

Oppgavesett nr. 4

“MAT110 Statistikk 1”, 2020

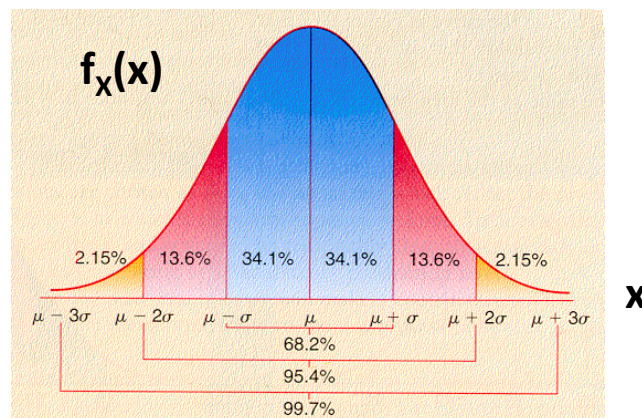
Oppgave 1: (logistikk - normalfordeling , forventning , standardavvik)

Anta at X er en stokastisk variabel som er normalfordelt, dvs.

$$X \sim N[\mu, \sigma] \quad (1)$$

- a) Uten å gjøre noen regning, bruk kun formelsamlingen, hva er sannsynligheten for at X ligger i intervallet $\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$?¹

For enhver normalfordeling gjelder følgende tall i prosent:



Figur 1: Normalfordeling og standardavvik σ .

¹I denne oppgaven er det meningen at du kun skal bruke figur 1 og lese av svaret direkte. Ingen utregninger behøves.

En bedrift som produserer rør som kan settes sammen til lange gassrørledninger. Bedriften produserer rør som skal brukes på gassanlegget Ormen Lange i Aukra kommune, se figur 2.

La oss definere følgende stokastiske variabel:

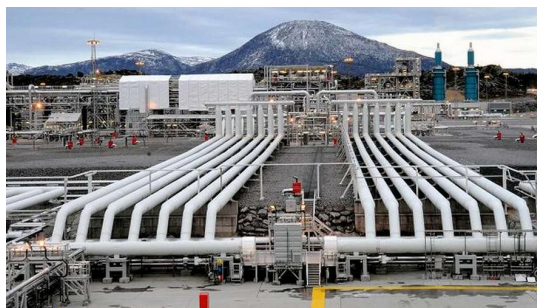
$$X = \text{lengden på et tilfeldig valgt rør} \quad (2)$$

Bedriften har en maskin som produserer rør med lengde på omtrent 9 meter. Anta at lengden til rørene som produseres av maskinen er med god tilnærmelse beskrevet av en normalfordeling. Anta videre at denne maskinen produserer rør som har en forventning

$$\mu = 9 \text{ meter} \quad (3)$$

og standardavvik

$$\sigma = 0.1 \text{ meter} \quad (4)$$



Figur 2: Aukra kommune. Gassrør.

- b)** Uten å gjøre noen regning, bruk kun formelsamlingen, hva er sannsynligheten for at et tilfeldig valgt rør har lengde mellom 8.9 meter og 9.1 meter? ²

- c)** Man kan spørre:

Hvordan finner man frem til tallene i figur 1?

Jo, man må regne på det. Ved å regne ut et komplisert integral, nemlig: ³

$$P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z f_Z(s) ds, \quad (5)$$

hvor $f_Z(x)$ er tetthetsfunksjonen som definert i kompendiet:

$$f_Z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}, \quad (6)$$

hvor $E[Z] = 0$ og $Var[Z] = 1$.

Men siden vi har tabellen så slipper vi å regne ut dette. ⁴

I kompendiet regnet vi ut $P(8.9 \leq X \leq 9.1)$ via tabelloppslag.

Stemmer regningen i kompendiet med ditt svar fra oppgave **1b**? ⁵

- d)** Uten å gjøre noen regning, bruk kun figur 1, hva er sannsynligheten for at et tilfeldig valgt rør har lengde mellom 8.8 meter og 9.2 meter?



²Du skal altså finne $P(8.9 \leq X \leq 9.1)$. I denne oppgaven behøver du heller ikke å gjøre noen utregninger. Bare les av svaret fra figur 1.

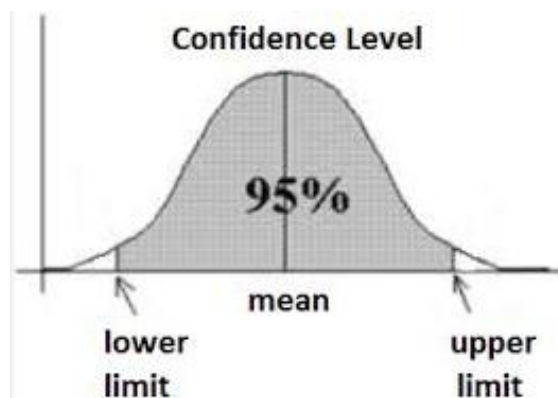
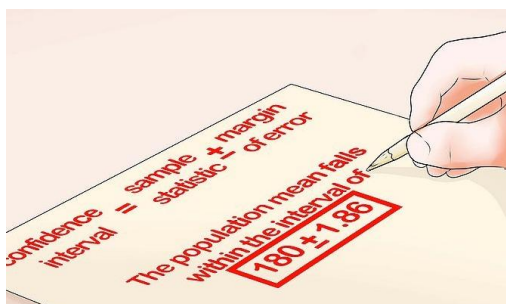
³Kalles også Gauss-fordeling etter Johann Carl Friedrich Gauss, en tysk matematiker.

