}_5 = D_5 + X = 600 + 150 = 750 \quad (97)$$

$$\tilde{D}_6 = D_6 - X + I_6 = 800 - 150 + 300 = 950 \quad (98)$$

Vi vet at delproblem 5 nå får optimal løsning  $C_5^* = C_{xxxx1} = 750\,000$  NOK som påkrevd i oppgaven.

Det siste vi må sjekke er at delproblem 6 nå gir  $= C_{xxxx1}$  som før:<sup>5</sup>

$$\underline{C}_6^* = \min \left[ C_{xxx100}, C_{xxxx10}, C_{xxxxx1} \right] \quad (99)$$

$$= \min \left[ (\text{siste bestilling i 4. periode}), (\text{siste bestilling i 5. periode}), (\text{siste bestilling i 6. periode}) \right] \quad (100)$$

$$= \min \left[ (C_{xxx10} + 2 \cdot H \cdot \tilde{D}_6), (C_{xxxx1} + H \cdot \tilde{D}_6), (C_5^* + S) \right] \quad (101)$$

$$= \min \left[ (750\,000 + 2 \cdot 200 \cdot 950), (750\,000 + 200 \cdot 950), (750\,000 + 150\,000) \right] \quad (102)$$

$$= \min \left[ 1\,130\,000, 940\,000, \underline{900\,000} \right] \quad (103)$$

$$= \underline{900\,000 \text{ NOK}} \quad (104)$$

Vi konkluderer med at dersom vi fremskynder 150 anoder fra periode 6 til periode 5, så får vi ingen stans i produksjonen

■

---

<sup>5</sup>Selve verdien på løsningen blir dermed 30 000 NOK dyrere, men det er likevel bra for Årdal siden produksjonen ikke får stans.

# Testeksamen 2018

# LØSNING: Testeksamen mai 2018

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2018

## Oppgave 1: ( prognostisering, 25 % )

a) Prognosen  $F_{10}$  regnes ut ved gjennomsnittet av salget for de 6 foregående periodene:

$$\underline{\underline{F_{10}}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{T-n+1} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{t=1}^6 X_{9-6+t} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{t=1}^6 X_{3+t}$$

$$= \frac{1}{6} \left( X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left( 58 + 41 + 39 + 34 + 28 + 2 \right)$$

$$= \underline{\underline{33.7}} \quad (3)$$

b) Prognosene kan brukes til:

- Å lage budsjettplan.
- Å lage master produksjonsplan for varen over 1 år.
- Å lage aggregert produksjonsplan.

- c) Siden vi ser av figuren at vi overestimerer jevnt over mer enn vi underestimerer, vil  $MFE < 0$ . Dette ser vi også fra figuren ved at den røde grafen ligger for det meste over den blå.
- d) Glidende gjennomsnitt med vindu 6 måneder har følgende to svakheter:
- Metoden fjerner gamle observasjoner (dvs. de eldre enn 6 måneder).
  - Metoden vektlegger de siste 6 månedene like mye (hver måned vektlegges  $1/6$  hver.)
- e) Denne oppgaven handler om å se på mønsteret til salgstallene. Måletallet  $MFE$  viser en klar nedadstigende trend. Finnes det likevel mulighet for at vi ikke har en nedadstigende trend?

Hvis vi studerer salgstallene nøye ser vi at det muligens finnes to nivåer:

- Vintermånedene januar, februar og mars ligger rundt 140 enheter per måned
- De andre månedene ligger rundt 40 enheter bortsett fra september og desember som nesten ikke har salg

### Argument 1:

Vi kan først argumentere at produktet er et *vinterprodukt*, dvs vi at produktet har en høysesong i de tre vintermånedene.

Problemet med dette argumentet er at produktet er en klassisk *inneprodukt*, gjerne brukt i kontorbygg og skoler etc. Denne informasjonen ser vi fra figuren av produktet. Det gir derfor ikke mening å anta at produktet har høysesong i vintermånedene.

## Argument 2:

Et mer mulig scenario er at kundene/Glamox ikke legger inn ordrene sine i desember, men flytter dem til vintermånedene på nyåret.

Det er flere grunner for at de kan gjøre dette:

- Desember har liten aktivitet på grunn av julen.
- Glamox/kundene ønsker å få ordrene inn i budsjettet for 2018.
- Kundene kan ha liten likviditet ved slutten av året.

På bakgrunn av argument 1 men av argument 2, kan vi konkludere med at det er tilstrekkelig tvil rundt påstanden om nedadstigende trend.

■

Oppgave 2: ( Master produksjonsplanlegging, 25 % )

- a) Her må vi benytte at  $D = 8.4$  armaturer per uke. Kravet er at vi må bestille opp slik at vi opprettholder en omløpstid  $O$  på 14 dager (2 uker). Men vi må også fylle opp eventuelt forbruk av sikkerhetslageret.

Siden vi har  $I_0 = 30$  enheter på lager og det tar 2 uker før ny serie kommer inn, vil lageret rett før serien kommer inn være estimert til:

$$\underline{\underline{I_2^-}} = I_0 - DL = 30 - 8.4 \cdot 2 = \underline{\underline{13.2 \text{ lysarmaturer}}} \quad (4)$$

- b) Siden sikkerhetslageret er på 5 ukers behov, får vi dermed at:

$$\underline{\underline{SS}} = 5 \cdot D = 5 \cdot 8.4 = \underline{\underline{42 \text{ lysarmaturer}}} \quad (5)$$

Glamox har et sikkerhetslager på 42 lysarmaturer.

- c) Vi må fylle opp lageret slik at omløpstiden er 2 uker med 5 ukers sikkerhetslager. Husk at vi har  $I_2^-$  armaturer på lager allerede som vi må trekke ifra.

$$\underline{\underline{X}} = SS + DO - I_2^- \quad (6)$$

$$= 8.4 \cdot 5 + 8.4 \cdot 2 - 13.2 = \underline{\underline{45.6 \text{ lysarmaturer}}} \quad (7)$$

Glamox bestiller opp  $X = 45.6$  lysarmaturer.

d) Vi skal tegne opp lagerprofilen for kommende lagersyklus. Vi skal inkludere følgende størrelser:

$$I_0 : \text{startslageret} \quad (8)$$

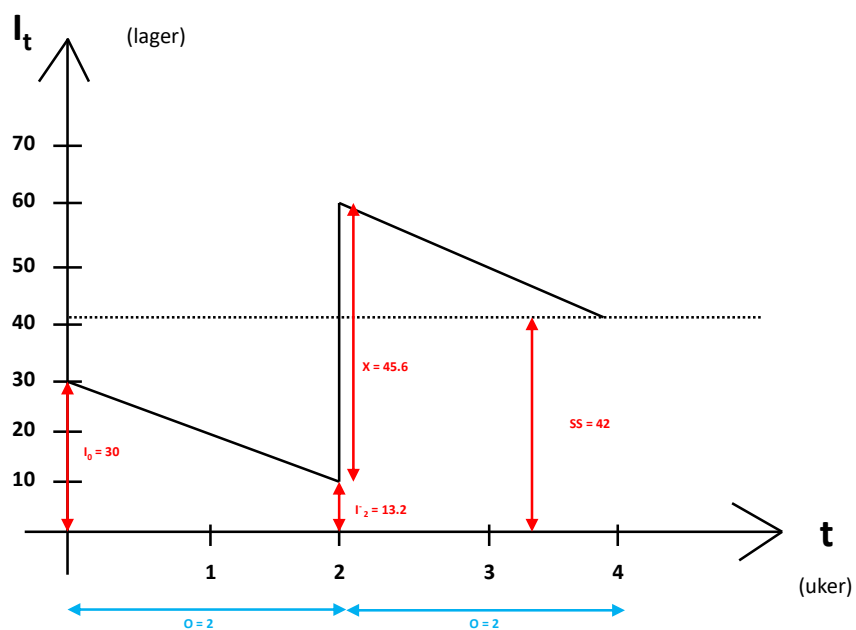
$$X : \text{seriestørrelsen} \quad (9)$$

$$I_2^- : \text{restlager når serien kommer inn på lager} \quad (10)$$

$$SS : \text{sikkerhetslageret} \quad (11)$$

$$O : \text{omløpstiden} \quad (12)$$

Figur 1 viser den planlagte lagerprofilen for de 4 neste ukene.



Figur 1: Lagerprofilen for to sykluser

Oppgave 3: ( EOQ, 25 % )

a) Vi regner ut  $X^*$  ved hjelp av EOQ-formelen:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2SD}{H}} \quad (13)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 700}{120}} \quad (14)$$

$$= \underline{\underline{152.8}} \quad (15)$$

Optimal seriestørrelse er dermed  $X^* = 153$  LED-armaturer.

b) Den optimale omløpstiden  $O^*$  er gitt ved:

$$\underline{\underline{O^*}} = \frac{X^*}{D} \quad (16)$$

$$= \frac{153}{700} \quad (17)$$

$$= \underline{\underline{0.218}} \quad (18)$$

Optimal omløpstid er dermed  $O^* = 0.218$  år, dvs  $O^* = 0.218 \cdot 52 = 11.4$  uker.

- c) Optimale lager -og omstillingskostnader er gitt ved:<sup>1</sup>

$$\underline{\underline{C^*}} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \quad (19)$$

$$= HX^* \quad (20)$$

$$= 120 \cdot 153 \quad (21)$$

$$= \underline{\underline{18\,360}} \quad (22)$$

Optimale lager -og omstillingskostnader er dermed  $C^* = 18\,360$  kroner i året.

- d) Sikkerhetslageret  $SS$  er gitt ved:

$$\underline{\underline{SS}} = Z_{99}\sqrt{L}\sigma \quad (23)$$

$$= 2.33 \cdot \sqrt{\frac{2}{52}} \cdot 100 \quad (24)$$

$$= \underline{\underline{46}} \quad (25)$$

Et sikkerhetslager på  $SS = 46$  LED-armaturer gir leveringspresisjon på 99%.

---

<sup>1</sup>Overgangen mellom likn. 19 og likn. 20, er kun korrekt for optimal bestillingsmengde  $X^*$  og er kun for å spare tid.

d) Bestillingspunktet  $R$  er gitt ved:

$$\underline{\underline{R}} = DL + SS\sqrt{L}\sigma \quad (26)$$

$$= 700 \cdot \frac{2}{52} + 46 \quad (27)$$

$$= \underline{\underline{73}} \quad (28)$$

Bestillingspunktet er ved  $R = 73$  LED-armaturer.

■

Oppgave 4: ( Wagner-Whitin, 25 % )

a) Siden

$$P_{10} : C_{10}^* = C_{xxxxx10000} = 11170 \quad (29)$$

har vi at siste bestilling er optimalt i måned 6. Vi kan derfor via horisontteromet kutte de 5 første månedene:

$P_{11}$ :

$$C_{11}^* = \min[ C_{xxxxx10000\textcolor{red}{0}}, C_{xxxxxx1000\textcolor{red}{0}}, C_{xxxxxxx100\textcolor{red}{0}}, \quad (30)$$

$$C_{xxxxxxx10\textcolor{red}{0}}, C_{xxxxxxx1\textcolor{red}{0}}, C_{xxxxxxx\textcolor{red}{1}} ] \quad (31)$$

$$= \min[ 13\,570, 13\,260, 13\,220, 12\,990, \underline{12\,210}, 13\,170 ] \quad (32)$$

$$= 12\,210 \quad (33)$$

Utrekniner:

$$C_{xxxxx10000\textcolor{red}{0}} = C_{xxxxx10000} + 5HD_{11} = 11\,170 + 5 \cdot 10 \cdot 48 = 13\,570 \quad (34)$$

$$C_{xxxxxx1000\textcolor{red}{0}} = C_{xxxxxx1000} + 4HD_{11} = 11\,340 + 4 \cdot 10 \cdot 48 = 13\,260 \quad (35)$$

$$C_{xxxxxxx100\textcolor{red}{0}} = C_{xxxxxxx100} + 3HD_{11} = 11\,780 + 3 \cdot 10 \cdot 48 = 13\,220 \quad (36)$$

$$C_{xxxxxxx10\textcolor{red}{0}} = C_{xxxxxxx10} + 2HD_{11} = 12\,030 + 2 \cdot 10 \cdot 48 = 12\,990 \quad (37)$$

$$C_{xxxxxxx1\textcolor{red}{0}} = C_{xxxxxxx1} + 1HD_{11} = 11\,730 + 1 \cdot 10 \cdot 48 = 12\,210 \quad (38)$$

$$C_{xxxxxxx\textcolor{red}{1}} = C_{10}^* + S = 11\,170 + 2\,000 = 13\,170 \quad (39)$$

Subproblem  $P_{11}$  gir at det er optimalt å ha siste bestilling i måned 10.

