Innleveringsfrist: søndag 9. feb. kl. 23:59 (versjon 01)

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Oppgavesett nr. 2

"*MAT110 Statistikk 1*", 2020

Oppgave 1: (økonomi og sport - diskrete stokastiske variabler , forventning , varians)

Basert på historiske data har man etablert en sannsynlighetsfordeling for hvor mange mål fotballaget *Tufte IL* scorer i en kamp. La:

$$X \;=\; \text{antall mål som } \textit{Tufte IL} \text{ scorer i løpet av en tilfeldig valgt kamp}$$

Den tilhørende sannsynlighetsfordelingen $P(X = x_i)$ er gitt ved følgende tabell: [1]

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	0.10	0.25	0.20	0.15	0.15	0.05	0.05	0.05

Figur 1: Sannsynlighetsfordeling $P(X = x_i)$.



Figur 2: Tufte IL.

[1] For enkelhetsskyld antar vi at *Tufte IL* aldri scorer mer enn 7 mål i løpet av en kamp.

a) Er X en diskret eller kontinuerlig stokastisk variabel? Gi en *kort* begrunnelse.

b) **i**) Hva betyr $E[X]$ i vårt tilfelle? [2]

ii) Finn $E[X]$.

c) **i**) Hva betyr $Var[X]$ i vårt tilfelle?

ii) Finn $Var[X]$.

d) Finn standardavviket til X, dvs. finn $\sigma[X]$.

e) Hva er sannsynligheten for at *Tufte IL* scorer mindre enn 4 mål i èn kamp?

[2] Dvs. hva betyr $E[X]$ på "godt norsk"/tolkning?

Anta at antall mål som scores i ulike kamper er uavhengige.

Tufte IL spiller 28 kamper i løpet av en sesong.
La oss se på to tilfeldige kamper i løpet av en sesong og definere følgende stokastiske variabler:

$$X_1 = \text{antall mål som scores i den første tilfeldige kampen} \quad (1)$$
$$X_2 = \text{andre} \quad (2)$$

f) **i)** Hva er sannsynligheten for at det scores mindre enn 4 mål i både kamp nr. 7 og kamp nr. 24? [3]

ii) Hva er sannsynligheten for at det scores mindre enn 4 mål i to kamper på rad, f.eks. kamp nr. 13 og kamp nr. 14?

[3] Innser du at oppgaven spør etter den simultane sannsynligheten $P(X_1 < 4, X_2 < 4)$? Husk at kampene antas uavhengige. Kanskje du trenger resultatet fra oppgave **1e** her?

La oss definere følgende stokastiske variabel:

$$Y \;=\; X_1 + X_2 \tag{3}$$

g) **i**) Hva er sannsynligheten for at **summen** av antall mål som scores i kamp nr. 15 og kamp nr. 19 er nøyaktig lik 4? [4]

ii) Dersom du har gjort oppgave **1g i** foran riktig så vet du at
det er 5 måter å score 4 mål på over to kamper.
Det totale antall utfall i utfallsrommet er $8^2 = 64$

Hvorfor er det ikke riktig å si at $\underbrace{P(Y=4) = \frac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mulige}} = \frac{5}{64}}_{\text{feil}}$?

[4] Oppgaven spør etter $P(Y = 4)$. Denne oppgaven er litt vanskelig. Spør på "Diskusjoner" i Canvas eller kom på øvingstimer dersom du står fast.

DNB er hovedsponsor for *Tufte IL*. Sponsoravtalen er prestasjonsrettet på en slik måte at de får bonus B bestemt av antall mål scoret i løpet av en gitt kamp:

$$B = cX^3 \tag{4}$$

hvor $c = 500$ NOK. [5]

h) Forklar hvorfor B er en stokastisk variabel. [6]

i) **i**) Hva betyr $E[B]$ i vårt tilfelle?

ii) Finn $E[B]$.

■



Figur 3: DNB sponser Tufte IL.

[5] c er en **konstant**, mens X er en stokastisk **variabel**.
[6] Se eksempel på 125 i kompendiet, oppgave **b** i det eksemplet.

Oppgave 2: (økonomi - kombinatorikk , sannsynlighet , stok. var. , forventning)

La oss igjen se på situasjonen til studenten i øving 1 som bor på Molde Campus og som har fått akutt dårlig råd. Han arrangerer et nytt lotteri for å skaffe penger slik at kan betale husleien.

Lotteriet han nå arrangerer er slik at 7 av totalt 1000 lodd gir en pengepremie på 250 NOK hver. Hvert lodd koster 10 NOK. Vi antar at studenten får solgt alle 1000 loddene. *Det er lik sannsynlighet for å trekke de forskjellige loddene, dvs. loddene har "lik vekt".* Vinnernumrene blir ikke offentliggjort før etter at alle loddene er solgt.

Som i øving 1, det er kun to typer lodd: taperlodd og vinnerlodd.
Utfallsrom for sannsynlighetsmodellen er derfor det samme:

$$\boxed{\Omega = \left\{ u_{\text{tap}} \ , \ u_{\text{vinn}} \right\}} \qquad (5)$$

med utfallene

$$u_{\text{tap}} = \text{utfall som gir taperlodd} \qquad (6)$$
$$u_{\text{vinn}} = \text{vinnerlodd} \qquad (7)$$

og

$$p_{\text{tap}} = \text{sannsynligheten for at et tilfeldig valgt lodd er et taperlodd} \qquad (8)$$
$$p_{\text{vinn}} = \text{vinnerlodd} \qquad (9)$$





Figur 4: Molde Campus.

a) Hvor mye tjener studenten på å arrangere lotteriet? [7]

En person kjøper $s = 2$ lodd. Da kan situasjonen i oppgaven form formuleres slik:

$$\begin{array}{rcll} \text{N} & = & \text{totalt antall valgobjekter (lodd)} & = 1000 \quad (10) \\ \text{s} & = & \text{antall objekter (lodd) som velges (kjøpes)} & = 2 \quad (11) \end{array}$$

b) Begrunn kort hvorfor urnemodellen kan brukes i dette tilfellet. [8]

c) Beskriver oppgaven situasjon 1, 2, 3 eller 4? Begrunn svaret. [9]

[7] Denne oppgaven har ikke så mye med statistikk å gjøre. Oppgaven har som misjon å vise hvor mye lotteriarrangøren (studenten) tjenter.

