



SCM200

Lager- og produksjonsplanlegging

Kompendium 2020, del 1

Bård-Inge Pettersen
Per Kristian Rekdal



Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høyskole i logistikk

Innhold

1	Grunnleggende Begreper	9
1.1	Målsettinger	10
1.2	Planlegging og styring	11
1.3	Beslutningshierarkiet	14
1.4	Planleggings- og styringssystemer MPC	19
1.5	Modulene i et MPC-system - Verdensbildet	22
1.6	Modulene i et MPC-system	24
1.6.1	Strategiske moduler i et MPC-system	24
1.6.2	Taktiske moduler i et MPC-system	26
1.6.3	Operasjonelle moduler i et MPC-system	28
1.7	Klassifisering av bedrifter	29
1.8	Kundeordrepunkt	32
1.9	MTS, ATO, MTO, ETO - klassifisering	36
1.10	Klassifisering av produksjonsprosesser	38
2	Demand Management	41
2.1	Oversikt	42
2.1.1	Verdensbildet (globalt)	43
2.2	Demand Management - hovedaktiviteter	44
2.2.1	Kundeordrepunkt - aktiviteter	47
2.3	Prognostisering	49
2.3.1	To typer prognosemetoder	52
2.4	Mønster	56
2.5	Motivasjon: Prognostisering av tilfeldig mønster	59
2.6	Generelt: Prognostisering av tilfeldig mønster	63
2.7	Metoder for prognostisering av tilfeldig mønster	67
2.7.1	Random Walk, RW	69
2.7.2	Glidende gjennomsnitt $MA(n)$	75
2.7.3	Vektet glidende gjennomsnitt med vindu n , $WMA(\theta_t, n)$	81
2.7.4	Eksponensiell glatting $ES(\theta)$	91
2.8	Måltall	105
3	Strategisk Planlegging	121
3.1	Strategisk Planlegging	122
3.2	Strategisk Ressursplanlegging	124
3.3	“Strategisk ressursplanlegging” - beslutninger og hovedaktiviteter	125
3.3.1	Beslutninger	125

3.3.2	Effektivitet og kapasitetsutnyttelse	125
3.4	Fasilitetsdesign	130
3.5	Målsetting	133
3.6	Varianter	134
3.7	Matematisk Modellering	137
4	Aggregert Planlegging	147
4.1	Oversikt: Aggregert Planlegging	148
4.1.1	Verdensbildet - globalt	150
4.1.2	Verdensbildet - lokalt	151
4.2	Aggregert planlegging - målsettinger	152
4.3	Aggregert planlegging - beslutninger	153
4.4	Aggregert planlegging - hovedaktiviteter	154
4.5	Ressursplanlegging	155
4.6	Aggregert planlegging: Glamox	156
4.6.1	Grunnleggende tilfelle (situasjon 0)	158
4.6.2	Utvidelse 1: Sikkerhetslager	174
4.6.3	Utvidelse 2: Mulighet for bestilling	180
5	Master Produksjonsplanlegging	191
5.1	Master produksjonsplanlegging: Innledning	192
5.2	Master produksjonsplanlegging - Hovedaktiviteter	194
5.2.1	Typiske varer i MPS	195
5.2.2	Typiske aktiviteter i MPS	196
5.2.3	Typiske poster i MPS	197
5.3	Lagerstyring	203
5.4	EOQ - Optimal Ordrestørrelse ved konstant etterspørsel og ingen stockout	210
5.5	Etterbestilling - dvs. når legger vi inn nye ordrer	219
5.5.1	Bestilingspunktmodellen - uten og med sikkerhetslager	220
5.6	Fastsettelse av sikkerhetslager under krav om sannsynlighet for stockout	229
5.7	Varierende etterspørsel - Wagner-Within	238
5.7.1	Matematisk modell - uten kapasitetsføringer	239
5.7.2	Wagner-Within algoritmen	254
6	MRP - Material Requirements Planning	281
6.1	Introduksjon	282
6.2	Hovedaktiviteter	285
6.3	BOM-strukturer	287
6.4	MRP-modellen	289
6.5	MRP-tabellen	301
6.6	MRP-algoritmen (planleggingsmetodikken)	303
6.7	ABC-analyse	318
7	Operasjonell planlegging	323
7.1	Introduksjon	324
7.2	Jobb allokering	327
7.3	Sekvensiering	328
7.3.1	Målfunksjoner	329

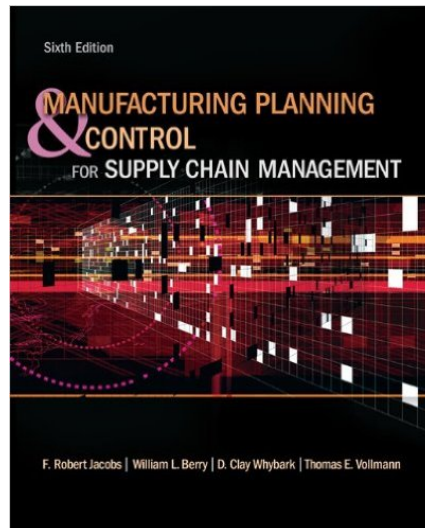
7.3.2	Gantt-diagrammer	332
7.4	Sekvensieringscase: En stasjon med 6 ordrer	333
7.5	Sekvensieringscase: Sykehus	340
7.6	Sekvensieringscase: To maskiner	344

Forord

Dette er del 1 (av 2) av kompendiet i emnet “*SCM200 Lager -og Produksjonsstyring*” ved Høgskolen i Molde.

Forelesningene vil følge dette kompendiet. Stoffet i kompendiet er hovedsaklig hentet fra følgende lærebok:

Manufacturing Planning & Control Systems for Supply Chain Management,
Thomas E. Vollmann et. al., McGraw-Hill, 6. utg., 2010



Figur 1: Støttelitteratur.

Pensum defineres ut fra kompendiet, forelesningene og øvingene. Lærebøken anses derfor *kun* som [støttelitteratur](#). Læreboken behandler flere detaljer enn kompendiet. Kun årets kompendium kan benyttes da dette oppdateres fra år til år.

Studentene ved Høgskolen i Molde som skal ha dette kurset er blant annet studenter innenfor følgende studieretninger:

- økonomi
 - årsstudium i bedriftsøkonomi
 - bachelor i økonomi og administrasjon
- logistikk
 - logistikk og supply chain management
 - petroleumslogistikk

Alle forelesningene blir tatt opp på **video**.

Alle disse videoene finnes på Høgskolen i Molde sin åpne kursportal:

www.himoldeX.no
--

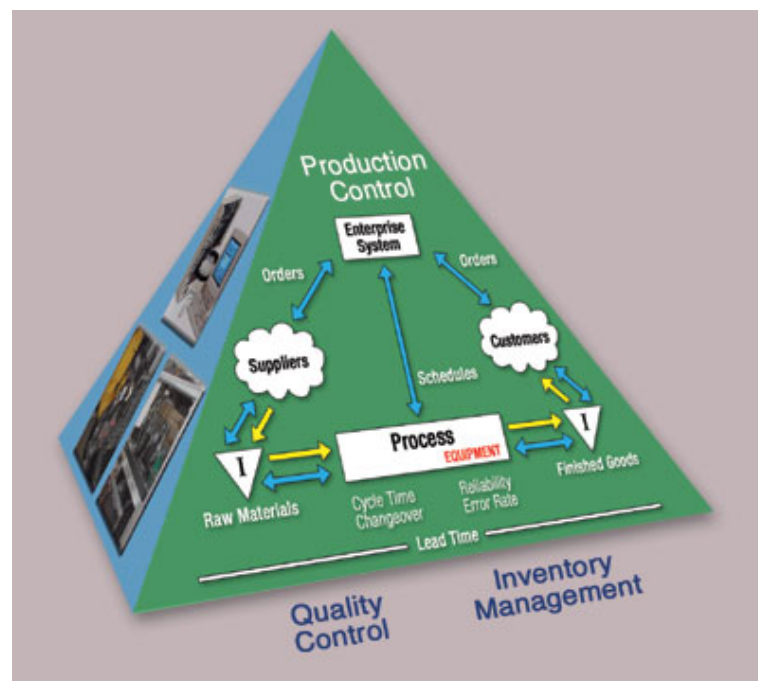
Alt kursmateriell finnes på denne åpne portalen. Alt er gratis!

Bård-Inge Pettersen og Per Kristian Rekdal

Copyright © Høgskolen i Molde, januar 2020.

Kapittel 1

Grunnleggende Begreper



Figur 1.1: Grunnleggende begreper.

1.1 Målsettinger

Målsettinger: (*SCM200 lager og produksjonsplanlegging*)

- Å kjenne til hvilke **modeller** som ligger bak de typiske **datamodulene** for **planlegging** og **styring** av lager og produksjon i en bedrift.
- Å kunne **utvide** en modell når en datamodul ikke er i stand til å gjenspeile virkeligheten godt nok.
- Å forstå hvordan datamodulene og modellene henger sammen i et **hierarkisk** system.



Vi skal i dette kapittelet konkretisere hva som ligger i de forskjellige målsettingene nevnt over, slik at vi får en god forståelse av hva de innebærer.

Begrepene vi definerer i dette kapittelet er helt grunnleggende for alle de resterende kapitlene.

I de resterende kapitlene, introduserer vi de vanligste datamodulene og dets underliggende modeller.



SCM200 Lager- og produksjonsplanlegging



Kjenne til:

- **Modeller** bak relevante datamoduler
- **Utvidelser** av modellene
- **Hierarkisk** system av datamoduler

Figur 1.2: Målsettinger i SCM200.

1.2 Planlegging og styring

Definisjon: (planlegging)

Planlegging handler om å ta fremtidige beslutninger.

Planlegging for lager og produksjon innebærer dermed å ta fremtidige beslutninger som vedrører lager og produksjon.



Definisjon: (styring)

Styring handler om å sørge for at beslutningene som ble tatt i planleggingsfasen blir gjennomført etter beste evne selv når avvik forekommer.

Styring for lager og produksjon innebærer dermed å sørge for at beslutningene som ble tatt i planleggingsfasen for lager og produksjon blir gjennomført etter beste evne.



Planlegging =
fremtidige beslutninger

Styring =
gjennomføring

Figur 1.3: Planlegging og styring.

Legg merke til at planlegging og styring er koblet gjennom et felles begrep:

beslutninger

Her listes opp noen typiske beslutninger som tas i lager og produksjonssammenheng.

Eksempel: ([beslutninger](#) lager)

- Hvor mange lager skal bedriften ha?
 - Hvor skal lagrene ligge?
 - Hvor store skal lagrene være?
 - Hvor mye skal lagres av hvert produkt neste uke, måned og halvår?
 - Hvor stort skal sikkerhetslageret være?
- 

Eksempel: ([beslutninger](#) produksjon)

- Hvor mange fabrikker skal bedriften ha?
 - Hvor skal fabrikkene ligge?
 - Hvor mange maskiner skal brukes, og hvor mange ansatte er det behov for?
 - Hvilke produkter og komponenter skal produserer.
 - Hvor mye skal produseres av hvert produkt, og når skal de produserer?
- 

Ulike beslutninger gir ulike konsekvenser.

Noen beslutninger er **gode** mens andre beslutninger er **dårlige**, men hva mener vi egentlig med gode og dårlige beslutninger?

Eksempel: (**gode** beslutninger)

Gode beslutninger er beslutninger som gir:

- minimale lager -og produksjonskostnader
 - høy leveringsgrad
 - høy kundetilfredshet
 - effektiv kapasitetsutnyttelse
- 

Eksempel: (**dårlige** beslutninger)

Dårlige beslutninger er beslutninger som gir:

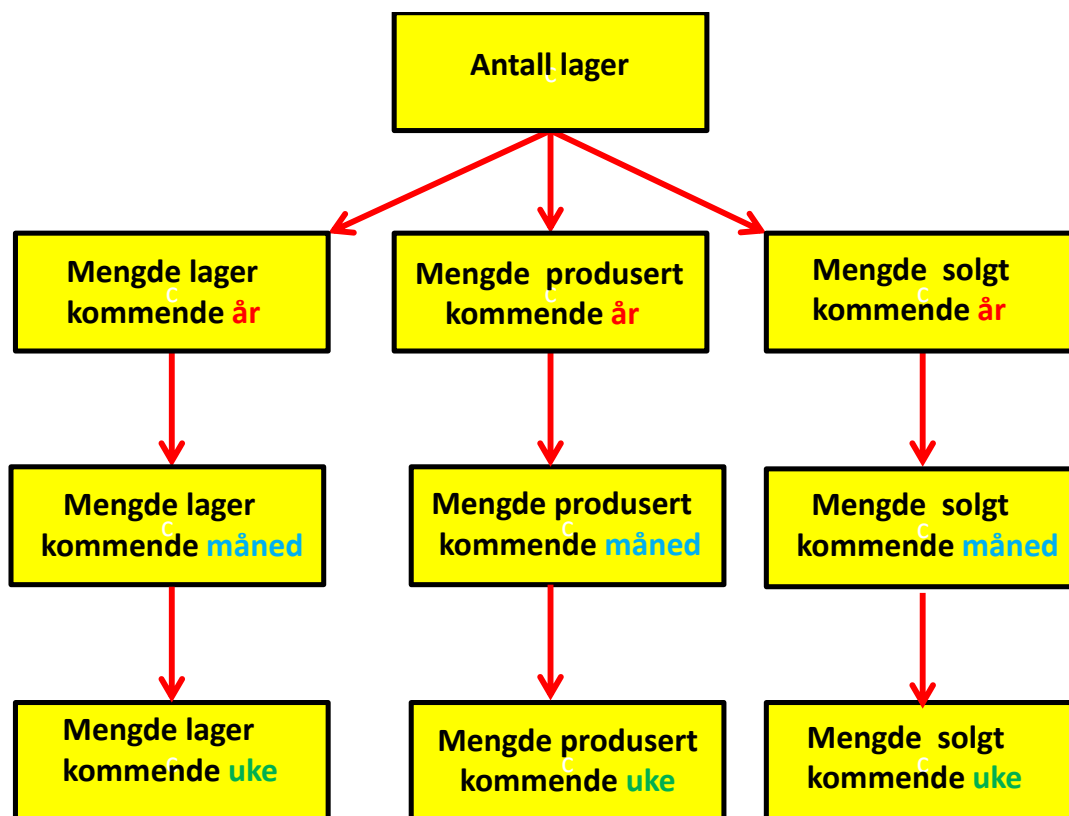
- suboptimale (høye) lager -og produksjonskostnader
 - mye brannslukking (urealistiske planer)
 - lav kundetilfredshet
 - lav kapasitetsutnyttelse
- 

1.3 Beslutningshierarkiet

Definisjon: (beslutningstre)

Et beslutningstre viser sammenhengen mellom de enkelte beslutningene som tas i en bedrift som en trestruktur. Beslutningstreet viser vilken rekkefølge beslutningene tas og hvordan beslutningene er avhengige av hverandre.

■



Figur 1.4: Beslutningstre - viser rekkefølgen og avhengigheten til beslutningene.

Vi husker fra avsnitt 1.2 at planlegging og styring handler om å ta og gjennomføre fremtidige beslutninger.

Hvis vi hadde vært **urealistisk** gode planleggere, hadde vi kunnet planlagt hele bedriftens beslutninger fra den startet og flere år frem i tid. Det hadde vært en svært optimal situasjon. Problemet er at beslutningshierarkiet hadde blitt **enormt** stort - altfor stort for både menneske og maskin å kunne håndtere. I tillegg krever planleggingen at vi er i stand til å forutse hva som skjer i fremtiden. Jo lengre vi ønsker å se fremover, desto høyere **usikkerhet** får vi. Vi hadde hverken klart å planlegge eller gjennomføre et så stort og usikkert beslutningstree.

Så hvordan planlegges en bedrift i **praksis**?

Man benytter en "splitt og hers" tankegang. Beslutningene deles inn i kategorier etter hvordan de henger sammen. Den tradisjonelle inndelingen er en **hierarkisk** oppdeling hvor de viktigste beslutningene ligger "høyest" i hierarkiet.

Definisjon: ([beslutningshierarkiet](#))

[Beslutningshierarkiet](#) er en hierarkisk oppdeling av beslutningstreet i en bedrift med følgende kategorier (viktigste beslutninger først):

- **Strategiske** beslutninger
- **Taktiske** beslutninger
- **Operasjonelle** beslutninger

Strategiske beslutninger ligger over taktiske beslutninger som igjen ligger over operasjonelle beslutninger, som vist i figur 1.5.

■



Figur 1.5: Beslutningshierarkiet.

Oversikt over beslutningshierarkiet:

	Strategiske beslutninger	Taktiske beslutninger	Operasjonelle beslutninger
Tidshorisont	Kvartal , halvår , år	Uker , måneder	Uker , dager , timer
Personer	Toppledelse , styre	Mellomledere , planleggere , ingeniører	Operatører, medarbeidere, yrkesfolk
Middel	Investeringer , strategier , målsettinger	Delmål , avdelingsresultat	Leveranser, prosedyrer og rapporter
Drivkraft	Budsjetter	Planer , løsninger	Styring av detaljerte planer
Omfang	Konsernnivå	Fabrikknivå , arbeidstasjoner	Linjenivå
Aggregering	Produktfamilier , regioner , kundegrupper	Produkter, lager, mindre kunderegioner	Deler , spesifikke kunder
Usikkerhet	Høy usikkerhet , etterspørsel	Middels usikkerhet , batchtider , etterspørsel	Lav usikkerhet , bearbeidingstider
Risiko	Høy risiko, store investeringer	Middels risiko , sesong	Lav risiko , kortsiktige satsinger

Figur 1.6: Beslutningshierarkiet.

Utfordringer: ([hierarkisk planlegging](#))

Hierarkisk planlegging har også noen [utfordringer](#) som man må være klar over.

- Hierarkisk planlegging sier ikke nøyaktig hvilke beslutninger som faller under strategisk, taktisk og operasjonell planlegging, dette er opp til hver enkelt bedrift å definere selv.
- Hvordan skal bedriften [aggregere](#) (=sammenslå) og [disaggregere](#) (ikke sammenslå) produkter, regioner prognoser etc.?
- Hvordan skal planleggingen under hvert hierarki modelleres og løses? Her ligger det full frihet til bedriften å selv beskrive målfunksjoner og tilhørende restriksjoner som finnes.
- Siden planleggingen deles opp i tre kategorier, må planleggingen også [linkes sammen igjen](#).
- Hvordan skal det [totale](#) bildet evalueres?



Planlegging og **styring** av en bedrift betyr dermed å ta beslutninger om fremtiden på

- [strategisk](#)
- [taktisk](#)
- [operasjonelt](#)

nivå.

I neste avsnitt skal vi se på planleggings- og styringssystemer, MPC-systemer, som er datasystemer som skal forenkle planleggings- og styringsprosessene. Videre konkretiserer vi hva som menes med [datamoduler](#) og [modellene](#) bak disse.

1.4 Planleggings- og styringssystemer MPC

Moderne bedrifter forekommer ikke idag uten **datasystemer** som håndterer, synkroniserer og effektiviserer store deler av planleggingen og styring av bedriften.

På engelsk heter det ”*Manufacturing Planning and Control*” system, eller forkortet **MPC**.¹

En av hovedmålsettingen i dette kurset er å kjenne til den **konseptuelle** oppbygningen av et MPC-system og hvilke **matematiske modeller** som ligger til grunn i disse systemene.



Figur 1.7: MPC-system.

¹Heretter brukes forkortelsen **MPC** for ”planleggings- og styringssystem”.

Definisjon: (MPC-system)

Et **MPC-system** er en **konseptuell** modell på hvordan et datasystem for planlegging og styring av en bedrift er oppbygd.



Målsetting: (MPC-system)

planlegging = å sette bedriften i stand til å ta **best** mulige beslutninger om fremtiden

styring = å sette bedriften i stand til å **gjennomføre** planene på **best** mulig måte



Eksempel: ([ERP-systemer](#))

Man finner som regel et MPC-system inkludert i såkalte ERP-systemer.²



Figur 1.8: Moduler i et ERP-system.

Som vi ser fra figure 1.8, er et ERP-system *mer* enn et MPC-system, men rent historisk sett, vokste ERP-systemene ut fra MPC-rammeverket. Man finner med andre ord mye de samme modulene i et ERP system som defineres i MPC-rammeverket.

Noen populære ERP-systemer:

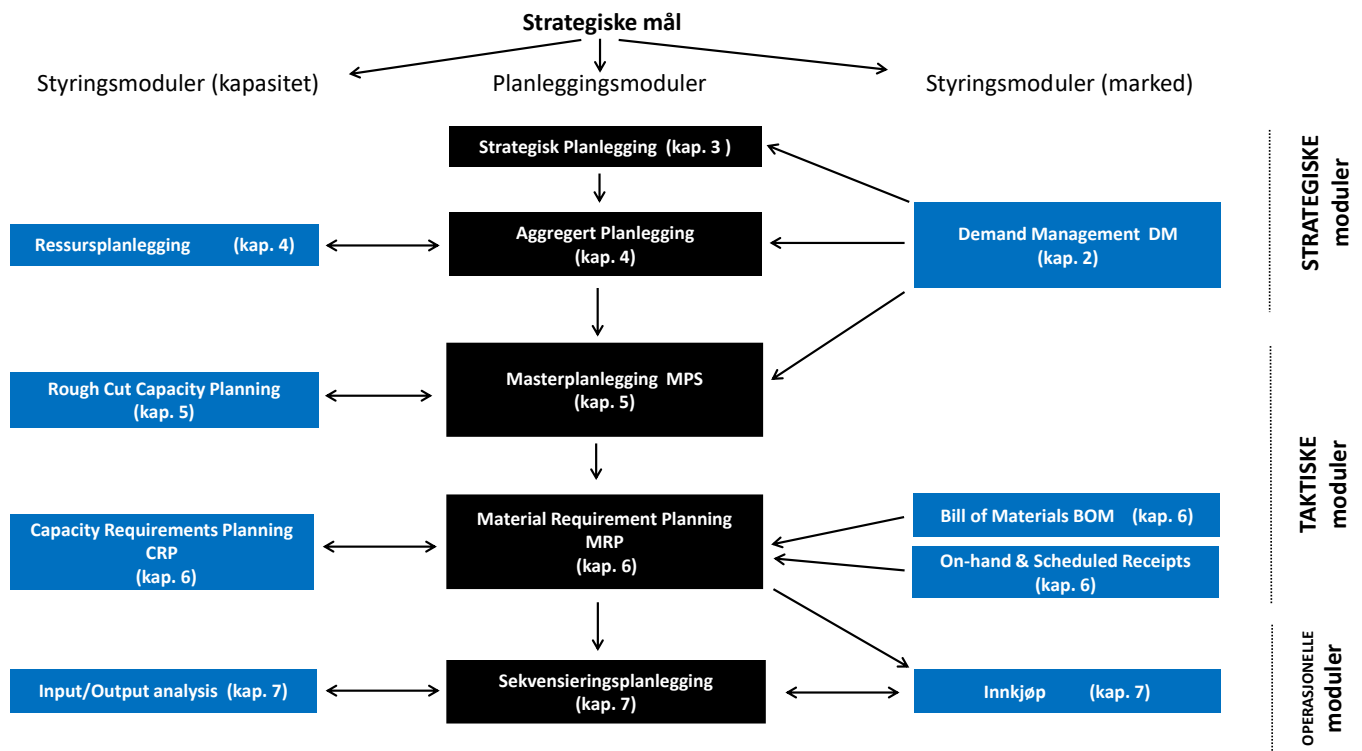
- SAP
- Agresso
- M3
- Visma

■

²ERP står for "[Enterprise Resource Planning](#)" og er svært utbredt i dagens bedrifter med mer enn 250 ansatte.

1.5 Modulene i et MPC-system - Verdensbildet

Et MPC-system er som nevnt i kapittel 1.4 en *konseptuell modell* på hvordan et slikt system er bygd opp. Figur 1.9, viser modulene i et MPC-system og hvordan de henger sammen.



Figur 1.9: Verdensbildet.

Verdensbildet i et MPC-system består av tre hovedmoduler inndelt etter modulene i **beslutningshierarkiet** fra kapittel 1.3: (modul = dataprogram)

- **Strategiske** moduler
- **Taktiske** moduler
- **Operasjonelle** moduler

En **modul** inkluderer en rekke koblede funksjoner som tilsammen gjennomfører en oppgave i MPC-systemet. En modul er en lilla eller svart boks i figur 1.9.

På listeform:

- **Strategiske** moduler:
 - Kap. 2 - Demand Management
 - Kap. 3 - Strategisk Ressursplanlegging
 - Kap. 4 - Aggregert (sammenslått) Planlegging ³
- **Taktiske** moduler
 - Kap. 5 - Masterplanlegging ⁴
 - Kap. 6 - Materialplanlegging (MRP)
 - Kap. 6 - Bill Of Materials (BOM)
 - Kap. 6 - On-Hand and scheduled receipts (WIP)
 - Kap. 6 - Capacity Requirement Planning (CRP)
- **Operasjonelle** moduler
 - Kap. 7 - Innkjøp (purchasing)
 - Kap. 7 - Job Scheduling (jobbsekvensiering)
 - Kap. 7 - Input-Output Analysis (styring av jobbsekvensiering)

Resten av kapitlene i dette kompendiet handler om å se nærmere på hver enkelt modul, hvor det spesifiseres hvilke aktiviteter modulen inkluderer, hvordan den er koblet med andre moduler, hvilke matematiske modeller som ligger bak modulene og hvilke begrensninger som finnes.

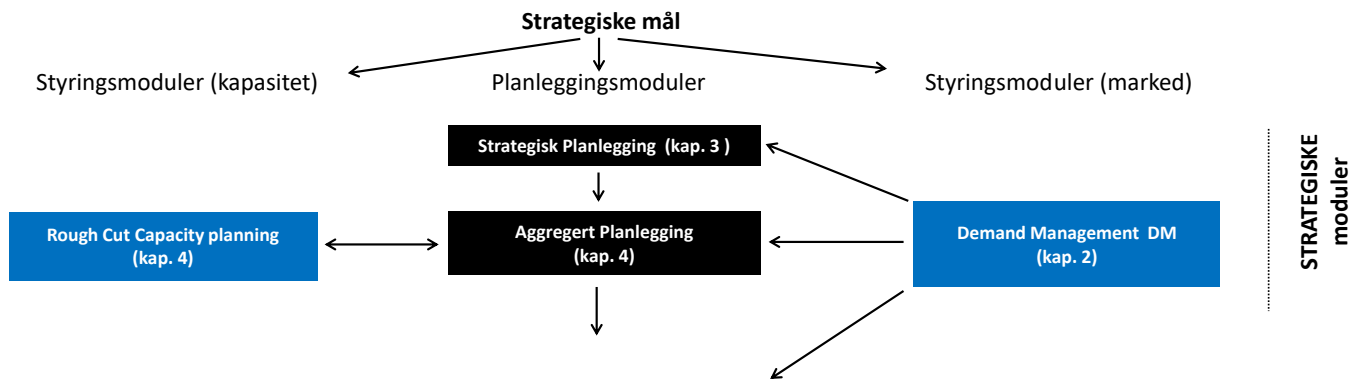
Men først en kort introduksjon om hver modul.

³Aggregert Planlegging = Aggregert **Produksjons**planlegging

⁴Masterplanlegging = Master **Produksjons**planlegging

1.6 Modulene i et MPC-system

1.6.1 **Strategiske** moduler i et MPC-system



Figur 1.10: Strategiske moduler.

Kap. 2) Demand Management: (salg og etterspørsel)

Denne modulen omfatter alt som påvirker [etterspørselen](#) etter bedriftens produkter. Viktige aktiviteter er blant annet:

- [prognostisering](#)
- kundebehandling og kundeoppfølging
- ordrekontroll
- markedsføring
- prising
- kundesegmentering

Kap. 3) Ressursplanlegging: (kapasitetsstyring)

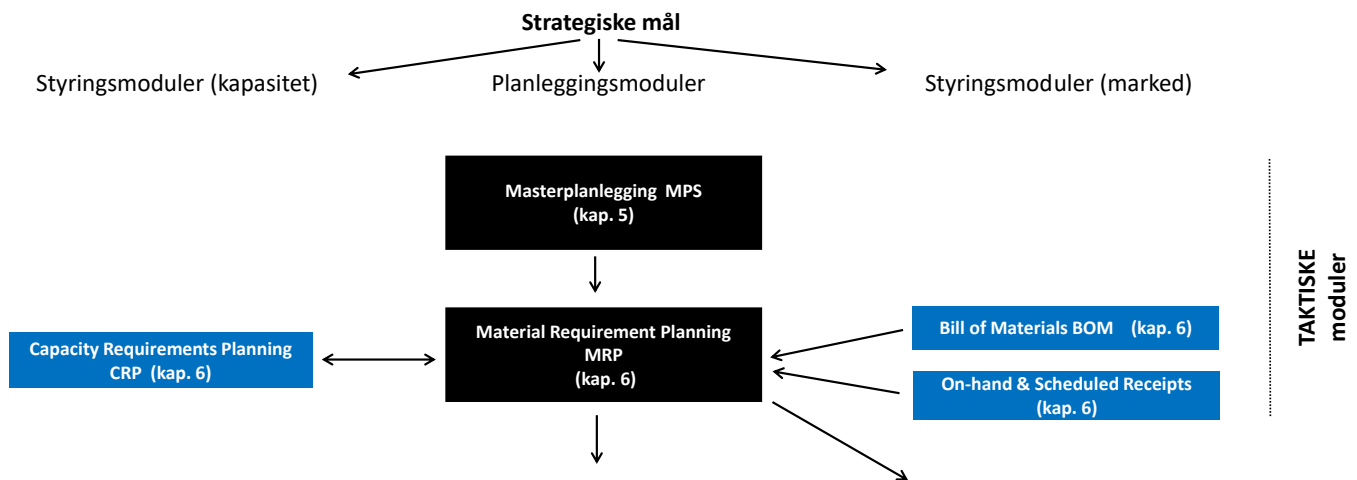
Ressursplanlegging gir funksjoner for å balansere kapasiteten etterspurt fra produksjonsplanene med den reelle kapasiteten bedriften har. Dette innebærer investeringer i maskiner, lager, ansatte etc. I tillegg kommer lokalisering og allokering av disse ressursene.

Kap. 4) Aggregert Planlegging: (strategisk planlegging av produktfamilier)

Aggregert (sammenslått) planlegging balanserer salg -og markedsaktiviteter med tilgjengelige produksjonsressurser. Planene er aggregerte, som betyr at produktene er slått sammen etter forskjellige faktorer som f.eks. produktfamilier og geografiske områder.

Viktige beslutninger er blant annet hvor mye lagerhold og produksjon av produktfamiliene skal gjennomføres i løpet av horisonten (som regel kvartalsvis eller på halvårsbasis). I tillegg planlegges også total arbeidskraft og antall maskintimer som skal benyttes under de enkelte periodene.

1.6.2 Taktiske moduler i et MPC-system



Figur 1.11: Taktiske moduler.

Kap. 5) Masterplanlegging:⁵ (taktisk planlegging av faktiske produkter)

Masterplanlegging representerer den **disaggregerte** (ikke sammenslått) versjonen av aggregert (sammenslått) planlegging.

Modulen håndterer spørsmål vedrørende faktiske produksjonsplaner for sluttproduktene i bedriften, som f.eks. produksjonsstørrelse, lagernivå , serieproduksjon, leveringsgrad og leveringsdatoer.

Masterplanlegging er helt sentral i enhver bedrift og kobler også inn lagerstyring.

⁵Masterplanlegging = Master **P**roduksjonsplanlegging

Kap. 6) Materialplanlegging: (MRP)

MRP (Material Requirements Planning) er den mest tradisjonelle modulen i MPC-rammeverket⁶. MRP-modulen planlegger en [tidsforskjøvet](#)⁷ plan for innkjøpsbehov og produksjon av alle [komponenter](#) og [råvarer](#) som etterspørres fra masterplanen.

Kap. 6) Bill Of Material: (BOM)

BOM (Bill Of Material) er en støttemodul til MRP-modulen. BOM er en enkel trestruktur som viser hvilke komponenter et produkt består av og hvor mange av hver komponent det er behov for. Komponenter kan igjen bestå av nye komponenter etc. som også har sin egen BOM-struktur.

Kap. 6) On-hand and Scheduled Receipts: (WIP - Work-In-Progress - varer i arbeid)

Denne modulen er også en støttemodul til MRP-modulen siden den forteller hvor mye varer som er i arbeid. Legg merke til at dette er en *styringsmodul*, dvs. den gir kontinuerlig input til MRP-planen som dermed oppdateres når varer i arbeid ikke sammenfaller med planlagt produksjon.