Vi kan derfor via horisontteoremet kutte alle månedene før måned 10, dvs. vi kan kutte de 9 første månedene.

$P_{12}$ :

$$C_{12}^* = \min[ C_{xxxxxxxx100}, C_{xxxxxxxx10}, C_{xxxxxxxx1} ] \quad (40)$$

$$= \min[ 14\ 230, \underline{14\ 180}, 14\ 210 ] \quad (41)$$

$$= 14\ 180 \quad (42)$$

Utrekniner:

$$C_{xxxxxxxx100} = C_{xxxxxxxx10} + 2H(D_{12} + I_{12}) = 12\ 210 + 2 \cdot 10 \cdot (1 + 100) = 14\ 230 \quad (43)$$

$$C_{xxxxxxxx10} = C_{xxxxxxxx1} + 1H(D_{12} + I_{12}) = 13\ 170 + 1 \cdot 10 \cdot (1 + 100) = 14\ 180 \quad (44)$$

$$C_{xxxxxxxx1} = C_{11}^* + S = 12\ 210 + 2\ 000 = 14\ 210 \quad (45)$$

Optimale kostnader er dermed  $C^* = C_{12}^* = 14\ 180$  kroner.

b) Vi starter bakfra og jobber oss frem til løsningen:

- $C_{xxxxxxxx10}$ , siden siste bestilling skjer i måned 11  $\rightarrow$  delproblem 10.
- $C_{xxxx10000100}$ , siden siste bestilling skjer i måned 6 for delproblem 10  $\rightarrow$  delproblem 5.
- $C_{xx10010000100}$ , siden siste bestilling skjer i måned 3 for delproblem 5  $\rightarrow$  delproblem 2.
- $C_{1010010000100}$ , siden siste bestilling skjer i måned 1 for delproblem 2.

Bestillingsplanen: ( $Y_t$ -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (46)$$

$$Y_2 = 0 \quad (47)$$

$$Y_3 = 1 \quad (48)$$

$$Y_4 = 0 \quad (49)$$

$$Y_5 = 0 \quad (50)$$

$$Y_6 = 1 \quad (51)$$

$$Y_7 = 0 \quad (52)$$

$$Y_8 = 0 \quad (53)$$

$$Y_9 = 0 \quad (54)$$

$$Y_{10} = 0 \quad (55)$$

$$Y_{11} = 1 \quad (56)$$

$$Y_{12} = 0 \quad (57)$$

Produksjonsmengder: ( $X_t$ -variablene)

Vi finner  $X_t$ -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 + D_2 = 133 - 100 + 137 = \underline{\underline{170}} \quad (58)$$

$$X_2 = 0 \quad (59)$$

$$X_3 = D_3 + D_4 + D_5 = 142 + 58 + 41 = \underline{\underline{241}} \quad (60)$$

$$\underline{\underline{X_4}} = 0 \quad (61)$$

$$X_5 = 0 \quad (62)$$

$$\underline{\underline{X_6}} = D_6 + D_7 + D_8 + D_9 + D_{10} = 39 + 34 + 28 + 2 + 36 = \underline{\underline{139}} \quad (63)$$

$$X_7 = 0 \quad (64)$$

$$X_8 = 0 \quad (65)$$

$$X_9 = 0 \quad (66)$$

$$X_{10} = 0 \quad (67)$$

$$\underline{\underline{X_{11}}} = D_{11} + D_{12} + I_{12} = 48 + 1 + 100 = \underline{\underline{149}} \quad (68)$$

$$X_{12} = 0 \quad (69)$$

Lagermengder: ( $I_t$ -variablene)

Fra  $X_t$ -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = D_2 = 137 \quad (70)$$

$$I_2 = 0 \quad (71)$$

$$\underline{\underline{I_3}} = D_4 + D_5 = 58 + 41 = \underline{\underline{99}} \quad (72)$$

$$\underline{\underline{I_4}} = D_5 = \underline{\underline{41}} \quad (73)$$

$$I_5 = 0 \quad (74)$$

$$\underline{\underline{I_6}} = D_7 + D_8 + D_9 + D_{10} = 34 + 28 + 2 + 36 = \underline{\underline{100}} \quad (75)$$

$$\underline{\underline{I_7}} = D_8 + D_9 + D_{10} = 28 + 2 + 36 = \underline{\underline{66}} \quad (76)$$

$$\underline{\underline{I_8}} = D_9 + D_{10} = 2 + 36 = \underline{\underline{38}} \quad (77)$$

$$\underline{\underline{I_9}} = D_{10} = \underline{\underline{36}} \quad (78)$$

$$I_{10} = 0 \quad (79)$$

$$\underline{\underline{I_{11}}} = D_{12} = \underline{\underline{101}} \quad (80)$$

- c) Sikkerhetslageret er definert som et minimumslager som alltid skal være på lageret. Vi får dermed følgende føring for sikkerhetslageret:

$$I_t \geq SS \quad \text{for alle } t = 1, 2, \dots, 12 \quad (81)$$

Siden sikkerhetslageret ligger som et *ubrukt* lager i bunn, vil ikke dette lageret påvirke i hvilke måneder vi har produksjon, siden kostnaden er fordelt likt på alle månedene. Vi får dermed samme verdier på  $Y_t$ -variablene som i oppgave 4b.

Sikkerhetslageret produseres dermed opp i *første* periode og lagres over helt til måned 12.<sup>2</sup>

Nye optimale løsninger  $Y'_t$ ,  $X'_t$  og  $I'_t$  blir dermed:

$$Y'_t = Y_t \quad t=2, \dots, 12 \quad (82)$$

$$X'_1 = X_1 + SS \quad (83)$$

$$X'_t = X_t \quad t=2, \dots, 12 \quad (84)$$

$$I'_t = I_t + SS \quad t=2, \dots, 11 \quad (85)$$

■

Tillegg: (ikke nødvendig for å få full score)

Den nye optimale kostnaden  $C'^*$  kan også enkelt skrives som funksjon av den gamle  $C^*$ :

$$C'^* = C^* + 12HSS \quad (86)$$

---

<sup>2</sup>Denne forklaringen hadde vært nok i besvarelsen, sammen med likn. (82) - (85). Vi har bare fylt på med litt ekstra begrunnelse for helhetens skyld.

# Hovedeksamen 2018

# LØSNING: Eksamen mai 2018

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, vår 2018

## Oppgave 1: ( prognostisering, 25 % )

- a) Prognosen  $F_{13}$  regnes ut ved den skrittvisе formelen for eksponensiell glatting. Siden vi har oppgitt  $F_{11}$ , kan vi starte beregningene for  $F_{12}$ :

$$F_{12} = \theta F_{11} + (1 - \theta)X_{11} \quad (1)$$

$$= 0.8 \cdot 51.9 + 0.2 \cdot 48 \quad (2)$$

$$= 51.1 \quad (3)$$

Deretter beregner vi prognosen  $F_{13}$ :

$$\underline{\underline{F_{13}}} = \theta F_{12} + (1 - \theta)X_{12} \quad (4)$$

$$= 0.8 \cdot 51.1 + 0.2 \cdot 1 \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{41.1}} \quad (6)$$

- b) Eksponensiell glatting har følgende fordeler:

- Vi kan velge mellom et spekter av verdier for glattingsparameteren, noe som gir metoden stor fleksibilitet.
- Metoden bruker alle historiske data.
- Metoden vektlegger historiske data forskjellig, hvor gamle data vektlegges eksponensielt mindre enn nye.

- c) Vi bruker formelen for  $RMSE$ :

$$\underline{\underline{RMSE}} = \sqrt{MSE} \quad (7)$$

$$= \sqrt{2723.5} \quad (8)$$

$$= \underline{\underline{52 \text{ LED-armaturer}}} \quad (9)$$

- d) Siden  $MSE$  opphøyer feilene i annen, vil store avvik straffes mer enn små. Dette er noe Glamox ønsker siden de store avvikene har størst sannsynlighet for å ikke bli levert innen 24-timers fristen for A-varene.
- e) Denne oppgaven handler om å argumentere for hvordan Glamox kan levere denne levere store ordrer uten å forringe kundens forventning om levering innen 24-timer.

### Argumenter

- Store ordrer antyder store kunder, som bestiller flere produkter per ordre. Dersom bare *en* av disse andre produktene er en B eller C vare, så utvides leveringstiden fra 24 timer til enten 5 eller 10 dager hhv. Det er dermed stor sannsynlighet for at den faktiske leveringstiden ikke er 24 timer. Dermed er problemet løst.
- Dersom en stor ordre ikke kommer inn under punktet ovenfor, lener vi oss på informasjonen om at produksjonen har svært stor kapasitet. Vi kan dermed argumentere for at produksjonen har mulighet for å gjøre hasteordrer ganske effektivt. Selv om kanskje ikke 24 timer kan opprettholdes, kan Glamox dermed opplyse allerede ved tilbudsfasen at her blir leveringstiden noe lengre - men ikke mye lengre. Det er da sannsynlig at kunden ikke ser på dette som et stort problem.



Oppgave 2: ( EOQ, 25 % )

a) Vi regner ut  $X^*$  ved hjelp av EOQ-formelen:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2SD}{H}} \quad (10)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 700}{100}} \quad (11)$$

$$= \underline{\underline{118.3}} \quad (12)$$

Optimal seriestørrelse er dermed  $X^* = 118$  LED-armaturer.

b) Den optimale omløpstiden  $O^*$  er gitt ved:

$$\underline{\underline{O^*}} = \frac{X^*}{D} \quad (13)$$

$$= \frac{118}{700} \quad (14)$$

$$= \underline{\underline{0.169}} \quad (15)$$

Optimal omløpstid er dermed  $O^* = 0.169$  år, dvs  $O^* = 0.169 \cdot 52 = 8.1$  uker.

- c) Optimale lager -og omstillingskostnader er gitt ved:<sup>1</sup>

$$\underline{\underline{C^*}} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \quad (16)$$

$$= HX^* \quad (17)$$

$$= 100 \cdot 118 \quad (18)$$

$$= \underline{\underline{11\,800}} \quad (19)$$

Optimale lager -og omstillingskostnader er dermed  $C^* = 11\,800$  kroner i året.

- d) Sikkerhetslageret  $SS$  er gitt ved:

$$\underline{\underline{SS}} = Z_{99}\sqrt{L}\sigma \quad (20)$$

$$= 2.33 \cdot \sqrt{\frac{2}{52}} \cdot 50 \quad (21)$$

$$= \underline{\underline{22.84}} \quad (22)$$

Et sikkerhetslager på  $SS = 23$  LED-armaturer gir leveringspresisjon på 99%.

---

<sup>1</sup>Overgangen mellom likn. ?? og likn. ??, er kun korrekt for optimal bestillingsmengde  $X^*$  og er kun for å spare tid.

- e) Siden formelen for sikkerhetslageret er gitt ved:

$$SS = Z_{99}\sqrt{L}\sigma \quad (23)$$

ser vi at ved å redusere ledetiden, så reduseres samtidig størrelsen på sikkerhetslageret. Dermed er det fordelaktig å kunne redusere ledetiden!

■

Oppgave 3: ( Wagner-Whitin, 20 % )

a) Siden

$$P_{10} : C_{10}^* = C_{xxxxxxxx1} = 7\,290 \quad (24)$$

har vi at siste bestilling er optimalt i måned 10. Vi kan derfor via horisontteoremet kutte de 9 første månedene:

$P_{11}$ :

$$C_{11}^* = \min[C_{xxxxxxxx10}, C_{xxxxxxxx1}] \quad (25)$$

$$= \min[ \underline{7\,770}, 8\,290 ] \quad (26)$$

$$= 7\,770 \quad (27)$$

Utrekniner:

$$C_{xxxxxxxx10} = C_{xxxxxxxx1} + 1HD_{11} = 7\,290 + 1 \cdot 10 \cdot 48 = 7\,770 \quad (28)$$

$$C_{xxxxxxxx1} = C_{10}^* + S = 7\,290 + 1\,000 = 8\,290 \quad (29)$$

Subproblem  $P_{11}$  gir at det er optimalt å ha siste bestilling i måned 10.