[8] Jfr. oppgave **1g ii**. Se også den *blå uthevede* delen av den innledende oppgaveteksten øverst på denne siden.

[9] Hvilke to spørsmål må du stille deg for å avgjøre hvilken situasjon dette tilsvarer?

Tips: Tegn gjerne en enkel urne som visualiserer situasjonen før du løser oppgavene **2d**, **2e** og **2f** nedenfor.

Hvor mange vinnerlodd er det i urnen?
Og hvor mange taperlodd er det i urnen?

La oss definere den diskrete stokastiske variabelen:

$$X = \text{antall vinnerlodd av de } \underbrace{\text{to loddene}}_{s=2} \text{ som loddkjøperen } \underbrace{\text{trekker}}_{\text{kjøper}} \tag{12}$$

d) Hva er sannsynligheten for at loddkjøperen ikke vinner, dvs. $P(X = 0)$? [10]

e) Hva er sannsynligheten for at loddkjøperen trekker 1 vinnerlodd, dvs. $P(X = 1)$? [11]

f) Hva er sannsynligheten for at begge loddene til kjøperen vinner, dvs. $P(X = 2)$?

g) Vis at $P(X = x)$ er en gyldig sannsynlighetsfordeling. [12]

[10] Her er det to kategorier lodd, jfr. utfallsrommet i lign.(5): taperlodd og vinnerlodd. Dermed:

$$P(X = x) = \frac{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner}}{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner totalt}} = \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{antall } \textit{mulige}} \tag{13}$$

[11] Dvs. hva er hva er sannsynligheten for 1 vinnerlodd og 1 taperlodd?

[12] $P(X = x)$ er et gyldig sannsynlighetsfordeling dersom $\sum_{i=0}^{2} P(X = x_i) = 1$.

La oss definere en diskret stokastisk variabel som beskriver **fortjenesten** F til loddkjøperen:

$$\boxed{F \;=\; g\,X \;-\; s\,p} \qquad (14)$$

hvor

$$g \;=\; 250 \text{ NOK} \quad (\text{“g” for gevinst}) \qquad (15)$$
$$s \;=\; 2 \quad (\underline{\text{antall}} \text{ lodd som kjøpes}) \qquad (16)$$
$$p \;=\; 10 \text{ NOK} \quad (\text{pris på lodd}) \qquad (17)$$

h) **i)** Regn ut forventningen $E[F]$. [13]

ii) Tolk svaret du fikk i oppgave **2h i**.

■



Figur 5: Lotteri.

[13] Her får du bruk for regnereglene: (a er en konstant)

$$E[a+X] \;=\; a + E[X]$$
$$E[a\cdot X] \;=\; a\cdot E[X]$$

Oppgave 3: (logistikk - diskrete stokastiske variabler , forventning , varians)

Transport- og logistikkfirmaet Schenker har funnet ut at det tar maksimalt 5 dager å levere kritiske komponenter til anleggsmaskiner i de nordligste delene av Nord-Norge. Leveringstiden er så viktig at de har funnet sannsynlighetsfordeling for antall leveringsdager:

$X=x_i$	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	10 %	10 %	60 %	10 %	10 %

Figur 6: Sannsynlighetsfordeling $P(X = x_i)$, hvor $i = 1...5$.

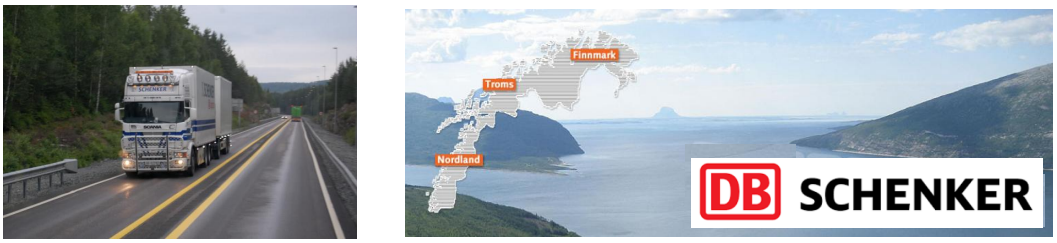
Her er følgende stokastiske variabel definert:

$$X \;=\; \text{antall leveringsdager} \tag{18}$$

a) Vis at sannsynlighetsfordelingen i tabellen er en mulig **gyldig** sannsynlighetsfordeling.

b) **i**) Hva betyr $E[X]$ i vårt tilfelle? [14]

ii) Finn $E[X]$.



Figur 7: Schenker i Nord Norge.

[14] Dvs. hva betyr $E[X]$ på "godt norsk"/tolkning?

c) **i**) Hva betyr $Var[X]$ i vårt tilfelle?

ii) Bruk definisjonen av variansen til å regne ut $Var[X]$. [15]

iii) Bruk "varianssetningen" til å regne ut $Var[X]$. [16]

d) Hva er **standardavviket** av antall leveringsdager, $\sigma[X]$?