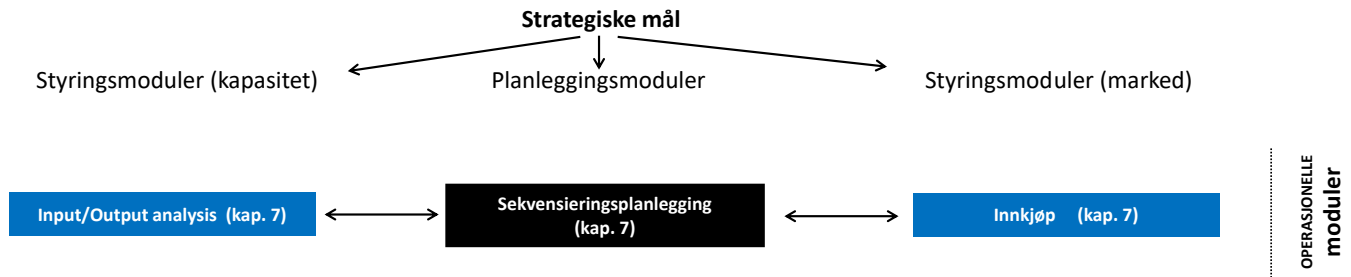
Kap. 6) Capacity Requirements Planning: (CRP)

CRP-modulen er også en støttemodul til MRP-modulen siden MRP-modulen *ikke* tar høyde for kapasiteten tilgjengelig ved. CRP-modulen beregner hvorvidt planene fra MRP-modulen er gjennomførbare eller ikke, og gir feedback tilbake som muligens medfører replanlegging av MRP-planen.

⁶MRP-modulen var den første modulen som ble brukt i tidlig MPC-historie. Man kan godt si at dagens ERP-systemer, vokste ut fra MRP-modulen.

⁷Både innkjøps- og produksjonsplan av komponenter som inngår i sluttproduktene, må bestilles og planlegges slik at [ledetiden](#) tas i betraktning. Ledetid er et sentral begrep i produksjonsplanlegging, og representerer tiden fra en bestilling legges inn / produksjon starter til råvaren / komponenten er klar til bruk videre.

1.6.3 Operasjonelle moduler i et MPC-system



Figur 1.12: Operasjonelle moduler.

Kap. 7) Innkjøp: (purchasing)

Innkjøpsmodulen er inkludert fordi MRP-planen inkluderer råvarer som trigger innkjøp. Vi går ikke inn i detalj på denne modulen i dette kompendiet.

Kap. 7) Job Scheduling: (jobbsekvensiering)

Jobbsekvensiering er det laveste planleggingsnivået i bedriften og bestemmer hvilke tidspunkt og med hvilke ressurser jobbene skal gjennomføres.

Kap. 7) Input-Output analysis: (kapasitetsstyring for jobbsekvensiering)

Input-Output modulen er en styringsmodul som estimerer hvorvidt en jobbsekvensieringsplan faktisk har tilstrekkelig med kapasitet til å gjennomføres etter planlagte tidsrammer og med planlagte ressurser. Den gir feedback tilbake til sekvenseringsmodulen og eventuelt også MRP-modulen.

1.7 Klassifisering av bedrifter

Problemstilling: (passer MPC-rammeverket for *alle* bedrifter?)

Hensikten med MPC-rammeverket introdusert i avsnitt 1.6 er å kunne bruke *samme* rammeverk for *enhver* bedrift.

Hvordan kan et skipsverft sammenlignes med en dagligvarebutikk? Er MPC-rammeverket generelt nok for å fange opp *alle* typer bedrifter? Hvordan fremkommer forskjellene mellom bedriftene i selve MPC-rammeverket?

Svar: (MPC-rammeverket *implementeres* forskjellig)

MPC-rammeverket og dets moduler er *alltid* det samme for enhver bedrift, men måten modulene *implementeres*⁸ på er vidt forskjellig og svært avhengig av typen bedrift.

■



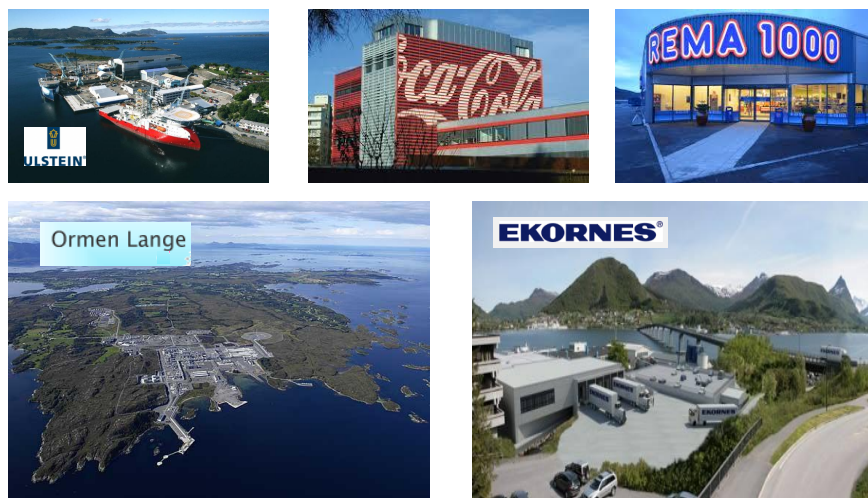
Figur 1.13: MPC passer for alle bedrifter.

⁸I praksis betyr "implementering" egentlig *konfigurerings*, dvs hvilke funksjoner som benyttes / ikke benyttes og hvilke parameterverdier som har blitt lagt inn.

Eksempel: (bedrifter med forskjellig MPC implementasjon)

Noen bedrifter med typiske kjennetegn spesifisert:

- [Ulstein Verft](#) - prosjektering, kundetilpasning, outsourcing, ikke sluttlager
- [Coca-Cola](#) - serieproduksjon, store sluttlager, ingen kundetilpasning
- [Rema 1000](#) - innkjøp, store lager, ingen produksjon
- [Ormen Lange](#) - kontinuerlig produksjon av gass
- [Ekornes](#) - produksjon av halvfabrikat, kundetilpasning av spesifikke størrelser som f.eks. farge og fasong



Figur 1.14: Bedrifter med forskjellig MPC.

Forskjellige bedrifter har forskjellige behov. Noen har ferdiglager, andre lagrer halvfabrikater mens noen ikke har lager i det hele tatt. Modulene i MPC-rammeverket benyttes med andre ord svært forskjellig fra bedrift til bedrift.

Problemstilling: ([klassifisering av bedrifter](#))

Finnes det noen få [kriterier](#) som [klassifiserer](#) bedriftene slik at MPC-modulene innenfor hver klasse benyttes på tilnærmet samme måte?⁹

Svar: ([kundeordrepunkt og produksjonsmiljø](#))

To viktige [kriterier](#) for klassifisering av bedrifter er:

- [Kundeordrepunktet](#) - hvor langt ”inn” i verdikjeden kan [kunden](#) påvirke?
- [Produksjonsmiljø](#) - hvordan gjennomføres [produksjonsprosessen](#)?



Kundeordrepunktet og produksjonsmiljøet er to kriterier som sammen gir en ”typisk” implementasjon av MPC-rammeverket. Disse kriteriene defineres nærmere i de neste to avsnittene.

⁹Klassifiseringen må ikke være 100% nøyaktig. Det vil naturligvis oppstå bedrifter i granseland mellom to klasser. Hensikten med en klassifisering er å raskt kunne få en [pekepinn](#) på hvordan MPC-modulene er implementert.

1.8 Kundeordrepunkt

Kundeordrepunktet er et sammensatt begrep som krever at man forstår hva som ligger i begrepene [uavhengig](#) og [avhengig](#) etterspørsel.

Definisjon: ([avhengig etterspørsel](#))

[Avhengig etterspørsel](#) er etterspørsel etter ferdigvarer/komponenter som er avhengig av *andre* ferdigvarer / komponenter.



Definisjon: ([uavhengig etterspørsel](#))

[Uavhengig etterspørsel](#) er etterspørsel etter ferdigvarer/komponenter som *ikke* er avhengig av *andre* ferdigvarer / komponenter. Typisk gjelder dette ferdigvarer / komponenter som *kunden* etterspør.



Eksempel: (avhengig og uavhengig etterspørsel)

Uavhengig:

Når Ekornes får en ordre på 2 tradisjonelle pinnestoler, vet de samtidig at de må ha 8 stolbein, 2 ryggplater og to seter. Etterspørselen etter stolbeinene, ryggplatene og setene er dermed **avhengig** av etterspørselen av stoler.

Etterspørselen etter selve pinnestolene er derimot **uavhengig** etterspørsel, siden antall pinnestoler som etterspørres er kun avhengig av *kundene*.

Avhengig:

Anta at Ekornes nå har inkludert pinnestolen i et annet produkt: spisestue. For hver solgte spisestue, inkluderes derfor også 4 pinnestoler. Er etterspørselen for pinnestoler fremdeles uavhengig? Nei!

Siden det selges 4 pinnestoler for hver solgte spisestue, så har etterspørselen blitt **avhengig** etterspørsel.

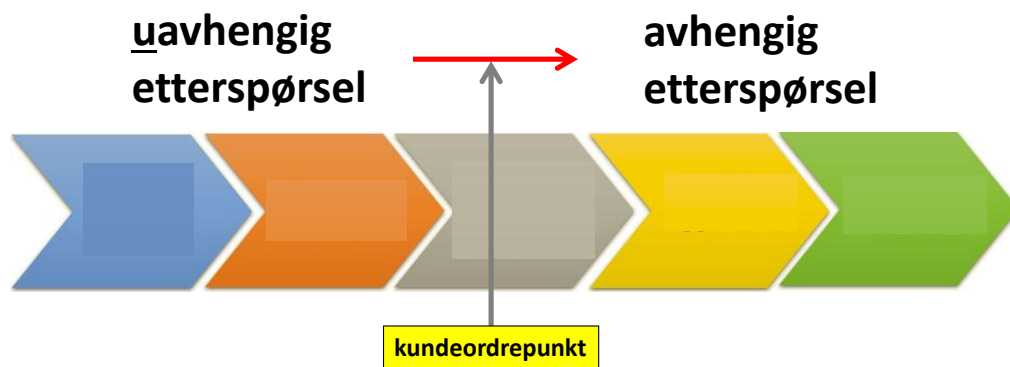
■



Figur 1.15: Pinnestoler.

Definisjon: ([kundeordrepunkt](#))

Kundeordrepunktet er det punktet i en bedrifts verdikjede hvor etterspørselen går fra [uavhengig](#) til [avhengig](#) etterspørsel.



Figur 1.16: Kundeordrepunkt.

Spørsmål:

Hvorfor er kundeordrepunktet så viktig, og hvordan påvirker kundeordrepunktet implementeringen av MPC-rammeverket?

Svar:

- Kundeordrepunktet gir et **naturlig skille** på hvordan en planlegger og styrer produksjon og lager.
- Modulene for **aggregert planlegging** og **masterplanlegging** omhandler utelukkende uavhengig etterspørsel, mens MRP-modulen håndterer avhengig etterspørsel.
- Uavhengig etterspørsel er forbundet med **usikkerhet og varisjoner**, mens avhengig etterspørsel har lite usikkerhet eller varisjoner.
- Uavhengig etterspørsel **prognostiseres** mens avhengig etterspørsel **beregnes** fra uavhengig etterspørsel.



Kundeordrepunktet gir opphav til en meget velkjent **klassifisering** av bedrifter. Disse typene diskuteres i neste avsnitt.

1.9 MTS, ATO, MTO, ETO - klassifisering

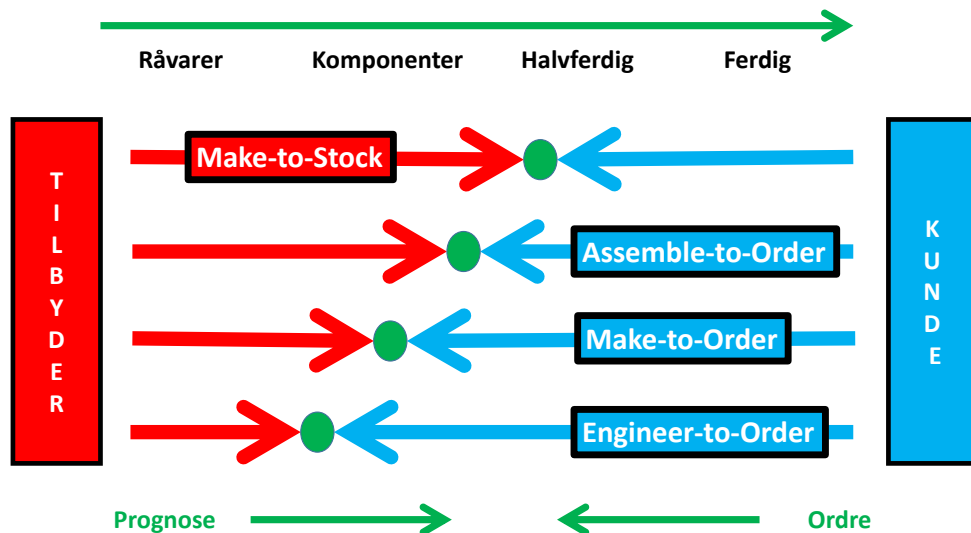
Definisjon: ([klassifisering av kundeordrepunkt](#))

Kundeordrepunktet gir opphav til en klassifisering av bedrifter:

- **Make-To-Stock** (MTS) - bedrifter som selger fra ferdiglager. Kundeordrepunktet er [ferdiglagrene](#).
- **Assemble-To-Order** (ATO) - bedrifter som selger halvfabrikater som kan konfigureres av kunde. Kundeordrepunktet er [halvfabrikatlagrene](#).
- **Make-To-Order** (MTO) - bedrifter som tar ordrer ifra kunden, hvor kunden spesifiserer ønsket produkt. Kundeordrepunktet er [rålagrene og komponentlagrene](#).
- **Engineer-To-Order** (ETO) - bedrifter som tar ordrer ifra kunden, hvor kunden kan også bestemme råvarene som benyttes. Kundeordrepunktet er [leverandørene](#).

■

Figur 1.17 gir en god illustrasjon på klassifiseringen av kundeordrepunktet.



Figur 1.17: Kundeordrepunkt.

Eksempel: ([klassifisering: MTS, ATO, MTO, ETO](#))

Eksempel på bedrifter som faller innenfor klassifiseringen:¹⁰

- Make-To-Stock (MTS):
 - Coca Cola AS
 - Stabburet AS (Grandiosa)
 - Glamox AS (lysarmaturer)
 - Hustadmarmor AS (Slurry)
- Assemble-To-Order (ATO):
 - Ekornes AS (møbler)
 - Dell Inc (datamaskiner)
 - Glamox AS (lysarmaturer)
- Make-To-Order (MTO)
 - Brunvoll AS (propeller)
 - Axess AS (prosjekt)
 - Uni Micro Web (websider)
 - Glamox AS (lysarmaturer)
- Engineer-To-Order (ETO):
 - Ulstein Verft AS (skip)
 - Boeing Inc. (fly)
 - Serit AS (IT-systemer)



Følgene av MTS, ATO, MTO og ETO vil bli diskutert for hver modul (les kapittel) hvor det er hensiktismessig. Klassifiseringen er derfor meget sentral og bør vektlegges.

I tillegg til kundeordrepunktet, kan man også klassifisere bedrifter etter [produksjonsprosess](#). Denne klassifiseringen diskuteres i neste avsnitt.

¹⁰Klassifiseringen er *ikke* entydig, dvs en bedrift kan befinne seg i *flere* klasser samtidig. Glamox AS i Molde er et eksempel på en bedrift som faller inn under både MTS, ATO og MTO.

1.10 Klassifisering av produksjonsprosesser

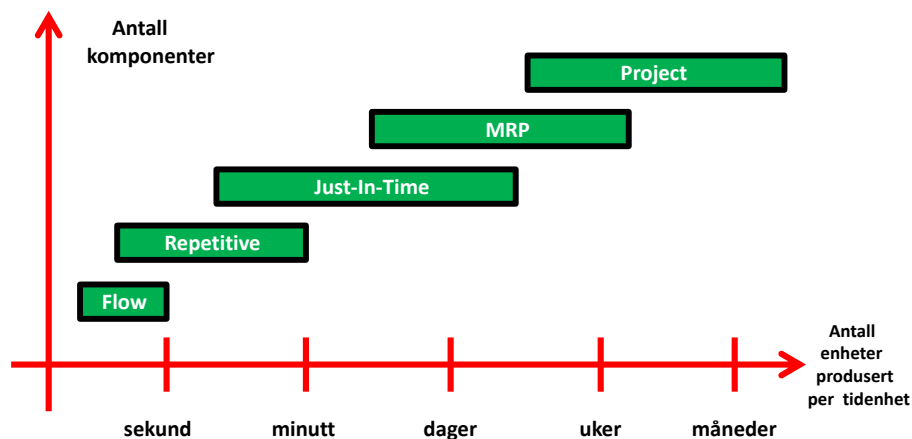
Definisjon: ([klassifisering av produksjonsprosesser](#))

MPC-systemer kan klassifiseres gjennom kompleksiteten av produktene uttrykt ved antall komponenter og hvor hyppig produktene produseres.

- **Project** - svært mange komponenter og lang produksjonstid ¹¹
- **MRP** - stort antall komponenter og produksjonstid fra dager til uker
- **Just-In-Time** (JIT) - middels antall komponenter og produksjonstid fra sekunder til minutter til dager ¹²
- **Repetitiv** - få komponenter og kort produksjonstid fra sekunder til minutter
- **Kontinuerlig** - svært få komponenter og produksjonstid på kun sekunder (produksjonsrate)

■

Figur 1.18 gir en god illustrasjon på klassifiseringen av produksjonsprosesser. Vertikal akse teller antall komponenter produsert, mens horisontal akse gir produksjonsraten, dvs. antall enheter produsert per tidsenhet. Som for kundeordrepunktet, kan en bedrift tilhøre flere kategorier samtidig.



Figur 1.18: MPC-klasifisering

¹¹Fra flere uker til flere måneder/år.

¹²Ikke forveksl denne MRP-*klassen* med MRP-*modulen*, selv om MRP-modulen er ganske mye brukt i bedrifter som faller under MRP-*klassen*.

Prosjekt: ([Prosjektbaserte produksjonsprosesser](#))

Prosjektbaserte produksjonsprosesser har følgende karakteristikker:

- Meget lav produksjonsrate - typisk noen få produkter i året
- Produksjonen inkluderer ofte tredjepartsleverandører (outsourcing)
- Produksjonen har kompliserte arbeidsstasjoner som må konfigureres for hvert prosjekt.
- Krever spesifikke ferdigheter og kunnskap.
- Faller som regel under ETO eller MTO kategoriene
- Eksempel er bygging av oljeplattform



MRP: ([MRP-basert produksjon](#))

MRP-baserte produksjonsprosesser har følgende karakteristikker:

- Komponentbasert produksjon som produseres i *serier* (serieproduksjon).
- Mer rutinearbeid blant operatører (ikke så spesialisert kunnskap)
- Har linjer som konfigureres for hver type komponent
- Faller som regel under MTO, ATO eller MTS kategoriene.
- Eksempel er Ekornes (møbler), Glamox (lysarmaturer) etc.



JIT: ([Just-In-Time-basert produksjon](#))

Just-In-Time-baserte produksjonsprosesser har følgende karakteristikk:

- Fokus på null ferdiglager.
 - Leverandørstyrte lager
 - Push-basert produksjon
 - Lean styring
- 

Repetitiv: ([Repetitiv-basert produksjon](#))

Repetitiv-baserte produksjonsprosesser har følgende karakteristikk:

- Høy produksjonshastighet av samme like produkter.
 - Høyt salgsvolum
 - Effektive maskiner / roboter med lave omstillingsider
- 

Kontinuerlig: ([Kontinuerlig-basert produksjon](#))

Kontinuerlig-baserte produksjonsprosesser har følgende karakteristikk:

- Produktene ”flyter” gjennom produksjonen.
 - Bedriftene prøver u unngå stopp i produksjonen.
- 

Kapittel 2

Demand Management



Figur 2.1: Demand Management

2.1 Oversikt

Definisjon: (Demand Management)

”Demand Management” står for styring av [etterspørsel](#) og handler om å ha **kontroll** på salg og etterspørsel.

■



- **styring** av etterspørsel
- **kontroll** på salg og etterspørsel

Figur 2.2: Demand Management.

Hva er *forskjellen* mellom [salg](#) og [etterspørsel](#)?

- ^{faktisk}
[Salg](#): de [faktiske](#) ordrene vi har eller har hatt
- [Etterspørsel](#): de ordrene vi [tror](#) vi kommer til å ha

2.1.1 Verdensbildet (globalt)

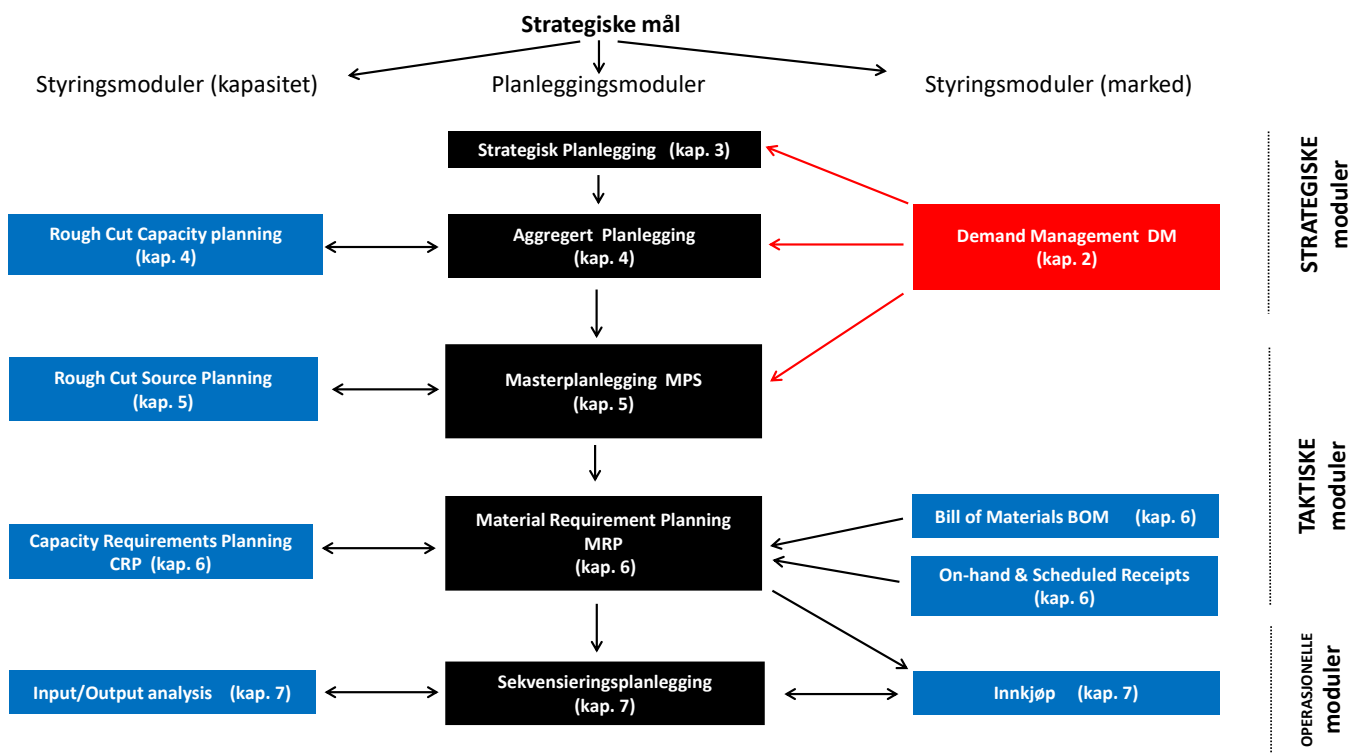
Demand Management modulen blir sett på som en strategisk modul siden den gir vesentlig input til strategiske moduler som (røde piler figur 2.3)

- Aggregert (=sammenslått) Planlegging
- Strategisk Planlegging

men også taktiske moduler som (gule piler figur 2.3)

- Masterplanlegging
- MRP planlegging

Demand Management er en **styringsmodul**: (rød boks)



Figur 2.3: Verdensbildet.

Demand Management gir input til strategiske planleggingsmoduler og er således en *styringsmodul*.

2.2 Demand Management - hovedaktiviteter

Demand Management (DM) gjør en av de viktigste jobbene i det totale MPC-systemet. DM håndterer hovedaktivitetene:

- prognostisering av fremtidig etterspørsel
- oppdatering av innkommende ordrer

og er således den drivende faktoren i hele MPC-systemet.

DM hovedaktiviteter:

- prognostisering
- oppdatering



DM aktiviteter:

- innhente markedinfo
- legge inn nye ordrer
- konfigurere produkter
- legge til kundespesifikasj.
- kommunisere med kunder

Figur 2.4: Demand Management - aktiviteter.

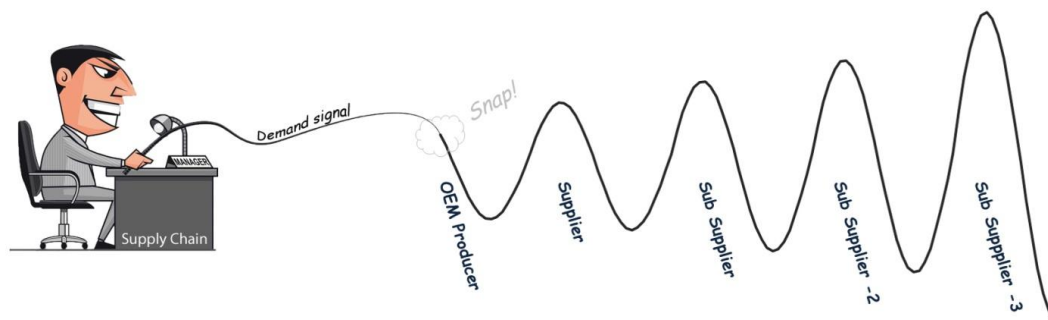
Hovedaktiviteter: ([generelle](#))

Generelle aktiviteter under Demand Management er:

- innhente markedsinformasjon
 - prognoser
 - relevant kundeinformasjon
 - informasjon om kampanjer eller prisendringer
 - markedsundersøkelser
 - etc.
- legge inn nye ordrer
- konfigurere produkter
- legge til spesielle kundespesifikasjoner
- kommunisere med kunder

Definisjon: (bullwhipeffekten - oksepiskeeffekten)

Jo større feil man gjør i etterspørselsprognosene, desto større konsekvenser får dette på lavere nivå i produksjonen. Denne effekten kalles gjerne ”**bullwhipeffekten**” - oksepiskeeffekten.



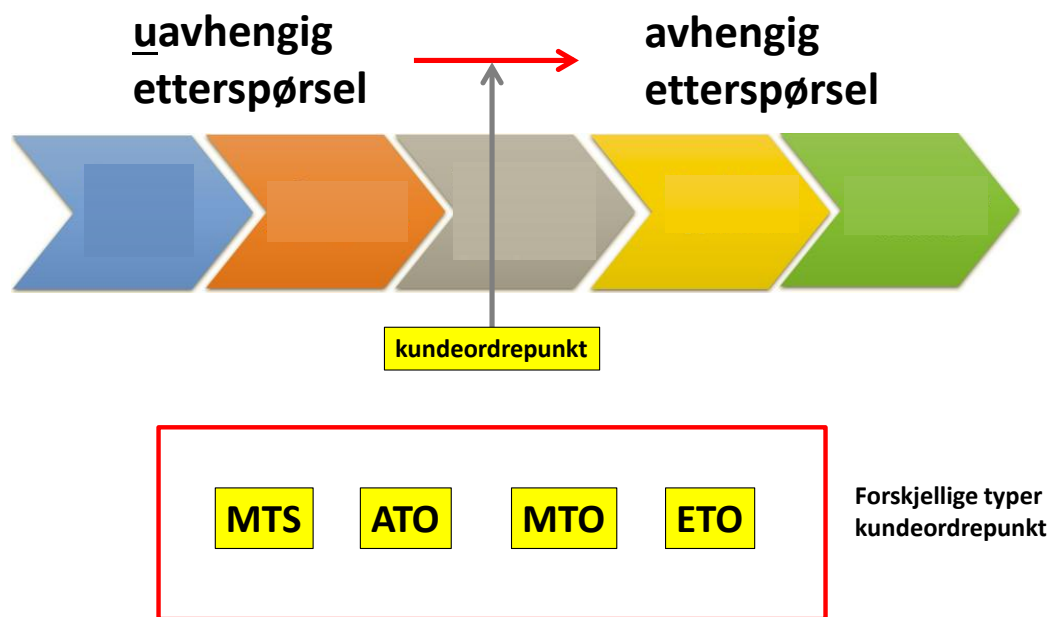
Figur 2.5: Bullwhipeffekten.

Når man svinger pisken, smeller det skikkelig i enden, det samme kan man tenke seg i prognostisering - en liten sving på etterspørselen smeller skikkelig i enden av produksjonen.

Årsaken kommer av at når informasjonen strømmer bakover i systemet, forringes informasjonen og usikkerheten øker. Man kan også sammenlikne situasjonen med *sladder* - jo flere ledd som får høre sladderet, desto mer tullete blir sladderet.

2.2.1 Kundeordrepunkt - aktiviteter

Vi husker fra kapittel 1 at implementasjonen av et MPC-system er svært avhengig av kundeordrepunktet (avsnitt 1.7 MTS, ATO, MTO/ETO). Med andre ord, hvilke aktiviteter som gjøres under Demand Management er avhengig av [kunderordrepunktet](#) til bedriften.



Figur 2.6: Kundeordrepunkt - noen forskjellige typer.

La oss se på noen forskjellige typer kundeordrepunkt:

1) Make-To-Stock: (MTS)

I en Make-To-Stock situasjon oppfylles **kundeordrene kun fra lager**. Kundeordrepunktet er dermed **ferdigvarelageret**.

- Utarbeide prognoser av ferdigvarer, både aggregerte (=sammenslått) produktfamilier og enkeltprodukter
- Utarbeide planer for lagernivå og estimere sikkerhetslager
- Styre kundeservice nivå

2) Assmeble-To-Order: (ATO)

I en Assemble-To-Stock situasjon, oppfylles kundeordrene ved monteringen av et sett med standardkomponenter spesifisert av kunden. Kunderordrepunktet er dermed **komponentlagrene**.

- Utarbeide prognoser for standardkomponenter - både aggregert (=sammenslått) og enkeltvis.
- Bestemme leveringsdato, siden det kreves en sluttmontering før produktet kan leveres
- Kontrollere at leveringsdato oppfylles, og kommunisere til kunden ved eventuelle endringer

3) Make-To-Order: (Engineer-To-Order) (MTO / ETO)

I en Make-To-Order situasjon, oppfylles kundeordrene ved at ingeniører utarbeider en produktstruktur etter kundens ønske. Kunden har et sett med råvarer tilgjengelig, som benyttes til å spesifisere det ønskede produktet.

- Utarbeide prognoser for ordrer - utarbeide produkt spesifikasjoner som sendes til ingeniørene.
- Bestemme leveringsdato og oppdatere status for levering
- Bestemme og justere behovet for ingeniørkapasitet etter kundens behov
- Bestemme bruk av leverandører og råmateriale (kun ETO)

2.3 Prognostisering

Definisjon: ([prognostisering](#))

Prognostisering er en teknikk for å utnytte tilgjengelig informasjon til å [forutsi](#) hva som vil skje i [fremtiden](#).

■



Prognostisering – forutsi fremtiden

Figur 2.7: Prognostisering.

Hvorfor trenger vi prognoser?

Make-To-Stock/Assembly-To-Order:

Her er det vesentlig å ikke sitte med hverken for mye eller for lite lager.

For mye lager gir høye lagerkostnader i tillegg til mulighet for ukurans (holdbarhetsdato).

For lite lager gir tapt salg eller misfornøyde kunder (siden de må vente på noe de hadde forventet å fått umiddelbart).

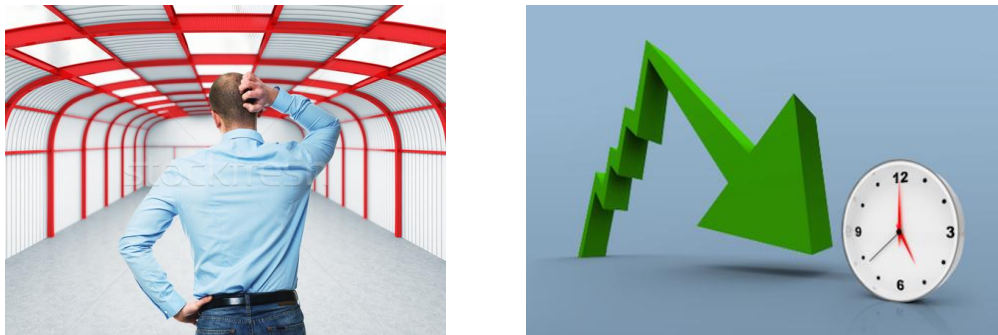
Jo bedre prognosene er, desto mer treffsikkert blir lagernivået.