Vi kan derfor via horisontteoremet kutte alle månedene før måned 10, dvs. vi kan kutte de 9 første månedene, som vi allerede har gjort.

$P_{12}$ :

$$C_{12}^* = \min[ C_{xxxxxxxx100}, C_{xxxxxxxx10}, C_{xxxxxxxx1} ] \quad (30)$$

$$= \min[ 9\,790, \underline{9\,300}, 8\,770 ] \quad (31)$$

$$= 8\,770 \quad (32)$$

Utrekniner:

$$C_{xxxxxxxx100} = C_{xxxxxxxx10} + 2H(D_{12} + I_{12}) = 7\,770 + 2 \cdot 10 \cdot (1 + 100) = 9\,790 \quad (33)$$

$$C_{xxxxxxxx10} = C_{xxxxxxxx1} + 1H(D_{12} + I_{12}) = 8\,290 + 1 \cdot 10 \cdot (1 + 100) = 9\,300 \quad (34)$$

$$C_{xxxxxxxx1} = C_{11}^* + S = 7\,770 + 1\,000 = 8\,770 \quad (35)$$

Optimale kostnader er dermed  $C^* = C_{12}^* = 8\,770$  kroner.

b) Vi starter bakfra og jobber oss frem til løsningen:

- $C_{xxxxxxxxx1}$ , siden siste bestilling skjer i måned 12  $\rightarrow$  delproblem 11.
- $C_{xxxxxxxx101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 10 for delproblem 11  $\rightarrow$  delproblem 9.
- $C_{xxxxx100101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 7 for delproblem 9  $\rightarrow$  delproblem 6.
- $C_{xxx10100101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 5 for delproblem 6  $\rightarrow$  delproblem 4.
- $C_{xx1001010101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 3 for delproblem 4  $\rightarrow$  delproblem 2.
- $C_{x11001010101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 2 for delproblem 2  $\rightarrow$  delproblem 1.
- $C_{111001010101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 1 for delproblem 1.

Bestillingsplanen: ( $Y_t$ -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (36)$$

$$Y_2 = 1 \quad (37)$$

$$Y_3 = 1 \quad (38)$$

$$Y_4 = 0 \quad (39)$$

$$Y_5 = 1 \quad (40)$$

$$Y_6 = 0 \quad (41)$$

$$Y_7 = 1 \quad (42)$$

$$Y_8 = 0 \quad (43)$$

$$Y_9 = 0 \quad (44)$$

$$Y_{10} = 1 \quad (45)$$

$$Y_{11} = 0 \quad (46)$$

$$Y_{12} = 1 \quad (47)$$

Produksjonsmengder: ( $X_t$ -variablene)

Vi finner  $X_t$ -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 = 133 - 100 = \underline{\underline{33}} \quad (48)$$

$$\underline{\underline{X_2}} = D_2 = \underline{\underline{137}} \quad (49)$$

$$\underline{\underline{X_3}} = D_3 + D_4 = 142 + 58 = \underline{\underline{200}} \quad (50)$$

$$X_4 = 0 \quad (51)$$

$$\underline{\underline{X_5}} = D_5 + D_6 = 41 + 39 = \underline{\underline{80}} \quad (52)$$

$$X_6 = 0 \quad (53)$$

$$\underline{\underline{X_7}} = D_7 + D_8 + d_9 = 34 + 28 + 2 = \underline{\underline{64}} \quad (54)$$

$$X_8 = 0 \quad (55)$$

$$X_9 = 0 \quad (56)$$

$$\underline{\underline{X_{10}}} = D_{10} + D_{11} = 36 + 48 = \underline{\underline{84}} \quad (57)$$

$$X_{11} = 0 \quad (58)$$

$$\underline{\underline{X_{12}}} = D_{12} + I_{12} = 1 + 100 = \underline{\underline{101}} \quad (59)$$

Lagermengder: ( $I_t$ -variablene)

Fra  $X_t$ -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$I_1 = 0 \quad (60)$$

$$I_2 = 0 \quad (61)$$

$$\underline{\underline{I_3}} = D_4 = 58 = \underline{\underline{58}} \quad (62)$$

$$I_4 = 0 \quad (63)$$

$$\underline{\underline{I_5}} = D_6 = \underline{\underline{39}} \quad (64)$$

$$I_6 = 0 \quad (65)$$

$$\underline{\underline{I_7}} = D_8 + D_9 + D_{10} = 28 + 2 + 36 = \underline{\underline{30}} \quad (66)$$

$$\underline{\underline{I_8}} = D_9 = \underline{\underline{2}} \quad (67)$$

$$I_9 = 0 \quad (68)$$

$$\underline{\underline{I_{10}}} = D_{11} = \underline{\underline{48}} \quad (69)$$

$$I_{11} = 0 \quad (70)$$

- c) *Dominante produksjonsplaner* betyr at når vi først bestiller i en periode, så er det optimalt å bestille kun *hele* etterspørselsbehov.



Oppgave 4: ( Sekvensiering, 20 % )

- a) Makespan er *tidspunktet* for siste ferdigstilte jobb.
- b) Makespan er aktuelt for Glamox siden de er typisk opptatt av høy kapasitetsutnyttelse. Makespan *presser* alle operasjonene så tett sammen som mulig, og dermed blir kapasitetsutnyttelsen høy.
- c) Vi må regne ut makespan for to tilfeller: A før B eller B før A.

A før B:

Maskinering:

$$\text{Sluttidspunkt serie A} = \text{setup A} + \text{bearbeiding A} \quad (71)$$

$$= 0.5 + 3 = 3.5 \quad (72)$$

$$\text{Sluttidspunkt serie B} = \text{slutt A} + \text{setup B} + \text{bearbeiding B} \quad (73)$$

$$= 3.5 + 0.3 + 4 = 7.8 \quad (74)$$

Montering:

$$\text{Sluttidspunkt serie A} = \text{slutt maskinering A} + \text{setup A} + \text{bearbeiding A} \quad (75)$$

$$= 3.5 + 0.4 + 5 = 8.9 \quad (76)$$

$$\text{Sluttidspunkt serie B} = \text{slutt montering A} + \text{setup B} + \text{bearbeiding B} \quad (77)$$

$$= 8.9 + 1 + 2 = 11.9 \quad (78)$$

Makespan = 11.9 timer

B før A:

Maskinering:

$$\text{Sluttidspunkt serie B} = \text{setup B} + \text{bearbeiding B} \quad (79)$$

$$= 0.3 + 4 = 4.3 \quad (80)$$

$$\text{Sluttidspunkt serie A} = \text{slutt B} + \text{setup A} + \text{bearbeiding A} \quad (81)$$

$$= 4.3 + 0.5 + 3 = 7.8 \quad (82)$$

Montering:

$$\text{Sluttidspunkt serie B} = \text{slutt maskinering B} + \text{setup B} + \text{bearbeiding B} \quad (83)$$

$$= 4.3 + 1 + 2 = 7.3 \quad (84)$$

$$\text{Sluttidspunkt serie A} = \text{slutt maskinering A} + \text{setup A} + \text{bearbeiding A} \quad (85)$$

$$= 7.8 + 0.4 + 5 = 13.2 \quad (86)$$

Makespan = 13.2 timer

Siden A før B gir lavest makespan, velger vi denne rekkefølgen.

# Kontinuasjonseksamen 2018

# LØSNING: Eksamen sept. 2018

“SCM200 Lager -og Produksjonsstyring”, høst 2018

## Oppgave 1: ( prognostisering, 25 % )

- a) Prognosen  $F_{13}$  regnes ut ved den skrittvisе formelen for eksponensiell glatting. Siden vi har oppgitt  $F_{11}$ , kan vi starte beregningene for  $F_{12}$ :

$$F_{12} = \theta F_{11} + (1 - \theta)X_{11} \quad (1)$$

$$= 0.2 \cdot 30.3 + 0.8 \cdot 48 \quad (2)$$

$$= 44.45 \quad (3)$$

Deretter beregner vi prognosen  $F_{13}$ :

$$\underline{F_{13}} = \theta F_{12} + (1 - \theta)X_{12} \quad (4)$$

$$= 0.2 \cdot 44.45 + 0.8 \cdot 15 \quad (5)$$

$$= \underline{20.9} \quad (6)$$

- b) Eksponensiell glatting har følgende fordeler:

- Vi kan velge mellom et spekter av verdier for glattingsparameteren, noe som gir metoden stor fleksibilitet.
- Metoden bruker alle historiske data.
- Metoden vektlegger historiske data forskjellig, hvor gamle data vektlegges eksponensielt mindre enn nye.

- c) En glattingsparameter på 0.2 medfører *lav* glatting, dvs at metoden vektlegger den siste observasjonen mye mer enn historikken. Datasettet til Glamox varierer ganske kraftig fra måned til måne. Vi vil derfor få en prognose som hopper fra høyt til lavt hele tiden. Denne ”nervøsiteten” vil gjenspeiles i produksjonen, som får forskjellige seriestørrelser fra måned til måned. Glamox ønsker å ha en stødig produksjon på 14 dager mellom hver serie. Valget av glattingsparameter 0.2 er derfor ugunstig for Glamox.

- d) Vi bruker formelen for *RMSE*:

$$\underline{\underline{RMSE}} = \sqrt{MSE} \quad (7)$$

$$= \sqrt{1090} \quad (8)$$

$$= \underline{\underline{33 \text{ LED-armaturer}}} \quad (9)$$

- e) Siden *MSE* opphøyer feilene i annen, vil store avvik straffes mer enn små i forhold til *MAD*. *MAD* tar kun absoluttverdien av feilen. Dette er noe Glamox ønsker siden de store avvikene har størst sannsynlighet for å ikke bli levert innen 24-timers fristen for A-varene.

Oppgave 2: ( EOQ, 25 % )

a) Vi regner ut  $X^*$  ved hjelp av EOQ-formelen:

$$\underline{\underline{X^*}} = \sqrt{\frac{2SD}{H}} \quad (10)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1200 \cdot 800}{90}} \quad (11)$$

$$= \underline{\underline{146.059}} \quad (12)$$

Optimal seriestørrelse er dermed  $X^* = 146$  LED-armaturer.

b) Den optimale omløpstiden  $O^*$  er gitt ved:

$$\underline{\underline{O^*}} = \frac{X^*}{D} \quad (13)$$

$$= \frac{146}{800} \quad (14)$$

$$= \underline{\underline{0.1825}} \quad (15)$$

Optimal omløpstid er dermed  $O^* = 0.1825$  år, dvs  $O^* = 0.1825 \cdot 52 = 8.8$  uker.

- c) Optimale lager -og omstillingskostnader er gitt ved:<sup>1</sup>

$$\underline{\underline{C^*}} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \quad (16)$$

$$= HX^* \quad (17)$$

$$= 90 \cdot 146 \quad (18)$$

$$= \underline{\underline{13\ 140}} \quad (19)$$

Optimale lager -og omstillingskostnader er dermed  $C^* = 13\ 140$  kroner i året.

- d) Sikkerhetslageret  $SS$  er gitt ved:

$$\underline{\underline{SS}} = Z_{99}\sqrt{L}\sigma \quad (20)$$

$$= 2.33 \cdot \sqrt{\frac{2}{52}} \cdot 80 \quad (21)$$

$$= \underline{\underline{36.55}} \quad (22)$$

Et sikkerhetslager på  $SS = 37$  LED-armaturer gir ledetidspresisjon på 99%.