■

[15] Tips: Se kompendiet for definisjonen av $Var[X]$.
[16] Tips: Se kompendiet for formulering av "varianssetningen".

Oppgave 4: (økonomi - betinget sannsynlighet , stokastisk variabel , forventning)

Du jobber i DNB sitt avdelingskontor i Kristiansund.

Du og dine kollegaer ønsker å se nærmere på aksjer i et bestemt firma i shippingmarkedet.
I den sammenheng definerer dere følgende stokastiske variabler:

$$X_t = \underbrace{\text{aksjekurs}}_{\text{pris}} \text{ på aksjen dag nr. } t \tag{19}$$

hvor $t = 1, 2$.

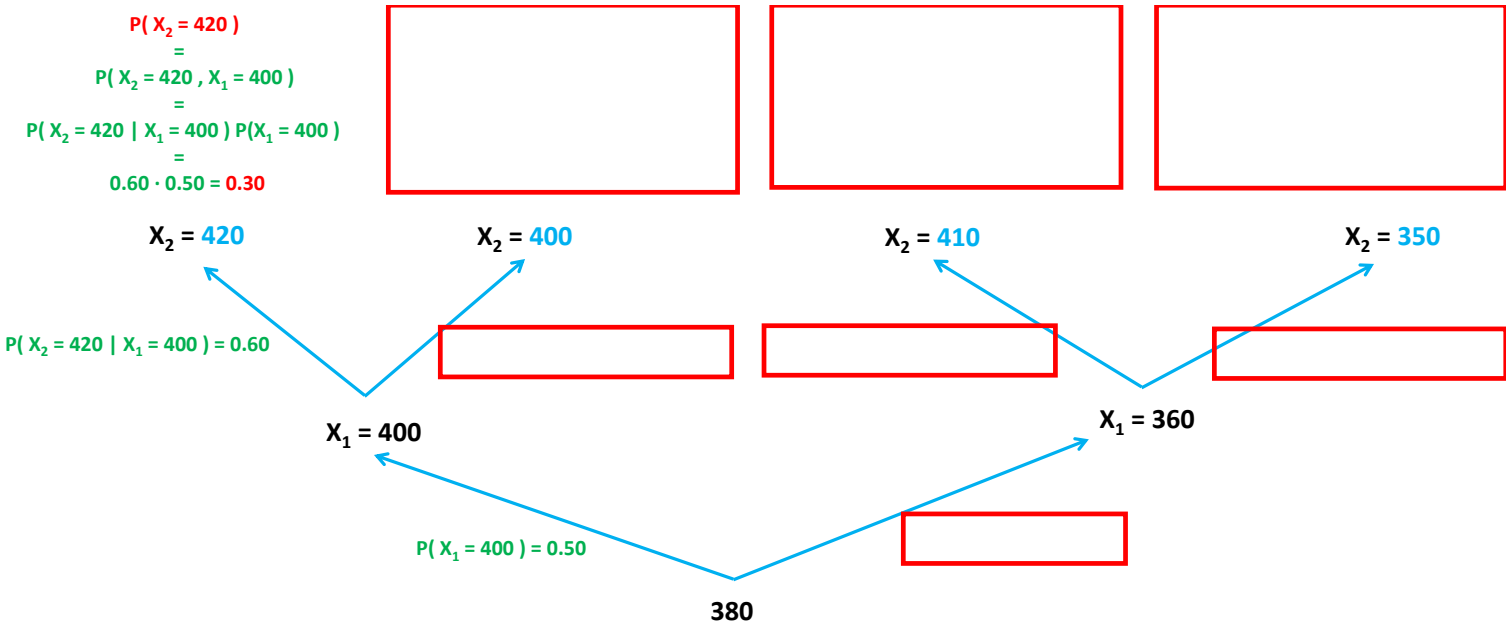
Dere har funnet ut at følgende sannsynligheter gjelder for aksjer i et bestemt firma i shippingmarkedet:

- Dag $t = 0$:
  - verdien på aksjen i dag er 380 NOK

- Dag $t = 1$:
  - sannsynlighet for at aksjen stiger til $X_1 = 400$ NOK i løpet av dag $t = 1$: 50 %
  - sannsynlighet for at aksjen synker til $X_1 = 360$ NOK i løpet av dag $t = 1$: 50 %

- Dag $t = 2$:
  - $\overbrace{\text{dersom } X_1 = 400 \text{ NOK}}^{\text{vet}}$:
    - sannsynlighet for at aksjen stiger til $X_2 = 420$ NOK i løpet av dag $t = 2$: 60 %
    - sannsynlighet for at aksjen fortsatt er $X_2 = 400$ NOK i løpet av dag $t = 2$: 40 %
  - $\overbrace{\text{dersom } X_1 = 360 \text{ NOK}}^{\text{vet}}$:
    - sannsynlighet for at aksjen stiger til $X_2 = 410$ NOK i løpet av dag $t = 2$: 20 %
    - sannsynlighet for at aksjen synker til $X_2 = 350$ NOK i løpet av dag $t = 2$: 80 %

Situasjonen som beskrvet er en sekvens av steg.
I slike tilfeller kan det være hensiktsmessig å tegne opp et tre som viser ulike muligheter.