Figur 2.8: Dårlige prognoser kan gi lagerproblemer.

Make-To-Order/Engineer-To-Order:

Her prognostiseres ikke ferdigvarer eller halvfabrikater, men råvarer. Men ved MTO, er *ledetiden* også en svært viktig faktor. Jo dårligere forberedt man er, desto lengre blir ledetiden (unødvendig ekstra ledetid). Ved å prognostisere innkommende ordrer bedre, kan vi forberede oss bedre, både på strategisk og taktisk nivå og dermed senke ledetiden.



Figur 2.9: Dårlige prognoser kan gi forsinkelser pga. ledetider.

2.3.1 To typer prognosemetoder

To typer prognosemetoder: ([prognostisering](#))

Vi skiller gjerne mellom to måter å prognostisere på :

- **1)** *Kvalitative* metoder (data/tall forligger **ikke/i liten grad**)
- **2)** *Kvantitative* metoder (data/tall foreligger)

1) Kvalitative metoder:

Kvalitative metoder benyttes ofte når det [ikke](#) foreligger tilgjengelige [data](#) eller dersom prognosehorisonten er lang i forhold til eksisterende data. I tillegg kan det være spesielle situasjoner som simpelthen ikke har forekommet i det historiske datasettet.

Eksempel: (kvalitative prognosemetoder)

- Markedsundersøkelser
- Ekspertpanel
- Delphi metoden - en gruppe eksperter skal gi deres estimat *uten påvirkning* av de andre i gruppen
- Klassifisert gjetning

Vi går ikke nærmere inn på kvalitative metoder i dette kurset.



2) Kvantitative metoder:

Kvantitative metoder benyttes når det foreligger historiske **data** som **kan benyttes** for å estimere fremtidig utvikling.

Vi deler de kvantitative metodene igjen inn i to hovedklasser:

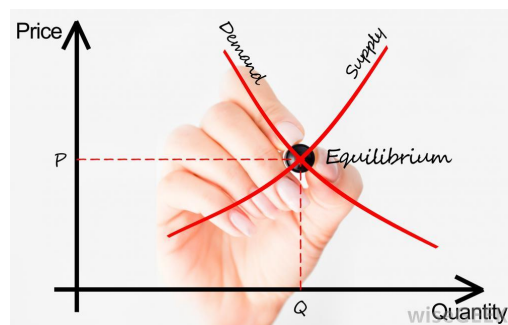
- *Kausale metoder*
- *Tidsserier*

2a) Kausale metoder:

Ved *kausale metoder* prøver vi å finne såkalte **forklaringsvariabler**, som gir en forklaring på hvorfor størrelsen vi ønsker å prognostisere oppfører seg som den gjør.

Det klassiske eksempelet er sammenhengen mellom pris etterspørsel - hvis prisen øker, så synker etterspørselen og vice versa. Vi sier da at prisen er en *forklaringsvariabel* for etterspørselen.

Vi kan ha *flere* forklaringsvariabler for en gitt størrelse. Ta for eksempel etterspørselen i eksempelet over. I tillegg til prisen, kan vi ta med *konkurrentenes pris*. Hvis deres priser øker i forhold til vår, kan vi forvente en økning i etterspørsel, og vice versa.

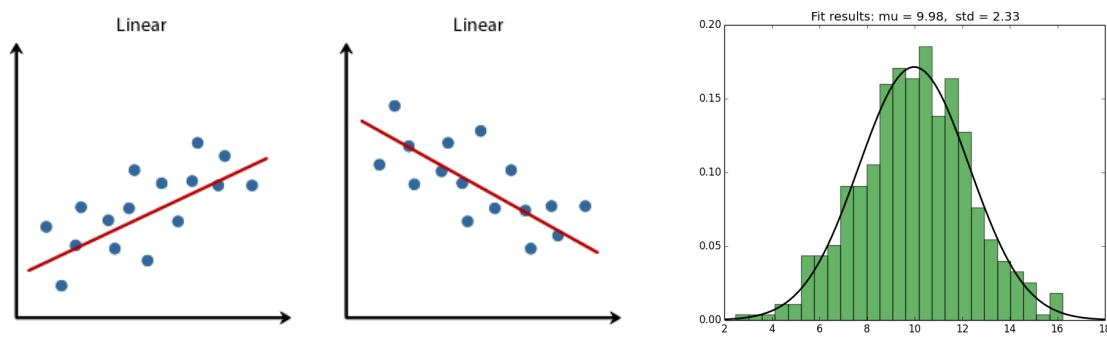


Figur 2.10: Pris og etterspørsel.

Eksempel: (kausale metoder)

- *Regresjon* - et sett med forklaringsvariabler med en hypotese hvordan disse forklaringsvariablene henger sammen. *Lineær regresjon* er det klassiske eksempelet, hvor vi antar at størrelsen er gitt som en *lineær* funksjon av et sett med forklaringsvariabler (dvs. en rett linje).
- *Distribution-fitting* - vi forsøker å bestemme den *statistiske fordelingen* som datasettet følger etter. Eksempel på en slik fordeling er *normalfordeling* eller *Poissonfordeling*.

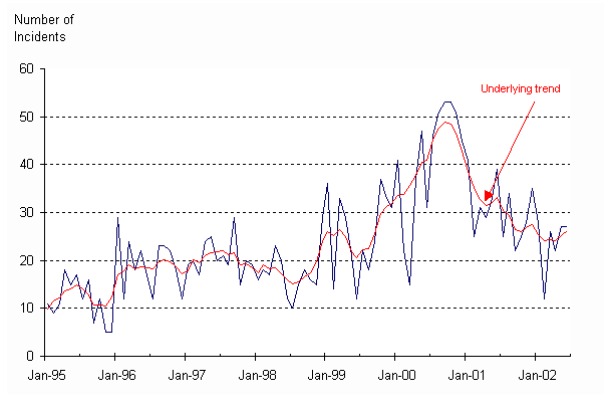
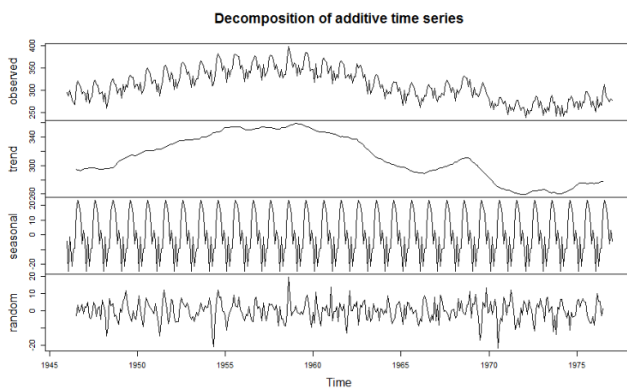
Lineær regresjon og distribution-fitting er svært aktuelt ved prognostisering, men gås ikke gjennom i dette faget, siden mye av den fundamentale teorien dekkes i faget [MAT110 Statistikk 1](#).



Figur 2.11: Lineær regresjon og “distribution fitting”.

2b) Tidsserier:

I en *tidsserie* antar vi at eneste **forklaringsvariabel** er, ja, **tiden**. Tidsserier benytter *historiske* data, for å prognostisere fremtidig utvikling.



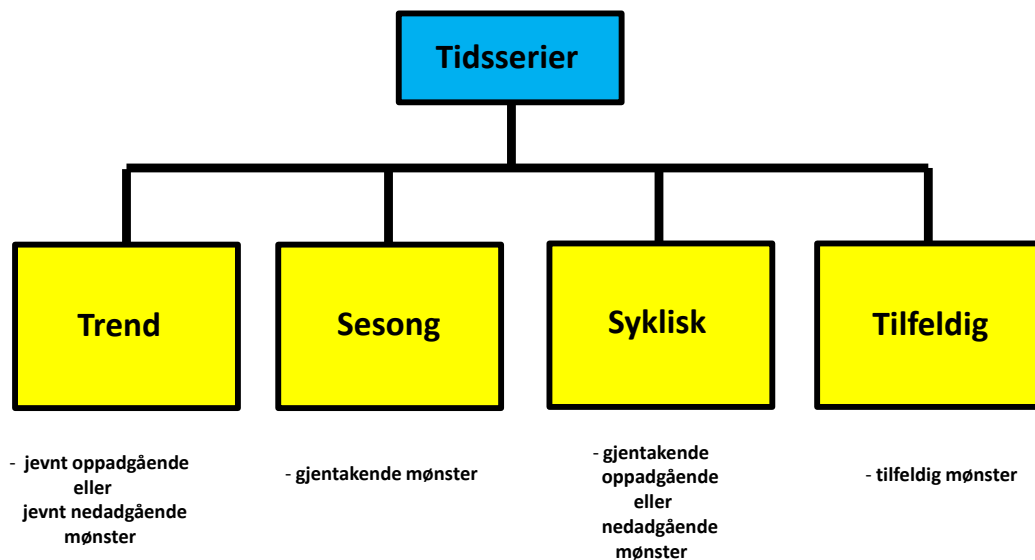
Figur 2.12: Tidsserier.

2.4 Mønster

Når vi skal lage prognoser, må vi først **alltid plote** de historiske dataene og se om vi gjenkjenner spesielle *mønstre*. Forskjellig mønster tilsier forskjellig metodikk.

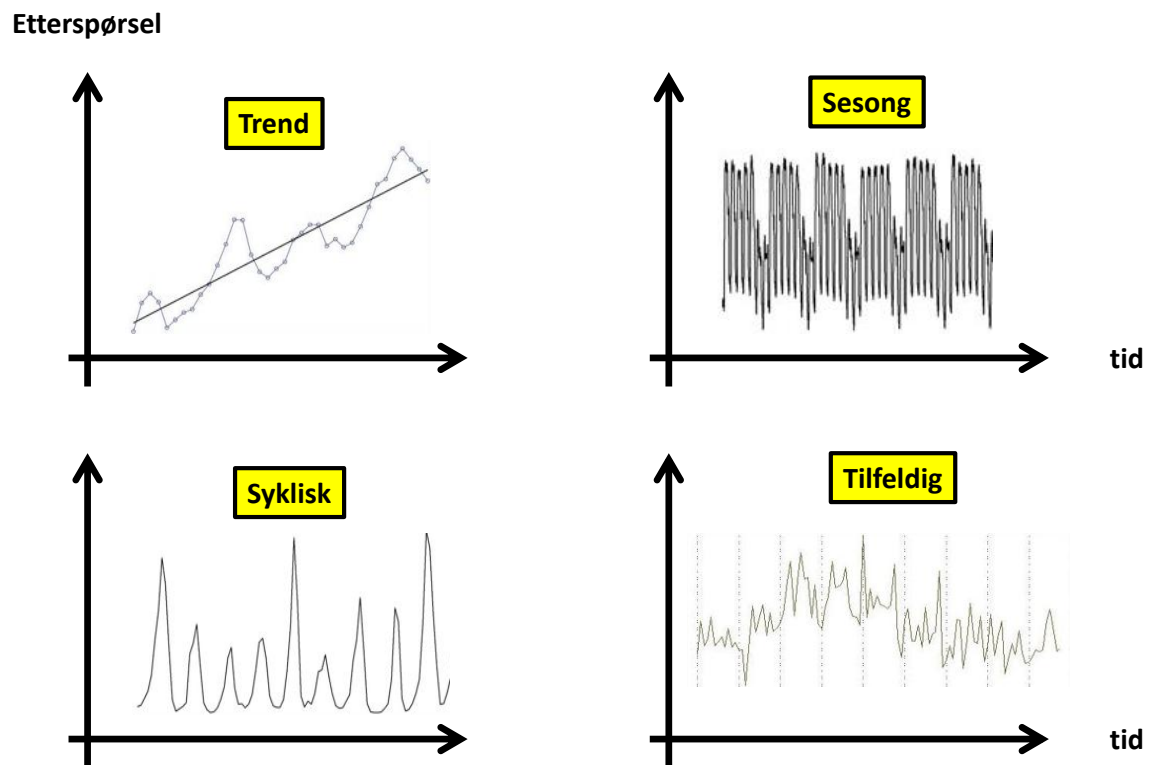
Mønster som forekommer i tidsserier:

- **Trend** - tidsserien er enten jevnt oppadgående eller jevnt nedadgående
- **Sesong** - tidsserien har gjentakende mønster for gitte tidspunkter i horisonten, for eksempel iskremsalg gjennom årstidene
- **Syklisk** - tidsserien har et gjentakende oppadgående og nedadgående mønster, men med en varierende frekvens (avstand mellom syklusene) i motsetning til sesongmønster
- **Tilfeldig** - tidsserien har et *tilfeldig* mønster, og representerer gjerne mønsteret vi får etter at vi har *fjernet* eventuelle trender, sesongavhengigheter og sykluser



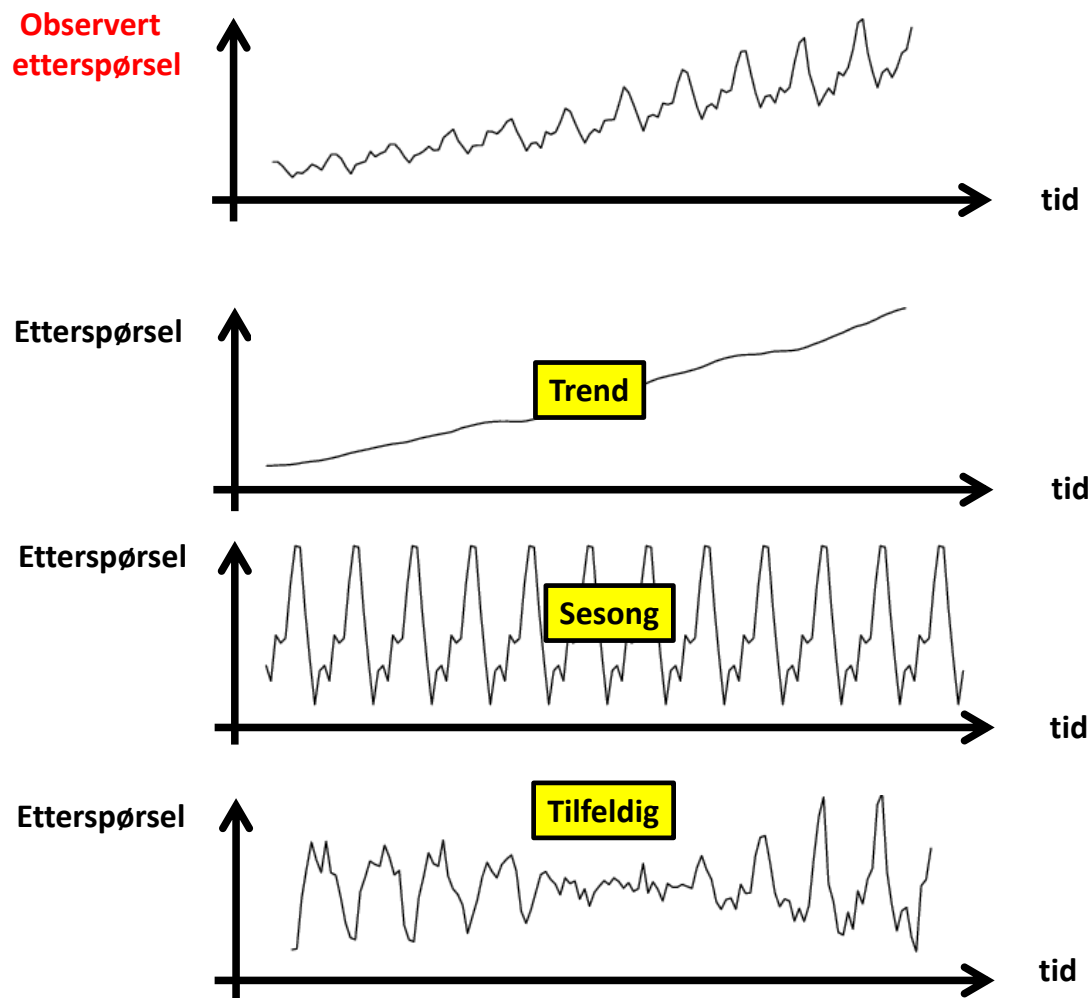
Figur 2.13: 4 forskjellige typer mønster.

Figur 2.14 illustrerer de 4 typiske mønstrene isolert sett, mens figur 2.15 viser at vi kan også ha [kombinasjoner](#) av de 4 forskjellige typene. Vi prognostiserer slike sammensatte mønstre gjerne ved å *fjerne* hvert enkelt mønster fra datasettet, slik at vi sitter igjen med det tilfeldige mønsteret.



Figur 2.14: 4 typiske mønstre - isolert sett.

Legg merke til i figur 2.15 hvordan man dekomponerer det observerte mønsteret i en trend del, en sesong del og en tilfeldig del (random).



Figur 2.15: Mønster som består både av trend og sesong.

Vi skal i resten av dette kapittelet se utelukkende på prognostisering av tilfeldig mønster.¹

¹Trend, sesong og sykliske mønster blir gjennomgått i Log500 Styringsmodeller i Logistikk.

2.5 Motivasjon: Prognostisering av tilfeldig mønster

Motivasjon: (Oskar Sylte ananasbrus)

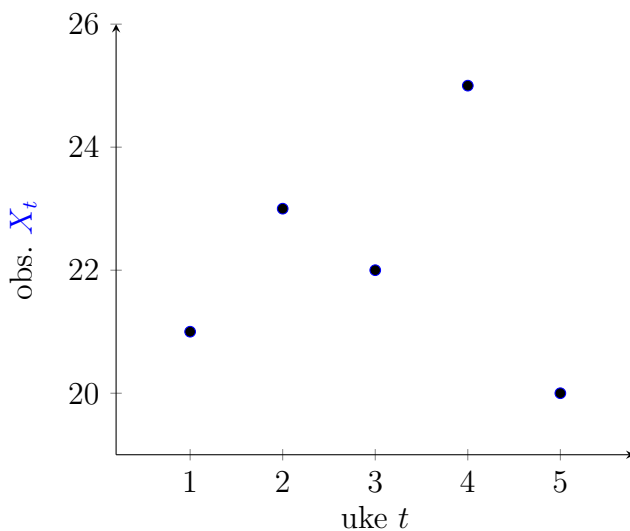
Vi innleder prognostisering av tilfeldig mønster med et motivasjonseksempel fra Oskar Sylte brusfabrikk.²

Oskar Sylte har 5 uker med historiske salgstall, som vi betegner med. $X_1, X_2, \dots, X_5$, se tabell 2.1.

UKE t	1	2	3	4	5
SALG X_t	21	23	22	25	20

Tabell 2.1: Observasjoner av salg X_t (tusen enheter per uke).

I figur 2.16 har vi plottet inn observasjonene. Vi innser raskt at vi hverken har trend, sesong eller syklisk mønster. Dermed sitter vi igjen med tilfeldig mønster.



Figur 2.16: Observasjonene X_t viser et tilfeldig mønster.

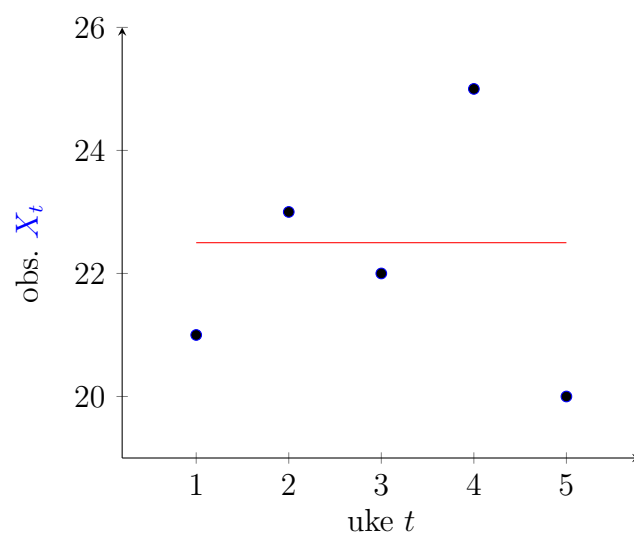
²Dette eksemplet blir en gjenganger i resten av kapittelet. Det er derfor lurt å sette seg godt inn i konteksten og symbolikken brukt.

Spørsmål:

Hva er den underliggende *modellen* for tilfeldig mønster?

Svar:

Tilfeldig mønster modelleres som en **horisontal rett linje** hvor de avvikende observasjonene modelleres som **støy**.



Figur 2.17: Observasjonene X_t har tilfeldig mønster.

Matematisk modell

Matematisk kan modellen for tilfeldig mønster uttrykkes ved:

$$X_t = C + \epsilon(t) \quad (2.1)$$

hvor

$$X_t = \text{etterspørsel etter ananas i uke } t \quad (2.2)$$

$$C = \text{den faktiske (ukjente) konstante etterspørselen etter ananas} \quad (2.3)$$

$$\epsilon(t) = \text{støyen i uke } t \text{ (avvikene rundt den røde linjen i fig. 2.17)} \quad (2.4)$$

Konstanten C er *ukjent*, og er nettopp hva vi ønsker å finne gjennom prognostisering. Hvis vi ser tilbake på figur 2.17, er C tegnet inn som en tenkt **rød** horisontal linje.

Det er støyleddet $\epsilon(t)$, som gjør at observasjonene ikke faller på den horisontale linjen.³

Prognose

Hvis vi nå tenker oss at vi skal planlegge produksjonen av ananas brus *de neste 4 ukene*, dvs uke 6, 7, 8 og 9, så trenger vi et *estimat* på hvor mye ananas vi kommer til å selge i disse ukene, med andre ord, vi må finne en **prognose** for uke 6, 7, 8 og 9.

Siden vi antar at den underliggende modellen er gitt ved likning 2.1, må vi derfor finne et estimat, F , for den ukjente konstanten C . Vi kaller F en **prognose** for det gitte datasettet med tilfeldig mønster.⁴

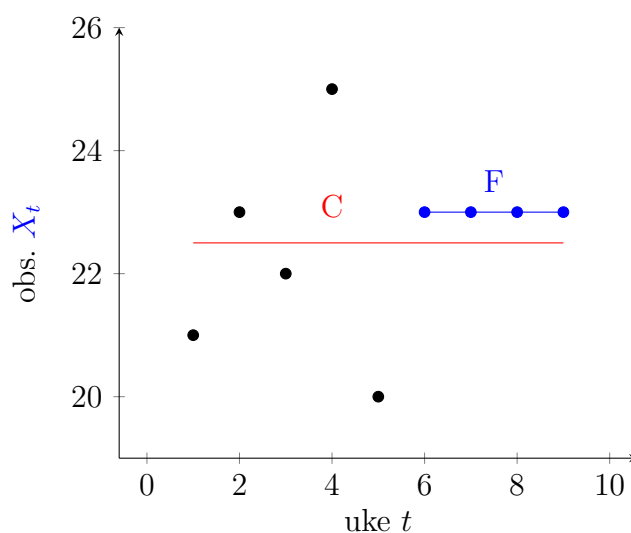
³Støyleddet $\epsilon(t)$ kalles egentlig **hvit støy** og modelleres som en **stokastisk variabel** med normalfordeling $N(0, \sigma_t)$. Dette faller dermed inn under **statistikk** og gås ikke gjennom i dette kompendiet. Mat110 Statistikk 1 introduserer disse begrepene.

⁴Vi har brukt symbolet F for prognoser, siden det heter **"forecast"** på engelsk.

Anta for eksempel at vi gjør en *kvalifisert gjetning* og tipper en prognose $F = 23$. Da sier vi egentlig at vi tror at ananassalget i uke 6, 7, 8 og 9 alle er lik 23. Vi skriver gjerne:

$$F = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 = 23 \quad (2.5)$$

I figur 2.18 har vi plottet inn prognosen F i **blått** for ukene 6, 7, 8 og 9. Legg merke til at prognosen *ikke* er sammenfallende med den ukjente konstanten C . Dette er helt naturlig siden F kun er et *estimat* for C .



Figur 2.18: Prognosen $F = 23$ er i **blått**, og det faktiske (ukjente) nivået C i **rødt**.

Vi er nå klar for en generell beskrivelse av en prognose for datasett som har tilfeldig mønster.⁵

⁵NB: Vi kommer heretter *ikke* til å tegne inn den faktiske ukjente konstanten C i koordinatsystemet, men man må *huske* at den finnes.

2.6 Generelt: Prognostisering av tilfeldig mønster

Prinsipp: (tilfeldig mønster)

Dersom ^{ofte salgsdata} observasjonene $X_1, X_2, \dots, X_T$ følger et tilfeldig mønster, vil alle prognosene F_t ha samme verdi F , dvs.:

$$F = F_{T+1} = F_{T+2} = \dots = F_{T+S} \quad (2.6)$$

hvor

$$F = \text{prognosen for periodene } T+1, T+2, \dots, T+S, \text{ forecast} \quad (2.7)$$

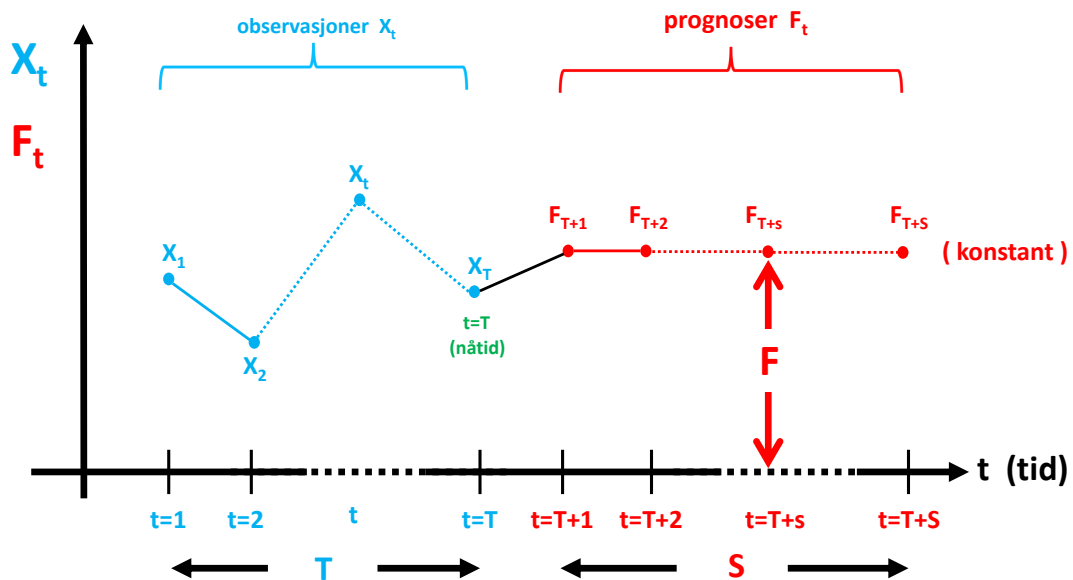
$$X_t = \text{observasjon i periode } t, \text{ hvor } 1 \leq t \leq T \quad (2.8)$$

$$T = \text{antall observasjoner} \quad (2.9)$$

$$S = \text{antall perioder som vi prognostiserer, hvor } 1 \leq s \leq S \quad (2.10)$$

dvs. prognoser til et tilfeldig mønster er konstant.

■



Figur 2.19: Prognose F_t for tilfeldig mønster.

Eksempel: (Oskar Sylte - observasjoner og prognoser)

Vi skal nå bli kjent med de generelle begrepene ved prognostisering som vi definerte i likningene (2.6) - (2.10).

Vi tar opp igjen eksempelet fra avsnitt 2.5 på side 59, som omhandlet Oskar Sylte og salg av ananasbrus.

Oskar Sylte hadde 5 uker med historiske salgstall, dvs. $X_1, X_2, \dots, X_5$ fra tabell 2.1. De ønsket å prognostisere salgstallene for de neste 4 ukene, dvs. de ønsker å finne:

$$F_6 = ? \quad \text{prognose uke 6} \quad (2.11)$$

$$F_7 = ? \quad \text{prognose uke 7} \quad (2.12)$$

$$F_8 = ? \quad \text{prognose uke 8} \quad (2.13)$$

$$F_9 = ? \quad \text{prognose uke 9} \quad (2.14)$$

De identifiserte at mønsteret var tilfeldig og fastsatte en prognose

$$\underline{\underline{F = 23}} \quad (2.15)$$

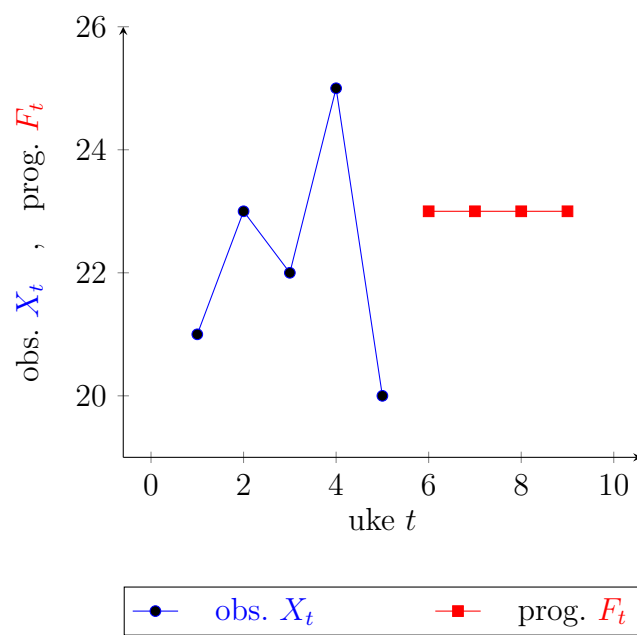
basert på kvalifisert gjetning.



Figur 2.20: Oskar Sylte.

- a) Finn prognosene F_6 , F_7 , F_8 og F_9 .
- b) Hvor mange observasjoner har vi? Dvs finn T .
Hvor mange perioder skal vi prognostisere?. Dvs Finn S .

Figur viser hvordan situasjonen i oppgaven ser ut.



Løsning:

a) Siden vi bestemte fra grafen vi plottet i figur at observasjonene X_t følger et tilfeldig mønster, kan vi umiddelbart sette at prognosene F_t er lik et gitt nivå F :

$$\underline{\underline{F = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 = 23}} \quad (2.16)$$

b) Vi har totalt $T = 5$ observasjoner. Vi fant totalt $S = 4$ prognoser.

■

2.7 Metoder for prognostisering av tilfeldig mønster

Metoder: (tilfeldig mønster)

Vi skal gjennomgå følgende prognoser for datasett X_t med tilfeldig mønster:

- Random Walk, RW
- glidende gjennomsnitt, $MA(n)$ ⁶
- vektet glidende gjennomsnitt, $WMA(\theta_n, n)$ ⁷ med vindu n
- eksponensiell glatting, $ES(\theta)$ ⁸

■



Figur 2.21: Metoder for prognostisering.

⁶ $MA(n)$ = Moving Average med vindu n .

⁷ $WMA(\theta_n, n)$ = Weighted Moving Average med vektor $\theta_1, \dots, \theta_n$ og vindu n .

⁸ $ES(\theta)$ = Exponential Moving Average med glattingsparameter θ .

Dette er bare *noen* av de *enkleste* metodene som benyttes. Men ofte er enkelheten en god strategi.

Et viktig [prinsipp](#) i prognostisering er å prognostisere akkurat det man har behov for og ikke mer.

Vi skal nå bli kjent med disse metodene i de neste avsnittene. Vi starter med den enkleste, nemlig [Random Walk](#).