---

<sup>1</sup>Overgangen mellom likn. 16 og likn. 17, er kun korrekt for optimal bestillingsmengde  $X^*$  og er kun for å spare tid.

e) Siden formelen for sikkerhetslageret er gitt ved:

$$SS = Z_{99}\sqrt{L}\sigma \quad (23)$$

ser vi at sikkerhetslageret kan reduseres på følgende måter:

- Redusere sikkerhetsgraden  $Z_{99}$ . Sannsynligheten for å gå tomt på lager under ledetiden er da nødvendigvis høyere.
- Redusere ledetiden  $L$ . Dette forutsetter at Glamox har en raskere produksjon/innkjøp.
- Redusere standardavviket  $\sigma$ . Glamox kan, gjennom f.eks. å forbedre prognosene sine, redusere standardavviket. En annen strategi er å prøve, gjennom ulike markedstiltak, å påvirke kundene slik at de blir mer stabile.

■

Oppgave 3: ( Wagner-Whitin, 20 % )

a) Siden

$$P_{10} : C_{10}^* = C_{xxxxxxxx1} = 7\,290 \quad (24)$$

har vi at siste bestilling er optimalt i måned 10. Vi kan derfor via horisontteoremet kutte de 9 første månedene:

$P_{11}$ :

$$C_{11}^* = \min[C_{xxxxxxxx10}, C_{xxxxxxxx1}] \quad (25)$$

$$= \min[ \underline{7\,770}, 8\,290 ] \quad (26)$$

$$= 7\,770 \quad (27)$$

Utrekniner:

$$C_{xxxxxxxx10} = C_{xxxxxxxx1} + 1HD_{11} = 7\,290 + 1 \cdot 10 \cdot 48 = 7\,770 \quad (28)$$

$$C_{xxxxxxxx1} = C_{10}^* + S = 7\,290 + 1\,000 = 8\,290 \quad (29)$$

Subproblem  $P_{11}$  gir at det er optimalt å ha siste bestilling i måned 10.

Vi kan derfor via horisontteoremet kutte alle månedene før måned 10, dvs. vi kan kutte de 9 første månedene, som vi allerede har gjort.

$P_{12}$ :

$$C_{12}^* = \min[ C_{xxxxxxxx100}, C_{xxxxxxxx10}, C_{xxxxxxxx1} ] \quad (30)$$

$$= \min[ 9\,790, \underline{9\,300}, 8\,770 ] \quad (31)$$

$$= 8\,770 \quad (32)$$

Utrekniner:

$$C_{xxxxxxxx100} = C_{xxxxxxxx10} + 2H(D_{12} + I_{12}) = 7\,770 + 2 \cdot 10 \cdot (1 + 100) = 9\,790 \quad (33)$$

$$C_{xxxxxxxx10} = C_{xxxxxxxx1} + 1H(D_{12} + I_{12}) = 8\,290 + 1 \cdot 10 \cdot (1 + 100) = 9\,300 \quad (34)$$

$$C_{xxxxxxxx1} = C_{11}^* + S = 7\,770 + 1\,000 = 8\,770 \quad (35)$$

Optimale kostnader er dermed  $C^* = C_{12}^* = 8\,770$  kroner.

b) Vi starter bakfra og jobber oss frem til løsningen:

- $C_{xxxxxxxxx1}$ , siden siste bestilling skjer i måned 12  $\rightarrow$  delproblem 11.
- $C_{xxxxxxxx101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 10 for delproblem 11  $\rightarrow$  delproblem 9.
- $C_{xxxxx100101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 7 for delproblem 9  $\rightarrow$  delproblem 6.
- $C_{xxx10100101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 5 for delproblem 6  $\rightarrow$  delproblem 4.
- $C_{xx1001010101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 3 for delproblem 4  $\rightarrow$  delproblem 2.
- $C_{x11001010101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 2 for delproblem 2  $\rightarrow$  delproblem 1.
- $C_{111001010101}$ , siden siste bestilling skjer i måned 1 for delproblem 1.

Bestillingsplanen: ( $Y_t$ -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (36)$$

$$Y_2 = 1 \quad (37)$$

$$Y_3 = 1 \quad (38)$$

$$Y_4 = 0 \quad (39)$$

$$Y_5 = 1 \quad (40)$$

$$Y_6 = 0 \quad (41)$$

$$Y_7 = 1 \quad (42)$$

$$Y_8 = 0 \quad (43)$$

$$Y_9 = 0 \quad (44)$$

$$Y_{10} = 1 \quad (45)$$

$$Y_{11} = 0 \quad (46)$$

$$Y_{12} = 1 \quad (47)$$

Produksjonsmengder: ( $X_t$ -variablene)

Vi finner  $X_t$ -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 = 133 - 100 = \underline{\underline{33}} \quad (48)$$

$$\underline{\underline{X_2}} = D_2 = \underline{\underline{137}} \quad (49)$$

$$\underline{\underline{X_3}} = D_3 + D_4 = 142 + 58 = \underline{\underline{200}} \quad (50)$$

$$X_4 = 0 \quad (51)$$

$$\underline{\underline{X_5}} = D_5 + D_6 = 41 + 39 = \underline{\underline{80}} \quad (52)$$

$$X_6 = 0 \quad (53)$$

$$\underline{\underline{X_7}} = D_7 + D_8 + d_9 = 34 + 28 + 2 = \underline{\underline{64}} \quad (54)$$

$$X_8 = 0 \quad (55)$$

$$X_9 = 0 \quad (56)$$

$$\underline{\underline{X_{10}}} = D_{10} + D_{11} = 36 + 48 = \underline{\underline{84}} \quad (57)$$

$$X_{11} = 0 \quad (58)$$

$$\underline{\underline{X_{12}}} = D_{12} + I_{12} = 1 + 100 = \underline{\underline{101}} \quad (59)$$

Lagermengder: ( $I_t$ -variablene)

Fra  $X_t$ -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$I_1 = 0 \quad (60)$$

$$I_2 = 0 \quad (61)$$

$$\underline{\underline{I_3}} = D_4 = 58 = \underline{\underline{58}} \quad (62)$$

$$I_4 = 0 \quad (63)$$

$$\underline{\underline{I_5}} = D_6 = \underline{\underline{39}} \quad (64)$$

$$I_6 = 0 \quad (65)$$

$$\underline{\underline{I_7}} = D_8 + D_9 + D_{10} = 28 + 2 + 36 = \underline{\underline{30}} \quad (66)$$

$$\underline{\underline{I_8}} = D_9 = \underline{\underline{2}} \quad (67)$$

$$I_9 = 0 \quad (68)$$

$$\underline{\underline{I_{10}}} = D_{11} = \underline{\underline{48}} \quad (69)$$

$$I_{11} = 0 \quad (70)$$

- c) *Dominante produksjonsplaner* betyr at når vi først bestiller i en periode, så er det optimalt å bestille kun *hele* etterspørselsbehov.



Oppgave 4: ( Sekvensiering, 20 % )

- a) Makespan er *tidspunktet* for siste ferdigstilte jobb.
- b) Makespan er aktuelt for Glamox siden de er typisk opptatt av høy kapasitetsutnyttelse. Makespan *presser* alle operasjonene så tett sammen som mulig, og dermed blir kapasitetsutnyttelsen høy.
- c) Vi må regne ut makespan for to tilfeller: A før B eller B før A.

A før B:

Maskinering:

$$\text{Sluttidspunkt serie A} = \text{setup A} + \text{bearbeiding A} \quad (71)$$

$$= 0.5 + 3 = 3.5 \quad (72)$$

$$\text{Sluttidspunkt serie B} = \text{slutt A} + \text{setup B} + \text{bearbeiding B} \quad (73)$$

$$= 3.5 + 0.3 + 4 = 7.8 \quad (74)$$

Montering:

$$\text{Sluttidspunkt serie A} = \text{slutt maskinering A} + \text{setup A} + \text{bearbeiding A} \quad (75)$$

$$= 3.5 + 0.4 + 5 = 8.9 \quad (76)$$

$$\text{Sluttidspunkt serie B} = \text{slutt montering A} + \text{setup B} + \text{bearbeiding B} \quad (77)$$

$$= 8.9 + 1 + 2 = 11.9 \quad (78)$$

Makespan = 11.9 timer

B før A:

Maskinering:

$$\text{Sluttidspunkt serie B} = \text{setup B} + \text{bearbeiding B} \quad (79)$$

$$= 0.3 + 4 = 4.3 \quad (80)$$

$$\text{Sluttidspunkt serie A} = \text{slutt B} + \text{setup A} + \text{bearbeiding A} \quad (81)$$

$$= 4.3 + 0.5 + 3 = 7.8 \quad (82)$$

Montering:

$$\text{Sluttidspunkt serie B} = \text{slutt maskinering B} + \text{setup B} + \text{bearbeiding B} \quad (83)$$

$$= 4.3 + 1 + 2 = 7.3 \quad (84)$$

$$\text{Sluttidspunkt serie A} = \text{slutt maskinering A} + \text{setup A} + \text{bearbeiding A} \quad (85)$$

$$= 7.8 + 0.4 + 5 = 13.2 \quad (86)$$

Makespan = 13.2 timer

Siden A før B gir lavest makespan, velger vi denne rekkefølgen.

# Testeksamen 2019

# LØSNING: **TEST**eksamen mai 2019

“SCM200 Lager- og Produksjonsstyring”, vår 2019

Versjon 02

Oppgave 1: ( prognostisering, **25 %** )

- a) Eksponentiell glatting,  $ES(\theta)$ , er en metode som er hensiktsemssig å bruke for å lage prognoser for data som følger et tilfeldig mønster.

Som vi ser fra figur 4 i oppgaveteksten, de dataene  $X_t$  følger et tilfeldig mønster. <sup>1</sup>

Dermed er  $ES(\theta = 0.7)$  er god prognosemetode i denne sammenheng.

- b) Bruker  $ES(\theta)$ , eksponentiell glatting, for å finne de historiske prognosene  $F_t$  tilhørende dataene  $X_t$ :

Siden vi har oppgitt  $F_9 = 6.33$  og  $X_9 = 8$ , kan vi regne ut for  $F_{10}$ :

$$\underline{F_{10}} = \theta F_9 + (1 - \theta)X_9 \quad (1)$$

$$= 0.7 \cdot 6.33 + (1 - 0.7) \cdot 8 \quad (2)$$

$$= \underline{6.83} \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Skretting har også valgt en relativt høy glattingsparameter ( $\theta = 0.7$ ). En høy glattingsparameter gjør at store endringer i salgene glattes ut.

Prognosen  $F_{11}$ :

$$\underline{\underline{F_{11}}} = \theta F_{10} + (1 - \theta)X_{10} \quad (4)$$

$$= 0.7 \cdot 6.83 + (1 - 0.7) \cdot 9 \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{7.48}} \quad (6)$$

Prognosen  $F_{12}$ :

$$\underline{\underline{F_{12}}} = \theta F_{11} + (1 - \theta)X_{11} \quad (7)$$

$$= 0.7 \cdot 7.48 + (1 - 0.7) \cdot 5 \quad (8)$$

$$= \underline{\underline{6.73}} \quad (9)$$

- c) Gjennomsnittlig absolutt avvik,  $MAD$ , er definert ved:

$$MAD = \frac{1}{T - s + 1} \sum_{t=s}^T |E_t| \quad (10)$$

hvor

$$E_t = X_t - F_t \quad (11)$$

I vårt tilfelle er  $T = 12$  og  $s = 2$ .