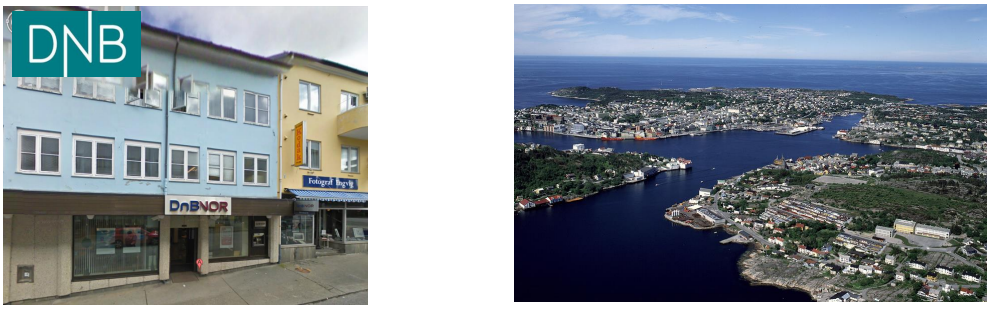
Figur 8: Sannsynlighetstre.

Legg merke til:

- pilene representerer $\overbrace{\text{betingede sannsynligheter}}^{P(X_2{=}420\,|\,X_1{=}400)}$
- nodene representerer $\underbrace{\text{simultane sannsynligheter}}_{P(X_2{=}420\,,\,X_1{=}400)}$, dvs. "og"-sannsynligheter

De grønne størrelsene i sannsynlighetstreet i figur 8 viser hvordan informasjonen som oppgitt i oppgaven på side 12 kan visualiseres og regnes ut.

a) Fyll inn / regn ut størrelsene som skal være i de røde tomme boksene i figur 8. [17]



Figur 9: DNB i Kristiansund.

[17] Bruk informasjonen som oppgitt i oppgaven på side 12. Du kan velge om du vil skrive utregningene på eget ark eller om du vil fylle inn direkte i de røde boksene.

La oss se på X_2, dvs. aksjekurs dag nr. 2.
Verdimengden til utfallsrommet til X_2 er gitt ved nodene: (se sannsynlighetstre)

$$V_{X_2} \;=\; \Big\{\; 420 \;,\; 400 \;,\; 410 \;,\; 350 \;\Big\} \tag{20}$$

dvs. variabelen X_2 kan ha verdiene $x_{21} = 420$, $x_{22} = 400$, $x_{23} = 410$ og $x_{24} = 350$.
Forventet aksjekurs dag nr. 2 er da:

$$E[X_2] \;\overset{\text{def}}{=}\; \sum_{i=1}^{4} x_{2i}\, P\big(X_2 = x_{2i}\big) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &= \quad 420 \cdot P(X_2 = 420) \;+\; 400 \cdot P(X_2 = 400) \\ &+ \quad 410 \cdot P(X_2 = 410) \;+\; 350 \cdot P(X_2 = 350) \end{aligned} \tag{22}$$

b) Bruk lign.(22) til å regne ut $E[X_2]$. [18]

[18] De relevante sannsynlighetene som du trenger finner du i sannsynlighetstreet.

Nytt eksperiment:

En aksjonær eier $n = 1000$ aksjer i dag, dvs. dag $t = 0$.
Hun har bestemt seg for følgende **strategi**:

- Dersom kursen stiger fra dag $t = 0$ til $t = 1$, så beholder hun alle aksjene til dag 2.
- Dersom kursen synker fra dag $t = 0$ til $t = 1$, så selger hun alle aksjene ved dag 1.

Stokastisk variabel:

$$F_2 \;=\; \text{verdien av formuen til aksjonæren ved dag nr. 2 beskrevet} \tag{23}$$

som matematematisk kan skrives:

$$F_2 \;=\; \begin{cases} n\,X_2 & ,\ \text{dersom}\ \ X_1 > 380 \\ \\ n\,X_1 & ,\ \text{dersom}\ \ X_1 \leq 380 \end{cases} \tag{24}$$

Forventet formue dag nr. 2 er da: ($n = 1000$ aksjer)

$$E[F_2] \;\overset{\text{def.}}{=}\; n\left(\sum_{i=1}^{2} x_{2i} \overbrace{P\big(X_2 = x_{2i}, X_1 > 380\big)}^{= P(X_2=x_{2i},X_1=400)} \;+\; x_1 \overbrace{P\big(X_1 = x_1, X_1 \leq 380\big)}^{= P(X_1=360)} \right) \tag{25}$$

$$= \;\; n\Big(420 \cdot P\big(X_2 = 420, X_1 = 400\big) \;+\; 400 \cdot P\big(X_2 = 400, X_1 = 400\big) \tag{26}$$

$$+\; 360 \cdot P\big(X_1 = 360\big) \Big)$$

c) Finn $E[F_2]$.

d) Gi en tolkning av $E[F_2]$. [19]

■

[19] Èn setning er nok.

Oppgave 5: (produksjonsplanlegging - sanns.regning , betinget sanns. , forventning)

Malingsprodusenten Jotun er en industribedrift som produserer maling og pulverlakk.

Malingens vei fra pulver til ferdig produkt innbærer en del blandingsprosesser samt justeringer av fordelingen mellom pulver og andre stoffer.

Før malingen kan legges ut for salg må den tilfredsstille visse blandings- og kvalitetkrav.
Malingen anses som "*defekt*" dersom den ikke tilfredsstiller disse kravene.

Jotun blander malingen i maksimalt 4 timer i en gitt tank. Etter hver time gjør de en test for å se om malingen er innenfor blandings- og kvalitetkravene. Dersom malingen ikke er det, så forsetter de blandings- og justeringsprosessen en time til. Første måling skjer etter èn time.

Blanding av maling koster tid og penger. Derfor ønsker Jotun å se nærmere på hvor lenge de bør blande malingen for å komme innenfor blandings- og kvalitetkravene.
I den sammenheng definerer Jotun følgende begivenheter:

$$D_t \overset{\text{def.}}{=} \text{malingen er fortsatt "}\textit{defekt}\text{" etter } t \text{ timer med blanding og justeringer} \tag{27}$$

hvor $t = 1, 2, 3, 4$.