2.7.1 Random Walk, RW

Definisjon: (RW - Random Walk, prognosemetode)

Anta at vi har $\overbrace{\text{observasjonene } X_1, X_2, \dots, X_T}^{\text{ofte salgsdata}}$. Random Walk lar prognosen F være lik verdien på siste observasjon, dvs.:

$$F = X_T \quad (2.17)$$

hvor

$$F = F_{T+1} = F_{T+2} = \dots = F_{T+S}, \quad (2.18)$$

= prognosen for periodene $T+1, T+2, \dots, T+S$, *forecast*

$$X_t = \text{observasjon i periode } t \quad (2.19)$$

$$T = \text{antall observasjoner} \quad (2.20)$$

$$S = \text{antall perioder som vi prognostiserer, hvor } 1 \leq s \leq S \quad (2.21)$$

■

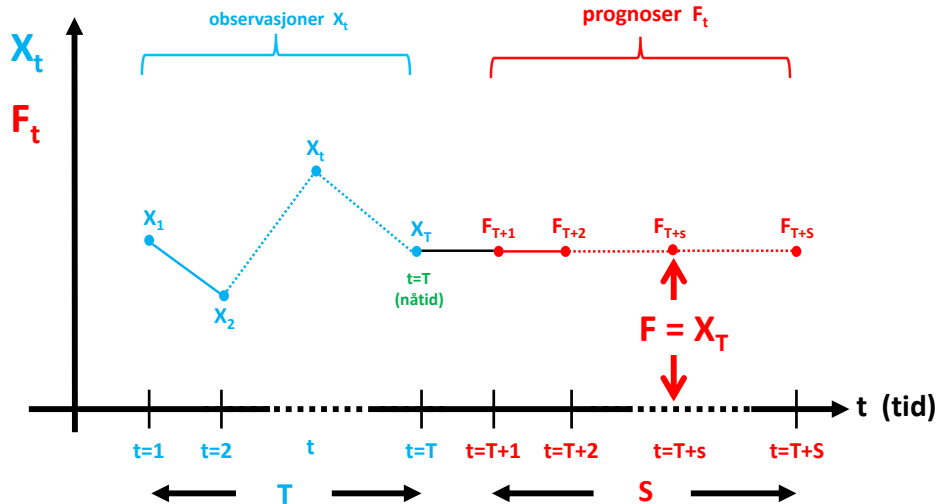
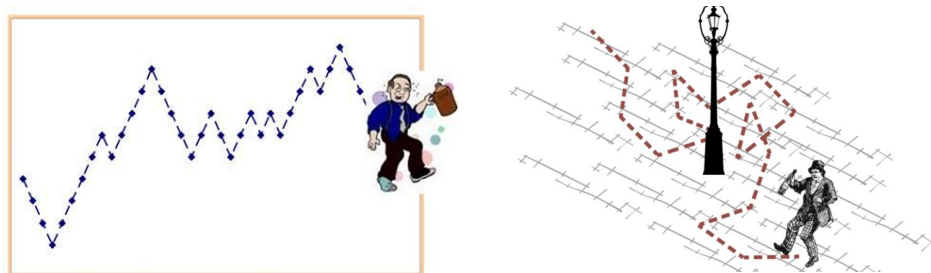


Figure 2.22: Prognose F_t for Random Walk, RW .

Kommentarer:

- Metoden kalles "Random Walk", eller "*tilfeldig gange*", fordi man kan tenke seg at den modellerer en situasjon hvor en (sterkt) beruset person står i et punkt og vakler et *lite* skritt i en eller annen tilfeldig retning, deretter vakler personen et lite steg i en annen tilfeldig retning og slik fortsetter han. Se figur 2.23. Hvor personen til slutt ender opp, er rent tilfeldig.
- Metoden er god for mønster hvor hver ny observasjon bare endrer seg *litt* i forhold til forrige observasjon.⁹
- Vi trenger *ikke spare* på *historiske data* etterhvert som vi oppdaterer prognosen.



Figur 2.23: Random Walk.

⁹Et eksempel på et slikt mønster er utviklingen av *aksjepriser* over en *kort* tidsperiode.

Eksempel: (Oskar Sylte - [Random Walk](#), prognosemetode)

La oss igjen se på eksemplet med Oskar Sylte fra avsnitt 2.5 på side 59 Oskar Sylte hadde følgende observasjoner av etterspørsel av ananasbrus i uke 1, 2, 3 og 4, se tabell 2.1:

UKE t	1	2	3	4	5
SALG X_t	21	23	22	25	20

Tabell 2.2: Observasjoner av salg X_t (tusen enheter per uke).

a) Finn de **historiske**¹⁰ prognosene $\overbrace{F_2, F_3, F_4 \text{ og } F_5}^{\text{historiske prognoser}}$. Bruk Random Walk metoden.

b) Finn prognosene $\overbrace{F_6, F_7, F_8 \text{ og } F_9}^{\text{prognose over et kvartal } (S = 4)}$. Bruk Random Walk metoden.

c) Tegn grafen for observasjonene $X_1, \dots, X_5$.
Tegn også grafen til de *historiske* prognosene $F_2, \dots, F_5$.
Tegn i tillegg grafen til prognosene $F_5, F_6, \dots, F_9$.

Alt dette i en og samme figur. Oppdater prognosene for hver uke.



Figur 2.24: Oskar Sylte.

¹⁰En **historisk** prognose er den prognosen vi hadde fått hvis vi går **tilbake** i tid.

Løsning:

a) Vi skal finne de historiske prognosene $F_2, \dots, F_5$. Når vi skal beregne F_2 , antar vi derfor at vi kun har observasjon X_1 , når vi skal beregne F_3 antar vi at vi har observasjonene X_1 og X_2 og slik fortsetter vi frem til F_5 .

Vi bruker **Random Walk** metoden. RW sier at neste prognose er bare lik siste observasjon. Dermed blir de historiske prognosene F_t :

$$\underline{\underline{F_2}} = X_1 = \underline{\underline{21}} \quad (2.22)$$

$$\underline{\underline{F_3}} = X_2 = \underline{\underline{23}} \quad (2.23)$$

$$\underline{\underline{F_4}} = X_3 = \underline{\underline{22}} \quad (2.24)$$

$$\underline{\underline{F_5}} = X_4 = \underline{\underline{25}} \quad (2.25)$$

b) Først må vi finne mønsteret for de observasjonene X_t . Fra grafen i figur 2.18 innså vi at datasettet X_t følger et

tilfeldig mønster

Derfor vil alle prognosene for neste kvartal, dvs. $1 \leq s \leq 4$, ha samme verdi F ifølge prinsippet for tilfeldig mønster i lign.(2.5):

$$\overset{\text{lign.(2.5)}}{F} \underline{\underline{=}} F_6 = F_7 = F_8 = F_9 \text{ ,} \quad (2.26)$$

dvs. alle prognoser er konstant.

Det er flere mulige metoder for prognostisering av tilfeldig mønster, se side 67. Dersom vi nå bruker Random Walk som metode så vet vi fra definisjonen av Random Walk i lign.(2.17) at prognosen F er siste observasjon, som er $X_5 = 20$:

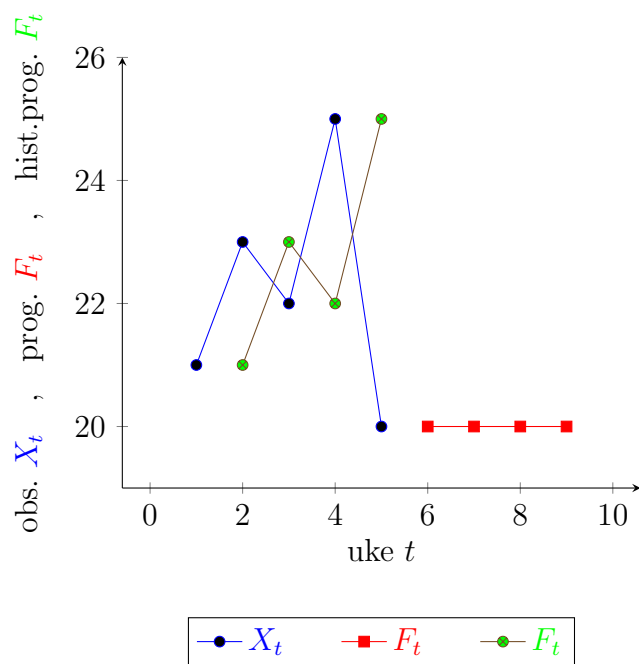
$$F = \underbrace{X_5 \stackrel{\text{lign.(2.17)}}{=} 20}_{\text{siste observasjon, RW}} , \quad (2.27)$$

i antall tusen enheter 0.5 liter ananasbrus per uke. Alt i alt:

$$\underline{\underline{F = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 = X_5 = 20}} \quad (2.28)$$

c) I denne oppgaven blir vi bedt om å tegne tre grafer:

- observasjonene $X_1, X_2, \dots, X_5$
- historiske prognoser F_2, F_3, F_4 og F_5
- prognoser $F_6, F_7, \dots, F_9$



Figur 2.25: Observasjoner X_t , historiske prognoser F_t og prognoser F_s .

■

2.7.2 Glidende gjennomsnitt $MA(n)$

Definisjon: ($MA(n)$ - glidende gjennomsnitt, prognosemetode)

Anta at vi har $\overbrace{\text{observasjonene } X_1, X_2, \dots, X_T}^{\text{ofte salgsdata}}$.

Glidende gjennomsnitt er gjennomsnittet over de n siste observasjonene X_t :

$$F = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{T-n+t} \quad (2.29)$$

hvor

$$F = F_{T+1} = F_{T+2} = \dots = F_{T+S} \quad (2.30)$$

= prognosen for periodene $T+1, T+2, \dots, T+S$, *forecast*

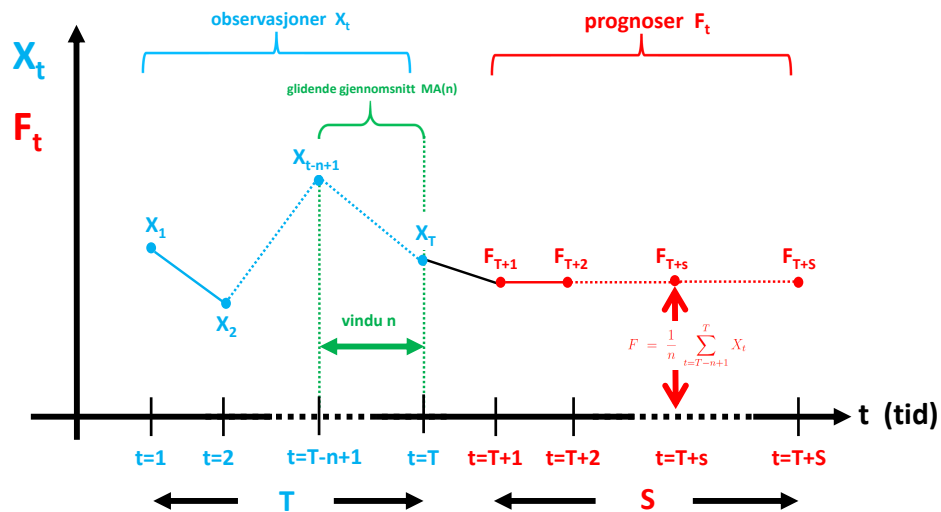
$$X_t = \text{observasjon i periode } t, \text{ hvor } 1 \leq t \leq T \quad (2.31)$$

$$T = \text{antall observasjoner} \quad (2.32)$$

$$S = \text{antall perioder som vi prognostiserer} \quad (2.33)$$

$$n = \text{antall perioder som vi baserer gjennomsnittet på} \quad (2.34)$$

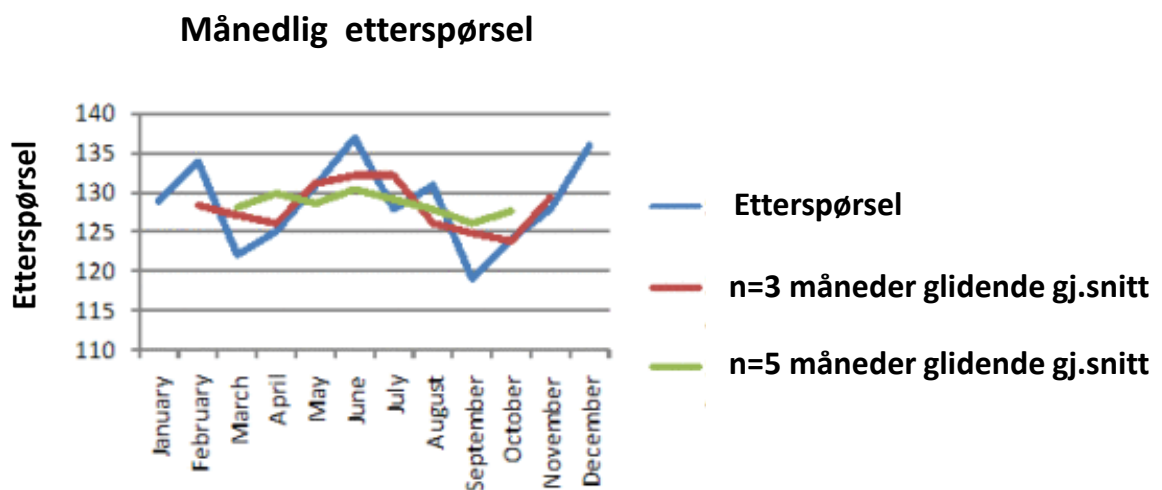
■



Figur 2.26: Prognose F_t for glidende gjennomsnitt $MA(n)$ med vindu n .

Kommentarer:

- Metoden kalles ”*glidende gjennomsnitt*” - Moving Average - fordi det kan assosieres med et vindu som kommer ”glidende” forbi.
- Metoden representerer en *familie* av prognoser siden man kan selv velge størrelsen på vinduet n .
- Metoden bruker n observasjoner i det initielle steget.
- Metoden brukes ofte som initielt steg i mer kompliserte metoder, spesielt i situasjoner med sesongvariasjoner, hvor avstanden mellom sesongene er n perioder.
- Hvis vi setter vinduet $n = T$, får vi det ”vanlige” gjennomsnittet, siden vinduet er like stort som antall observasjoner.¹¹
- I figur 2.27, ser vi at glidende gjennomsnitt jevner ut variasjonene i datasettet. Vi sier gjerne at prognosen ”glatter” ut variasjonene. Jo større vinduet n blir, dess mindre har hver enkelt observasjon og si. Glattingen av variasjonene *øker* dermed for økende lengde på vinduet n .



Figur 2.27: Glidende gjennomsnitt $MA(n)$.

¹¹Det vil si at $F_{T+s} = \bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$, dvs. det ”vanlige” gjennomsnittet.

Eksempel: (Oskar Sylte - **glidende gjennomsnitt** $MA(n)$, prognosemetode)

La oss atter en gang se på eksemplet med Oskar Sylte fra side 59. Oskar Sylte hadde følgende observasjoner av etterspørsel av ananasbrus i uke 1, 2, 3, 4 og 5, se tabell 2.3:

UKE t	1	2	3	4	5
SALG X_t	21	23	22	25	20

Tabell 2.3: Observasjoner av salg X_t (tusen enheter per uke).

- a) Hva slags mønster følger observasjonene til salget X_t , hvor $1 \leq t \leq T$? ($T = 5$)
Hva kan man si om prognosene F_6 , F_7 , F_8 og F_9 ?
- b) Finn en tallverdi for de historiske prognosene F_4 og F_5 , dersom vi bruker **glidende gjennomsnitt** $MA(n = 3)$.
- c) Finn en tallverdi for prognosene F_6 , F_7 , F_8 og F_9 dersom vi bruker **glidende gjennomsnitt** $MA(n = 3)$.
- d) Tegn, i en og samme figur, grafene til
- observasjonene til salget X_t
 - prognosene F_3 , F_4 , F_5 og F_6 , ... , F_9 med glidende gj.snitt $MA(n = 3)$ fra oppg. b og c



Figur 2.28: Oskar Sylte.

Løsning:

a) Siden observasjonene til salget X_t følger et tilfeldig mønster, vil alle prognosene ha samme verdi F , se lign.(2.16):

$$\underline{\underline{F}} = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 \quad (2.35)$$

dvs. alle prognoser er konstant.

b) Vi bruker glidende gjennomsnitt $MA(n = 3)$ med vindu $n = 3$ for å beregne den historiske prognosen F_4 , hvor $T = 3$;

$$\underline{\underline{F_4}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^3 X_{3-3+t} = \frac{1}{3} \sum_{t=1}^3 X_t = \frac{1}{3} (21 + 23 + 22) = \underline{\underline{22}} \quad (2.36)$$

Tilsvarende beregnes F_5 med $T = 4$:

$$\underline{\underline{F_5}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{4-3+t} = \frac{1}{3} \sum_{t=1}^3 X_{t+1} = \frac{1}{3} (23 + 22 + 25) = \underline{\underline{23.33}} \quad (2.37)$$

c) Glidende gjennomsnitt $MA(n = 3)$ og $T = 5$:

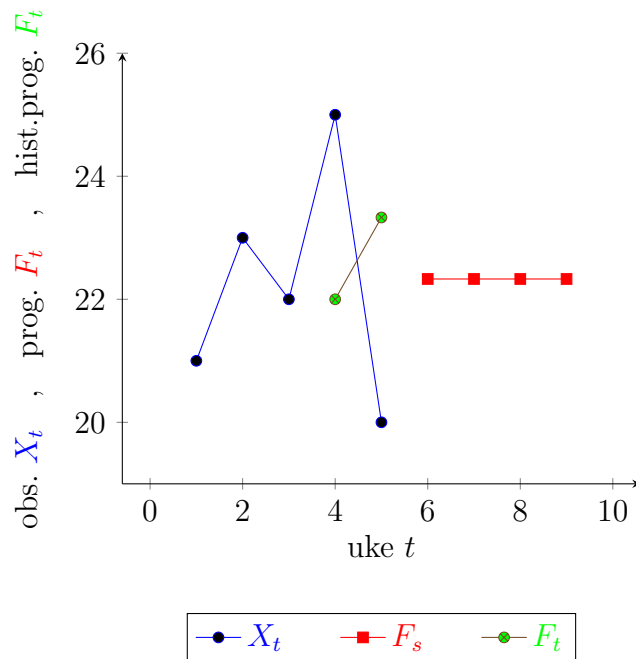
$$\underline{F} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{5-3+t} = \frac{1}{3} \sum_{t=1}^3 X_{t+2} = \frac{1}{3} (22 + 25 + 20) = \underline{\underline{22.33}} \quad (2.38)$$

Prognosene for de neste 4 periodene, $1 \leq s \leq 4$, er gitt dermed gitt ved:

$$\underline{\underline{F = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 = 22.33}} \quad (2.39)$$

Legg merke til at siden vi bruker $n = 3$ observasjoner i det initielle steget. Vi har bare prognoser for de tre siste observasjonene.

d) Vi tegner grafen til observasjonene X_t , de historiske prognosene F_4 og F_5 samt prognosene $F_6, \dots, F_9$ med **glidende gjennomsnitt $MA(n = 3)$** i en og samme figur:



Figur 2.29: Observasjoner X_t , prognoser F_t og historiske prognoser F_t med $MA(n = 3)$.

Figur 2.29 viser prognosene fra glidende gjennomsnitt med vindu $n = 3$. Vi plottet også inn to historiske prognosene $F_4 = 22$ og $F_5 = 23.33$. Hensikten er her kun å se hvordan prognosen utvikler seg gjennom de historiske observasjonene.

■

2.7.3 Vektet glidende gjennomsnitt med vindu n , $WMA(\theta_t, n)$

Motivasjon: (vektet glidende gjennomsnitt)

Før vi skriver opp definisjonen på vektet glidende gjennomsnitt, gir vi en liten motivasjon for metoden, siden det nå begynner å bli komplisert.

Målet med prognostisering er å benytte historiske observasjoner for å lage fremtidige prognoser.

Hvordan vektlegger vi de historiske observasjonene?

Er de gamle observasjonene *mindre* aktuelle enn de nye?



Figur 2.30: Vekting.

1) Vekting i Random Walk **RW**: (**Oskar Sylte**)

La oss se hvordan vi *vektlegger* de historiske observasjonene i Sylte-eksempelet for Random Walk fra avsnitt 2.7.1:

$$F \stackrel{\text{lign. (2.17)}}{=} X_5 \quad (2.40)$$

Vi kan si at vi *kun* vektlegger **siste** observasjon, X_5 og ser vekk ifra de eldre observasjonene X_1, X_2, X_3 og X_4 :

$$F = X_5 = 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 1 \cdot X_5 \quad (2.41)$$

$$\equiv \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \theta_3 X_3 + \theta_4 X_4 + \theta_5 X_5 \quad (2.42)$$

Observasjonene X_1 til X_5 har dermed følgende **vekter**:

$$\theta_1 = 0, \quad \text{første observasjon har vekt } 0 \quad (2.43)$$

$$\theta_2 = 0, \quad \text{andre observasjon har vekt } 0 \quad (2.44)$$

$$\theta_3 = 0, \quad \text{tredje observasjon har vekt } 0 \quad (2.45)$$

$$\theta_4 = 0, \quad \text{fjerde observasjon har vekt } 0 \quad (2.46)$$

$$\theta_5 = 1. \quad \text{siste observasjon har vekt } 1 \quad (2.47)$$

Legg merke til at **summen** av vektene er lik 1, dvs. $\sum_{t=1}^5 \theta_t = 1$.

2) Vekting i glidende gjennomsnitt $WMA(\theta_n, n)$: (Oskar Sylte)

La oss se hvordan vi *vektlegger* de historiske observasjonene i Sylte-eksempelet for glidende gjennomsnitt med vindu $n = 3$, dvs. likning (2.38):

$$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{3} \sum_{t=1}^3 X_{t+2} = \frac{1}{3} (22 + 25 + 20) = \underline{\underline{22.33}} \quad (2.48)$$

Vi kan si at vi *kun* vektlegger de *tre siste* observasjonene, X_3, X_4 og X_5 og ser vekk ifra de eldre observasjonene X_1 og X_2 :

$$F = \frac{1}{3} (22 + 25 + 20) \quad (2.49)$$

$$= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \frac{1}{3} \cdot X_3 + \frac{1}{3} \cdot X_4 + \frac{1}{3} \cdot X_5 \quad (2.50)$$

$$\equiv \theta_1 \cdot X_1 + \theta_2 \cdot X_2 + \theta_3 \cdot X_3 + \theta_4 \cdot X_4 + \theta_5 \cdot X_5 \quad (2.51)$$

Observasjonene X_1 til X_5 har dermed følgende *vekter*:

$$\theta_1 = 0, \quad \text{første observasjon har vekt } 0 \quad (2.52)$$

$$\theta_2 = 0, \quad \text{andre observasjon har vekt } 0 \quad (2.53)$$

$$\theta_3 = 1/3, \quad \text{tredje observasjon har vekt } 1/3 \quad (2.54)$$

$$\theta_4 = 1/3, \quad \text{fjerde observasjon har vekt } 1/3 \quad (2.55)$$

$$\theta_5 = 1/3. \quad \text{siste observasjon har vekt } 1/3 \quad (2.56)$$

Vi vektlegger med andre ord de tre siste observasjonene likt, mens vi glemmer de eldre observasjonene. Heretter ser vi bort fra vektene som er 0. Glidende gjennomsnitt med vindu $n = 3$ har dermed kun *tre* vekter: $1/3, 1/3$ og $1/3$,

Legg merke til at *summen* av vektene er lik 1:

$$\sum_{t=1}^5 \theta_t = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 0 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \quad (2.57)$$

■

Definisjon ($WMA(\theta_n, n)$ - vektet glidende gjennomsnitt med vindu n , prognosemetode)

Anta at vi har $\overbrace{\text{ofte salgsdata}}^{\text{}} \underbrace{\text{observasjonene } X_1, X_2, \dots, X_T}_{\text{}}.$

Vektet glidende gjennomsnitt med vindu n er gjennomsnittet over de n siste observasjonene til X_t , med vektene $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (hvor θ_n er vekten til *siste observasjon*):

$$F = \sum_{t=1}^n \theta_t X_{T-n+t} \quad (2.58)$$

hvor

$$F = \text{prognosen for periodene } T+1, T+2, \dots, T+S \quad (2.59)$$

$$X_t = \text{observasjon i periode } t, \text{ hvor } 1 \leq t \leq T \quad (2.60)$$

$$T = \text{antall observasjoner} \quad (2.61)$$

$$S = \text{antall perioder som vi prognostiserer} \quad (2.62)$$

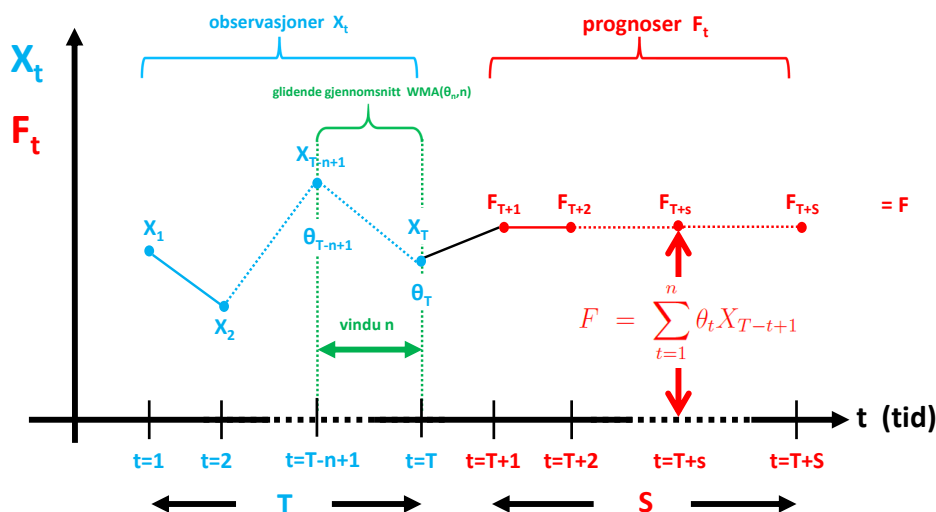
$$\theta_t = \text{vekt for periode } t \quad (2.63)$$

$$n = \text{antall perioder som vi baserer det vektete gjennomsnittet p\aa} \quad (2.64)$$

og hvor

$$\sum_{t=1}^n \theta_t = 1 \quad \text{summen av alle vektene er lik 1} \quad (2.65)$$

■



Figur 2.31: Prognose F_t for vektet glidende gjennomsnitt $WMA(\theta_n, n)$ med vindu n .

Kommentarer:

- Vektene må summeres til 1, for ellers får vi ikke et *gjennomsnitt*.
- Metoden representerer en *familie* av prognoser, siden man kan selv velge vektene $\theta_1, \dots, \theta_n$.
- Metoden bruker alle observasjonene, og når vi får nye observasjoner, må vi bestemme nye vekter.
- Metoden er av teknisk natur, dvs. alle metoden vi går gjennom i dette kurset er et vektet glidende gjennomsnitt (vi har allerede sett at Random Walk RW og glidende gjennomsnitt $MA(n)$ er egentlig et vektet glidende gjennomsnitt).
- Senere skal vi lære om ”eksponensiell glatting” $ES(\theta)$ som er et helt spesielt vektet gjennomsnitt.

Eksempel: (Oskar Sylte - vektet glidende gjennomsnitt $WMA(\theta_t, n = 3)$, prognosemetode)

Anta at Oskar Sylte har bestemt seg for å benytte et vektet glidende gjennomsnitt med vindu $n = 3$, dvs. $WMA(\theta_n, n = 3)$, hvor vektene er gitt ved:

$$\theta_1 = \frac{1}{10} \quad (2.66)$$

$$\theta_2 = \frac{3}{10} \quad (2.67)$$

$$\theta_3 = \frac{3}{5} \quad (2.68)$$

Observasjonene av salg X_t er som vanlig:

UKE t	1	2	3	4	5
SALG X_t	21	23	22	25	20

Tabell 2.4: Observasjoner av salg X_t (tusen enheter per uke).



Figur 2.32: Oskar Sylte.

- a) Regn ut de historiske prognosene F_4 og F_5 ved hjelp av vektet glidende gjennomsnitt $WMA(\theta_n, n = 3)$ med vektene fra tabellen 2.4.
- b) Regn ut prognosene F_6 , F_7 , F_8 og F_9 med vektet glidende gjennomsnitt $WMA(\theta_n, n = 3)$ med vektene fra likn. (2.66)-(2.68)..
- c) Vis at vektene θ_n er normalisert, dvs. vis at $\sum_{t=1}^n \theta_t = 1$.
- d) Tegn, i en og samme figur, grafen til:
- observasjonene X_t , hvor $1 \leq t \leq 5$
 - vektet glidende gjennomsnitt $WMA(\theta_n, n = 3)$ fra oppgave a, dvs. F_4 og F_5 , og oppgave b, dvs. $F_6, \dots, F_9$

For sammenligningen sin skyld, plott også grafen til prognosene $F_4, \dots, F_9$ med glidende gjennomsnitt $MA(n = 3)$ fra side 80 i samme figur.

Løsning:

a) For den historiske prognosen F_4 har vi $T = 3$ observasjoner, nemlig X_1 , X_2 og X_3 . Med vektet glidende gjennomsnitt $WMA(\theta_n, n = 3)$, dvs. med vindu $n = 3$, blir da den historiske prognosen F_4 :

$$\underline{\underline{F_4}} = \sum_{t=1}^3 \theta_t X_{3-3+t} \quad (2.69)$$

$$= \sum_{t=1}^3 \theta_t X_t \quad (2.70)$$

$$= \theta_1 \cdot X_1 + \theta_2 \cdot X_2 + \theta_3 \cdot X_3 \quad (2.71)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 21 + \frac{3}{10} \cdot 23 + \frac{3}{5} \cdot 22 = \underline{\underline{22.2}} \quad (2.72)$$

For den historiske prognosen F_5 har vi $T = 4$ observasjoner, nemlig X_1 , X_2 , X_3 og X_4 . Med vektet glidende gjennomsnitt $WMA(\theta_n, n = 3)$, dvs. med vindu $n = 3$, blir da den historiske prognosen F_5 :

$$\underline{\underline{F_5}} = \sum_{t=1}^3 \theta_t X_{4-3+t} \quad (2.73)$$

$$= \sum_{t=1}^3 \theta_t X_{t+1} \quad (2.74)$$

$$= \theta_1 \cdot X_2 + \theta_2 \cdot X_3 + \theta_3 \cdot X_4 \quad (2.75)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 23 + \frac{3}{10} \cdot 22 + \frac{3}{5} \cdot 25 = \underline{\underline{23.9}} \quad (2.76)$$

b) Siden observasjonene X_t , hvor $1 \leq t \leq T$ med $T = 5$, følger et tilfeldig mønster, vil alle prognosene for neste kvartal, dvs. $1 \leq s \leq 4$, ha samme verdi F ifølge prinsippet for tilfeldig mønster i lign.(2.6):

$$F \stackrel{\text{lign. (2.6)}}{=} F_6 = F_7 = F_8 = F_9 , \quad (2.77)$$

dvs. alle prognoser er konstante. Vektet glidende gjennomsnitt $WMA(n = 3)$ med $T = 5$ blir da:

$$\underline{\underline{F}} = \sum_{t=1}^3 \theta_t X_{5-3+t} \quad (2.78)$$

$$= \sum_{t=1}^3 \theta_t X_{t+2} \quad (2.79)$$

$$= \theta_1 \cdot X_3 + \theta_2 \cdot X_4 + \theta_3 \cdot X_5 \quad (2.80)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 22 + \frac{3}{10} \cdot 25 + \frac{3}{5} \cdot 20 = \underline{\underline{21.7}} \quad (2.81)$$

Alt i alt, prognosene for de neste $S = 4$ periodene er da gitt ved:

$$\underline{\underline{F}} = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 = \underline{\underline{21.7}} \quad (2.82)$$

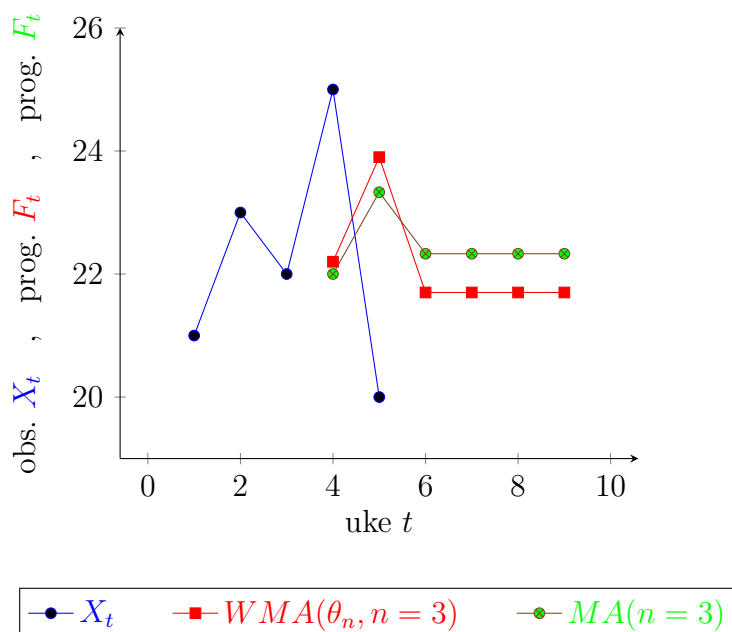
c) Siden vi har valgt vektet glidende gjennomsnitt $WMA(\theta_n, n = 3)$ så bør vi sjekke at summen av vektene er lik 1: (dvs. vi har faktisk et *gjennomsnitt*):

$$\sum_{t=1}^n \theta_t = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad (2.83)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \quad (2.84)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{6}{10} = \underline{1} \quad (2.85)$$

d) Grafen til observasjonene X_t , prognosene $F_4, \dots, F_9$ med $WMA(\theta_n, n = 3)$ og prognosene $F_4, \dots, F_9$ med $MA(n = 3)$ i en og samme figur:



Figur 2.33: Observasjoner X_t , $WMA(\theta_n, n = 3)$ og $MA(n = 3)$.