Med eksponensiell glatting  $ES(\theta = 0.7)$  for prognosene  $F_2, \dots, F_{12}$  fra oppgaveteksten samt lign.(3), (6) og (9) så får vi:

$$\underline{\underline{MAD}} = \frac{1}{11} \sum_{t=2}^{12} |E_t| \quad (12)$$

$$= \frac{1}{11} \left( |E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| + \dots + |E_{12}| \right) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{11} \left( |2| + |-1.6| + |2.88| + |-0.98| \right. \\ &\quad \left. + |3.31| + |-0.68| + |-0.48| + |1.67| \right. \\ &\quad \left. + |9 - 6.83| + |5 - 7.48| + |7 - 6.73| \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$= \underline{\underline{1.68}} \quad (15)$$

■

Oppgave 2: ( aggregert planlegging, 25 % )

a) Indekseringer:

- **familiene** indekseres ved  $i = 1, \dots, 7$
- produksjonslinjene indekseres ved  $j = 1, 2$
- **periodene** indekseres ved  $t = 1, \dots, 3$

Definerer data:<sup>2</sup> <sup>3</sup>

$$D_{it} = \begin{array}{l} \text{etterspørsel (i antall 1000 tonn) av familie } i \text{ i periode } t, \\ \text{hvor } i = 1, \dots, 7 \text{ og } t = 1, \dots, 3 \end{array} \quad (16)$$

$$R_{ij} = \begin{array}{l} \text{bearbeidingstid (timer per 1000 tonn) for familie } i \text{ og linje } j, \\ \text{hvor } i = 1, \dots, 7 \text{ og } j = 1, 2 \end{array} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \text{maksimalt antall timer tilgjengelig per linje per periode} \\ &= 560 \text{ timer per periode per linje} \\ &\text{(samme verdi for begge linjer og alle perioder)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{O} &= \text{maksimalt antall timer overtid tilgjengelig per periode per linje} \\ &= 240 \text{ timer per periode per linje} \\ &\text{(samme verdi for begge linjer og alle perioder)} \end{aligned} \quad (19)$$

$$C_j = \begin{array}{l} \text{kostnad per time overtid for linje } j \\ \text{hvor } j = 1, 2 \end{array} \quad (20)$$

---

<sup>2</sup>Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

<sup>3</sup>Vi har ikke setupkostander her fordi.....

$$\begin{aligned}
H &= \text{lagerkostnad per 1000 tonn per periode per familie} \\
&= 200\,000 \text{ NOK per 1000 tonn per periode per familie}
\end{aligned}
\tag{21}$$

$$\begin{aligned}
I_{i0} &= \text{startlager } (t = 0) \text{ for familie } i, \\
&\text{hvor } i = 1, \dots, 7
\end{aligned}
\tag{22}$$

$$\begin{aligned}
I_{i3} &= \text{sluttlager } (t = 3) \text{ for familie } i, \\
&\text{hvor } i = 1, \dots, 7
\end{aligned}
\tag{23}$$

b) Tre typer variabler:

1) Variabel 1:

Antall 1000 tonn produsert av hver familie per periode:

$$\underline{\underline{X_{ijt} = \text{antall 1000 tonn produsert av familie } i \text{ for linje } j \text{ i periode } t}}} \quad (24)$$

hvor  $i = 1, \dots, 7$ ,  $j = 1, 2$  og  $t = 1, \dots, 3$ .

2) Variabel 2:

Antall timer overtid per periode: (overtid skiller ikke på familier  $i$ )

$$\underline{\underline{O_{jt} = \text{antall timer overtid for linje } j \text{ i periode } t}}} \quad (25)$$

hvor  $j = 1, 2$  og  $t = 1, \dots, 3$ .

3) Variabel 3:

Antall 1000 tonn overlagret fra en periode til neste av hver familie:  
(overtid skiller ikke på produksjonslinjer  $j$ )

$$\underline{\underline{I_{it} = \text{antall 1000 tonn overlagret fra periode } t \text{ til } t + 1 \text{ av familie } i}}} \quad (26)$$

hvor  $i = 1, \dots, 7$  og  $t = 1, \dots, 2$ .<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Legg merke til at  $t = 1, \dots, 2$ , ikke til 3. Ser du hvorfor?

- c) Målfunksjonen  $C$  er gitt ved totale lager- og overtidskostnader hvor vi her har to produksjonslinjer:

$$C = \overbrace{H \sum_{\substack{\textcolor{red}{7} \\ i=1}}^{\text{lagerkostnad}} \sum_{\substack{\textcolor{blue}{2} \\ t=1}}^{\text{overdidskostnad}} I_{i\textcolor{red}{t}}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{\text{2}} \sum_{\substack{\textcolor{blue}{3} \\ t=1}}^{\text{overdidskostnad}} C_j O_{j\textcolor{blue}{t}}} \quad (27)$$


---



---

d) Tre føringer:

1) Føring 1: <sup>5</sup>

Lagerbalansen må være oppfylt:

$$\underline{\underline{I_{it-1} + \sum_{j=1}^2 X_{ijt} - D_{it} = I_{it}}} \quad (28)$$

hvor  $i = 1, \dots, 7$  og  $t = 1, \dots, 3$ .

2) Føring 2:

Maksimal produksjonskapasitet totalt for periode (i antall timer):

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^7 R_{ij} X_{ijt} \leq \bar{R} + \bar{O}}} \quad (29)$$

hvor  $j = 1, 2$  og  $t = 1, \dots, 3$ .

3) Føring 3:

Maksimal overtidskapasitet for hver linje og hver periode (i antall timer):

$$\underline{\underline{O_{jt} \leq \bar{O}}} \quad (30)$$

hvor  $j = 1, 2$  og  $t = 1, \dots, 3$ .

■

---

<sup>5</sup>Vårt problem dreier seg om lager over flere perioder. Derfor må det være en lagerbalanseligning inne i bildet. I testeksamen fra 2017, derimot, var det kun én periode. Da behøves det ingen balanseligning.

Oppgave 3: ( EOQ, 25 % )

a) Optimal ordrestørrelse  $X^*$  via EOQ-formelen:

$$\underline{X^*} = \sqrt{\frac{2SD}{H}} \quad (31)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,000 \cdot 600}{150}} \quad (32)$$

$$= \underline{126.49 \text{ tonn per seriestørrelse}} \quad (33)$$

Optimal seriestørrelse er  $X^* = 126.49$  tonn fisk per seriestørrelse.

Optimale lager- og omstillingskostnader per år er gitt ved: <sup>6</sup>

$$\underline{C^*} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \quad (34)$$

$$= HX^* \quad (35)$$

$$= 150 \cdot 126.49 \quad (36)$$

$$= \underline{18\,974 \text{ NOK per år}} \quad (37)$$

Optimale lager- og omstillingskostnader er dermed  $C^* = 18\,974$  NOK per år.

---

<sup>6</sup>Overgangen mellom lign.(34) og lign.(35) er kun korrekt for optimal bestillingsmengde  $X^*$ . Dette har vi gått gjennom i forelesingene og man behøver ikke å vise alle detaljene her.

b) Den optimale omløpstiden  $O^*$  er gitt ved:

$$\underline{O^*} = \frac{X^*}{D} \quad (38)$$

$$= \frac{126.49}{600} \text{ år} \quad (39)$$

$$= \underline{0.2108 \text{ år}} \quad (40)$$

Optimal omløpstid er dermed  $O^* = 0.2108$  år, dvs  $O^* = 0.2108 \cdot 52 = 11.0$  uker.

c) Sikkerhetslageret  $SS$  med 99 % servicegrad:

$$\underline{SS} = Z_{99} \sqrt{L} \sigma \quad (41)$$

$$= 2.33 \cdot \sqrt{\frac{2}{52}} \cdot 120 \text{ tonn} \quad (42)$$

$$= \underline{54.8 \text{ tonn}} \quad (43)$$

Et sikkerhetslager på  $SS = 54.8 \text{ tonn fisk}$  gir servicegrad på 99 %.

Den årlige kostnaden for dette lageret blir:

$$\underline{\underline{C_{SS}}} = SS \cdot H \quad (44)$$

$$= 54.8 \cdot 150 \text{ NOK per år} \quad (45)$$

$$= \underline{\underline{8\,220 \text{ NOK per år}}} \quad (46)$$

d) Bestillingspunktet  $R_{99}$  :

$$\underline{R_{99}} = DL + SS \quad (47)$$

$$= \left( 600 \cdot \frac{2}{52} + 54.8 \right) \text{ tonn} \quad (48)$$

$$= \underline{77.9 \text{ tonn}} \quad (49)$$

Når lageret har nådd 77.9 tonn fisk så må man legge inn en ny bestilling.

e) Økonomiske konsekvenser:

1) Reduserte kostnader: ( **gevinst** )

a) Dersom servicegraden reduseres, si  $Z' < Z$ , så reduseres også sikkerhetslageret med  $\Delta SS = (Z - Z')\sqrt{L}\sigma$ .  
Tilhørende reduserte lagerkostnader blir da  $\Delta SS \cdot H$ .

b) Med redusert servicegrad kan man også regne med redusert etterspørsel  $D' < D$  pga. misfornøyde kunder.  
Redusert  $D'$  vil gi redusert optimal ordrestørrelse  $X^{*'} = \sqrt{2D'S/H}$ .  
Tilhørende reduserte lagerkostnader blir da  $\Delta C^* = (X^* - X^{*'}) \cdot H$ .

2) Tapt inntekt: ( **tap** )

Men redusert etterspørsel  $D$  gir også tapte inntekter pga. tapt salg. La

$$C_{tap} = \text{kostnaden for å miste en enhet etterspørsel} \quad (50)$$

Tilhørende tapt inntekt er da  $\Delta I = (D - D') \cdot C_{tap}$ .

Konklusjon:

Effektene ovenfor trekker i hver sin retning. Om det er økonomisk lønnsomt å redusere servicegraden må det regnes på. <sup>7</sup>

■

---

<sup>7</sup>Utrekninger er ikke en del av denne oppgaven. Her skal vi kun kvantitativt diskutere de økonomiske konsekvensene.

Oppgave 4: ( -Whitin, 25 % )

a) Wagner-Withins algoritme:

P<sub>1</sub>: Siden  $D_1 = 60 > I_0 = 10$  så må vi ha produksjon i periode 1:

$$C_1^* = S = 3\,000 \quad (51)$$

P<sub>2</sub>:

$$C_2^* = \min [ C_{10}, C_{x1} ] \quad (52)$$

$$= \min [ C_1 + HD_2, C_1^* + S ] \quad (53)$$

$$= \min [ 3\,000 + 30 \cdot 90, 3\,000 + 3\,000 ] \quad (54)$$

$$= \min [ \underline{5\,700}, 6\,000 ] \quad (55)$$

$$= 5\,700 \quad (56)$$

Horisontteoremet kutter ingen perioder.

$P_3$ :

$$C_3^* = \min [ C_{10\textcolor{red}{0}} , C_{x1\textcolor{red}{0}} , C_{xx\textcolor{red}{1}} ] \quad (57)$$

$$= \min [ C_{10} + \textcolor{red}{2}HD_3 , C_{x1} + \textcolor{red}{H}D_3 , C_2^* + \textcolor{red}{S} ] \quad (58)$$

$$= \min [ 5\,700 + \textcolor{red}{2} \cdot \textcolor{red}{30} \cdot \textcolor{red}{40} , 6\,000 + \textcolor{red}{30} \cdot \textcolor{red}{40} , 5\,700 + \textcolor{red}{3\,000} ] \quad (59)$$

$$= \min [ 8\,100 , \underline{7\,200} , 8\,700 ] \quad (60)$$

$$= 7\,200 \quad (61)$$

Horisontteoremet kutter periode 1.

$P_4$ :

$$C_4^* = \min [ C_{x10\textcolor{red}{0}} , C_{xx1\textcolor{red}{0}} , C_{xxx\textcolor{red}{1}} ] \quad (62)$$

$$= \min [ C_{x10} + \textcolor{red}{2}H(D_4 + I_4) , C_{xx1} + \textcolor{red}{H}(D_4 + I_4) , C_3^* + \textcolor{red}{S} ] \quad (63)$$

$$= \min [ 7\,200 + \textcolor{red}{2} \cdot \textcolor{red}{30} \cdot (\textcolor{red}{10} + \textcolor{red}{20}) , 8\,700 + \textcolor{red}{20} \cdot (\textcolor{red}{10} + \textcolor{red}{20}) , 7\,200 + \textcolor{red}{3\,000} ] \quad (64)$$

$$= \min [ \underline{9\,000} , 9\,300 , 10\,200 ] \quad (65)$$

$$= 9\,000 \quad (66)$$

Minimale lager- og omstillingskostnader er 9 000 NOK.

b) Vi starter bakfra og jobber oss frem til løsningen:

- $C_{x100}$ , siden siste bestilling skjer i uke 2  $\rightarrow$  delproblem 1.
- $C_{1100}$ , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 1

Bestillingsplanen: ( $Y_t$ -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (67)$$

$$Y_2 = 1 \quad (68)$$

$$Y_3 = 0 \quad (69)$$

$$Y_4 = 0 \quad (70)$$

Produksjonsmengder: ( $X_t$ -variablene)

Vi finner  $X_t$ -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 = 60 - 10 = \underline{\underline{50}} \quad (71)$$

$$\underline{\underline{X_2}} = D_2 + D_3 + D_4 + I_4 = 90 + 40 + 10 + 20 = \underline{\underline{160}} \quad (72)$$

$$\underline{\underline{X_3}} = \underline{\underline{0}} \quad (73)$$

$$\underline{\underline{X_4}} = \underline{\underline{0}} \quad (74)$$

Lagermengder: ( $I_t$ -variablene)

Fra  $X_t$ -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = 0 \quad (75)$$

$$I_2 = D_3 + D_4 + I_4 = 40 + 10 + 20 = \underline{\underline{70}} \quad (76)$$

$$\underline{\underline{I_3}} = D_4 + I_4 = 10 + 20 = \underline{\underline{30}} \quad (77)$$

- c) Dersom man inkluderer produksjonskapasitet i Wagner-Withins modell, vil Wagner-Withins algoritme ikke generelt gi gyldig optimal løsning.