Figur 10: Jotun.

Anta i denne oppgaven at:

$$P(D_1) \;=\; 0.30 \tag{28}$$

$$P(D_2|D_1) \;=\; 0.10 \tag{29}$$

$$P(D_3|D_2 \cap D_1) \;=\; 0.02 \tag{30}$$

$$P(D_4|D_3 \cap D_2 \cap D_1) \;=\; 0 \tag{31}$$

a) Finn $P(\overline{D}_1)$. [20]

b) Finn $P(\overline{D}_2|D_1)$. [21]

c) Gi en *kort* tolkning av sannsynligheten $P(\overline{D}_2 \cap D_1)$.

d) Bruk resultatet fra oppgave **5b** samt den generelle multiplikasjonssetningen til å vise at:

$$\boxed{P(\overline{D}_2 \cap D_1) \;=\; 0.27} \tag{32}$$

[20] Bruk komplementsetningen.

[21] Husk at komplementsetningen for en betinget sannsynlighet er: $P(\overline{B}|A) \;+\; P(B|A) \;=\; 1.$

Sannsynligheten $P(\overline{D}_3 \cap D_2 \cap D_1)$, dvs. sannsynligheten for at malingen er OK etter 3 timer, kan finnes ved å bruke sannsynlighetstreet i figur 11.
Dersom man følger den rosa, stiplede linjen så innser man at:

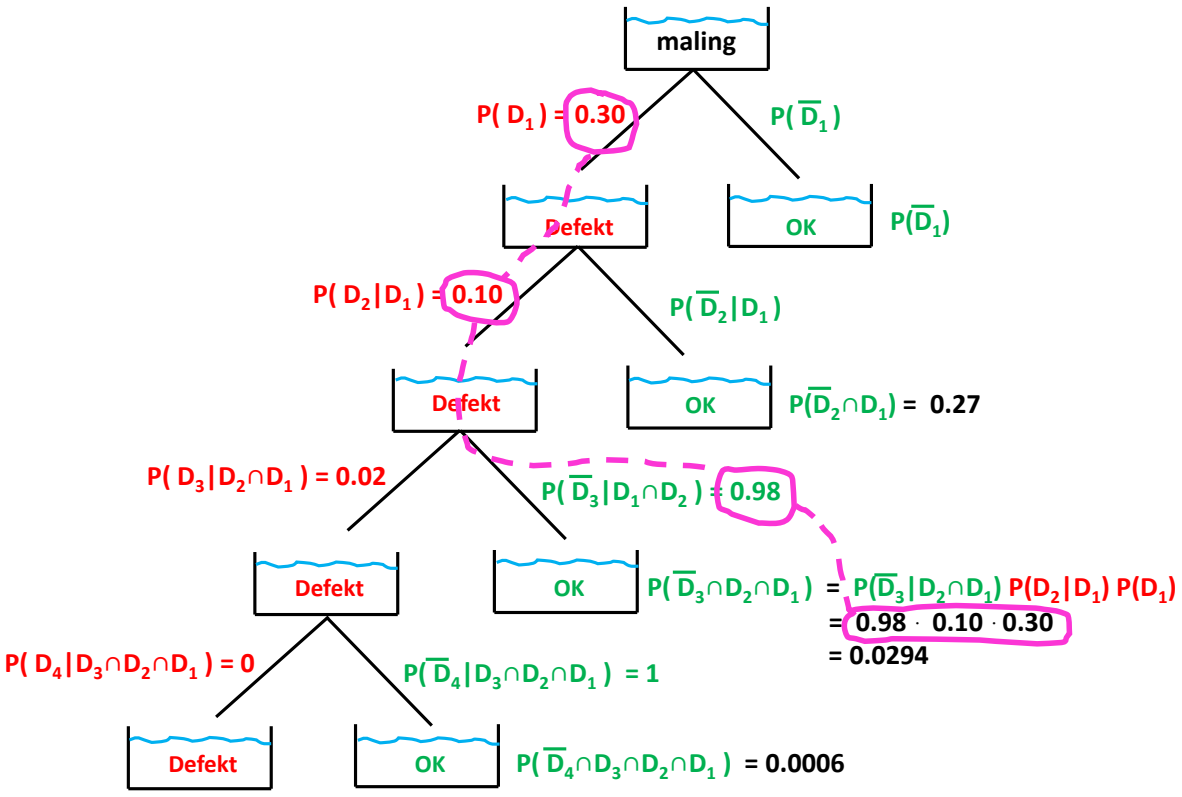
$$\underline{P(\overline{D}_3 \cap D_2 \cap D_1)} = P(\overline{D}_3|D_2 \cap D_1)P(D_2|D_1)P(D_1) \tag{33}$$

$$= 0.98 \cdot 0.10 \cdot 0.30 = \underline{0.0294} \tag{34}$$

e) Bruk sannsynlighetstreet i figur 11 og vis, slik som illustrert i lign.(33) og (34), at:

$$\boxed{P(\overline{D}_4 \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1) = 0.0006.} \tag{35}$$

hvor $P(\overline{D}_4 \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1)$ er sannsynligheten for at malingen er OK etter 4 timer.



Figur 11: Sannsynlighetstre.