Hvorfor kunne vi forvente at prognosen fra det vektete glidende gjennomsnittet (rødt ligger under det glidende gjennomsnittet (grønt)?

■

2.7.4 Eksponensiell glatting $ES(\theta)$

Motivasjon: (eksponensiell glatting $ES(\theta)$)

Før vi skriver opp definisjonen på eksponensiell glatting, gir vi også nå en liten motivasjon for metoden.

Feilkorrigerende metode:

Eksponensiell glatting beskrives *enklest* som en feilkorrigerende metode.
Hva menes med en feilkorrigerende metode?

Med *feilkorrigerende* metode mener vi at vi beregner prognosen for en gitt periode ved hjelp av feilen vi gjorde fra perioden før. (2.86)



Figur 2.34: Feilkorrigering.

Definisjon: (prognosefeil)

Anta at vi har $\overbrace{\text{observasjonene } X_1, X_2, \dots, X_T}^{\text{ofte salgsdata}}$.
 Anta videre vi har en gitt prognosemetode.

Prognosefeilen E_t vi gjør i periode t er da definert som:

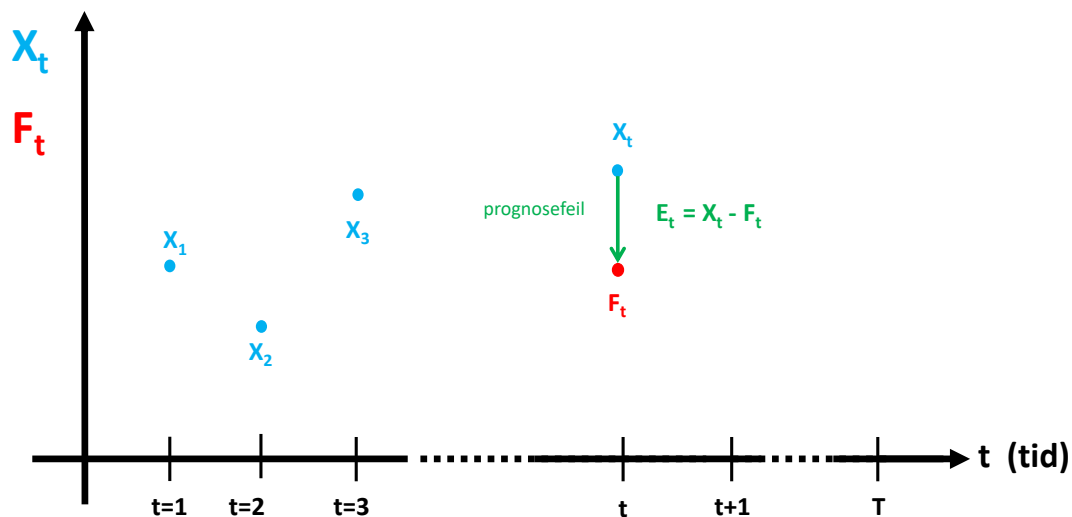
$$E_t = X_t - F_t \quad (2.87)$$

hvor

$$X_t = \text{observasjon for periode } t, \text{ hvor } 1 \leq t \leq T \quad (2.88)$$

$$F_t = \text{prognose for periode } t \quad (2.89)$$

■



Figur 2.35: Prognosefeil E_t .

Anta at vi har gjort observasjonene $X_1, X_2, \dots, X_{t-1}$.

1) Ukjent X_t :

Dersom X_t er ukjent så må vi finne prognosen F_t .

Anta videre at vi har regnet ut prognosen F_t for periode t .

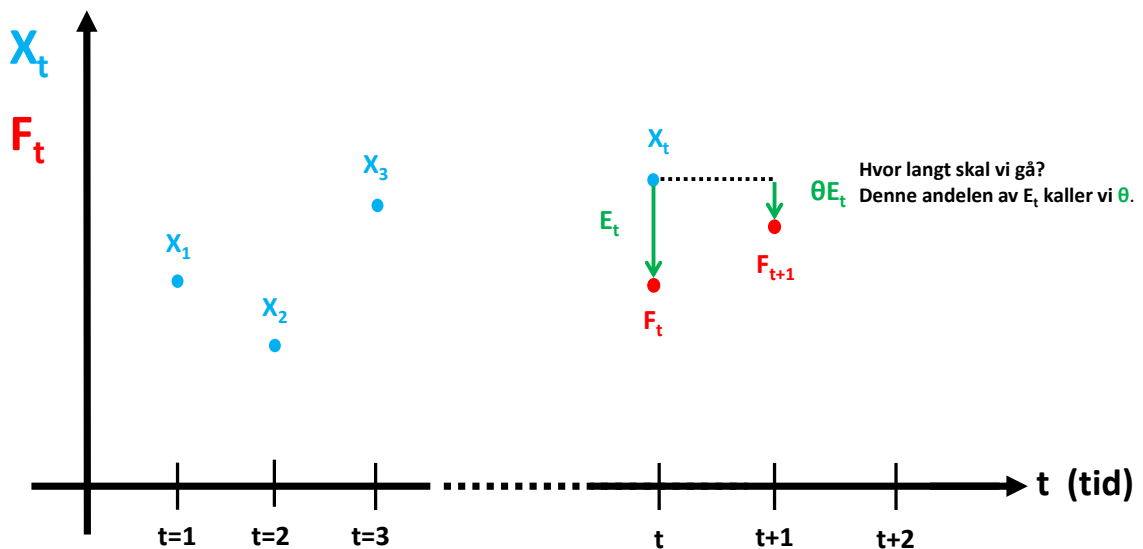
2) Kjent X_t :

Anta nå at periode t har blitt gjennomført, og at vi gjorde observasjonen X_t .

Dermed kan vi finne feilen vi gjorde tidligere:

$$E_t = X_t - F_t \quad (2.90)$$

Denne feilen E_t sammen med observasjonen X_t kan vi nå bruke for å finne F_{t+1} for periode $t+1$. Spørsmålet er hva skal F_{t+1} være? Situasjonen er illustrert i figur 2.36.



Figur 2.36: Bruker X_t og E_t for å finne neste prognose F_{t+1} .

Definisjon: ($ES(\theta)$ - eksponensiell glatting $ES(\theta)$, prognosemetode)

Anta at vi har $\overbrace{\text{observasjonene } X_1, X_2, \dots, X_T}^{\text{ofte salgsdata}}$.

Eksponensiell glatting er definert som en feilkorrigerende metode:

$$F_{t+1} = X_t - \theta E_t \quad (2.91)$$

med startbetingelsene

$$F_2 = X_1 \quad (2.92)$$

$$E_2 = X_2 - F_2 \quad (2.93)$$

hvor

$$E_2 = \text{første mulige prognosefeil (initielt steg)} \quad (2.94)$$

$$E_t = X_t - F_t \quad \text{prognosefeil for periode } t \quad (2.95)$$

$$F_t = \text{prognose for periode } t \quad (2.96)$$

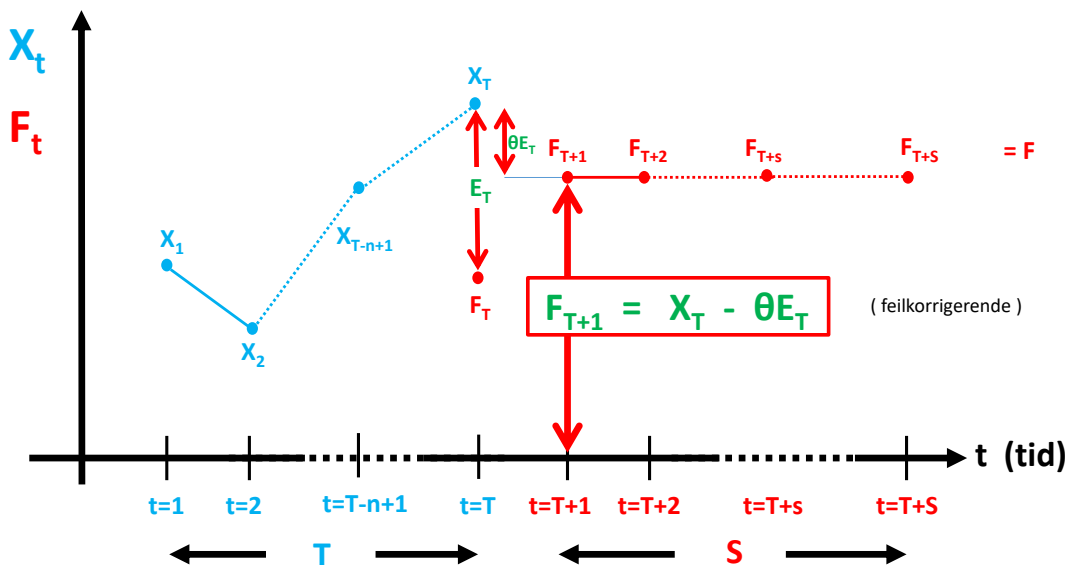
$$X_t = \text{observasjon for periode } t, \text{ hvor } 1 \leq t \leq T \quad (2.97)$$

$$\theta = \text{andel feilkorrigering, kalles ofte } \textit{glattingsparameter}, \text{ hvor } 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.98)$$

$$2 \leq t \leq T \quad (2.99)$$

$$T = \text{antall observasjoner} \quad (2.100)$$

■



Figur 2.37: $ES(\theta)$ - eksponensiell glatting.

Kommentarer:

- Metoden kalles ”eksponensiell”, fordi den vektlegger nye observasjoner eksponensielt mer enn gamle observasjoner.¹²
- Metoden kalles ”glatting”, fordi den glatter ut variasjonen mellom forrige prognose og neste observasjon med en faktor θ . Derfor kalles denne parameteren ”glattingsparameteren
- Lav θ , dvs. verdi mellom 0 og 0.4, gir lav glatting, dvs. metoden hopper etter siste observasjon fremfor å følge historiske prognoser. Den vektlegger med andre ord siste observasjoner mest.
- Høy θ , dvs. verdi mellom 1 og 0.6, gir høy glatting, dvs. metoden glatter ut variasjonen mellom siste observasjon og historisk prognose. Den vektlegger med andre ord historikken mest.
- En stor fordel med metoden, er at man ikke trenger å lagre historiske data. Metoden samler all historikk i forrige prognose, som er det vi trenger for å beregne neste prognose.
- Fastsettelsen av glattingsparameteren θ er et valg som vi tar. Hvilken verdi vi velger bør reflektere den reelle situasjonen, dvs. hvorvidt vi ønsker at prognosen skal jevne ut variasjonene eller ikke.

¹²Vi skal se nærmere på den eksponensielle tolkningen i øving 2.

Man kan formulere $ES(\theta)$ i lign. (2.91) på en alternativ måte.

Med definisjonen $E_t = X_t - F_t$ fra lign.(2.90) så kan prognosen F_{t+1} skrives:

$$\underline{\underline{F_{t+1}}} = X_t - \theta E_t \quad (2.101)$$

$$= X_t - \theta(X_t - F_t) \quad (2.102)$$

$$= X_t - \theta X_t + \theta F_t \quad (2.103)$$

$$= \underline{\underline{\theta F_t + (1 - \theta)X_t}} \quad (2.104)$$

med startsbetingelsen

$$F_2 = X_1 \quad (2.105)$$

Dermed kan vi definere $ES(\theta)$ - eksponensiell glatting - på side 94 på en alternativ måte:

Definisjon: ($ES(\theta)$ - eksponensiell glatting $ES(\theta)$, prognosemetode)

Anta at vi har $\overbrace{X_1, X_2, \dots, X_T}^{\text{ofte salgsdata}}$.

Eksponensiell glatting er definert som en feilkorrigerende metode:

$$F_{t+1} = \theta F_t + (1 - \theta) X_t \quad (2.106)$$

med startbetingelsene

$$F_2 = X_1 \quad (2.107)$$

hvor

$$E_2 = \text{første mulige prognosefeil (initielt steg)} \quad (2.108)$$

$$F_t = \text{prognose for periode } t \quad (2.109)$$

$$X_t = \text{observasjon for periode } t, \text{ hvor } 1 \leq t \leq T \quad (2.110)$$

$$\theta = \text{andel feilkorrigering, kalles ofte } glattingsparameter, \text{ hvor } 0 \leq \theta \leq 1 \quad (2.111)$$

$$2 \leq t \leq T \quad (2.112)$$

$$T = \text{antall observasjoner} \quad (2.113)$$

■

Eksempel: (Oskar Sylte - eksponensiell glatting $ES(\theta)$, prognosemetode)

For hvert valg av glattingsparameter θ får vi en ny prognose. Vi skal nå regne ut to prognoser for Oskar Sylte ved hjelp av eksponensiell glatting med:

- glattingsparameter $\theta = 0.2$ (lav glatting)
- glattingsparameter $\theta = 0.8$ (høy glatting)

Fra tabell 2.5 vet vi at:

UKE t	1	2	3	4	5
SALG X_t	21	23	22	25	20

Tabell 2.5: Observasjoner av salg av ananasbrus X_t (tusen enheter per uke).

- a) Finn prognosene $F_2, F_3 \dots F_6$ med eksponensiell glatting $ES(\theta = 0.2)$, dvs. lav glatting. Tegn grafen til observasjonene X_t og prognosene $F_2, F_3 \dots F_6$ i en og samme figur. Tegn også grafen til prognosene F_7, F_8 og F_9 i figuren.
- b) Samme som oppgave a, men med $\theta = 0.8$, dvs. høy glatting.



Figur 2.38: Oskar Sylte.

Løsning:

a) Eksponensiell glatting $ES(\theta = 0.2)$. Startverdien er:

$$\underline{\underline{F_2}} \stackrel{\text{lign. (2.92)}}{=} X_1 = \underline{\underline{21}} \quad (2.114)$$

Fra lign.(2.91) og tabell 2.5 finner vi de øvrige prognosene:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_3}} &\stackrel{\text{lign. (2.91)}}{=} X_2 - \theta E_2 \\ &= X_2 - \theta(X_2 - F_2) = 23 - 0.2 \cdot (23 - 22) = \underline{\underline{22.6}} \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_4}} &\stackrel{\text{lign. (2.91)}}{=} X_3 - \theta E_3 \\ &= X_3 - \theta(X_3 - F_3) = 22 - 0.2 \cdot (22 - 22.6) = \underline{\underline{22.12}} \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_5}} &\stackrel{\text{lign. (2.91)}}{=} X_4 - \theta E_4 \\ &= X_4 - \theta(X_4 - F_4) = 25 - 0.2 \cdot (25 - 22.12) = \underline{\underline{24.42}} \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_6}} &\stackrel{\text{lign. (2.91)}}{=} X_5 - \theta E_5 \\ &= X_5 - \theta(X_5 - F_5) = 20 - 0.2 \cdot (20 - 24.42) = \underline{\underline{20.88}} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Legg merke til prognosen gjør et stort ”hopp” i uke 4, fra 22.12 til 24.42.
Dette kommer nettopp av at glattingsparameteren er lav, dvs. $\theta = 0.2$.

Siden vi ikke har flere observasjoner, så har vi kommet til dags dato. Oskar Sylte ønsker en prognose for de neste 4 ukene, så vi bestemmer også prognosene F_7 , F_8 og F_9 . Vi vet fra tidligere at dataene fra Oskar Sylte følger et

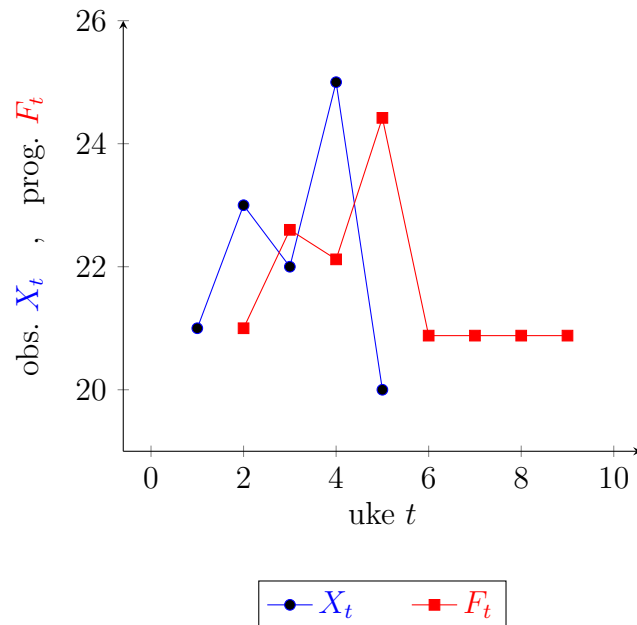
$$\text{tilfeldig mønster} \tag{2.119}$$

Dermed vil prognosene ha samme verdi, se lign.(2.6):

$$\underline{\underline{F}} \stackrel{\text{lign. (2.6)}}{=} F_6 \tag{2.120}$$

$$= F_7 = F_8 = F_9 = \underline{\underline{\underline{20.88}}} \tag{2.121}$$

Vi tegner grafen til de historiske dataene X_t , prognosene $F_2, F_3 \dots F_6$ med eksponensiell glatting $ES(\theta = 0.2)$ og prognosene F_7, F_8 og F_9 i en og samme figur:



Figur 2.39: Observasjoner X_t , prognoser F_t med $ES(\theta = 0.2)$.

b) Eksponensiell glatting $ES(\theta = 0.8)$. Startverdien er:

$$\underline{\underline{F_2}} \stackrel{\text{lign. (2.92)}}{=} X_1 = \underline{\underline{21}} \quad (2.122)$$

Fra lign.(2.91) og tabell 2.5 finner vi de øvrige prognosene:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_3}} &\stackrel{\text{lign. (2.91)}}{=} X_2 - \theta E_2 \\ &= X_2 - \theta(X_2 - F_2) = 23 - 0.8 \cdot (23 - 21) = \underline{\underline{21.4}} \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_4}} &\stackrel{\text{lign. (2.91)}}{=} X_3 - \theta E_3 \\ &= X_3 - \theta(X_3 - F_3) = 22 - 0.8 \cdot (22 - 21.4) = \underline{\underline{21.52}} \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_5}} &\stackrel{\text{lign. (2.91)}}{=} X_4 - \theta E_4 \\ &= X_4 - \theta(X_4 - F_4) = 25 - 0.8 \cdot (25 - 21.52) = \underline{\underline{22.22}} \end{aligned} \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_6}} &\stackrel{\text{lign. (2.91)}}{=} X_5 - \theta E_5 \\ &= X_5 - \theta(X_5 - F_5) = 20 - 0.8 \cdot (20 - 22.22) = \underline{\underline{21.77}} \end{aligned} \quad (2.126)$$

Legg merke til hvordan prognosene *ikke* ”hopper” etter observasjonene. Dette kommer nettopp av at glattingsparameteren er høy, dvs. $\theta = 0.8$.

Siden vi ikke har flere observasjoner så har vi kommet til dags dato. Oskar Sylte ønsker en prognose for de neste 4 ukene så vi også finne prognosene F_7 , F_8 og F_9 . Vi vet fra tidligere at dataene fra Oskar Sylte følger et

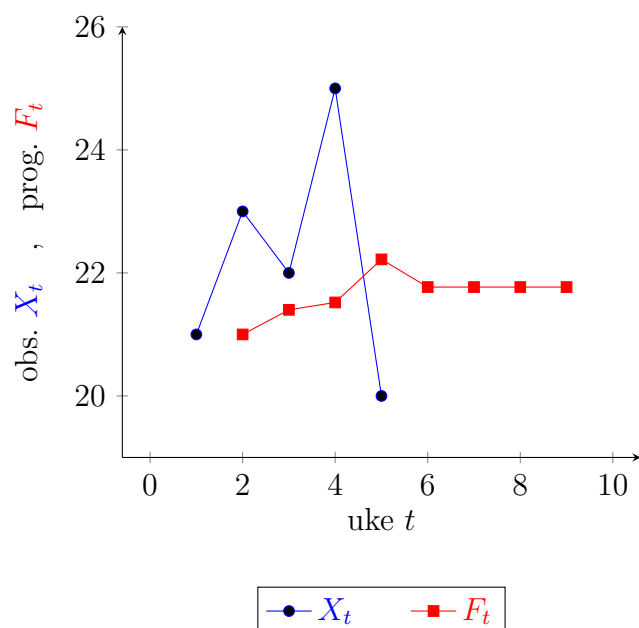
$$\text{tilfeldig mønster} \tag{2.127}$$

Dermed vil prognosene ha samme verdi, se lign.(2.6):

$$\underline{\underline{F}} \stackrel{\text{lign. (2.6)}}{=} F_6 \tag{2.128}$$

$$= F_7 = F_8 = F_9 = \underline{\underline{\underline{21.77}}} \tag{2.129}$$

Vi tegner grafen til de historiske dataene X_t , prognosene $F_2, F_3 \dots F_6$ med eksponensiell glatting $ES(\theta = 0.8)$ og prognosene F_7, F_8 og F_9 i en og samme figur:



Figur 2.40: Observasjoner X_t , prognoser F_t med $ES(\theta = 0.8)$.

Figur 2.40 illustrerer at høy glattingsparameter betyr at prognosen *jevner ut* (glatter) observasjonene.

■

2.8 Måltall

Hvor *god* er en prognose?

Vi har nå sett på flere forskjellige metoder for å prognostisere et sett med observasjoner med antatt tilfeldig mønster.

Vi tvinges raskt frem til noen spørsmål som må besvares:

- *Hvilken* metode skal vi bruke?
- Hvor ”*god*” er metoden?



Figur 2.41: Måling.

For å kunne svare på disse spørsmålene må vi lage et *måltall* for metodene som vi kan benytte. Vi skal se på *tre* tradisjonelle måltall:

1. *MFE - Mean Forecasting Error* - gjennomsnittlig feil.
2. *MAD - Mean Absolute Deviation* - gjennomsnittlig *absolutt* feil.
3. *MSE - Mean Squared Error* - gjennomsnittlig kvadrert feil (opphøyd i andre).

Felles for disse tre måltallene er at de baserer seg på *feilen* vi gjør i en periode. Feilen er definert som differansen mellom observasjonen og prognosen for en gitt periode.

Når vi beregner måltall, er det også nødvendig å ha et stort datasett med tilhørende prognoser som beregningsgrunnlag. Hvis ikke, kan enkeltobservasjoner få for mye å si, og dermed kan måltallene lyve.

Vi antar for alle måltallene vi definerer, at vi har:

- gitte observasjoner $X_1, X_2, \dots, X_T$
- en gitt prognosemetode
- første prognose i periode $s \geq 1$
- beregnede prognoser $F_1, F_2, \dots, F_T$

Definisjon: ([MFE - Mean Forecasting Error](#), måler trend i observasjonene X_t)

Gjennomsnittlig prognosefeil MFE er definert ved:

$$MFE = \frac{1}{T - s + 1} \sum_{t=s}^T E_t \quad (2.130)$$

hvor

$$E_t = X_t - F_t = \text{prognosefeil for periode } t \quad (2.131)$$

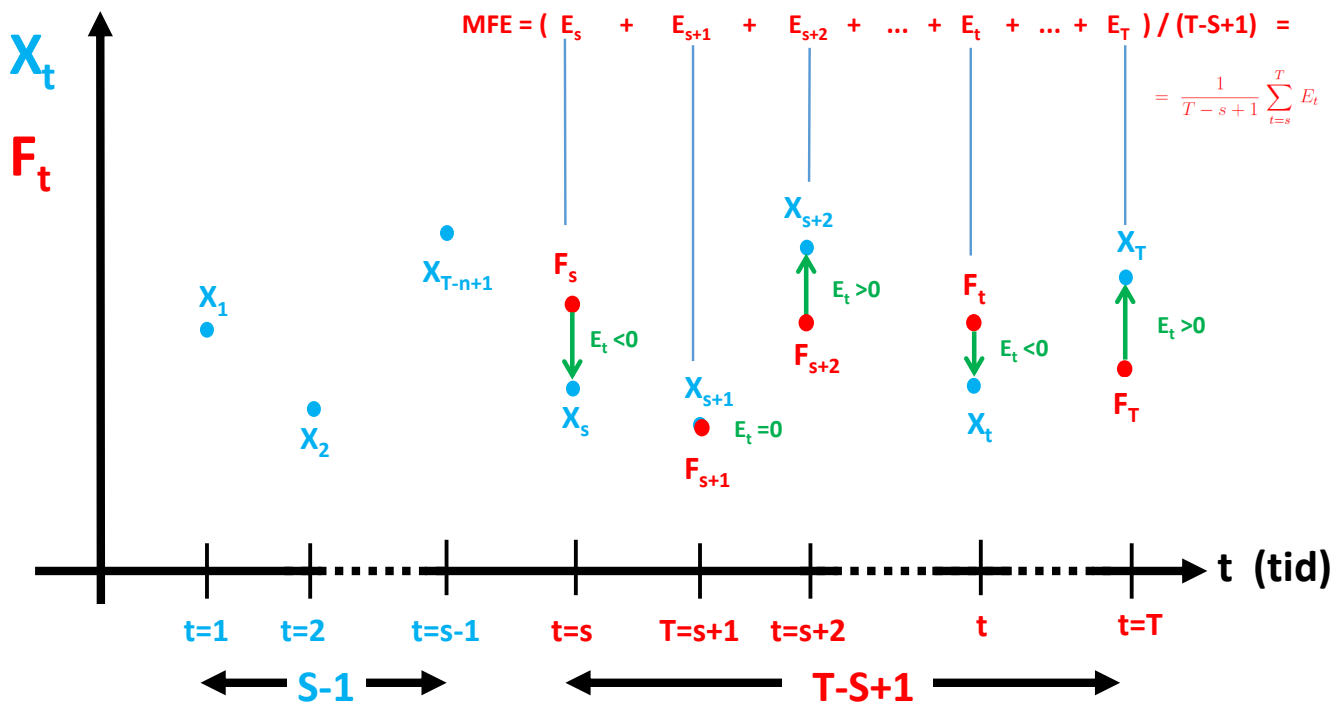
$$F_t = \text{prognose for periode } t \quad (2.132)$$

$$X_t = \text{observasjon for periode } t \quad (2.133)$$

$$s = \text{periode for første tilgjengelige prognose} \quad (2.134)$$

$$T = \text{antall observasjoner} \quad (2.135)$$

■



Figur 2.42: MFE - Mean Forecasting Error.

Kommentarer:

- Prognosefeilen E_t kan både være negativ (overestimering) eller positiv (underestimering). Når vi *summerer* feilene som i MFE , vil feilene *oppheve hverandre*.
- MFE måler med andre ikke hvor *stor* feil vi gjør når vi bruker en metode. Den måler i prinsippet hvor *jevnt* feilen varierer rundt middelveiden.
- **Overestimering:** $MFE < 0$, dvs. vi lager en prognose som stadig overestimerer observasjonene. I en slik situasjon, kan vi si at vi har en *nedadgående trend*.
- **Underestimering:** $MFE > 0$, dvs. vi lager en prognose som stadig underestimerer observasjonene. I en slik situasjon, kan vi si at vi har en *oppadgående trend*.
- Hvis $MFE = 0$, så viser observasjonene hverken oppadstigende eller nedadstigende trend. Dette svarer til at vi har enten *tilfeldige* mønster eller syklus/sesongvariasjon.
- **Konklusjonen** er at MFE måler hvorvidt datasettet viser oppadstigende eller nedadstigende trend, og er således viktig i beslutningsfasen for hvilken metode vi skal bruke.

Eksempel: (Oskar Sylte - *MFE*)

La oss igjen se på eksemplet med Oskar Sylte.

- a) Finn *MFE* dersom prognosemetoden $ES(\theta = 0.2)$ brukes for å finne prognosene F_t .
- b) Kommenter resultatet fra oppgave b.

Løsning:

- a) På side 99 og 100 regnet vi ut prognosene F_t for prognosemetoden $ES(\theta = 0.2)$. Prognosene F_t fra disse sidene, se lign.(2.115)-(2.118), er samlet i tabell 2.7.

Legg merke til at første tilgjengelige prognose har vi for periode $s = 2$. Totalt er det da $T - s + 1 = 5 - 2 + 1 = 4$ prognoser tilgjengelig.

UKE t	1	2	3	4	5
SALG X_t	21	23	22	25	20
PROGNOSER F_t med $ES(\theta = 0.2)$	-	21	22.6	22.12	24.42
PROGNOSEFEIL $E_t = X_t - F_t$	-	2	-0.6	2.88	-4.42

Tabell 2.6: Prognosefeil $E_t = X_t - F_t$.



Figur 2.43: Oskar Sylte.

Fra lign. (2.130) får vi da:

$$\underline{\underline{MFE_{EG(0.2)}}} \stackrel{\text{lign. (2.130)}}{=} \frac{1}{T-s+1} \sum_{t=1}^T E_t \quad (2.136)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{t=2}^5 E_t \quad (2.137)$$

$$= \frac{1}{4} (E_2 + E_3 + E_4 + E_5) \quad (2.138)$$

$$= \frac{1}{4} (2 - 0.6 + 2.88 - 4.42) \quad (2.139)$$

$$= \underline{\underline{-0.036}} \quad (2.140)$$

b) MFE er nesten lik null og viser *ingen* tegn på trend.

Datasettet er for lite til at vi kan trekke noen konklusjon angående trend, det er vanlig at vi bruker metoden over lengre tid, slik at vi har et stort antall prognoser vi kan benytte for å beregne MFE . Da blir måltallet bedre.

■

Definisjon: (*MAD* - Mean Absolute Deviation, evaluerer prognosemetoden)

Gjennomsnittlig absolutt avvik, *MAD*, er definert ved:

$$MAD = \frac{1}{T - s + 1} \sum_{t=s}^T |E_t| \quad (2.141)$$

hvor

$$\hat{E}_t = X_t - F_t = \text{prognosefeil for periode } t \quad (2.142)$$

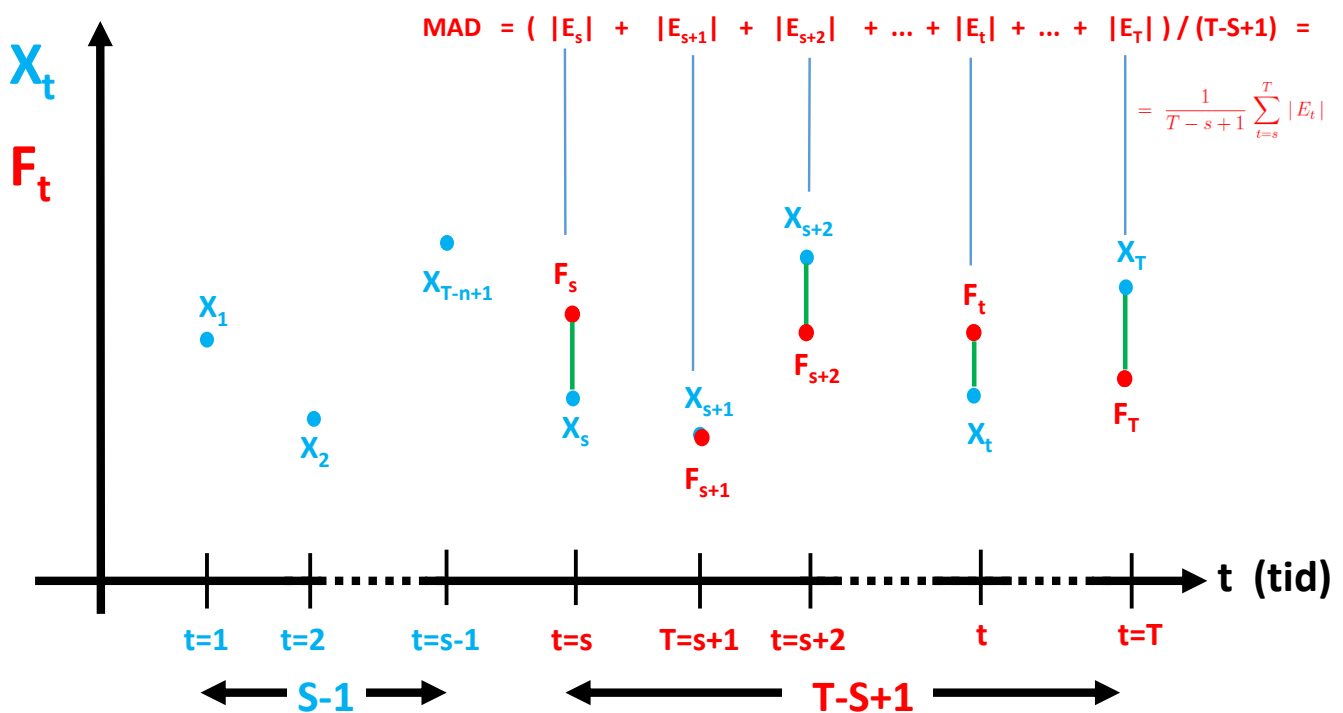
$$F_t = \text{prognose for periode } t \quad (2.143)$$

$$X_t = \text{observasjon for periode } t \quad (2.144)$$

$$s = \text{første periode vi har prognose for} \quad (2.145)$$

$$T = \text{antall observasjoner} \quad (2.146)$$

■



Figur 2.44: *MAD* - Mean Absolute Error.