Årsaken er at teoremet om dominante produksjonsplaner som regel gir perioder med stor produksjon, noe som dermed forårsaker at kapasiteten som regel overskrides.

■

# Hovedeksamen 2019

# LØSNING: Eksamen 10. mai 2019

“SCM200 Lager- og Produksjonsstyring”, vår 2019

Versjon 03

## Oppgave 1: ( prognostisering, 25 % )

- a) Eksponentiell glatting,  $ES(\theta)$ , er en metode som er hensiktsemssig å bruke for å lage prognoser for data som følger et tilfeldig mønster.

Fra Fig.4 i oppgaven ser vi imidlertid at vi har sesongvariasjoner med høye salg i juni.

Skretting har også valgt en relaivt høy glattingsparameter ( $\theta = 0.8$ ). En høy glattingsparameter gjør at store endringer i salgene gattes ut. Dette er ikke en ønsket egenskap ved prognosemetoden siden den da ikke fanger opp effekten av sterke sesongvariasjoner.

Dermed er ikke  $ES(\theta = 0.8)$  er god prognosemetode i denne sammenheng.

- b) Som nevnt i oppgave a): Eksponentiell glatting,  $ES(\theta)$ , er en metode som er hensiktsemssig å bruke for å lage prognoser for data som følger et tilfeldig mønster.

Som nevnt i oppgaveteksten, de transformerte dataene  $Y_t$  følger et tilfeldig mønster.

Dermed er  $ES(\theta = 0.8)$  er god prognosemetode i denne sammenheng.

- c) Bruker  $ES(\theta)$ , eksponentiell glatting, for å finne de historiske prognosene  $G_t$  tilhørende de transformerte dataene  $Y_t$ :

Siden vi har oppgitt  $G_9 = 12.01$ ,  $S_9 = 1.3$  og  $X_9 = 10$ , kan vi regne ut for  $G_{10}$ :

$$\underline{\underline{G_{10}}} = \theta G_9 + (1 - \theta) \overbrace{Y_9}^{= S_9 X_9} \quad (1)$$

$$= 0.8 \cdot 12.01 + (1 - 0.8) \cdot 1.3 \cdot 10 \quad (2)$$

$$= \underline{\underline{12.21}} \quad (3)$$

Prognosen  $G_{11}$ :

$$\underline{\underline{G_{11}}} = \theta G_{10} + (1 - \theta) \overbrace{Y_{10}}^{= S_{10} X_{10}} \quad (4)$$

$$= 0.8 \cdot 11.61 + (1 - 0.8) \cdot 1.3 \cdot 12 \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{12.89}} \quad (6)$$

Prognosen  $G_{12}$ :

$$\underline{\underline{G_{12}}} = \theta G_{11} + (1 - \theta) \overbrace{Y_{11}}^{= S_{11} X_{11}} \quad (7)$$

$$= 0.8 \cdot 11.69 + (1 - 0.8) \cdot 1.4 \cdot 11 \quad (8)$$

$$= \underline{\underline{13.39}} \quad (9)$$

d) Transformasjonen

$$Y_t = S_t X_t \quad (10)$$

kan løses med hensyn på  $X_t$ :

$$X_t = \frac{Y_t}{S_t} \quad (11)$$

hvor

$$X_t = \text{salg (sesongvariasjoner) med tilhørende prognoser } F_t \quad (12)$$

$$Y_t = \text{transformert salg (tilfeldig mønster) med tilhørende prognoser } G_t \quad (13)$$

Sammenhengen mellom prognosene  $F_t$  og  $G_t$  blir dermed:

$$\boxed{F_t = \frac{G_t}{S_t} \quad (14)}$$

De ikke-transformerte  $F_t$ -prognosene blir dermed:

$$\underline{\underline{F_{10}}} = \frac{G_{10}}{S_{10}} = \frac{12.21}{1.3} = \underline{\underline{9.39}} \quad (15)$$

$$\underline{\underline{F_{11}}} = \frac{G_{11}}{S_{11}} = \frac{12.89}{1.4} = \underline{\underline{9.21}} \quad (16)$$

$$\underline{\underline{F_{12}}} = \frac{G_{12}}{S_{12}} = \frac{13.39}{1.5} = \underline{\underline{8.93}} \quad (17)$$

■

**Oppgave 2:** ( aggregert planlegging, 25 % )

a) Antaller timer som trengs:

$$\text{antall timer behov} = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 7x_6 \quad (18)$$

$$= \left( 6 \cdot 32 + 4 \cdot 75 + 5 \cdot 72 + 6 \cdot 36 + 5 \cdot 180 + 7 \cdot 25 \right) \text{ timer}$$

$$= \underline{2143 \text{ timer}} \quad (19)$$

Antall timer tilgjengelig:

$$\underline{\text{antall timer tilgjengelig}} = 6 \cdot 280 \text{ timer} = \underline{1680 \text{ timer}} \quad (20)$$

dvs. fabrikken har ikke nok kapasitet til å tilfredsstille etterspørselen.

b) Indekseringer:

- **familiene** indekseres ved  $i = 1, \dots, 6$
- **periodene** indekseres ved  $t = 1, \dots, 6$

Definerer data:<sup>1</sup>

$$D_{it} = \text{etterspørsel (i antall 1000 tonn) av familie } i \text{ i periode } t, \quad (21)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$  og  $t = 1, \dots, 6$

$$R_i = \text{bearbeidingstid (timer per 1000 tonn) for familie } i, \quad (22)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \text{maksimalt antall timer tilgjengelig per periode} \\ &= 280 \text{ timer per periode} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{O} &= \text{maksimalt antall timer overtid tilgjengelig per periode} \\ &= 120 \text{ timer per periode} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} C &= \text{kostnad per time overtid} \\ &= 5\,000 \text{ NOK per time} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} H &= \text{lagerkostnad per 1000 tonn per periode per familie} \\ &= 100\,000 \text{ NOK per 1000 tonn per periode per familie} \end{aligned} \quad (26)$$

$$I_{i0} = \text{startslager (} t = 0 \text{) for familie } i, \quad (27)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$

$$I_{i6} = \text{sluttlager (} t = 6 \text{) for familie } i, \quad (28)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$

---

<sup>1</sup>Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

c) Tre typer variabler:

1) Variabel 1:

Antall 1000 tonn produsert av hver familie per periode:

$$X_{it} = \text{antall 1000 tonn produsert av familie } i \text{ i periode } t \quad (29)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$  og  $t = 1, \dots, 6$ .

2) Variabel 2:

Antall timer overtid per periode:

$$O_t = \text{antall timer overtid i periode } t \quad (30)$$

hvor  $t = 1, \dots, 6$ .

3) Variabel 3:

Antall 1000 tonn overlagret fra en periode til neste av hver familie:

$$I_{it} = \text{antall 1000 tonn overlagret fra periode } t \text{ til } t + 1 \text{ av familie } i \quad (31)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$  og  $t = 1, \dots, 5$ .

- d) Målfunksjonen  $C$  er gitt ved totale lager- og overtidskostnader:

$$C_{tot} = \overbrace{H \sum_{i=1}^6 \sum_{t=1}^5 I_{it}}^{\text{lagerkostnad}} + \overbrace{C \sum_{t=1}^6 O_t}^{\text{overtidskostnad}} \quad (32)$$

- e) Tre føringer:

- 1) Føring 1:<sup>2</sup>

Lagerbalansen må være oppfylt:

$$I_{it-1} + X_{it} - D_{it} = I_{it} \quad (33)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$  og  $t = 1, \dots, 6$ .

- 2) Føring 2:

Maksimal produksjonskapasitet totalt for hvert periode (i antall timer):

$$\sum_{i=1}^6 R_i X_{it} \leq \bar{R} + O_t \quad (34)$$

hvor  $t = 1, \dots, 6$ .

---

<sup>2</sup>Vårt problem dreier seg om lager over flere perioder. Derfor må det være en lagerbalanseligning inne i bildet. I testeksamen fra 2017, derimot, var det kun én periode. Da behøves det ingen balanseligning.

2) Føring 3:

Maksimalt antall overtidstimer per periode (i antall timer):

$$O_t \leq \overline{O} \tag{35}$$

hvor  $t = 1, \dots, 6$ .

■

Oppgave 3: ( EOQ, 25 % )

- a) *EOQ*-formelen er relativt lite følsom for endringer i parametrene. Derfor gir den en god tilnærming til optimal seriestørrelse selv om forutsetningene til formelen kun er tilnærmet oppfylt.

- b) Vi regner ut  $X^*$  ved hjelp av EOQ-formelen:

$$\underline{X^*} = \sqrt{\frac{2SD}{H}} \quad (36)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 5\,000 \cdot 2\,300}{200}} \quad (37)$$

$$= \underline{339.12 \text{ tonn per seriestørrelse}} \quad (38)$$

Optimal seriestørrelse er  $X^* = 339.12$  tonn fisk per seriestørrelse.

Optimale lager- og omstillingskostnader per år er gitt ved: <sup>3</sup>

$$\underline{C^*} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \quad (39)$$

$$= HX^* \quad (40)$$

$$= 200 \cdot 339.12 \quad (41)$$

$$= \underline{67\,823 \text{ NOK per år}} \quad (42)$$

Optimale lager- og omstillingskostnader er dermed  $C^* = 67\,823$  NOK per år.

---

<sup>3</sup>Overgangen mellom lign.(39) og lign.(40) er kun korrekt for optimal bestillingsmengde  $X^*$ . Dette har vi gått gjennom i forelesingene og man behøver ikke å vise alle detaljene her.

c) Sikkerhetslageret  $SS$  med 99 % servicegrad:

$$\underline{SS} = Z_{99} \sqrt{L} \sigma \quad (43)$$

$$= 2.33 \cdot \sqrt{\frac{3}{52}} \cdot 500 \quad (44)$$

$$= \underline{280 \text{ tonn}} \quad (45)$$

Et sikkerhetslager på  $SS = 280 \text{ tonn fisk}$  gir servicegrad på 99 %.

Den årlige kostnader for dette lageret blir:

$$\underline{\underline{C_{SS}}} = SS \cdot H \quad (46)$$

$$= 280 \cdot 200 \text{ NOK per år} \quad (47)$$

$$= \underline{\underline{55\,965 \text{ NOK per år}}} \quad (48)$$

d) Kostnaden  $C_{tap}$  er bestemt ut fra:

$$\text{gevinst} = \text{tap} \quad (49)$$

Matematisk gir dette: <sup>4</sup>

$$\boxed{\Delta C^* + \Delta C_{SS} = \Delta I} \quad (50)$$

hvor

$$\Delta C^* = \text{redusert lagerkostnad pga. redusert antall optimal ordrestørrelse} \quad (51)$$

$$= (X^* - X^{*'}) H = \left( \sqrt{\frac{2DS}{H}} - \sqrt{\frac{2D'S}{H}} \right) H = \sqrt{2SH}(\sqrt{D} - \sqrt{D'}) \quad (52)$$

$$\Delta C_{SS} = \text{redusert lagerkostnad pga. redusert sikkerhetslager} \quad (53)$$

$$= \Delta SS \cdot H = (Z_{99}\sqrt{L}\sigma - Z_{95}\sqrt{L}\sigma) H = (Z_{99} - Z_{95})\sqrt{L}\sigma H \quad (54)$$

$$\Delta I = \text{tapt inntekt} \quad (55)$$

$$= (D - D')C_{tap} \quad (56)$$

Innsatt i lign.(50):

$$\Delta C^* + \Delta C_{SS} = \Delta I \quad (57)$$

$$\sqrt{2SH}(\sqrt{D} - \sqrt{D'}) \cdot H + (Z_{99} - Z_{95})\sqrt{L}\sigma H = (D - D')C_{tap} \quad (58)$$

---

<sup>4</sup>De matematiske uttrykkene finner du i oppgaveteksten.