Istedet for å se på begivenheter, som vi har regnet på så langt i oppgaven, la oss nå introdusere en stokastisk variabel. Vi definerer den stokastiske variabelen X:

$$X = \text{antall timer som Jotun bruker på blanding og justeringer av malingen før malingen kommer innenfor blandings- og kvalitetskravene} \tag{36}$$

med utfallsrom $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Forventet antall timer som Jotun bruker på blanding og justeringer av malingen før de kommer innenfor kravene er dermed:

$$\boxed{E[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i \, P(X = x_i)} \tag{37}$$

hvor

$$P(X = 1) = P(\overline{D}_1) \tag{38}$$
$$P(X = 2) = P(\overline{D}_2 \cap D_1) \tag{39}$$
$$P(X = 3) = P(\overline{D}_3 \cap D_2 \cap D_1) \tag{40}$$
$$P(X = 4) = P(\overline{D}_4 \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1) \tag{41}$$

og $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ og $x_4 = 4$ timer.

f) Bruk resultatene fra tidligere deloppgaver samt lign.(37) til å finne $E[X]$.

g) Vis at $P(X = x_i)$ er en gyldig sannsynlighetsfordeling. [22]

■

[22] Tips: vis at de 4 sannsynlighetene i lign.(37) summeres til 1.

Oppgave 6: (logistikk - sannsynlighetsregning , betinget sannsynlighet , forventning)

La oss fortsette med Glamox-oppgavene fra øving 1.

Glamox ønsker nå å bruke sannsynlighetsmodellen fra forrige øving til å regne ut størrelser for å kunne gjøre en mer presis prognostisering og dermed ha mulighet til å planlegge bedre.

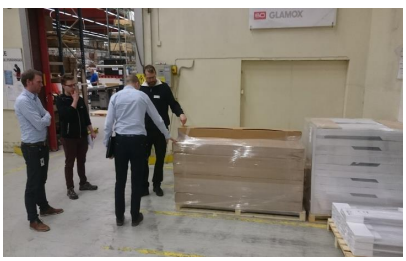
For å unngå mye repeterende regning, la oss kun se på 6 tilbud. Seks nye tilbud.
La oss nå se på tre selgere. Vi antar at selgerne lager to tilbud hver.

Anta at hvert av de 6 tilbudene har produkter som består en bestemt komponent som Glamox må produsere. Det trengs n_i enheter at denne komponenten i tilbud i.

Anta videre at verdien til tilbud nr. i er v_i (i NOK).

Tilbud nr. i	1	2	3	4	5	6
Høyt (h) eller lavt ($\overline{h}$) tilbud	$\overline{h}$	h	h	$\overline{h}$	h	$\overline{h}$
Selger S_j (j = 1,2,3)	1	1	2	2	3	3
Antall komp. n_i	8	113	357	16	128	5
Verdi v_i (NOK)	2 500	33 000	105 000	5 800	39 700	1 950

Figur 12: Tilbud og antall komponenter.






Figur 13: Glamox.

Tilbud 1: (S_1 og $\overline{H}$)

La oss først kun se på tilbud 1.

Fra tabellen i figur 12 **vet** vi at tilbud 1 er et lavt $\overline{H}$ tilbud gitt av selger S_1.
Vi ønsker å finne sannsynligheten for at tilbud 1 blir akseptert,
dvs. vi ønsker å finne aksept-sannsynligheten $P\big(\, A \,|\, \underbrace{S_1 \cap \overline{H}}_{\text{vet}} \,\big)$ når vi **vet** $S_1 \cap \overline{H}$.

Aksept-sannsynligheten for tilbud 1 er dermed gitt ved
den generelle multiplikasjonssetningen:

$$P\big(\, A \,|\, \overbrace{S_1 \cap \overline{H}}^{\text{vet}} \,\big) \;=\; \frac{P(S_1 \cap \overline{H} \cap A)}{P(S_1 \cap \overline{H})} \tag{42}$$

For å regne ut aksept-sannsynligheten i lign.(42) så ønsker Glamox å bruke historiske data for å estimere relevante sannsynligheter i samme stil som øving 1.
Glamox bestemmer seg for å bruke de 600 siste tilbudene.
Tilhørende utfallsrom Ω finner du i vedlegg A.

Fra dette vedlegg A ser vi at:

$$P(S_1 \cap \overline{H} \cap A) \;=\; p_2 \;=\; \frac{40}{600} \tag{43}$$

og

$$P(S_1 \cap \overline{H}) \;=\; p_2 + p_4 \;=\; \frac{40}{600} + \frac{80}{600} \;=\; \frac{120}{600} \tag{44}$$

a) Bruk den generelle multiplikasjonssetningen i lign.(42) samt lign.(43) og (44) til å regne ut den betingede sannsynligheten $P\big(\, A \,|\, \underbrace{S_1 \cap \overline{H}}_{\text{vet}} \,\big)$.

b) Bruk komplementsetningen til å regne ut $P\big(\, \overline{A} \,|\, \underbrace{S_1 \cap \overline{H}}_{\text{vet}} \,\big)$. [23]

[23] Komplementsetningen for vårt tilfelle er:

$$P\big(\, \overline{A} \,|\, S_1 \cap \overline{H} \,\big) \;+\; P\big(\, A \,|\, S_1 \cap \overline{H} \,\big) \;=\; 1 \tag{45}$$

La oss introdusere to stokastiske variabler:

1) Stokastisk med kun to utfall: [24]1

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom kunde aksepterer tilbud nr. } i \\ 0 & , \text{ dersom kunde ikke aksepterer tilbud nr. } i \end{cases} \quad (46)$$

hvor $i = 1, 2, ..., 6$, med [25]

$$P(Y_1 = 1) = P(A|S_1 \cap \overline{H}) \quad (47)$$
$$P(Y_2 = 1) = P(A|S_1 \cap H) \quad (48)$$
$$P(Y_3 = 1) = P(A|S_2 \cap H) \quad (49)$$
$$P(Y_4 = 1) = P(A|S_2 \cap \overline{H}) \quad (50)$$
$$P(Y_5 = 1) = P(A|S_3 \cap H) \quad (51)$$
$$P(Y_6 = 1) = P(A|S_3 \cap \overline{H}) \quad (52)$$

2) Stokastiske variabler

$$X_i = n_i Y_i \quad (53)$$

hvor $(i = 1, 2, 3, .., 6)$

X_i = antall komponenter i tilbud nr. i som blir **solgt** (akseptert av kunde) (54)

n_i = antall komponenter i tilbud nr. i (se figur 12) (55)

[24] «Ja-nei»-variabel, også kalt en stokastisk binær variabel.