Kommentarer:

- Eneste forskjellen fra MFE , er at vi nå tar [absoluttverdien](#) av feilene før vi summerer dem. det blir dermed uvesentlig om feilen er forårsaket av overestimering eller underestimering.
- MAD sier hvor mye vi bommer i gjennomsnitt.
- MAD benyttes ofte til estimering av [sikkerhetslager](#) basert på prognoser, siden den måler gjennomsnittlig avvik.

Eksempel: (Oskar Sylte - *MAD*)

La oss atter en gang se på eksempelet med Oskar Sylte.

- a) Finn *MAD* dersom prognosemetoden $ES(\theta = 0.2)$ brukes for å finne prognosene F_t .
- b) Kommenter resultatet fra oppgave b.

Løsning:

- a) På side 99 og 100 regnet vi ut prognosene F_t for prognosemetoden $ES(\theta = 0.2)$. Prognosene F_t fra disse sidene, se lign.(2.115)-(2.118), er samlet i tabell 2.6.

Legg merke til at første tilgjengelige prognose har vi for periode $s = 2$. Totalt er det da $T - s + 1 = 5 - 2 + 1 = 4$ prognoser tilgjengelig.

UKE t	1	2	3	4	5
SALG X_t	21	23	22	25	20
PROGNOSER F_t med $ES(\theta = 0.2)$	-	21	22.6	22.12	24.42
PROGNOSEFEIL $E_t = X_t - F_t$	-	2	-0.6	2.88	-4.42

Tabell 2.7: Prognosefeil $E_t = X_t - F_t$.



Figur 2.45: Oskar Sylte.

Fra lign. (2.141) får vi da:

$$\underline{\underline{MAD_{EG(0.2)}}} \stackrel{\text{lign. (2.141)}}{=} \frac{1}{T-s+1} \sum_{t=1}^T |E_t| \quad (2.147)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{t=2}^5 |E_t| \quad (2.148)$$

$$= \frac{1}{4} \left(|E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5| \right) \quad (2.149)$$

$$= \frac{1}{4} \left(2 + 0.6 + 2.88 + 4.42 \right) \quad (2.150)$$

$$= \underline{\underline{2.476}} \quad (2.151)$$

b) Siden $MAD = 4.8525$, så viser metoden her et gjennomsnittlig avvik på 2.476 tusen enheter per uke. Oskar Sylte kan dermed benytte dette tallet til enten å fastsette sikkerhetslageret eller hvor mye de eventuelt må øke produksjonskapasiteten med.

■

Definisjon: ([MSE - Mean Squared Error](#), sammenligner prognosemetoder)

Gjennomsnittlig kvadratisk avvik, MSE , er definert ved:

$$MSE = \frac{1}{T - s + 1} \sum_{t=s}^T E_t^2 \quad (2.152)$$

hvor

$$E_t = X_t - F_t = \text{prognosefeil for periode } t \quad (2.153)$$

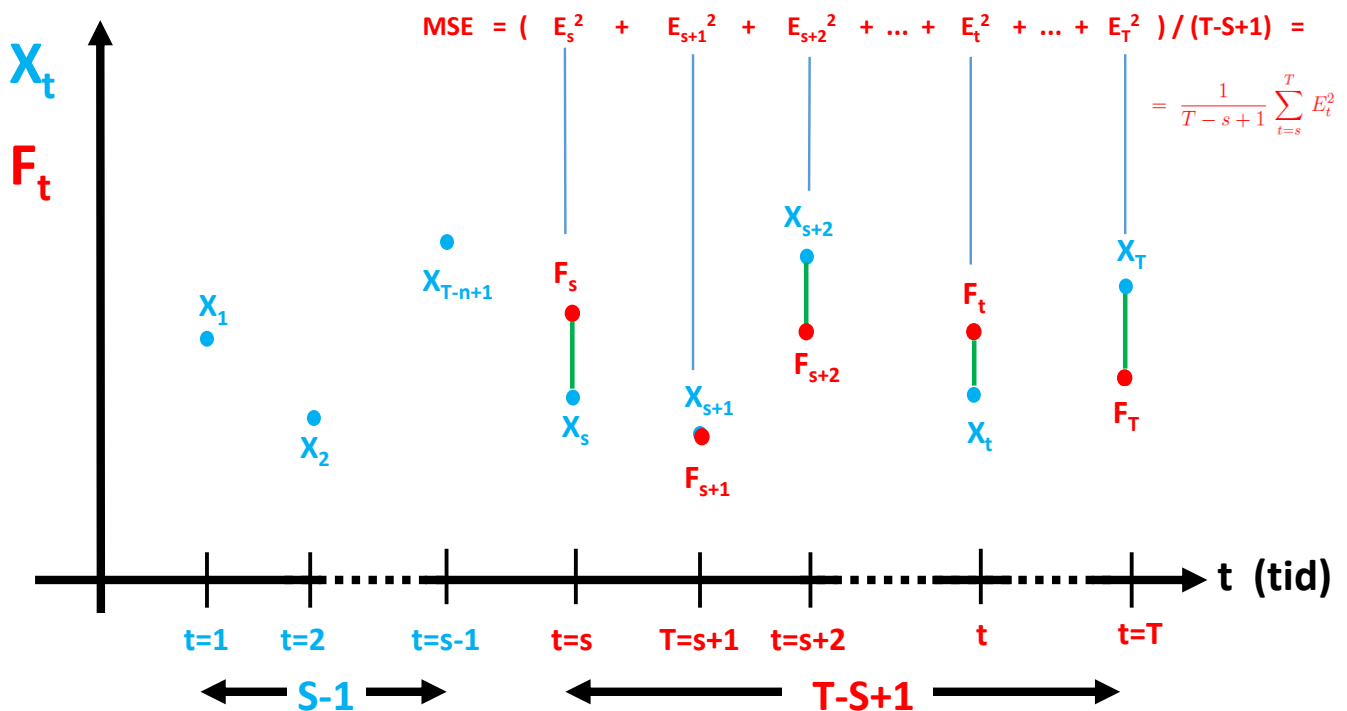
$$F_t = \text{prognose for periode } t \quad (2.154)$$

$$X_t = \text{observasjon for periode } t \quad (2.155)$$

$$s = \text{første periode vi har prognose for} \quad (2.156)$$

$$T = \text{antall observasjoner} \quad (2.157)$$

■



Figur 2.46: MSE - Mean Square Error.

Kommentarer:

- MSE brukes ofte til å bestemme optimale parametre, for en gitt prognosefamilie, f.eks. glattingsparameteren ved eksponensiell glatting.
- Forskjellen mellom MSE og MAD , er at MSE gir et avstandsbegrep, dvs. hva er *avstanden* mellom datasettet og prognosene. MAD er *ikke* et avstandsbegrep¹³. MSE blir dermed riktig mål å bruke dersom vi ønsker å *sammenligne* forskjellige metoder. Den med minst MSE , er den beste.

¹³ *Analogi:* Avstanden mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) i planet, er gitt ved

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Legg merke til at koordinatene er opphøyd i andre. Tanken er akkurat lik for definisjonen av MSE .

Eksempel: (Oskar Sylte - *MSE*)

La oss en siste gang i dette kapitlet se på eksemplet med Oskar Sylte.

- a) Finn *MSE* dersom prognosemetoden $ES(\theta = 0.2)$ brukes for å finne prognosene F_t .
- b) Kommenter resultatet fra oppgave b.

Løsning:

- a) På side 99 og 100 regnet vi ut prognosene F_t for prognosemetoden $ES(\theta = 0.2)$. Prognosene F_t fra disse sidene, se lign.(2.115)-(2.118), er samlet i tabell 2.8.

Legg merke til at første tilgjengelige prognose har vi for periode $s = 2$. Totalt er det da $T - s + 1 = 5 - 2 + 1 = 4$ prognoser tilgjengelig.

UKE t	1	2	3	4	5
SALG X_t	21	23	22	25	20
PROGNOSER F_t med $ES(\theta = 0.2)$	-	21	22.6	22.12	24.42
PROGNOSEFEIL $E_t = X_t - F_t$	-	2	-0.6	2.88	-4.42

Tabell 2.8: Prognosefeil $E_t = X_t - F_t$.



Figur 2.47: Oskar Sylte.

Fra lign. (2.152) får vi da:

$$\underline{\underline{MSE_{EG(0.2)}}} \stackrel{\text{lign. (2.152)}}{=} \frac{1}{T-s+1} \sum_{t=1}^T E_t^2 \quad (2.158)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{t=2}^5 E_t^2 \quad (2.159)$$

$$= \frac{1}{4} \left(E_2^2 + E_3^2 + E_4^2 + E_5^2 \right) \quad (2.160)$$

$$= \frac{1}{4} \left(2^2 + 0.6^2 + 2.88^2 + 4.42^2 \right) \quad (2.161)$$

$$= \underline{\underline{8.05}} \quad (2.162)$$

b) Siden $MSE = 8.05$, så viser metoden her en avstand mellom datasettet og prognosene på $\sqrt{8.05} = \underline{\underline{2.84}}$ tusen enheter per uke. Dette tallet kan nå benyttes for å sammenlikne denne metoden med eventuelle andre metoder vi ønsker å vurdere, f.eks. eksponensiell glatting med en annen verdi enn $\theta = 0.2$ for glattingsparameteren.

■

Kapittel 3

Strategisk Planlegging



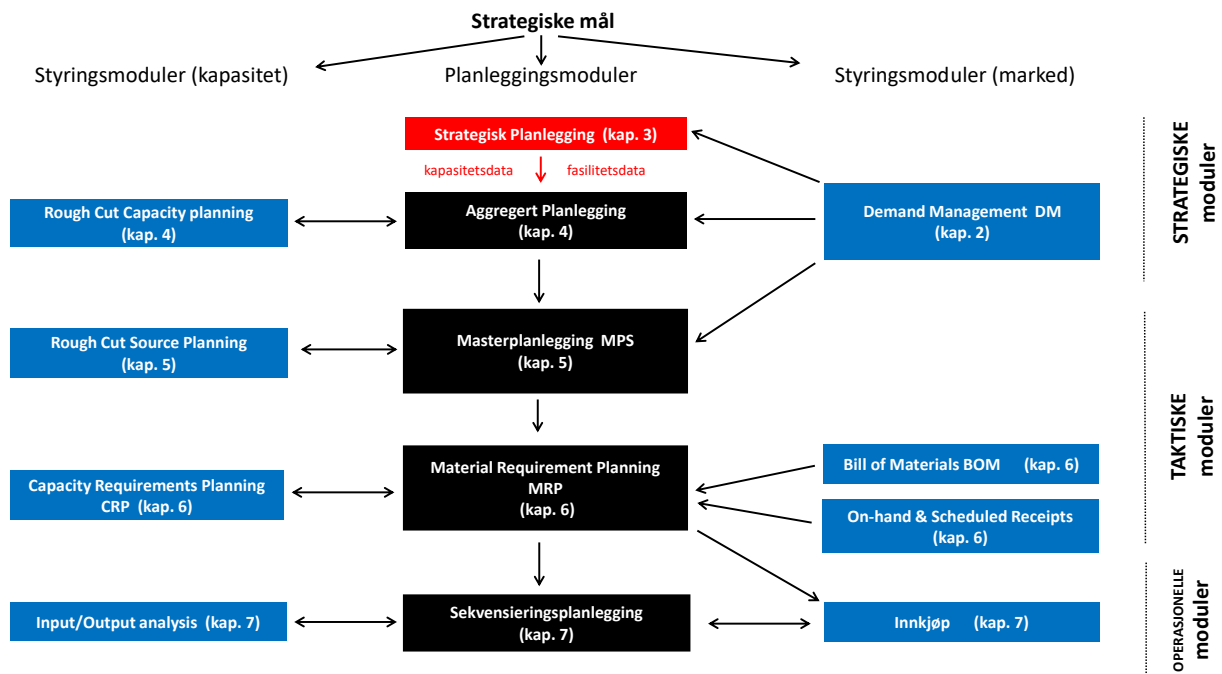
Figur 3.1: Strategisk Planlegging

3.1 Strategisk Planlegging

“Strategisk planlegging” (se figur 3.2) er en strategisk modul som blant annet tilfører

- målsetninger
- produktsortement
- markeder
- prosessdesign
- ressursdata
- fasilitetsdata
- supply chain design
- flere andre

til planleggingsmoduler som ^{sammenslått} “aggregert planlegging” og “masterplanlegging”, (se røde piler i figur 3.2).



Figur 3.2: Verdensbilde.

Vi skal videre i dette kapitlet se på to sentrale emner under strategisk planlegging:

- Strategisk ressursplanlegging
- Fasilitetsdesign

3.2 Strategisk Ressursplanlegging

“**Strategisk ressursplanlegging**” handler om å ha de **rette** ressursene til enhver tid. Ressursene i en bedrift er ofte uttrykt som hvilke **kapasiteter** som er gjeldende i bedriften.

Hva er **forskjellen** mellom en **ressurs** og **kapasitet**? Bruk 1 minutt på å tenke igjennom forskjellen før du går videre.

1) Ressurs:

En **ressurs** er en nødvendig **innsatsfaktor** som en bedrift trenger for å kunne utføre en eller flere **verdiskapende** aktiviteter.

2) Kapasitet:

Kapasitet omhandler **hvor mye** av en bestemt ressurs bedriften har, og dermed også i hvilken grad bedriften er i stand til å gjennomføre verdiskapende aktiviteter.

3.3 “Strategisk ressursplanlegging” - beslutninger og hovedaktiviteter

3.3.1 Beslutninger

“Strategisk ressursplanleggingen” sine tre viktigste beslutninger:

- hvilke typer ressurser skal bedriften ha
- hvor mye kapasitet skal hver ressurstype ha
- når er det behov for ressursene

3.3.2 Effektivitet og kapasitetsutnyttelse

Det er viktig å kunne måle kapasiteten til en bedrift. Kapasitet er et relativt bredt begrep, og således ofte misbrukt, så det er alltid essensielt å spesifisere i hvilken enhet kapasiteten er uttrykt ved.

Den typiske enheten er produksjonsraten, dvs. antall enheter per tidsenhet.

Antall 0.5 liter ananasbrus som Oskar Sylte fabrikk klarer å produsere per time er f.eks. en kapasitetsstørrelse. Legg merke til at vi snakker om et *spesifikt* produkt, hvis vi derimot ønsker et mer generelt kapasitetsbegrep som dekker *alle* produktene til Oskar Sylte, kunne vi for eksempel brukt antall liter produsert per time.

Selv om en bedrift gjerne har en *teoretisk* kapasitet, er ikke verden særlig ideell. Teoretisk kapasitet er nesten aldri sammenfallende med faktisk kapasitet. Vi definerer dermed tre viktige begreper:

- **Ideell kapasitet** - den maksimale kapasiteten som kan oppnås under *ideelle omgivelser*.
- **Effektiv kapasitet** - den *forventede* kapasiteten med de gitte omgivelsene. Effektiv kapasitet er ofte uttrykt som en prosent av design kapasitet.
- **Målt kapasitet** - den faktiske *målte* kapasiteten, gjerne uttrykt ved det observerte antallet enheter produsert over en gitt tidsperiode (rate).

Vi kan nå definere effektivitet og utnyttelse:

Definisjon: (effektivitet)

Effektivitet er definert som hvor stor andel målt kapasitet utgjør av effektiv kapasitet:

$$\text{effektivitet} = \frac{\text{målt kapasitet}}{\text{effektiv kapasitet}} \quad (3.1)$$

■

Definisjon: (utnyttelse)

Utnyttelse er definert som hvor stor andel målt kapasitet utgjør av ideell kapasitet:

$$\text{utnyttelse} = \frac{\text{målt kapasitet}}{\text{ideell kapasitet}} \quad (3.2)$$

■

Eksempel: (Ulstein verft - **kapasitetsutnyttelse**)

For noen år tilbake ble det gjort en masteravhandling ved Høgskolen i Molde i samarbeid med Ulstein Verft AS, hvor oppgaven var blant annet å bestemme kapasitetsutnyttelsen av operatørene.

De opererte med følgende data¹:

- ideell kapasitet = 7.5 timer
- effektiv kapasitet = 6 timer

Legg merke til at det er 1 time forskjell mellom ideell kapasitet og effektiv kapasitet. Med dette mener de at 1 time pr ansatt tapes uavhengig av hvilke oppgaver de ansatte har.

a) Finn effektivitet og utnyttelse for Ulstein verft.

b) Kommenter resultatet fra oppgave b.



Figur 3.3: Ulstein verft.

¹Dataene er fabrikkert i dette eksempelet, dvs. de representerer *ikke* de reelle dataene som ble brukt i avhandlingen.

Løsning:

- a) Før de kunne bestemme målt kapasitet, måtte studentene definere hva de mente med “kapasitet”. De definerte derfor begrepet ”verdiskapende aktiviteter”. Målt kapasitet ble da definert som tiden som ble brukt til verdiskapende aktiviteter.

Målet var å fange opp sløseri som f.eks. ventetider.

Studentene fant at **målt kapasitet** i gjennomsnitt per dag var på **3 timer**. Da kunne dermed beregne kapasitetsutnyttelsen for operatørene på Ulstein Verft:

$$\underline{\underline{\text{effektivitet}}} \stackrel{\text{Eq.(3.1)}}{=} \frac{\text{målt kapasitet}}{\text{effektiv kapasitet}} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{0.5}} \quad (3.3)$$

$$\underline{\underline{\text{utnyttelse}}} \stackrel{\text{Eq.(3.2)}}{=} \frac{\text{målt kapasitet}}{\text{ideell kapasitet}} = \frac{3}{7.5} = \underline{\underline{0.4}} \quad (3.4)$$

- b) Resultatet er velkjent i verftsindustrien, hvor store deler av tida går med på å vente på at andre aktiviteter skal bli ferdige.



3.4 Fasilitetsdesign

Sykehussaken mellom Molde og Kristiansund er et klassisk **fasilitets**problem.

Tre beslutninger må tas:

1. Skal vi beholde de **to** sykehusene og oppgradere hvert enkelt, eller skal vi ha **ett** nytt sykehus?
2. Hvis vi beslutter å bygge ett nytt sykehus, **hvor** skal det i såfall ligge?
3. Hvilke kommuner skal tjenes av hvilket sykehus?

Fasilitetsdesign handler hovedsaklig om å bestemme:

- **hvor mange** fasiliteter som bedriften skal ha
- **hvor** de ulike fasilitetene skal ligge (lokalisering)
- **hvilke** kundegrupper skal tjenes av hvilke fasiliteter (allokering)

Fasilitetsdesign kommer i svært mange varianter, og er derfor svært spesifikt for selve tilfellet. Vi har likevel noen typiske situasjoner som kommer igjen.



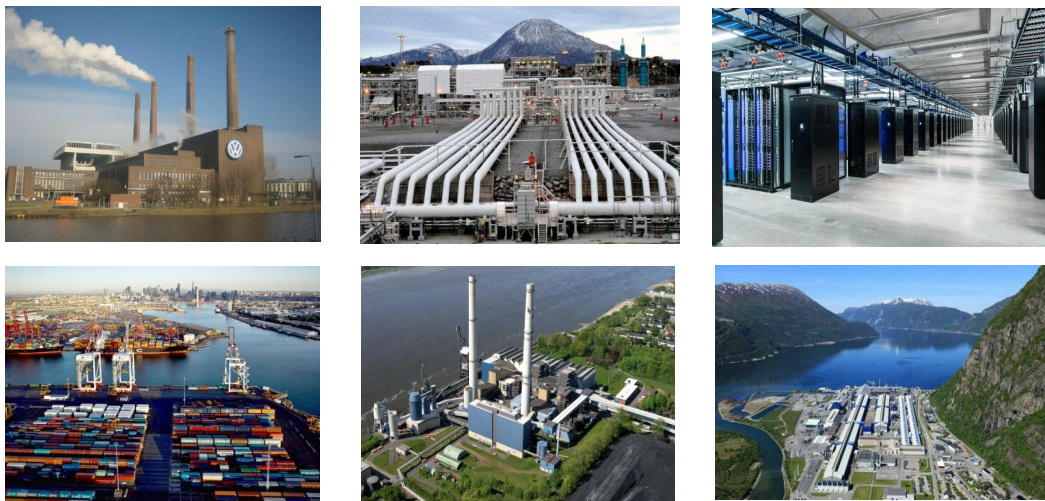
Figur 3.4: Kristiansund og Molde sykehus.

Definisjon: (fasiliteter)

Med **fasilitet** mener vi en **fysisk enhet** som er opprettet med tanke på å **tilrettelegge** for en gitt **aktivitet**.

Eksempler: (fasiliteter)

- fabrikker
- varehus
- dockingstasjoner
- avdelinger i en stasjon
- nettverkshubber i telefoni/energi
- sykehus



Figur 3.5: Fasiliteter.

Eksempler: ([fasilitetsdesign](#))

Eksempel på typiske spørsmål rundt fasilitetsdesign er:

- hvor fasilitetene skal ligge
- hvilke relasjoner de skal ha (nettverk)
- hvor store skal de være (dimensjonering)
- hva ”flyter” mellom fasilitetene:
 - varer
 - personer
 - dokumenter
 - elektriske signal
 - tjenester
 - pasienter



En fasilitetsanalyse kan raskt bli svært komplisert, og man må alltid vurdere hva som skal og skal ikke inkluderes i analysen. Typisk vil man *ikke* inkludere operasjonelle beslutninger og sidestilte strategiske beslutninger.



Figur 3.6: Fasilitetsdesign.

3.5 Målsetting

Målsettingen med fasilitetsdesign er som regel å balansere investeringskostnader mot forventede *variable* driftskostnader som f.eks. transportkostnader.

Men kostnader er ikke nødvendigvis alltid hovedmålsettingen, f.eks. kan også [servicegraden](#) være av vesentlig betydning. [Ambulansetjenesten](#) har f.eks. som overordnet mål å kunne redde liv i akutte situasjoner. I den situasjonen, kan f.eks. [gjennomsnittlig responstid](#) være interessant å minimere.



Figur 3.7: Målsetting.

3.6 Varianter

Som tidligere nevnt har fasilitetsdesign svært mange varianter, og problemstillingene som oppstår varierer i tråd med disse. Vi har derimot noen varianter som oppstår oftere enn andre:

- **Diskrete lokasjonsproblem** - fasilitetene kan kun plasseres på et gitt antall steder.
 - singel fasilitet (lokalisering av det nye sykehuset f.eks.)
 - flere fasiliteter
 - **Lokasjonsproblem** - bestemmer kun *hvor* fasilitetene skal ligge, beslutningene om hva som skal flytte hvor er allerede bestemt. Allokeringproblemer gir kun mening for problemer med flere fasiliteter.
 - **Allokeringsproblem** - bestemmer kun hva og hvor *mye* som flytter mellom fasilitetene, beslutningene om hvilke fasiliteter som finnes og hvilke ruter som finnes mellom dem er allerede bestemt.
 - **Lokaliserings -og allokeringproblem** - bestemmer *både* hvor fasilitetene skal ligge og hva og hvor mye som flytter mellom dem.
- **Kontinuerlige lokasjonsproblem** - fasilitetene kan plasseres hvor som helst. Dette innebærer at det benyttes et avstandsmål hvor transportkostnadene er avhengig av avstandene.

Diskrete lokasjonsproblem forekommer mye oftere enn det kontinuerlige tilfellet, mest på grunn av at kostnader og løsninger blir mer *realistiske*.

Eksempel: (Coca Cola - [lokalisering](#) - og [allokeringsproblem](#))

Coca Cola AS vurderer å utvide regionen for Midt-Norge med opp til to varehus. Hensikten er at varehusene skal tjene to markeder: Trøndelag og Møre og Romsdal.

De har estimert følgende ^{sammenslåtte} aggregerte etterspørsel for brus generelt for de to regionene over **5 år**:

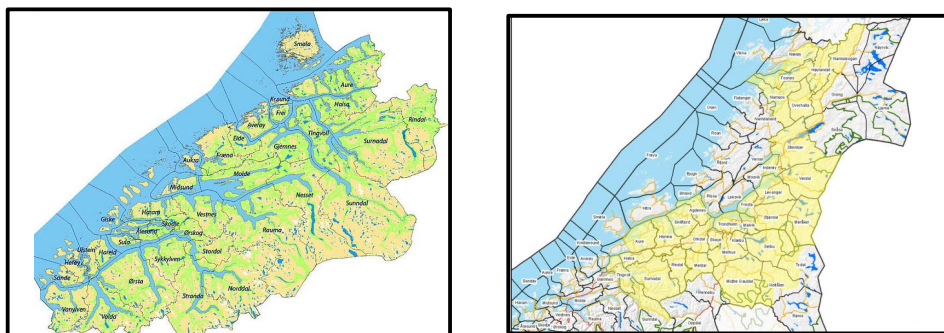
	Møre og Romsdal	Trøndelag
Etterspørsel	80	150

Tabell 3.1: [Etterspørsel](#) (mill. liter).

Investeringskostnaden for hvert varehus er estimert til:

	Møre og Romsdal	Trøndelag
Investering varehus	300	450

Tabell 3.2: [Investeringskostnad](#) (mill. NOK).



Figur 3.8: Møre og Romsdal samt Trøndelag.

Coca Cola har også estimert *gjennomsnittlig* transportkostnad pr liter brus fraktet mellom region og varehus:

	Møre og Romsdal	Trøndelag
Varehus Møre og Romsdal	9	12
Varehus Trøndelag	11	14

Tabell 3.3: [Transportkostnad](#) (mill. NOK).

Kommenter dette ut fra et lokaliserings- og allokeringsståsted.

Løsning:

Coca Cola må bestemme hvilke varehus skal bygges, og hvor mye som eventuelt skal leveres fra hvert av varehusene, slik at de [totale kostnadene minimeres](#).

Siden vi skal *både* bestemme lokasjonen til varehusene og også hvor mye hvert varehus eventuelt leverer til regionene, har vi et [lokaliserings- og allokeringsproblem](#).

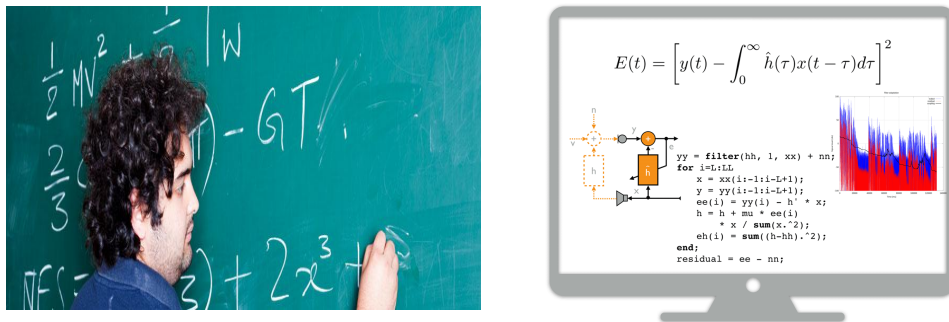
Problemet er et *diskret* problem, siden vi har kun to mulige lokasjoner: Møre og Romsdal eller Trøndelag.

■

3.7 Matematisk Modellering

Vi skal nå lage en [matematisk modell](#) for det diskrete lokaliserings -og allokeringsproblemet til Coca Cola.

Siden dette er første matematiske modell vi har, så går vi litt generelt til verks.



Figur 3.9: Matematisk modellering.

Definisjon: (matematisk modellering)

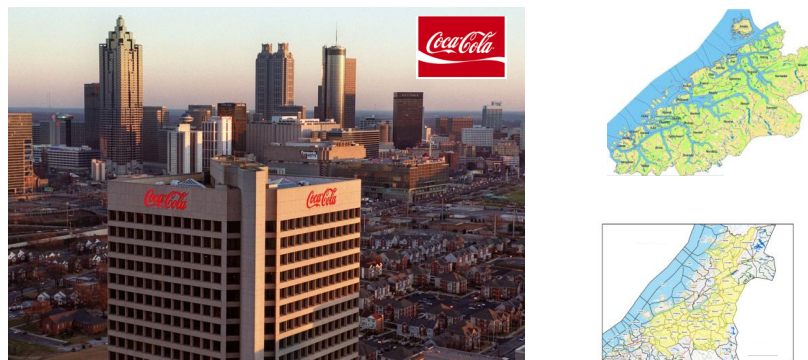
En **matematisk modell** er matematisk formulering som består av:

1. **Data** - størrelser som vi *ikke* kan påvirke over den gitte tidshorisonten
2. **Variabler** - beslutninger som vi skal ta (størrelser vi *kan* påvirke)
 - **kontinuerlige** variabler - variabler som kan ta alle mulige verdier og representere ofte en kvantumsstørrelse
 - **binaere** variabler - variabler som kun tar verdiene 1 eller 0, og som representerer en Ja/Nei beslutning
3. **Målfunksjon** - en funksjon av dataene og variablene som evaluerer vår målsetting
4. **Føringer** - betingelser som dataene og variablene må oppfylle for at modellen skal være gyldig (reell)
 - **kapasitetsføringer** - føringer som representerer en begrensning av ressurser
 - **policyføringer** - føringer som inkluderes på grunn av restriksjoner som kommer fra andre hold (budsjett krav f.eks.)
 - **logiske føringer** - føringer som oppstår på grunn av *logiske* sammenhenger mellom variablene
 - **hybride føringer** - føringer som er en sammensetting av de tre foregående føringene

■

Eksempel: (Coca Cola - matematisk modell)

Lag en matematisk modell for det diskrete lokaliserings -og allokeringsproblemet til Coca Cola, som beskrevet på side 135.



Figur 3.10: Coca Cola.

Løsning:

Vi følger oppbyggingen for en matematisk modell fra side 138 og starter med datastørrelsene:

1. Data:

Dataene i en matematisk modell identifiseres ved at vi tenker gjennom hvilke størrelser som er gitt og som vi ikke kan påvirke over planleggingshorisonten (5 år).

Fra tabellene (3.1) - (3.3) introduserer vi følgende datastørrelser: ²

$D_1 = 150$	etterspørsel etter brus i M&R	(3.5)
$D_2 = 80$	etterspørsel etter brus i Trøndelag	(3.6)
$I_1 = 300$	investeringskostnaden for varehus i M&R	(3.7)
$I_2 = 450$	investeringskostnaden for varehus i Trøndelag	(3.8)
$C_{11} = 9$	transportkostnad fra varehus i M&R til region M&R	(3.9)
$C_{12} = 12$	transportkostnad fra varehus i M&R til region Tr.lag	(3.10)
$C_{21} = 11$	transportkostnad fra varehus i Tr.lag til region M&R	(3.11)
$C_{22} = 14$	transportkostnad fra varehus i Tr.lag til region Tr.lag	(3.12)

hvor vi bruker følgende *indeksnotasjon*

$$C_{\text{varehus}, \text{region}} \quad (3.13)$$

Vi har f.eks. at første *indeks* i C_{21} er **2** og representerer hvilket **varehus** vi har, mens andre indeks er **1** og representerer hvilken **region** vi har. Indekseringen i en matematisk modell er svært viktig å holde styr på slik at vi ikke mister oversikten.

$$1 = \text{M\&R} \quad , \quad 2 = \text{Tr.lag} \quad (3.14)$$

Plasseringen av indeksen i lign.(3.13) sier noe om 1 og 2 dreier seg om **varehus** eller **region**.

²Etterspørsel er i antall mill. liter. Investeringer og transportkostnader er i antall mill. NOK.

2. Variabler:

Når vi skal lage en matematisk modell er valget av variabler *helt kritisk*. Velger vi feil variabler, kan problemet raskt bli både feil og unødvendig komplisert.