Løser mhp.  $C_{tap}$ :

$$C_{tap} = \frac{\sqrt{2SH}(\sqrt{D} - \sqrt{D'}) + (Z_{99} - Z_{95})\sqrt{L}\sigma H}{D - D'} \quad (59)$$

Tall:

$$\underline{C_{tap}} = \frac{\sqrt{2SH}(\sqrt{D} - \sqrt{D'}) + (Z_{99} - Z_{95})\sqrt{L}\sigma H}{D - D'} \quad (60)$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 5000 \cdot 200}(\sqrt{2300} - \sqrt{2100}) + (2.33 - 1.65)\sqrt{\frac{3}{52}}500 \cdot 200}{2300 - 2100} \quad (61)$$

$$= \underline{97.9 \text{ NOK per tonn}} \quad (62)$$

For situasjonen som beskrevet i oppgaven så er kostnaden ved tapt salg  
 $C_{tap} = 97.9 \text{ NOK per tonn}$ .

■

Oppgave 4: ( Wagner-Whitin, 20 % )

a) Wagner-Withins algoritme:

P<sub>1</sub>: Siden  $D_1 = 150 > I_6 = 30$  så må vi ha produksjon i periode 1:

$$C_1^* = S = 4000 \quad (63)$$

P<sub>2</sub>:

$$C_2^* = \min \left[ C_{10}, C_{x1} \right] \quad (64)$$

$$= \min \left[ C_1 + HD_2, C_1^* + S \right] \quad (65)$$

$$= \min \left[ 4000 + 20 \cdot 120, 4000 + 4000 \right] \quad (66)$$

$$= \min \left[ \underline{6400}, 8000 \right] \quad (67)$$

$$= 6400 \quad (68)$$

Horisontteoremet kutter ingen perioder.

$P_3$ :

$$C_3^* = \min \left[ C_{10\mathbf{0}} , C_{x1\mathbf{0}} , C_{xx\mathbf{1}} \right] \quad (69)$$

$$= \min \left[ C_{10} + \mathbf{2HD_3} , C_{x1} + \mathbf{HD_3} , C_2^* + \mathbf{S} \right] \quad (70)$$

$$= \min \left[ 6\,400 + \mathbf{2 \cdot 20 \cdot 180} , 8\,000 + \mathbf{20 \cdot 180} , 6\,400 + \mathbf{4\,000} \right] \quad (71)$$

$$= \min \left[ 13\,600 , 11\,600 , \underline{10\,400} \right] \quad (72)$$

$$= 10\,400 \quad (73)$$

Horisontteoremet kutter periode 1 og 2.

$P_4$ :

$$C_4^* = \min \left[ C_{xx1\mathbf{0}} , C_{xxx\mathbf{1}} \right] \quad (74)$$

$$= \min \left[ C_{xx1} + \mathbf{HD_4} , C_3^* + \mathbf{S} \right] \quad (75)$$

$$= \min \left[ 10\,400 + \mathbf{20 \cdot 110} , 10\,400 + \mathbf{4\,000} \right] \quad (76)$$

$$= \min \left[ \underline{12\,600} , 14\,400 \right] \quad (77)$$

$$= 12\,600 \quad (78)$$

Horisontteoremet kutter ingen nye perioder.

$P_5$ :

$$C_5^* = \min \left[ C_{xx10\mathbf{0}} , C_{xxx1\mathbf{0}} , C_{xxxx\mathbf{1}} \right] \quad (79)$$

$$= \min \left[ C_{xx10} + \mathbf{2HD_5} , C_{xxx1} + \mathbf{HD_5} , C_4^* + \mathbf{S} \right] \quad (80)$$

$$= \min \left[ 12\,600 + \mathbf{2 \cdot 20 \cdot 140} , 14\,400 + \mathbf{20 \cdot 140} , 12\,600 + \mathbf{4\,000} \right] \quad (81)$$

$$= \min \left[ 18\,200 , 17\,200 , \underline{16\,600} \right] \quad (82)$$

$$= 16\,600 \quad (83)$$

Horisontteoremet kutter periode 3 og 4.

$P_6$ :

$$C_6^* = \min \left[ C_{xxxx1\mathbf{0}} , C_{xxxx\mathbf{1}} \right] \quad (84)$$

$$= \min \left[ C_{xxxx1} + \mathbf{H(D_6 + I_6)} , C_5^* + \mathbf{S} \right] \quad (85)$$

$$= \min \left[ 16\,600 + \mathbf{20 \cdot (100 + 30)} , 16\,600 + \mathbf{4\,000} \right] \quad (86)$$

$$= \min \left[ \underline{19\,200} , 20\,600 \right] \quad (87)$$

$$= 19\,200 \quad (88)$$

Minimale lager- og omstillingskostnader er 19 200 NOK.

b) Vi starter bakfra og jobber oss frem til løsningen:

- $C_{xxxx10}$ , siden siste bestilling skjer i uke 5 for delproblem 6  $\rightarrow$  delproblem 4
- $C_{xx1010}$ , siden siste bestilling skjer i uke 3 for delproblem 4  $\rightarrow$  delproblem 2
- $C_{101010}$ , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 2.

Bestillingsplanen: ( $Y_t$ -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (89)$$

$$Y_2 = 0 \quad (90)$$

$$Y_3 = 1 \quad (91)$$

$$Y_4 = 0 \quad (92)$$

$$Y_5 = 1 \quad (93)$$

$$Y_6 = 0 \quad (94)$$

Produksjonsmengder: ( $X_t$ -variablene)

Vi finner  $X_t$ -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 + D_2 - I_0 = 150 + 120 - 100 = \underline{\underline{170}} \quad (95)$$

$$\underline{\underline{X_2}} = \underline{\underline{0}} \quad (96)$$

$$\underline{\underline{X_3}} = D_3 + D_4 = 180 + 110 = \underline{\underline{290}} \quad (97)$$

$$X_4 = 0 \quad (98)$$

$$\underline{\underline{X_5}} = D_5 + D_6 + I_6 = 140 + 100 + 30 = \underline{\underline{270}} \quad (99)$$

$$X_6 = 0 \quad (100)$$

Lagermengder: ( $I_t$ -variablene)

Fra  $X_t$ -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = D_2 = \underline{\underline{120}} \quad (101)$$

$$I_2 = 0 \quad (102)$$

$$\underline{\underline{I_3}} = D_4 = \underline{\underline{110}} \quad (103)$$

$$I_4 = 0 \quad (104)$$

$$\underline{\underline{I_5}} = D_6 + I_6 = 100 + 30 = \underline{\underline{130}} \quad (105)$$

- c) Wagner- Withins modell er en modell hvor antall kombinasjoner vokser som  $2^{NT}$ , hvor  $N$  er antall produkter og  $T$  er antall perioder. Standard programvare vil dermed ikke være i stand til å løse mer realistiske case siden det er så enormt mange kombinasjoner som skal regnes ut.

Wagner-Withins algoritme løser derimot problemet mye mer effektivt, siden den kutter svært mange kombinasjoner som den ikke trenger å beregne. Algoritmen er derfor mer hensiktsmessig å bruke enn standard programvare.



# Kontinuasjonseksamen 2019

# LØSNING: Eksamen 4. sep. 2019

“SCM200 Lager- og Produksjonsstyring”, vår 2019

Versjon 01

## Oppgave 1: ( prognostisering, 25 % )

- a) Eksponentiell glatting,  $ES(\theta)$ , er en metode som er hensiktsemssig å bruke for å lage prognoser for data som følger et tilfeldig mønster.

Som vi ser fra figur 4 i oppgaveteksten, følger alle tre datasettene et tilfeldig mønster. <sup>1</sup>

Dermed er  $ES(\theta = 0.8)$  er passende prognosemetode i denne sammenheng.

- b) Vi bruker den skrittvisse formelen for eksponentiell glatting:

$$F_{112} = \theta F_{111} + (1 - \theta)X_{111} = 0.8 \cdot 38.65 + (1 - 0.8) \cdot 29 = 36.72 \quad (1)$$

$$\underline{\underline{F_{113}}} = \theta F_{112} + (1 - \theta)X_{112} = 0.8 \cdot 36.72 + (1 - 0.8) \cdot 33 = \underline{\underline{35.98}} \quad (2)$$

$$F_{212} = \theta F_{211} + (1 - \theta)X_{211} = 0.8 \cdot 19.22 + (1 - 0.8) \cdot 21 = 19.57 \quad (3)$$

$$\underline{\underline{F_{213}}} = \theta F_{212} + (1 - \theta)X_{212} = 0.8 \cdot 19.57 + (1 - 0.8) \cdot 20 = \underline{\underline{19.66}} \quad (4)$$

$$F_{12} = \theta F_{11} + (1 - \theta)X_{11} = 0.8 \cdot 57.87 + (1 - 0.8) \cdot 50 = 56.30 \quad (5)$$

$$\underline{\underline{F_{13}}} = \theta F_{12} + (1 - \theta)X_{12} = 0.8 \cdot 56.30 + (1 - 0.8) \cdot 53 = \underline{\underline{55.64}} \quad (6)$$

---

<sup>1</sup>Skretting har også valgt en relativt høy glattingsparameter ( $\theta = 0.8$ ). En høy glattingsparameter gjør at store endringer i salgene glattes ut.

c) Vi bruker den oppgitte formelen:

$$\underline{\underline{G_{13}}} = F_{1\textcolor{blue}{13}} + F_{2\textcolor{blue}{13}} = 35.98 + 19.66 = \underline{\underline{55.64}} \quad (7)$$

d) Vi har at:

$$G_{13} = F_{1\textcolor{blue}{13}} + F_{2\textcolor{blue}{13}} \quad (8)$$

$$= (\theta F_{1\textcolor{blue}{12}} + (1 - \theta)X_{1\textcolor{blue}{12}}) + (\theta F_{2\textcolor{blue}{12}} + (1 - \theta)X_{2\textcolor{blue}{12}}) \quad (9)$$

$$= \theta(F_{1\textcolor{blue}{12}} + F_{2\textcolor{blue}{12}}) + (1 - \theta)(X_{1\textcolor{blue}{12}} + X_{2\textcolor{blue}{12}}) \quad (10)$$

$$= \theta G_{12} + (1 - \theta)X_{\textcolor{blue}{12}} \quad (11)$$

Lign.(11) er logisk ekvivalent med ligningen

$$F_{13} = \theta F_{\textcolor{blue}{12}} + (1 - \theta)X_{\textcolor{blue}{12}} \quad (12)$$

det eneste vi har gjort er å omdøpe  $G$  til  $F$ , som viser at metodene er ekvivalente.