[25] I lign.(47)-(52) setter vi to funksjoner like hverandre, men egentlig burde vi satt *verdien* til de aktuelle funksjonene like hverandre. For å unngåfor mye notasjon så bare skriver vi det på formen som i lign.(47-(52).

Antall komponenter som **forventes solgt** for tilbud 1 er dermed:

$$E[X_1] \;=\; n_1 E[Y_1] \;=\; n_1 \Big(\; 0 \cdot P(Y_1 = 0) \;+\; 1 \cdot \overbrace{P(Y_1 = 1)}^{= \frac{40}{120}} \; \Big) \tag{56}$$

altså

$$\boxed{E[X_1] \;=\; n_1 \, P(Y_1 = 1)} \tag{57}$$

c) Bruk lign.(57) samt svaret fra oppgave **6a** til å regne ut $E[X_1]$. [26]

[26] Antall komponenter n_1 i tilbud nr. 1 finner du i figur 12.

Den stokastiske variabelen X:

$$X = \sum_{i=1}^{6} X_i \tag{58}$$

er summen av antall solgte komponenter for de 6 aktuelle tilbudene.
Tilhørende forventingsverdi er:

$$\boxed{E[X] = \sum_{i=1}^{6} E[X_i]} \tag{59}$$

og kan skrives

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] + E[X_5] + E[X_6] \tag{60}$$

eller, siden $X_i = n_i Y_i$,

$$\begin{aligned} E[X] &= n_1 P(Y_1 = 1) + n_2 P(Y_2 = 1)) \\ &+ n_3 P(Y_3 = 1)) + n_4 P(Y_4 = 1)) \\ &+ n_5 P(Y_5 = 1)) + n_6 P(Y_6 = 1)) \end{aligned} \tag{61}$$

d) Aksept-sannsynlighetene i lign.(61) for de 6 tilbudene kan finnes på samme måte som vist for tilbud 1 tidligere i oppgaven.
Disse aksept-sannsynlighetene er oppgitt i vedlegg B baksert i oppgavesettet.

Finn tallverdien for $E[X]$. [27]

[27] Bruk lign.(61) og tallene i tabellen i figur 16, dvs. vedlegg B.

Den stokastiske variabelen V:

$$V = \sum_{i=1}^{6} V_i \tag{62}$$

er verdien av de 6 aktuelle tilbudene.
Tilhørende forventingsverdi er:

$$\boxed{E[V] = \sum_{i=1}^{6} E[V_i]} \tag{63}$$

som kan skrives

$$E[V] = E[V_1] + E[V_2] + E[V_3] + E[V_4] + E[V_5] + E[V_6] \tag{64}$$

eller, siden $V_i = v_i Y_i$,

$$\begin{aligned} E[V] &= v_1 P(Y_1 = 1) + v_2 P(Y_2 = 1) \\ &+ v_3 P(Y_3 = 1) + v_4 P(Y_4 = 1) \\ &+ v_5 P(Y_5 = 1) + v_6 P(Y_6 = 1) \end{aligned} \tag{65}$$

e) Finn tallverdien for $E[V]$. [28]

f) Gi en tolkning av $E[V]$. [29]

■

[28] Bruk lign.(65) og tallene i figur 16, dvs. vedlegg B.
[29] Èn setning er nok.

Oppgave 7: (økonomi - similtan sannsynlighet , betinget sannsynlighet , forventning)

Du jobber som økonomisjef ved Elkjøp Møre og Romsdal. I forbindelse med lansering og salg av ny modell av iPhone til høsten så ønsker du å vite mer om hva slags salgstall og omsetning Elkjøp kan forvente seg når telefonen slippes på markedet. Derfor engasjerer du studentene ved Høgskolen i Molde som har hatt faget "*SCM300 Survey Design*" for å finne ut mer om potensiell pris og etterspørsel. Undersøkelsene til studentene er blant annet basert på:

- historiske tall, f.eks. salgstall av tidligere versjoner av iPhone
- hvordan man tror markedet responderer på den nye telefonen
- ris/ros av den nye iPhonen i tester
- om det er andre konkurrerende selskaper (f.eks. Samsung, Sony Ericsson, Nokia) som også har store lanseringer samtidig



Figur 14: Elkjøp og iPhone.

Studentene bestemmer seg for definere følgende stokastiske variabler:

- X = prisen på iPhonen (NOK)
- Y = antall enheter som omsettes av av den nye iPhonen i løpet av **første uken** etter lansering [30]

		Antall enheter		
		Y = 90	Y = 150	Y = 210
Pris (NOK)	X = 1000	0.05	0.10	0.15
	X = 1500	0.10	0.20	0.10
	X = 2000	0.15	0.10	0.05

Figur 15: **Simultan**fordelingen $p(x, y)$ til X og Y.

Husk at en simultan sannsynlighetsfordeling i det diskrete tilfellet

$$P(X = x, Y = y) = p(x, y) \tag{66}$$

er en "og"-sannynlighet.

[30] Tallene viser antall telefoner som omsettes for Elkjøp i **hele** Møre og Romsdal den første uken.