Vi husker at en variabel representerer en beslutning vi må ta.
I dette eksemplet har vi *to* typer beslutninger:

- ja/nei beslutninger som bestemmer om vi skal bygge varehus eller ikke (lokaliseringsvariabler)
- kvantumsbeslutninger som bestemmer hvor mye som skal leveres fra varehus til region (al-lokeringsvariabler)

Vi starter med ja/nei beslutningene bygge/ikke bygge:

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bygger varehus i M\&R} \\ 0 & , \text{ ikke bygge} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$Y_2 = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom vi bygger varehus i Trøndelag} \\ 0 & , \text{ ikke bygge} \end{cases} \quad (3.16)$$

Kvantumsbeslutningene er definert som: (1 = M&R og 2 = Trøndelag)

$$X_{11} = \text{antall millioner liter levert fra varhus i M\&R til region M\&R} \quad (3.17)$$

$$X_{12} = \text{antall millioner liter levert fra varhus i M\&R til region Trøndelag} \quad (3.18)$$

$$X_{21} = \text{antall millioner liter levert fra varhus i Trøndelag til region M\&R} \quad (3.19)$$

$$X_{22} = \text{antall millioner liter levert fra varhus i Trøndelag til region Trøndelag} \quad (3.20)$$

hvor vi bruker notasjonen

$$X \text{ fra varehus, til region} \quad (3.21)$$

3. Målfunksjon:

Målfunksjonen i dette eksemplet er *totale kostnader*. Vi identifiserer to typer kostnader: investeringskostnader og transportkostnader. Vi har dermed totale kostnader C :

$$C = \underbrace{I_1 Y_1 + I_2 Y_2}_{\text{investeringskostnad}} + \underbrace{C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + C_{21} X_{21} + C_{22} X_{22}}_{\text{transportkostnad}} \quad (3.22)$$

4. Føringer:

Når vi skal bestemme hvilke føringer som finnes i problemet, er det nyttig å tenke gjennom de tre typene føringer vi har:

- kapasitetsføringer,
- policyføringer
- logiske føringer

a) Kapasitetsføringer:

I eksemplet skal vi oppfylle all etterspørsel. Dette er en policyføring, siden det er valgt på forhånd av noen andre at all etterspørsel skal oppfylles fra varehusene. Disse føringene kan uttrykkes som:

$$D_1 = X_{11} + X_{21} , \quad \text{all etterspørsel i region M\&R skal oppfylles} \quad (3.23)$$

$$D_2 = X_{12} + X_{22} , \quad \text{all etterspørsel i region Trøndelag skal oppfylles} \quad (3.24)$$

Legg merke til at vi summerer bidragene fra begge varehusene, selv om ett av dem kan være lik null.

Her kunne det vært fristende å stoppe og si at modellen er ferdig beskrevet. Men dette er ikke tilfellet. Vi har nemlig også en *logisk føring*. Vi husker at en logisk føring representerer en logisk sammenheng mellom to eller flere variabler.

b) Policyføringer:

Det er ingen policyføringer i dette eksemplet.

c) Logiske føringer:

Vi har en åpenbar sammenheng mellom Y -variablene bygge/ikke bygge og X -kvantumvariablene:

$$\begin{aligned} \text{Hvis vi } \underline{\text{ikke}} \text{ bygger varehus i Møre og Romsdal, dvs. } Y_1 = 0, \\ \text{så har vi heller ikke noen transport fra M\&R, dvs. } X_{11} = 0 \text{ og } X_{12} = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{Hvis vi } \underline{\text{ikke}} \text{ bygger varehus i Trøndelag, dvs. } Y_2 = 0, \\ \text{har vi heller ikke noen transport fra Trøndelag, dvs. } X_{21} = 0 \text{ og } X_{22} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Hvis vi oversetter observasjonene i lign.(3.25) og (3.26), får vi de logiske føringene:

$$\text{Hvis } Y_1 = 0, \text{ så må } X_{11} = 0 \text{ og } X_{12} = 0 \quad (\text{ M\&R }) \quad (3.27)$$

$$\text{Hvis } Y_2 = 0, \text{ så må } X_{21} = 0 \text{ og } X_{22} = 0 \quad (\text{ Trøndelag }) \quad (3.28)$$

Problemet med oversettelsen i lign.(3.27) og (3.28) er at de fremdeles er av logiske natur. For å beskrive disse føringene matematisk, må vi benytte det faktum at Y -variablene kun tar verdiene 0 eller 1.

Vi oversetter føringene ovenfor til en matematisk versjon:

$$X_{11}(1 - Y_1) = 0 \quad (3.29)$$

$$X_{12}(1 - Y_1) = 0 \quad (3.30)$$

$$X_{21}(1 - Y_2) = 0 \quad (3.31)$$

$$X_{22}(1 - Y_2) = 0 \quad (3.32)$$

La oss teste at lign.(3.29)-(3.32) er den matematiske versjonen av lign.(3.27)-(3.28):

Bevis:

Hvis $Y_1 = 0$ så sier lign.(3.29) at:

$$X_{11}(1 - Y_1) = 0 \quad (3.33)$$

$$\Downarrow$$

$$X_{11}(1 - 0) = 0 \quad (3.34)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{X_{11} = 0}} \quad (3.35)$$

Altså, dersom $Y_1 = 0$ så må $X_{11} = 0$, som er den korrekte sammenhengen. Tilsvarende kan vi vise for de tre andre likningene.

■

Med disse føringene på plass er vi ferdig med modellen³. Neste steg blir å *løse* modellen!

³Lign. (3.29)-(3.32) er såkalte **ikke-lineære** likninger. I dette tilfellet kommer dette av at vi *multipliserer* to variabler med hverandre (X-ene og Y-ene). Ikke-lineære likninger er *ikke* å foretrekke når det gjelder matematiske problemer, siden problemet blir adskillig vanskeligere. I stedet skriver vi oftest om ligningene på såkalt **lineær form**:

$X_{11}(1 - Y_1) = 0$	er ekvivalent med	$X_{11} \leq MY_1$
$X_{12}(1 - Y_1) = 0$	er ekvivalent med	$X_{12} \leq MY_1$
$X_{21}(1 - Y_2) = 0$	er ekvivalent med	$X_{21} \leq MY_2$
$X_{22}(1 - Y_2) = 0$	er ekvivalent med	$X_{22} \leq MY_2$

hvor $M = D_1 + D_2$.

4. Løsning: (LINGO - ikke pensum)

Vi skal *ikke* gå inn på løsningsmetodikk i dette faget, da dette går utenfor pensum. I stedet skal vi benytte oss av en programpakke kalt LINGO, for å løse matematiske problemer:

Lingo program:

$$\text{Min } 300 * I1 + 450 * I2 + 9 * X11 + 12 * X12 + 11 * X21 + 14 * X22;$$

$$X11 + X21 = 80;$$

$$X12 + X22 = 150;$$

$$X11 + X12 \leq 230 * Y1;$$

$$X21 + X22 \leq 230 * Y2;$$

$$@bin(Y1);$$

$$@bin(Y2);$$

Lingo løsning:

$$C^* = 2820 \quad (\text{Optimal kostnad})$$

$$I1 = 1 \quad (\text{Vi bygger i Møre og Romsdal})$$

$$I2 = 0 \quad (\text{Vi bygger *ikke* i Trøndelag})$$

$$X11 = 80 \quad (\text{Vi leverer all etterspørsel i Møre og Romsdal fra Møre og Romsdal})$$

$$X12 = 150 \quad (\text{Vi leverer all etterspørsel i Trøndelag fra Møre og Romsdal})$$

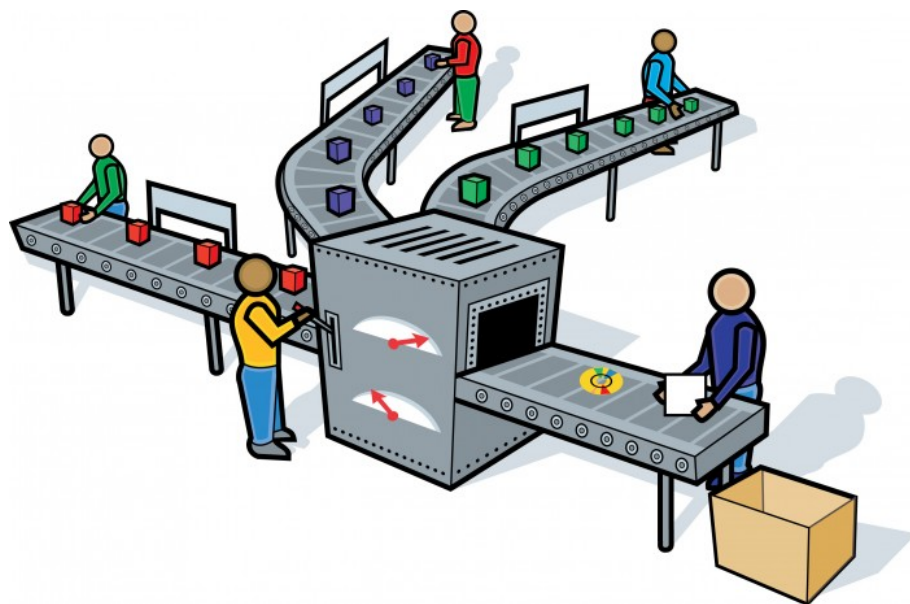
$$X21 = 0 \quad (\text{Vi bygger *ikke* i Trøndelag})$$

$$X22 = 0 \quad (\text{Vi bygger *ikke* i Trøndelag})$$



Kapittel 4

Aggregert Planlegging



4.1 Oversikt: Aggregert Planlegging

^{sammenslått}
“**Aggregert planlegging**”¹ er det planmessige **bindeleddet** mellom bedriftens strategiske mål og bedriftens lager- og produksjonsplanlegging.

Bedrifter opererer sjeldent med produksjonsplaner som går over 4-12 uker.

Dette kommer nesten utelukkende av at jo lengre planleggingshorisonten er, desto mer **usikker** blir planene, både med tanke på **nøyaktighet** og **gjennomførbarhet**.



Figur 4.1: Produksjonslinje.

¹“**Aggregert produksjonsplanlegging**” = aggregert planlegging.
På engelsk heter det “**Sales and Operations Planning**” eller forkortet SOP.

Problemet er:

Hvordan skal bedriften sikre sine *langsiktige* mål,
dersom produksjonsplanene ikke spenner mer enn maksimalt 12 uker frem i tid?

Svaret er:

“Aggregert planlegging” - dvs. salgs- og operasjonsplaner
på aggregerte nivå som spenner seg typisk over 6-12 måneder.
sammenslåtte

Med ”planer på aggregerte nivå” mener vi at produkter er slått sammen til produktfamilier, markedsområder slått sammen til regionale områder, leverandører slått sammen til leverandørgrupper etc.

I dette kapitlet skal vi gå nærmere inn på denne suksesskritiske planleggingsmodulen.

4.1.1 Verdensbildet - globalt

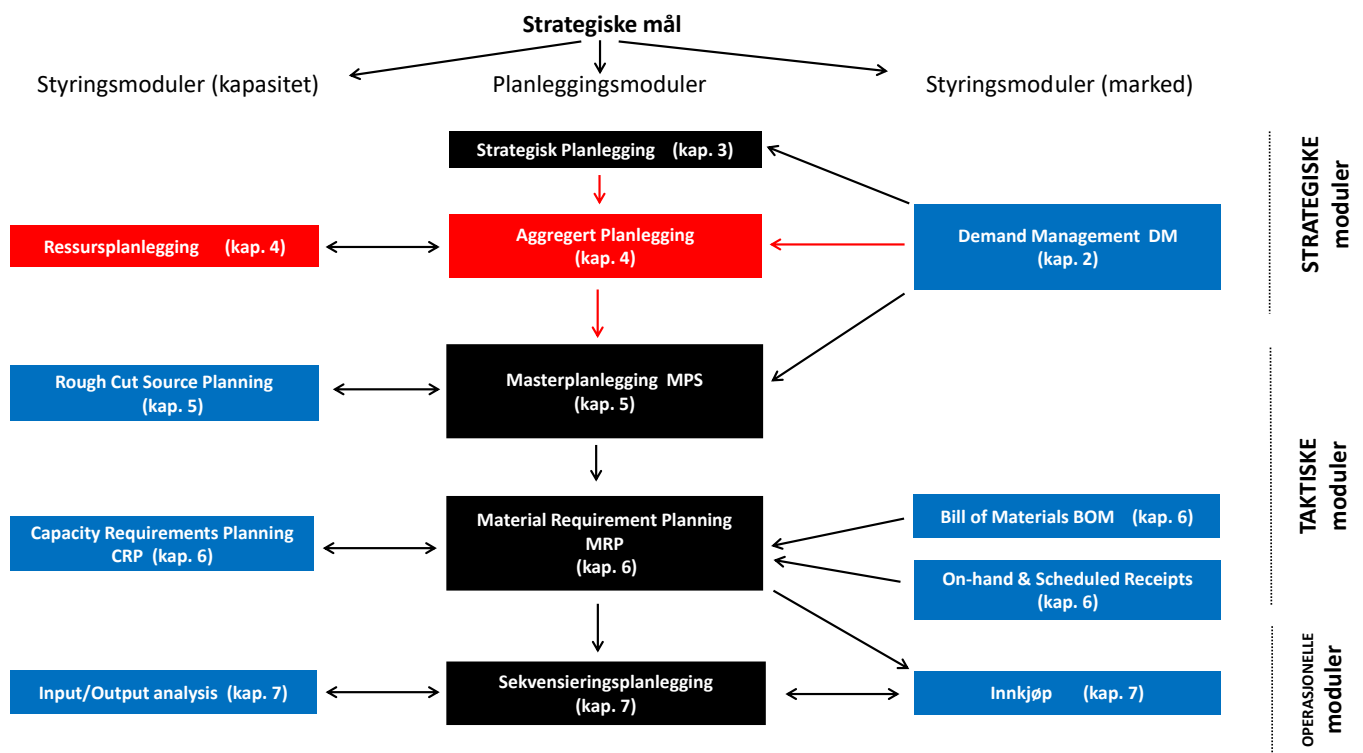
“Aggregert planlegging” er en strategisk modul som får input fra

- “Strategisk Planlegging”
- “Demand Management DM”

og resulterer i salgs- og operasjonsplaner som sendes til

- “Masterplanleggingen” (MPS),

som vist i figur 4.2.



Figur 4.2: Verdensbilde.

4.1.2 Verdensbildet - lokalt

Hvis vi zoomer litt inn på verdensbildet, ser vi at “aggregert planlegging” også får input fra to eksterne moduler (budsjetter):

“markedsplanlegging”

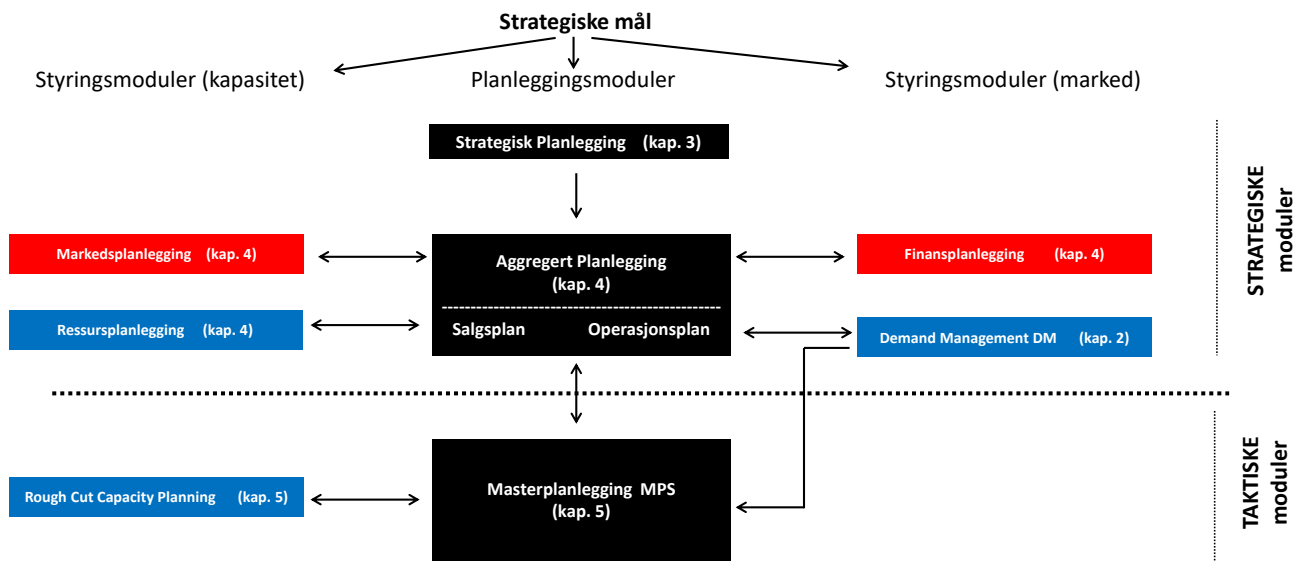
“finansplanlegging”

Figur 4.3 viser også tydelig at modulen resulterer i to planer:

“salgsplan”

“operasjonsplan”

Begge disse planene setter rammevilkårene for ”**masterplanleggingen**”, som er selve produksjonsplanene i bedriften.



Figur 4.3: Aggregert planlegging

4.2 Aggregert planlegging - målsettinger

Aggregert planlegging har som overordnet mål å lage salgs -og operasjonsplaner som [innfrir strategiske mål](#) satt fra ledelsen i bedriften.

Aggregert planlegging er derfor et [ledelsesverktøy](#).

De viktigste målkriteriene kommer fra finansmodulen i form av [budsjetter](#). Ledelsen og økonomiavdelingen jobber frem budsjetter som skal overholdes. Disse budsjettene kommer som overordnede føringer som skal gjennomføres på best mulig vis.

Siden budsjetter og evt. delresultater typisk spenner over et år, er det nettopp aggregert planlegging som må ivareta disse.

I tillegg til budsjetter, har vi eksempel på flere andre strategiske mål:

- [nye markedsandeler](#) - ledelsen og markedsavdelingen har satt ned mål om nye markedsandeler som skal vinnes
- [nye produktmikser](#) - ambisjoner om nye produkter og varianter har blitt fastsatt
- [lagerhold](#) - restriksjoner på lagerhold på overordnet nivå
- [kundetilfredshet](#) - fastsatte leveringsgrader og kundetilfredshet
- etc.

For å kunne nå målene som blir nedsatt, må vi utarbeide salgs -og operasjonsplaner på aggregert nivå som innebærer at vi tar noen typiske [beslutninger](#). Vi tar for oss de vanligste beslutningene i neste avsnitt.

4.3 Aggregert planlegging - beslutninger

Eksempler på typiske beslutninger som tas under aggregert planlegging:

- **tidsbeslutninger** - hvilken tidsenhet skal benyttes, f.eks. måneder, kvartal eller halvår, og hvor lang skal horisonten være?
- **aggregeringsnivå** - hvordan skal produktene sammenslås (familier)? Hvilke regioner skal vi operere med?.
- **produksjonsvolum** - hvor mye skal produseres av hver familie i hver periode?
- **lagervolum** - hvor mye skal overlagres fra en periode til neste?
- **personell** - antall ansatte, skiftordninger, bruk av overtid, bruk av innleid personell
- **outsourcing** - hvor mye av produksjonen skal outsources i hver periode
- etc.

Beslutningene ved aggregert planlegging tas gjerne av toppledelse og ledelse på mellomnivå (avdelingsledere) i samarbeid med planleggere i de aktuelle avdelingene.

Nå som typiske mål og beslutninger som må tas er fastsatt, skal vi i neste avsnitt se på hvilke hovedaktiviteter som gjennomføres ved aggregert planlegging.

4.4 Aggregert planlegging - hovedaktiviteter

Hovedaktiviteter ved aggregert planlegging²:

1. [oppdatere prognoser](#) - i starten av hver periode oppdateres de aggregerte prognosene basert på faktiske salgsdata, lagerdata, varer under arbeid etc.
2. [oppdatere salgsplan](#) - prognosene fra forrige punkt gir mulighet for vurdering av endringer i etterspørsel som følge av pris -og markedskampanjer og andre faktorer som har påvirket etterspørsel (som f.eks. konkurrenter, trender, vær etc).
3. [oppdatere operasjonsplan](#) - med nye salgsplaner blir det som regel behov for å bestemme nye aggregerte produksjonsvolum, lagervolum, innkjøpsvolum, ressursforbruk etc. Økt etterspørsel medfører økte produksjonsvolum og evt økt ressursforbruk
4. [vurdering av aggregerte planer](#) - et tverrfaglig vurderingsmøte med avdelingsledere/planleggere, hvor planene gjennomgås og vurderes med tanke på gjennomførbarhet og målsettinger (f.eks. kostnader, markedsandeler etc.).
5. [godkjenning av aggregerte planer](#) - til slutt godkjennes forslag for nye aggregerte produksjonsplaner av toppledelsen i samarbeid med avdelingsledere.

Legg merke til at denne aktivitetslisten er en repeterende prosedyre som gjøres fra periode til periode (måned, kvartal, halvår etc). Så selv om planene er grove og strekker seg gjerne over et år, [oppdateres](#) planene fortløpende periode for periode, for å ta høyde for faktiske hendelser.

²Aktivitetene står i kronologisk rekkefølge i løpet av en periode.

4.5 Ressursplanlegging

I figur 4.2 (verdensbildet), ser vi at vi har en styringsmodul som sjekker om det finnes nok ressurser til å gjennomføre en aggregerte planen.

Modulen kalles [ressursplanlegging](#), og her gjøres *grove* kapasitetsberegninger, for å avklare om en aggregert plan er gjennomførbar eller ikke. Dersom en plan ikke er gjennomførbar, må planleggerne enten bestemme en ny plan eller øke kapasiteten der flaskehalsene oppstår.

Vanlige beregninger inkluderer blant annet:

- om det er tilstrekkelig årsverk (arbeidskraft)
- om det er tilstrekkelig maskintid
- om det er tilstrekkelig kapital
- om det er tilstrekkelig lagerplass

4.6 Aggregert planlegging: Glamox

Glamox er en norsk produsent og leverandør av belysning.

La oss nå se på aggregert planlegging for Glamox hvor de ønsker å planlegge bruken av antall overtidstimer kontra lageroppsett fra første til andre halvår 2015.

Først ser vi på det grunnleggende tilfellet for Glamox, **situasjon 0**.

Deretter utvider vi modellen med et sikkerhetslager, **utvidelse 1**.

Så gjør vi nok en utvidelse av modellen ved å inkludere mulighet for bestilling, **utvidelse 2**.

0. **Situasjon 0**

- (a) Skisse
- (b) Data
- (c) Variabler
- (d) Målfunksjon
- (e) Føringer



Figur 4.4: Glamox.

1. **Utvidelse 1: Sikkerhetslager**

- (a) Skisse
- (b) Nye data
- (c) Nye føringer

2. **Utvidelse 2: Mulighet for bestilling**

- (a) Skisse
- (b) Nye data
- (c) Nye variabler
- (d) Ny målfunksjon
- (e) Nye føringer

4.6.1 Grunnleggende tilfelle (situasjon 0)

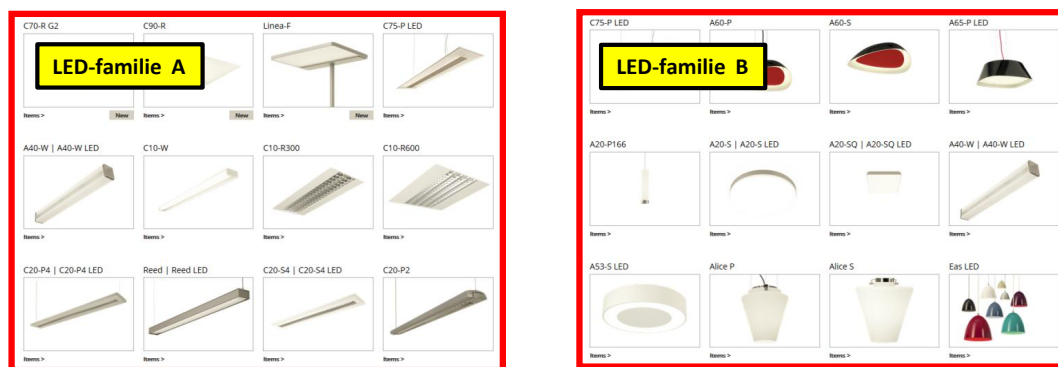
Eksempel: (Glamox - aggregert planlegging - **situasjon 0**)

Glamox AS ønsker å planlegge bruken av antall overtidstimer kontra lageroppsett fra første til andre halvår 2015, for to av LED-familiene sine, si LED *A* og LED *B*.

De har fått følgende prognoser fra *Demand Management* for hvert halvår:

	A	B
Første halvår	4000	3000
Andre halvår	3000	8000

Tabell 4.1: Etterspørsel.



Figur 4.5: LED *A* og LED *B*.

Overlagringskostnaden:

Overlagringskostnaden fra 1. halvår til andre halvår er 500 kroner per enhet for LED A og 1000 kroner per enhet for LED B, mens overtidskostnad per overtime er 1000 kroner for hvert halvår.

Lagernivåene:

Lagernivåene i starten av 2015 er 1000 enheter LED A og 1000 enheter LED B. Ledelsen har bestemt at det ikke skal holdes lager ved slutten av 2015.

Produksjonskapasitet:

Glamox opererer med en produksjonskapasitet målt i regulære timer (ansatte), i tillegg til eventuelt antall overtidstimer. Kapasitetstilgangen er 1. halvår er 40000 regulære timer og 60000 timer og 2. halvår. Bearbeidingstidene er 5 og 7 timer for LED A og LED B henholdsvis.

Overtidstimer:

Til slutt har Glamox AS satt maksimumsgrenser på antall overtidstimer som kan benyttes for hvert halvår til 2000 timer i 1.halvår og 6000 timer i 2. halvår.

Målsettingen er å minimere overtidskostnader og lagerkostnader for 2015.

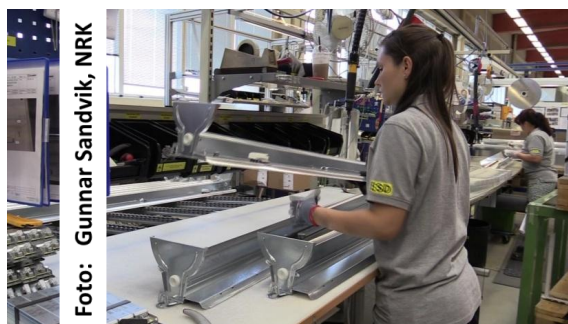


Foto: Gunnar Sandvik, NRK



Figur 4.6: Produksjon og lager.

- a) Lag en skisse over situasjonen.
- b) Definer alle data i modellen.
- c) Definer alle variablene i modellen.
- d) Beskriv målfunksjonen i modellen.

Vi husker at *føringer* beskriver *krav* som variablene må oppfylle. Vi delte føringene inn i tre typer:

- **kapasitets**føringer på produksjon
- **policy**føringer
- **logiske** føringer

Før vi begynner å uttrykke føringene i problemet, er det alltid best å *identifisere* hvilke typer føringer vi har.

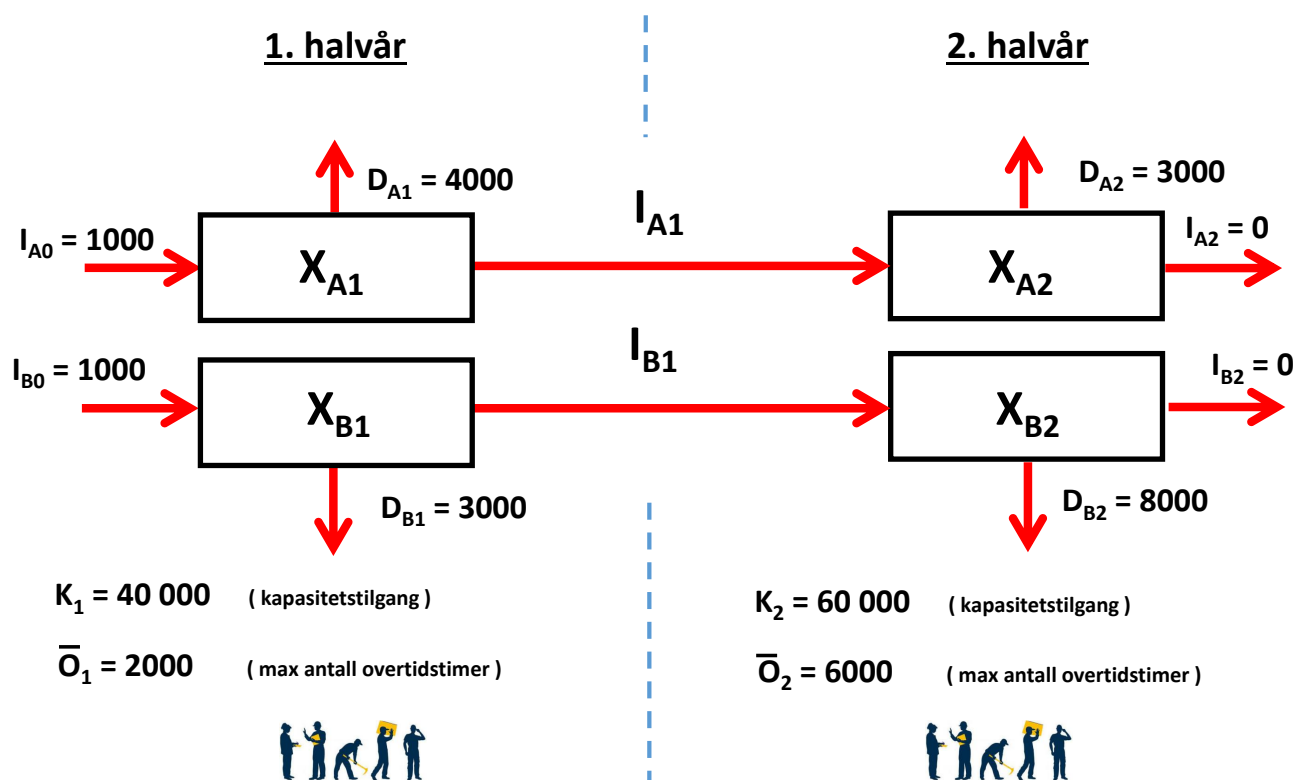
Vi identifiserer følgende føringer:

- 1 **kapasitets**føring: produksjonskapasitet i form av antall **tilgjengelige arbeidsstimer**
- 1 **policy**føring: den pålagte begrensningen om maksimum **overtidsbruk** pr halvår
- 1 **logisk** føring: lagerbalansen, dvs. den logiske sammenhengen mellom **lagernivå** variablene og **produksjons**variablene

- e) Beskriv **kapasitets**føringen matematisk, dvs. beskriv føringene på produksjonskapasiteten som har med **tilgjengelige arbeidstimer** å gjøre.
- f) Har Glamox nok produksjonskapasitet til å slippe både lager og overtid?
(**ressursplanlegging**)
- g) Beskriv **policy**sføringen matematisk, dvs. beskriv føringene som har med **overtidsbruk** å gjøre.
- h) Beskriv den **logiske** føringen matematisk, dvs. beskriv lagerbalansen til Glamox.

Løsning:

a) Skisse: (situasjon 0)



Figur 4.7: Skisse.

b) Data: (situasjon 0)

Data er størrelser som vi *ikke kan påvirke eller endre* på i løpet av planleggingshorisonten. Dette er typisk størrelser som fremstår med *tall* i problembeskrivelsen.

Når vi definerer data, bør vi bestemme et passende *symbol*, hvilke *indekser* vi skal bruke, tallverdien og til slutt en kort beskrivelse av hva størrelsen representerer. Vi definerer følgende *datastørrelser*:
(# = antall)³

$I_{A0} = 1000$	lagernivå , dvs. antall enheter LED <i>A</i> ved starten av 2015	(4.1)
$I_{B0} = 1000$	lagernivå , dvs. antall enheter LED <i>B</i> ved starten av 2015	(4.2)
$I_{A2} = 0$	lagernivå , dvs. antall enheter LED <i>A</i> ved slutten av 2015	(4.3)
$I_{B2} = 0$	lagernivå , dvs. antall enheter LED <i>B</i> ved slutten av 2015	(4.4)
$D_{A1} = 4000$	etterspørsel for LED <i>A</i> i 1. halvår	(4.5)
$D_{A2} = 3000$	etterspørsel for LED <i>A</i> i 2. halvår	(4.6)
$D_{B1} = 3000$	etterspørsel for LED <i>B</i> i 1. halvår	(4.7)
$D_{B2} = 8000$	etterspørsel for LED <i>B</i> i 2. halvår	(4.8)
$K_1 = 40\,000$	kapasitetstilgang , dvs. # tilgjengelige regulære timer 1. halvår	(4.9)
$K_2 = 60\,000$	kapasitetstilgang , dvs. # tilgjengelige regulære timer 2. halvår	(4.10)
$R_A = 5$	bearbeidingstid per enhet av LED <i>A</i> (i timer)	(4.11)
$R_B = 7$	bearbeidingstid per enhet av LED <i>B</i> (i timer)	(4.12)
$\overline{O}_1 = 2000$	max antall tilgjengelig overtidstimer 1. halvår	(4.13)
$\overline{O}_2 = 6000$	max antall tilgjengelig overtidstimer 1. halvår	(4.14)
$H_A = 500$	lagringskostnad per enhet for LED <i>A</i> per halvår	(4.15)
$H_B = 1000$	lagringskostnad per enhet for LED <i>A</i> per halvår	(4.16)
$C_O = 1000$	overtidskostnaden pr. time	(4.17)

³Legg merke til at **startslageret** I_{A0} og **sluttlageret** I_{A2} er *indeksert* som 0. halvår og 2. halvår. Hvorfor vi gjør dette vil bli klart i senere kapitler, men kort sagt så er det notasjonsmessig en fordel.

c) Variabler: (situasjon 0)

Når vi skal lage en matematisk modell, er valget av variabler *helt kritisk*. Velger vi feil variabler, kan problemet raskt bli både feil og unødvendig komplisert.