■

**Oppgave 2:** ( aggregert planlegging, 25 % )

a) Antaller timer som trengs:

$$\text{antall timer behov} = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 7x_6 \quad (13)$$

$$= \left( 6 \cdot 32 + 4 \cdot 75 + 5 \cdot 72 + 6 \cdot 36 + 5 \cdot 180 + 7 \cdot 25 \right) \text{ timer}$$

$$= \underline{2143 \text{ timer}} \quad (14)$$

Antall timer tilgjengelig:

$$\underline{\text{antall timer tilgjengelig}} = 3 \cdot 280 \text{ timer} = \underline{840 \text{ timer}} \quad (15)$$

dvs. fabrikken har ikke nok kapasitet til å tilfredsstille etterspørselen.

b) Indekseringer:

- **familiene** indekseres ved  $i = 1, \dots, 6$
- **periodene** indekseres ved  $t = 1, \dots, 3$

Definerer data:<sup>2</sup>

$$D_{it} = \text{etterspørsel (i antall 1000 tonn) av familie } i \text{ i periode } t, \quad (16)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$  og  $t = 1, \dots, 3$

$$R_i = \text{bearbeidingstid (timer per 1000 tonn) for familie } i, \quad (17)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$

$$\begin{aligned} \bar{O} &= \text{maksimalt antall tonn som kan outsources per periode} \\ &= 20 \text{ antall tonn periode} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \text{maksimalt antall timer tilgjengelig per periode} \\ &= 280 \text{ timer per periode} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} C &= \text{kostnad per outsourcet tonn} \\ &= 2\,000 \text{ NOK per tonn} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} H &= \text{lagerkostnad per 1000 tonn per periode per familie} \\ &= 100\,000 \text{ NOK per 1000 tonn per periode per familie} \end{aligned} \quad (21)$$

$$I_{i0} = \text{startslager } (t = 0) \text{ for familie } i, \quad (22)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$

$$I_{i6} = \text{sluttlager } (t = 6) \text{ for familie } i, \quad (23)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$

---

<sup>2</sup>Husk at data er størrelsen vi ikke kan påvirke.

c) Tre typer variabler:

1) Variabel 1:

Antall 1000 tonn produsert av hver familie per periode:

$$X_{it} = \text{antall 1000 tonn produsert av familie } i \text{ for periode } t \quad (24)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$  og  $t = 1, \dots, 3$ .

2) Variabel 2:

Antall timer overtid per periode:

$$O_{it} = \text{antall tonn outsourcet av familie } i \text{ for periode } t \quad (25)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$  og  $t = 1, \dots, 3$ .

3) Variabel 3:

Antall 1000 tonn overlagret fra en periode til neste av hver familie:

$$I_{it} = \text{antall 1000 tonn overlagret fra periode } t \text{ til } t + 1 \text{ av familie } i \quad (26)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$  og  $t = 1, \dots, 2$ .

- d) Målfunksjonen  $C$  er gitt ved totale lager- og outsourcingskostnader:

$$C_{tot} = \overbrace{H \sum_{i=1}^6 \sum_{t=1}^2 I_{it}}^{\text{lagerkostnad}} + \overbrace{C \sum_{i=1}^6 \sum_{t=1}^3 O_{it}}^{\text{outsourcingskostnad}} \quad (27)$$

- e) Tre føringar:

- 1) Føring 1:<sup>3</sup>

Lagerbalansen må være oppfylt:

$$I_{it-1} + X_{it} + O_{it} - D_{it} = I_{it} \quad (28)$$

hvor  $i = 1, \dots, 6$  og  $t = 1, \dots, 3$ .

- 2) Føring 2:

Maksimal produksjonskapasitet totalt for hvert periode (i antall timer):

$$\sum_{i=1}^6 R_i X_{it} \leq \bar{R} \quad (29)$$

hvor  $t = 1, \dots, 3$ .

---

<sup>3</sup>Vårt problem dreier seg om lager over flere perioder. Derfor må det være en lagerbalanseligning inne i bildet. I testeksamen fra 2017, derimot, var det kun én periode. Da behøves det ingen balanseligning.

2) Føring 3:

Maksimalt antall tonn outsourcet per periode (i antall timer):

$$\sum_{i=1}^6 O_{it} \leq \overline{O} \quad (30)$$

hvor  $t = 1, \dots, 3$ .

■

Oppgave 3: ( EOQ, 25 % )

- a) Med *total leveranse* mener vi at hele seriestørrelsen kommer på lager *samtidig*, som en enhet. I Skretting sitt tilfelle er ikke denne antagelsen helt oppfylt siden det er rimelig å anta at det legges på lager litt og litt etterhvert som produksjonen går fremover. til formelen kun er tilnærmet oppfylt.

- b) Vi regner ut  $X^*$  ved hjelp av EOQ-formelen:

$$\underline{X^*} = \sqrt{\frac{2SD}{H}} \quad (31)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 5\,000 \cdot 57}{200/12}} \quad (32)$$

$$= \underline{184.93 \text{ tonn per seriestørrelse}} \quad (33)$$

Optimal seriestørrelse er  $X^* = 185$  tonn per seriestørrelse.

Optimale lager- og omstillingskostnader per år er gitt ved: <sup>4</sup>

$$\underline{C^*} = \frac{SD}{X^*} + \frac{HX^*}{2} \quad (34)$$

$$= HX^* \quad (35)$$

$$= 200 \cdot 185 \quad (36)$$

$$= \underline{36\,986 \text{ NOK per år}} \quad (37)$$

Optimale lager- og omstillingskostnader er dermed  $C^* = 37\,000$  NOK per år.

---

<sup>4</sup>Overgangen mellom lign.(34) og lign.(35) er kun korrekt for optimal bestillingsmengde  $X^*$ . Dette har vi gått gjennom i forelesingene og man behøver ikke å vise alle detaljene her.

- c) Den optimale omløpstiden er gitt ved:

$$\underline{\underline{O^*}} = \frac{X^*}{D} = \frac{185}{57} = \underline{\underline{3.24 \text{ måneder}}} \quad (38)$$

- d) Sikkerhetslageret  $SS$  med 99 % servicegrad:

$$\underline{\underline{SS}} = Z_{99} \sqrt{L} \sigma \quad (39)$$

$$= 2.33 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 4.43 \quad (40)$$

$$= \underline{\underline{9 \text{ tonn}}} \quad (41)$$

Et sikkerhetslager på  $\underline{\underline{SS = 9 \text{ tonn}}}$  gir servicegrad på 99 %.

Den årlige kostnader for dette lageret blir:

$$\underline{\underline{C_{SS}}} = SS \cdot H \quad (42)$$

$$= 9 \cdot 200 \text{ NOK per år} \quad (43)$$

$$= \underline{\underline{1800 \text{ NOK per år}}} \quad (44)$$

- e) Bestillingspunktet er gitt ved:

$$\underline{\underline{R}} = LD + SS = \frac{3}{4} \cdot 57 + 9 = \underline{\underline{52 \text{ tonn}}} \quad (45)$$



Oppgave 4: ( Wagner-Whitin, 20 % )

a) Wagner-Withins algoritme:

P<sub>1</sub>: Siden  $D_1 = 140 > I_6 = 30$  så må vi ha produksjon i periode 1:

$$C_1^* = S = 4000 \quad (46)$$

P<sub>2</sub>:

$$C_2^* = \min \left[ C_{10}, C_{x1} \right] \quad (47)$$

$$= \min \left[ C_1 + HD_2, C_1^* + S \right] \quad (48)$$

$$= \min \left[ 4000 + 30 \cdot 120, 4000 + 4000 \right] \quad (49)$$

$$= \min \left[ \underline{7600}, 8000 \right] \quad (50)$$

$$= 7600 \quad (51)$$

Horisontteoremet kutter ingen perioder.

$P_3$ :

$$C_3^* = \min \left[ C_{10\mathbf{0}} , C_{x1\mathbf{0}} , C_{xx\mathbf{1}} \right] \quad (52)$$

$$= \min \left[ C_{10} + \mathbf{2}HD_3 , C_{x1} + \mathbf{H}D_3 , C_2^* + \mathbf{S} \right] \quad (53)$$

$$= \min \left[ 7\,600 + \mathbf{2} \cdot \mathbf{30} \cdot \mathbf{90} , 8\,000 + \mathbf{30} \cdot \mathbf{90} , 7\,600 + \mathbf{4\,000} \right] \quad (54)$$

$$= \min \left[ 13\,000 , \underline{10\,700} , 11\,600 \right] \quad (55)$$

$$= 10\,700 \quad (56)$$

Horisontteoremet kutter periode 1 .

$P_4$ :

$$C_4^* = \min \left[ C_{x10\mathbf{0}} , C_{xx1\mathbf{0}} , C_{xxx\mathbf{1}} \right] \quad (57)$$

$$= \min \left[ C_{x10} + \mathbf{2}HD_4 , C_{xx1} + \mathbf{H}D_4 , C_3^* + \mathbf{S} \right] \quad (58)$$

$$= \min \left[ 10\,700 + \mathbf{2} \cdot \mathbf{30} \cdot \mathbf{170} , 11\,600 + \mathbf{30} \cdot \mathbf{170} , 10\,700 + \mathbf{4\,000} \right] \quad (59)$$

$$= \min \left[ 20\,900 , 16\,700 , \underline{14\,700} \right] \quad (60)$$

$$= 14\,700 \quad (61)$$

Horisontteoremet kutter periode 2 og 3.

$P_5$ :

$$C_5^* = \min \left[ C_{xxx10}, C_{xxxx1} \right] \quad (62)$$

$$= \min \left[ C_{xxx1} + HD_5, C_4^* + S \right] \quad (63)$$

$$= \min [ 14\,700 + 30 \cdot 140, 14\,700 + 4\,000 ] \quad (64)$$

$$= \min \left[ 18\,900, \underline{18\,700} \right] \quad (65)$$

$$= 18\,700 \quad (66)$$

Horisontteoremet kutter periode 4.

$P_6$ :

$$C_6^* = \min \left[ C_{xxxx10}, C_{xxxxx1} \right] \quad (67)$$

$$= \min \left[ C_{xxxx1} + H(D_6 + I_6), C_5^* + S \right] \quad (68)$$

$$= \min \left[ 18\,700 + 30 \cdot (100 + 20), 18\,700 + 4\,000 \right] \quad (69)$$

$$= \min \left[ \underline{22\,300}, 22\,700 \right] \quad (70)$$

$$= 22\,300 \quad (71)$$

Minimale lager- og omstillingskostnader er 22 300 NOK.

b) Vi starter bakfra og jobber oss frem til løsningen:

- $C_{xxxx10}$ , siden siste bestilling skjer i uke 5 for delproblem 6  $\rightarrow$  delproblem 4
- $C_{xxx110}$ , siden siste bestilling skjer i uke 4 for delproblem 4  $\rightarrow$  delproblem 3
- $C_{x10110}$ , siden siste bestilling skjer i uke 2 for delproblem 2.
- $C_{110110}$ , siden siste bestilling skjer i uke 1 for delproblem 1.

Bestillingsplanen: ( $Y_t$ -variablene)

$$Y_1 = 1 \quad (72)$$

$$Y_2 = 1 \quad (73)$$

$$Y_3 = 0 \quad (74)$$

$$Y_4 = 1 \quad (75)$$

$$Y_5 = 1 \quad (76)$$

$$Y_6 = 0 \quad (77)$$

Produksjonsmengder: ( $X_t$ -variablene)

Vi finner  $X_t$ -variablene ved å bruke teoremet om ”*Dominante produksjonsplaner*”, kun hele etterspørselsbehov.

$$\underline{\underline{X_1}} = D_1 - I_0 = 140 + 70 = \underline{\underline{70}} \quad (78)$$

$$\underline{\underline{X_2}} = D_2 + D_3 = 120 + 90 = \underline{\underline{210}} \quad (79)$$

$$\underline{\underline{X_3}} = \underline{\underline{0}} \quad (80)$$

$$X_4 = D_4 = \underline{\underline{170}} \quad (81)$$

$$\underline{\underline{X_5}} = D_5 + D_6 + I_6 = 140 + 100 + 20 = \underline{\underline{260}} \quad (82)$$

$$X_6 = 0 \quad (83)$$

Lagermengder: ( $I_t$ -variablene)

Fra  $X_t$ -variablene finner vi optimale lagermengder:

$$\underline{\underline{I_1}} = \underline{\underline{0}} \quad (84)$$

$$I_2 = D_3 + D_4 = 90 = \underline{\underline{90}} \quad (85)$$

$$\underline{\underline{I_3}} = \underline{\underline{0}} \quad (86)$$

$$I_4 = 0 \quad (87)$$

$$\underline{\underline{I_5}} = D_6 + I_6 = 100 + 20 = \underline{\underline{120}} \quad (88)$$

- c) Med "dominante produksjonsplaner" menes det at det er *optimalt* å produsere kun hele etterspørselsbehov.

Prinsippet er typisk ikke oppfylt dersom bedriften har kapasitetsføringer, som dermed tvinger at etterspørselen for en gitt periode muligens må produseres i flere perioder.