Ut fra tabellen i figur 15 finner vi den marginale sannsynligheten $P(X = 1000)$:

$$\overbrace{\underline{P(X = 1000)} \;=\; \sum_{y} p(1000, y)}^{\textbf{marginal}\text{fordeling}} \tag{67}$$

$$= \; p(1000, 90) + p(1000, 150) + p(1000, 210) \tag{68}$$

$$= \; 0.05 + 0.10 + 0.15 \quad = \quad \underline{0.30} \tag{69}$$

Tilsvarende finner man: $\quad P(X = 1500) = 0.40 \quad$ og $\quad P(X = 2000) = 0.30$

Ut fra tabellen i figur 15 finner vi den marginale sannsynligheten $P(Y = 90)$:

$$\overbrace{\underline{P(Y = 90)} \;=\; \sum_{x} p(x, 90)}^{\textbf{marginal}\text{fordeling}} \tag{70}$$

$$= \; p(1000, 90) + p(1500, 90) + p(2000, 90) \tag{71}$$

$$= \; 0.05 + 0.10 + 0.15 \quad = \quad \underline{0.30} \tag{72}$$

Tilsvarende finner man: $\quad P(Y = 0.40) = 0.40 \quad$ og $\quad P(Y = 210) = 0.30$

a) Hvilken pris kan markedet forvente seg på den nye iPhonen? [31]

b) Hvor mange telefoner forventer Elkjøp å selge i Møre og Romsdal første uken?

c) Hvilken omsetning forventer Elkjøp seg den første uken etter lansering? [32]

d) Er pris X og etterspørsel Y uavhengige? [33]

[31] Hvilken statistisk størrelse er det oppgaven spør etter her? Avklar dette med deg selv før du svarer på oppgaven.
[32] Omsetning = pris X $\times$ antall solgte varer Y, dvs. omsetning = $X\,Y$. *Forventet* omsetning er dermed $E[X\,Y]$.
[33] Se kompendiet side 138 for sammenheng mellom uavhengighet og forventing.

La oss si at Elkjøp bestemmer seg for å fastsette prisen på den nye iPhonen til $X = 1000$ NOK.
De ønsker derfor å finne de betingede sannsynlighetene $P(Y|X = 1000)$,
for $Y = 90$, $Y = 150$ og $Y = 210$.

e) **i)** Finn de betingede sannsynlighetene $P(Y|X = 1000)$
for $Y = 90$, $Y = 150$ og $Y = 210$. [34]

ii) Med den fastsatte prisen $X = 1000$ NOK, hva blir forventet omsetning? [35]

La oss si at Ekjøp isteden bestemmer seg for å fastsette prisen på den nye iPhonen til
$X = 1500$ NOK. På tilsvarende måte som i oppgave **7e** ovenfor finner man da:

$$E\big[\, X\,Y|X = 1500\,\big] \;=\; 225\,000 \;\; \text{NOK} \tag{73}$$

f) Dersom du har gjort oppgave **7e** riktig så ser du at økt pris gir økt omsetning.
Behøver det å være slik alltid? [36]

■

[34] Bruk definisjonen av betinget sannsynlighet. Se kompendiet.
[35] Omsetning $= X\,Y$. *Forventet* omsetning er dermed $E\big[\, X\,Y|X = 1000\,\big]$.
[36] Her trengs ingen reging, bare en *kort* begrunnelse for svaret.

Vedlegg A

Utfallsrommet Ω for oppgave **6**:

$$\begin{aligned}\Omega \quad = \quad \Big\{ \quad & \overbrace{(1,h,a)}^{p_1=\frac{5}{600}} \ , \ \overbrace{(1,\overline{h},a)}^{p_2=\frac{40}{600}} \ , \ \overbrace{(1,h,\overline{a})}^{p_3=\frac{25}{600}} \ , \ \overbrace{(1,\overline{h},\overline{a})}^{p_4=\frac{80}{600}} \\ & \overbrace{(2,h,a)}^{p_5=\frac{8}{600}} \ , \ \overbrace{(2,\overline{h},a)}^{p_6=\frac{68}{600}} \ , \ \overbrace{(2,h,\overline{a})}^{p_7=\frac{22}{600}} \ , \ \overbrace{(2,\overline{h},\overline{a})}^{p_8=\frac{102}{600}} \\ & \overbrace{(3,h,a)}^{p_9=\frac{12}{600}} \ , \ \overbrace{(3,\overline{h},a)}^{p_{10}=\frac{85}{600}} \ , \ \overbrace{(3,h,\overline{a})}^{p_{11}=\frac{28}{600}} \ , \ \overbrace{(3,\overline{h},\overline{a})}^{p_{12}=\frac{125}{600}} \quad \Big\}\end{aligned} \tag{74}$$

Vedlegg B

For oppgave **6**:

Tilbud nr. i	1	2	3	4	5	6
Høy (h) eller lavt ($\overline{h}$) tilbud	$\overline{h}$	h	h	$\overline{h}$	h	$\overline{h}$
Selger S_j (j = 1,2,3)	1	1	2	2	3	3
Antall komp. n_i	8	113	357	16	128	5
Verdi v_i (NOK)	2 500	33 000	105 000	5 800	39 700	1 950
Sanns. for aksept	$P(A \mid S_1 \cap \overline{H}) = \frac{40}{120}$	$P(A \mid S_1 \cap H) = \frac{5}{30}$	$P(A \mid S_2 \cap H) = \frac{8}{30}$	$P(A \mid S_2 \cap \overline{H}) = \frac{68}{170}$	$P(A \mid S_2 \cap H) = \frac{12}{40}$	$P(A \mid S_3 \cap \overline{H}) = \frac{85}{110}$

Figur 16: Aksept-sannsynligheter i rødt.