Vi husker at variabler representerer **beslutninger** som vi kan ta. I motsetning til data, er variablene dermed data som vi **kan bestemme selv**.

Produserte enheter:

Vi skal **beslutte** hvor *mange enheter* vi skal produsere i første og andre halvår av begge produktfamiliene. Disse størrelsene er dermed variabler som vi skal finne:

$$X_{A1} = \text{antall enheter } \mathbf{produsert} \text{ av LED } A \text{ i 1. halvår} \quad (4.18)$$

$$X_{A2} = \text{antall enheter } \mathbf{produsert} \text{ av LED } A \text{ i 2. halvår} \quad (4.19)$$

$$X_{B1} = \text{antall enheter } \mathbf{produsert} \text{ av LED } B \text{ i 1. halvår} \quad (4.20)$$

$$X_{B2} = \text{antall enheter } \mathbf{produsert} \text{ av LED } B \text{ i 2. halvår} \quad (4.21)$$

Overlagrede enheter:

Er det flere beslutninger som vi må ta i dette problemet?

Ja, vi må ikke glemme **lageret** som vi kan holde fra 1. halvår til 2. halvår for begge produktene.

$$I_{A1} = \text{antall } \mathbf{overlagrede} \text{ enheter av LED } A \text{ fra 1. til 2. halvår} \quad (4.22)$$

$$I_{B1} = \text{antall } \mathbf{overlagrede} \text{ enheter av LED } B \text{ fra 1. til 2. halvår} \quad (4.23)$$

Overtid:

Men hvorfor skal vi ha lager? Det påpekes jo at ved utgangen av året skal vi *ikke* ha lager.

Behovet for lageret kommer av [kapasitetsbegrensningene](#) vi har for hvert halvår! Dersom etterspørselen overgår hva vi har av kapasitet til å produsere, må vi beslutte om vi skal lagre eller bruke av overtidskapasiteten. Begge alternativene gir merkostnader, som vi totalt ønsker å minimere (legg merke til at selve produksjonskostnaden er *ikke* med i beslutningsprosessen, siden den *totale produksjonskostnaden* i løpet av året er gitt (hvorfor?).

Til slutt har vi beslutningene om hvor mye [overtid](#) vi skal bruke for hvert halvår. Vi definerer derfor:

O_1	=	totalt antall overtidstimer brukt i 1. halvår	(4.24)
-------	---	--	--------

O_2	=	totalt antall overtidstimer brukt i 2. halvår	(4.25)
-------	---	--	--------

d) Målfunksjon: (situasjon 0)

Vi ønsker å lage en produksjonsplan som **minimerer** summen av de totale **lager** -og **overtids** kostnadene:

$$\underbrace{\text{totale kostnader}}_{= C_{totalt}} = \underbrace{\text{totale lagerkostnader}}_{= C_{lager}} + \underbrace{\text{totale overtidskostnader}}_{= C_{overtid}} \quad (4.26)$$

Vi bruker nå variablene sammen med dataene til å uttrykke disse kostnadene.

Lager kostnaden: (se lign.(4.15) og (4.16))

$$C_{lager} = \underbrace{H_A}_{= 500} I_{A1} + \underbrace{H_B}_{= 1000} I_{B1} \quad (\text{totale lager- og overtidskostnader}) \quad (4.27)$$

Overtids kostnaden: (se lign.(4.17))

$$C_{overtid} = \underbrace{C_O}_{= 1000} O_1 + \underbrace{C_O}_{= 1000} O_2 \quad (\text{totale overtidskostnader}) \quad (4.28)$$

Målfunksjonen $C_{totalt} = C_{lager} + C_{overtid}$ i lign.(4.26) er da:

$$C_{totalt} = 500I_A + 1000I_B + 1000O_1 + 1000O_2 \quad (\text{totale merkostnader}) \quad (4.29)$$

e) Kapasitetsføring: (situasjon 0)

Vi har en føring for tilgjengelig kapasitet for hvert halvår. Summen av antall timer forbrukt ved tilvirkning av LED A og B , må være mindre enn tilgjengelig antall timer for hvert halvår *pluss* antall overtidstimer brukt:

$\overbrace{R_A X_{A1} + R_B X_{B1}}^{\text{\# brukte timer 1. halvår}} \leq \overbrace{K_1 + O_1}^{\text{kapasitetsgrense}}, \quad (4.30)$
$\overbrace{R_A X_{A2} + R_B X_{B2}}^{\text{\# brukte timer 2. halvår}} \leq \overbrace{K_2 + O_2}^{\text{kapasitetsgrense}}, \quad (4.31)$

hvor

$$R_A = 5 \quad \text{bearbeidingstid per enhet av LED } A \text{ (i timer)} \quad (4.32)$$

$$R_B = 7 \quad \text{bearbeidingstid per enhet av LED } B \text{ (i timer)} \quad (4.33)$$

$$X_{A1} = \text{antall enheter produsert av LED } A \text{ i 1. halvår} \quad (4.34)$$

$$X_{A2} = \text{antall enheter produsert av LED } A \text{ i 2. halvår} \quad (4.35)$$

$$X_{B1} = \text{antall enheter produsert av LED } B \text{ i 1. halvår} \quad (4.36)$$

$$X_{B2} = \text{antall enheter produsert av LED } B \text{ i 2. halvår} \quad (4.37)$$

$$K_1 = 40\,000 \quad \text{kapasitetstilgang,} \quad (4.38)$$

dvs. # tilgjengelige regulære timer 1. halvår

$$K_2 = 60\,000 \quad \text{kapasitetstilgang,} \quad (4.39)$$

dvs. # tilgjengelige regulære timer 2. halvår

$$O_1 = \text{totalt antall overtidstimer brukt i 1. halvår} \quad (4.40)$$

$$O_2 = \text{totalt antall overtidstimer brukt i 2. halvår} \quad (4.41)$$

f) Slippe overtid og lager?: (situasjon 0)

Hvis vi har hverken lager eller overtid, får vi umiddelbart at kvantumsproduksjonsvariablene blir lik en ”**Just-In-Time**” løsning, hvor vi produserer all etterspørsel i den perioden vi har etterspørselen. Vi har dermed at:

$$X_{A1} = D_{A1} - I_{A0} = 4000 - 1000 = 3000 , \quad \text{produksjon av LED A i 1. halvår} \quad (4.42)$$

$$X_{A2} = 3000 , \quad \text{produksjon av LED A i 2. halvår} \quad (4.43)$$

$$X_{B1} = D_{B1} - I_{B0} = 3000 - 1000 = 2000 , \quad \text{produksjon av LED B i 1. halvår} \quad (4.44)$$

$$X_{B2} = 8000 , \quad \text{produksjon av LED B i 2. halvår} \quad (4.45)$$

Siden vi antar ingen overtidstimer, kan vi regne ut antall timer vi bruker i hvert halvår:

$$\overbrace{R_A X_{A1} + R_B X_{B1}}^{\text{\# brukte timer 1. halvår}} = 5 \cdot 3000 + 7 \cdot 2000 = \underline{29\,000} \quad (4.46)$$

$$\overbrace{R_A X_{A2} + R_B X_{B2}}^{\text{\# brukte timer 2. halvår}} = 5 \cdot 3000 + 7 \cdot 8000 = \underline{71\,000} \quad (4.47)$$

Antall timer i **overkapasitet** i 1. halvår: ($K_1 = 40\,000$, se lign.(4.9))

$$\underline{K_1 - 29\,000} = 40\,000 - 29\,000 = \underline{11\,000} \quad (4.48)$$

Antall timer i **underkapasitet** i 2. halvår: ($K_2 = 60\,000$, se lign.(4.10))

$$\underline{K_2 - 71\,000} = 60\,000 - 71\,000 = \underline{-11\,000} \quad (4.49)$$

Konklusjon:

Vi har en **kapasitetssprekk** i 2. halvår på grunn av den høye etterspørselen av LED B i 2. halvår, dersom en just-in-time løsning blir benyttet. ⁴

⁴Dette kommer sannsynligvis av en større ordre som skal leveres til 2. halvår, f.eks. til en oljeplattform.

g) Policyføring: (situasjon 0)

Vi har muligheten til å bruke overtid, men opp til et visst antall timer per halvår:

$$O_1 \leq \overbrace{\overline{O}_1}^{= 2000} \quad \# \text{ overtidstimer 1. halvår kan ikke overskride } \overline{O}_1 \quad (4.50)$$

$$O_2 \leq \overbrace{\overline{O}_2}^{= 6000} \quad \# \text{ overtidstimer 2. halvår kan ikke overskride } \overline{O}_2 \quad (4.51)$$

hvor

$$O_1 = \text{totalt antall } \mathbf{overtidstimer} \text{ brukt i 1. halvår} \quad (4.52)$$

$$O_2 = \text{totalt antall } \mathbf{overtidstimer} \text{ brukt i 2. halvår} \quad (4.53)$$

$$\overline{O}_1 = 2000 \quad \mathbf{max} \text{ tilgjengelig overtid 1. halvår} \quad (4.54)$$

$$\overline{O}_2 = 6000 \quad \mathbf{max} \text{ tilgjengelig overtid 2. halvår} \quad (4.55)$$

h) Logisk føring: (situasjon 0)

Kravene om at **etterspørselen skal oppfylles** i hvert halvår, dvs. et policy føring.

For å forstå hvordan vi setter opp disse likningene er det hensiktsmessig å tolke disse føringene fra en annen vinkel.

Vi skriver opp **lagerbalansen** for produktene for hvert halvår:

$$\text{inngående lager} + \text{inn til lager} - \text{ut av lager} = \text{utgående lager} \quad (4.56)$$

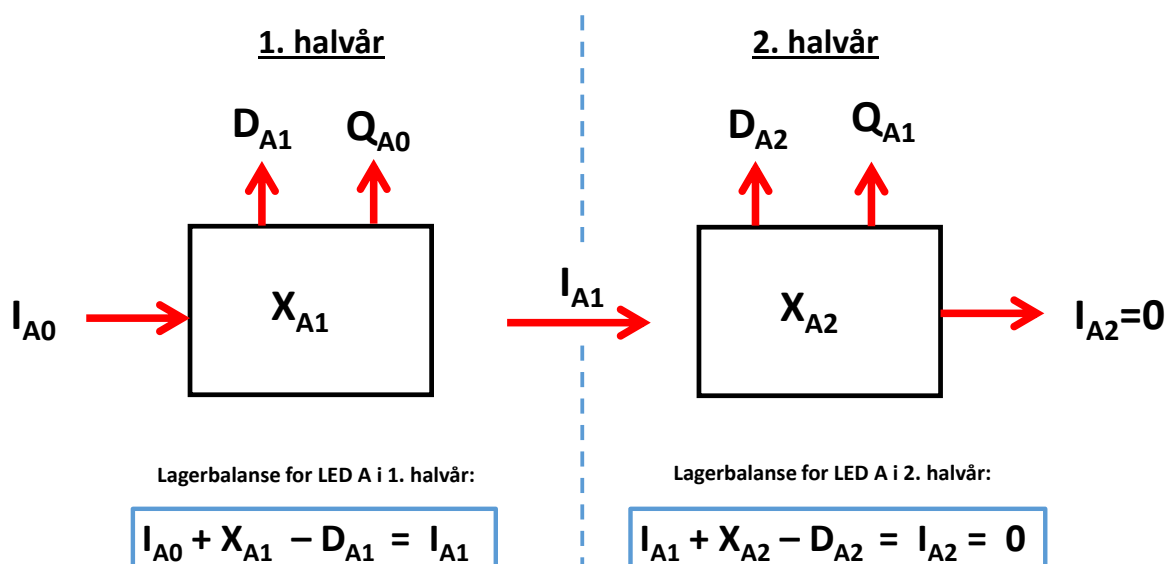
hvor i vårt tilefelle:

$$\text{inngående lager} = \text{lagernivået ved halvårets start} \quad (4.57)$$

$$\text{inn til lager} = \text{antall enheter produsert i løpet av halvåret} \quad (4.58)$$

$$\text{ut av lager} = \text{kun etterspørsel etter produktet i løpet av halvåret} \quad (4.59)$$

$$\text{utgående lager} = \text{lagernivået ved halvårets slutt} \quad (4.60)$$



Figur 4.8: Lagerbalansen.

Siden vi har to halvår, får vi to balanselikninger for hver familie:

LED-familie A :

$$\begin{array}{lcl} \overbrace{I_{A0}}^{= 1000} + X_{A1} - \overbrace{D_{A1}}^{= 4000} = I_{A1} & \text{(lagerbalansen for LED } A \text{ i 1. halvår)} & (4.61) \\ I_{A1} + X_{A2} - \underbrace{D_{A2}}_{= 3000} = \underbrace{I_{A2}}_{= 0} & \text{(lagerbalansen for LED } A \text{ i 2. halvår)} & (4.62) \end{array}$$

LED-familie B :

$$\begin{array}{lcl} \overbrace{I_{B0}}^{= 1000} + X_{B1} - \overbrace{D_{B1}}^{= 3000} = I_{B1} & \text{(lagerbalansen for LED } B \text{ i 1. halvår)} & (4.63) \\ I_{B1} + X_{B2} - \underbrace{D_{B2}}_{= 8000} = \underbrace{I_{B2}}_{= 0} & \text{(lagerbalansen for LED } B \text{ i 2. halvår)} & (4.64) \end{array}$$

Legg merke til to ting:

- Inngående lager i andre halvår er lik utgående lager fra første.
- Utgående lager i andre halvår er lik null, siden vi har antatt at det ikke er noe opplegg av lager i løpet av 2014.

■

LINGO-program: **situasjon 0** (ikke pensum)

LINGO er en programpakke som er spesialisert for å beskrive og løse matematiske optimeringsproblemer.

Beskrivelse av problemstillingen ved Glamox i [LINGO](#):

$$\text{Min} = 500 * IA1 + 1000 * IB1 + 1000 * O1 + 1000 * O2;$$

$$1000 + XA1 - 4000 = IA1;$$

$$IA1 + XA2 - 3000 = 0;$$

$$1000 + XB1 - 3000 = IB1;$$

$$IB1 + XB2 - 8000 = 0;$$

$$5 * XA1 + 7 * XB1 \leq 40000 + O1;$$

$$5 * XA2 + 7 * XB2 \leq 60000 + O2;$$

$$O1 \leq 2000;$$

$$O2 \leq 6000;$$

Vi har nå beskrevet modellen i LINGO. Neste steg er å se på *løsningen* LINGO gir oss.

LINGO-program: løsning (ikke pensum)

Løsningen av LINGO-programmet fra forrige side:

$$C^* = 1\,100\,000 \quad (\text{Optimal kostnad})$$

$$XA1 = 5200$$

$$XA2 = 800$$

$$XB1 = 2000$$

$$XB2 = 8000$$

$$IA1 = 2200 \quad (\text{Ovelagring 2200 enheter})$$

$$IB1 = 0$$

$$O1 = 0$$

$$O2 = 0$$

Kommentarer

1. Hvorfor blir det ingen overlagring av produkt B ?
2. Hvorfor blir det ingen overtid?

Hvis vi ser på kostnadene, så ser vi at:

Lagring av produkt A er billigere enn både lagring av produkt B og overtid. Det er derfor optimalt å løse all kapasitetsproblematikk ved å overlagre så mye som mulig av produkt A . I vårt tilfelle løses all kapasitetsoverskridelser ved hjelp av overlagring av produkt A .

4.6.2 Utvidelse 1: Sikkerhetslager

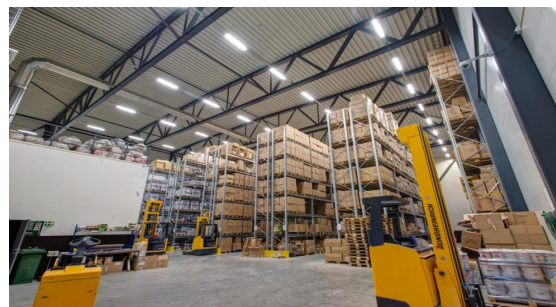
Eksempel: (Glamox - aggregert planlegging - utvidelse 1)

Glamox innser at prognosene deres har feil i seg, så de bestemmer seg for å operere med et [sikkerhetslager](#).

De har bestemt seg for å holde et sikkerhetslager på 500 enheter for LED A og 1500 enheter for LED B .

Vi skal nå utvide modellen til å inkludere sikkerhetslageret.

Når vi utvider modellen er det ikke nødvendig å skrive opp hele modellen på nytt - vi skriver kun opp de delene av modellen som faktisk får en endring.

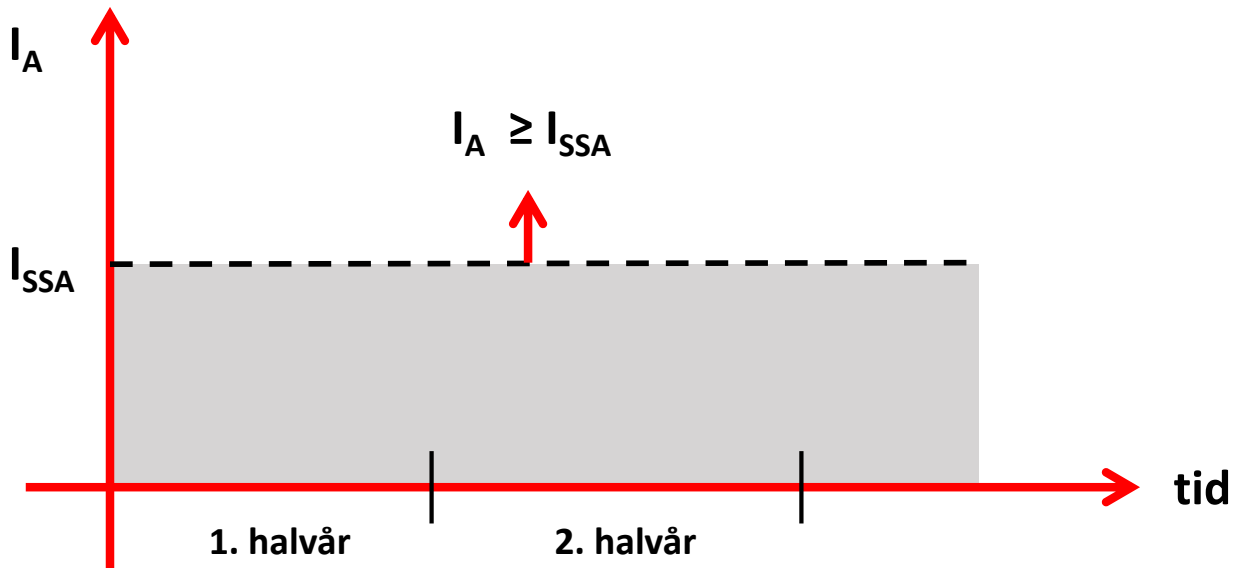


Figur 4.9: Sikkerhetslager.

- a) Lag en skisse som illustrerer sikkerhetslageret.
- b) Definer de nye dataene.
- c) Beskriv den nye **policy**sføringen matematisk,
dvs. beskriv føringene som har med **sikkerhetslageret** å gjøre.

a) Skisse: (utvidelse 1)

Skisse som illustrerer sikkerhetslageret:



Figur 4.10: Sikkerhetslager.

b) Nye data: (utvidelse 1)

Vi har en ny dataverdi i form av størrelsen på sikkerhetslageret:

I_{SSA}	$=$	500	(sikkerhetslager, antall enheter for LED A)	(4.65)
I_{SSB}	$=$	1500	(sikkerhetslager, antall enheter for LED B)	(4.66)

Siden sikkerhetslager påvirker lagerbalansen, må vi oppdatere disse føringene.

c) Nye policyføringer: (utvidelse 1)

Sikkerhetslager er lager for å **unngå stockout**, dvs. at vi går tom på lager før all etterspørsel er oppfylt.

Sikkerhetslager er et *bufferlager*, som i prinsippet *aldri* skal benyttes (hvis verden er ideell). Vi kan dermed uttrykke sikkerhetslageret som en *minimumsgrense* som lageret aldri skal komme under:

I_{A1}	$\geq$	I_{SSA}	(lagernivå for LED A må alltid overgå sikkerhetslageret)	(4.67)
I_{B1}	$\geq$	I_{SSB}	(lagernivå for LED B må alltid overgå sikkerhetslageret)	(4.68)



LINGO-program: **utvidelse 1** (ikke pensum)

Vi har inkludert de nye lagerføringene (i **rødt**):

$$\text{Min} = 500 * IA + 1000 * IB + 1000 * O1 + 1000 * O2;$$

$$1000 + XA1 - 4000 = IA;$$

$$IA + XA2 - 3000 = 0;$$

$$1000 + XB1 - 3000 = IB;$$

$$IB + XB2 - 8000 = 0;$$

$$5 * XA1 + 7 * XB1 \leq 40000 + O1;$$

$$5 * XA2 + 7 * XB2 \leq 60000 + O2;$$

$$O1 \leq 2000;$$

$$O2 \leq 6000;$$

$$IA1 \geq 500;$$

$$IB1 \geq 1500;$$

LINGO-program: løsning (ikke pensum)

Løsningen av LINGO-programmet fra forrige side:

$$C^* = 3\,750\,000 \quad (\text{Optimal kostnad})$$

$$XA1 = 3500$$

$$XA2 = 2500$$

$$XB1 = 3500$$

$$XB2 = 6500$$

$$IA1 = 500 \quad (\text{Overlagring 500 enheter})$$

$$IB1 = 1500 \quad (\text{Overlagring 1500 enheter})$$

$$O1 = 2000 \quad (150 \text{ overtidstimer})$$

$$O2 = 0$$

Kommentarer:

1. Hvorfor brukes 2000 overtidstimer i 1. halvår?
2. Legg merke til den store kostnadsøkningen (fra 1.1 mill. kroner uten sikkerhetslager til 3.75 mill. kroner med sikkerhetslager). Hva er årsaken til den store økningen?

4.6.3 Utvidelse 2: Mulighet for bestilling

Eksempel: (Glamox - aggregert planlegging - utvidelse 2)

Glamox ønsker å se på muligheten for å kunne ta bestilling, dvs at **stockout** kan forekomme, for å se om de høye kostnadene kan reduseres.⁵

Glamox har estimert at bestillingskostnaden for en enhet LED A er 1200 kroner og 1800 kroner for en enhet LED B .

Anta Glamox har null bestillinger ved starten av året, og at de krever også null bestillinger ved slutten av året, for begge familiene.

Vi skal nå utvide modellen til å inkludere muligheten for bestilling.

Når vi utvider modellen er det ikke nødvendig å skrive opp hele modellen på nytt - vi skriver kun opp de delene av modellen som faktisk får en endring.



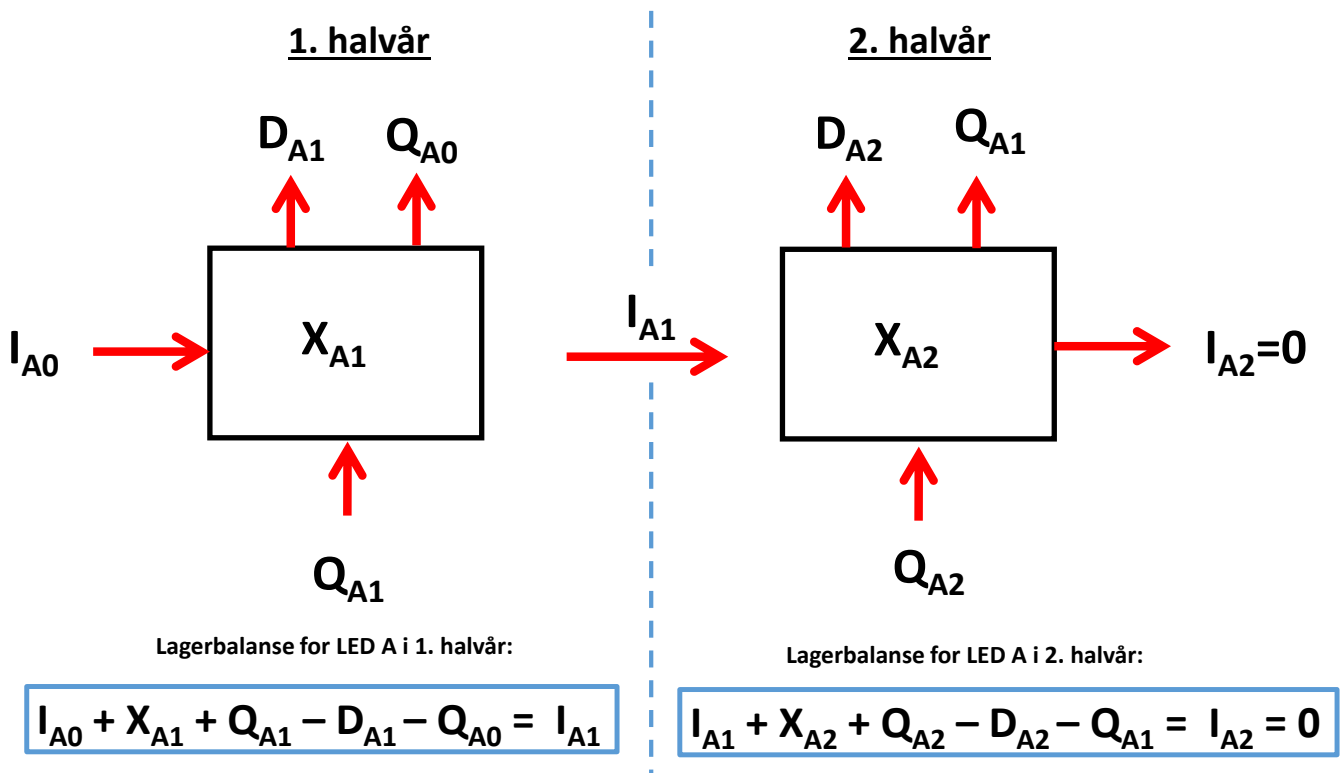
Figur 4.11: Bestilling.

⁵**Stockout** betyr at lageret kan bli *negativt*, som i praksis representerer bestillinger/forsinkelser.

- a) Lag en skisse som illustrerer lagerbalansen med mulighet for bestilling.
- b) Definer de nye dataene.
- c) Definer de nye variablene.
- d) Beskriv den nye målfunksjonen.
- e) Beskriv den nye **logiske** føringen matematisk, dvs. beskriv den nye lagerbalansen til Glamox.

a) Skisse: (utvidelse 2)

Skisse som illustrerer lagerbalansen med mulighet for bestilling Q_{A1} og Q_{A2} :



Figur 4.12: Lagerbalanse med bestilling Q_{A1} og Q_{A2} .

b) Nye data: (utvidelse 2)

Vi har to nye dataverdi i form av de ekstra bestillingskostnadene:

U_A	$=$	1200	(bestillingskost pr. enhet for LED A)	(4.69)
U_B	$=$	1800	(bestillingskost pr. enhet for LED B)	(4.70)

Vi har også fire nye dataverdier i form av antall inngående og utgående bestillinger:

Q_{A0}	$=$	0	(ingen bestillinger av LED A ved starten av 2015)	(4.71)
Q_{A2}	$=$	0	(ingen bestillinger av LED A ved slutten 2015)	(4.72)
Q_{B0}	$=$	0	(ingen bestillinger av LED B ved starten av 2015)	(4.73)
Q_{B2}	$=$	0	(ingen bestillinger av LED B ved slutt av 2015)	(4.74)

c) Nye variabler: (utvidelse 2)

Vi kan selv bestemme hvor **mange** enheter vi ønsker å ta opp bestilling for fra første til andre halvår. Disse størrelsene definerer vi derfor som beslutningsvariabler.

Legg merke til at en bestilling inntreffer dersom vi *ikke* har noe på lager. Så antall bestillinger fra en periode til neste, kan defineres på samme måte som en *lagerstørrelse*.

Q_{A1}	=	antall bestillinger av LED A fra 1. til 2. halvår	(4.75)
----------	---	---	--------

Q_{B1}	=	antall bestillinger av LED B fra 1. til 2. halvår	(4.76)
----------	---	---	--------

d) Ny målfunksjon: (utvidelse 2)

Siden vi har fått et nytt kostnadselement i form av å kunne ta imot bestillinger, definerer vi **Bestillings**kostnaden:

$$\textcolor{red}{C}_B = \underbrace{U_A}_{= 1200} Q_{A1} + \underbrace{U_B}_{= 1800} Q_{B1} \quad (\text{totale bestillingskostnader}) \quad (4.77)$$

Den nye målfunksjonen

$$C = C_I + C_O + \textcolor{red}{C}_B \quad (4.78)$$

er da totale kostnader:

$C = 500I_A + 1000I_B + 1000O_1 + 1000O_2 + \textcolor{red}{1200}Q_{A1} + \textcolor{red}{1800}Q_{B1} \quad (4.79)$

e) Nye logiske føringer: (utvidelse 2)

Vi har fått en ny kilde i form av å ta bestillinger for å oppfylle etterspørsel. Denne kilden påvirker *lagerbalansen*.

Siden vi har to halvår, får vi to balanselikninger for hvert produkt.

For å forstå disse endringene så må huske på hvordan balanselikningen er definert:

$$\text{inngående lager} + \text{inn til lager} - \text{ut av lager} = \text{utgående lager} \quad (4.80)$$

Vi tolker en bestilling inn til en periode som noe som går **ut** av lageret, mens en bestilling ved slutten av en periode er noe som kommer **inn** til lager.

LED-familie A:

$$\overbrace{\underbrace{I_{A0}}_{= 100} + X_{A1} + \underbrace{Q_{A1}}_{= 0} - \underbrace{D_{A1}}_{= 400} - \underbrace{Q_{A0}}_{= 0}}^{\text{(lagerbalansen for LED A i 1. halvår)}} = I_{A1} \quad (4.81)$$

$$\underbrace{I_{A1} + X_{A2} + \underbrace{Q_{A2}}_{= 0} - \underbrace{D_{A2}}_{= 300} - \underbrace{Q_{A1}}_{= 0}}_{\text{(lagerbalansen for LED A i 2. halvår)}} = \underbrace{I_{A2}}_{= 0} \quad (4.82)$$

LED-familie B :

$$\overbrace{\underbrace{I_{B0}}_{= 200} + X_{B1} + \underbrace{Q_{B1}}_{= 0} - \underbrace{D_{B1}}_{= 300} - \underbrace{Q_{B0}}_{= 0}}_{\text{(lagerbalansen for LED } B \text{ i 1. halvår)}} = I_{B1} \quad (4.83)$$

$$\underbrace{I_{A1} + X_{B2} + \underbrace{Q_{B2}}_{= 0} - \underbrace{D_{B2}}_{= 800} - Q_{B1}}_{\text{(lagerbalansen for LED } B \text{ i 2. halvår)}} = \underbrace{I_{B2}}_{= 0} \quad (4.84)$$

■

LINGO-program: utvidelse 2 (ikke pensum)

Vi har inkludert de nye lagerføringene (i rødt):

$$\text{Min} = 500 * IA + 1000 * IB + 1000 * O1 + 1000 * O2 + 1200 * QA1 + 1800 * QB1;$$

$$1000 + XA1 + QA1 - 4000 = IA;$$

$$IA + XA2 - 3000 - QA1 = 0;$$

$$1000 + XB1 + QB1 - 3000 = IB;$$

$$IB + XB2 - 8000 - QB1 = 0;$$

$$5 * XA1 + 7 * XB1 \leq 40000 + O1;$$

$$5 * XA2 + 7 * XB2 \leq 60000 + O2;$$

$$O1 \leq 2000;$$

$$O2 \leq 6000;$$

$$IA1 \geq 500;$$

$$IB1 \geq 1500;$$

LINGO-program: løsning (ikke pensum)

$$C^* = 2\,230\,000 \quad (\text{Optimal kostnad})$$

$$XA1 = 3100$$

$$XA2 = 2900$$

$$XB1 = 3500$$

$$XB2 = 6500$$

$$IA1 = 500 \quad (\text{Overlagring 50 enheter})$$

$$IA2 = 2000 \quad (\text{Overlagring 200 enheter})$$

$$IBA1 = 400 \quad (400 \text{ bestilte enheter})$$

$$IBB1 = 0 \quad (\text{ingen bestilte enheter})$$

$$O1 = 0$$

$$O2 = 0$$

Kommentarer:

1. Vi observerer at de totale kostnadene ble redusert fra 3.75 mill. kroner (uten mulighet for bestilling) til 2.23 mill. kroner (med mulighet for bestilling). Hva er hovedårsaken til denne reduksjonen?