⁴Å regne ut integraler er selvsagt ikke pensum i ”*MAT110 Statistikk 1*”. Derfor har vi tabelloppslag istedet.

⁵Dette er ei ”ja/nei”-oppgave. Hovedhensikten er å sjekke at svaret du fikk i oppgave **1b** er konsistent med det som står i kompendiet side 210.

Kommentarer:

- Denne oppgaven er en lett introduksjon til et blant annet *konfidensintervall*. Dette temaet skal vi se nærmere på i kapittel 7. Det vil også bli mer om dette emnet i “*MAT210 Statistikk 2*”.
- Et *konfidensintervall* i statistikken er et intervall som angir feilmarginen av en måling eller en beregning. Et konfidensintervall angir intervallet som med en spesifisert sannsynlighet inneholder den sanne (men vanligvis ukjente) verdien av variabelen man har målt. Således inneholder et 95 %-konfidensintervall den sanne verdien med en sannsynlighet på 0.95.



Figur 3: Konfidensintervall.

Oppgave 2: (økonomi , petroleumslogistikk - $\text{Bin}[n, p]$, $N[\mu, \sigma]$, sum av stok. var.)

Du jobber som økonomiansvarlig for Shell sin avdeling i Tromsø. Som økonomiansvarlig skal du være med i prosessen for å avgjøre om potensielle nye funn av olje i Norskehavet er økonomisk drivverdige eller ikke.

Dersom olje påvises i en letebrønn så anses det som “*suksess*”.

Anta at Shell i 2018 har $n = 15$ brønner hvor de skal lete etter olje.

La oss først kun se på en enkelt brønn nr. i , hvor $i = 1, 2, \dots, n$.

La oss introdusere en stokastisk variabel med kun to utfall:⁶ ⁷

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom “suksess”, dvs. dersom Shell finner olje i brønn nr. } i \\ 0 & , \text{ dersom “fiasko”, dvs. dersom Shell ikke finner olje i brønn nr. } i \end{cases} \quad (7)$$

Anta at sannsynligheten for å finne olje i en brønn er den samme for alle $n = 15$ brønnene.

La oss kalle denne suksess-sannsynligheten for p .



Figur 4: Letebrønn i Norskehavet.

⁶ «Ja-nei»-variabel, også kalt en stokastisk binaer variabel.

⁷For de av dere som har emnet SCM200 så kjenner dere igjen denne type variabler som «ja-nei»-beslutninger.

a) Begrunn hvorfor Y_i er **binomisk fordelt**, dvs. begrunn hvorfor ⁸

$$Y_i \sim \underbrace{\text{Bin}[\textcolor{red}{1}, p]}_{= \textcolor{blue}{\text{Ber}[p]}} \quad (8)$$

PS:

En binomisk fordeling med kun ett forsøk og hvor de to mulige verdiene er 1 og 0 er en veldig spesiell binomisk fordeling.

Denne spesielle, binomiske fordelingen har fått et eget navn, nemlig ”*Bernoulli-fordelingen*”. Bernoulli-fordelingen introduserte vi i øving 3.

⁸ Y_i dreier seg kun om én oljebrønn. Ett ”forsøk”. Dermed spiller ikke uavhengighet noen rolle her.

Shell er interessert i antall letebrønner man finner olje.
Derfor definerer vi den stokastiske variabelen:

$$X = \text{antall letebrønner hvor man finner olje} \quad (9)$$

dvs. X er antall suksesser av de $n = 15$ "forsøkene". Dermed innser vi at

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (\text{diskret}) \quad (10)$$

- b)** Hva slags antagelse må vi ha på de binære stokastiske variablene Y_i 'ene dersom summen X også skal være binomisk fordelt, dvs. $X \sim \text{Bin}[n, p]$?

Anta videre at det er $p = 15\%$ sannsynlighet for å finne olje i en brønn.

- c)** **i)** Hva er sannsynligheten for at Shell finner olje i nøyaktig 3 letebrønner?
ii) Hva er sannsynligheten for at Shell finner olje i minst 2 letebrønner?

Dersom man finner olje i en gitt brønn så er mengden olje knyttet til funnet avhengig om funnet er **økonomisk drivverdig**. Denne mengden varierer fra funn til funn. La oss anta at **mengden** for et gitt funn kan modelleres som en **normal**fordelt stokastisk variabel M med forventning $\mu = 1000$ og standardavvik $\sigma = 200$, dvs. ⁹

$$M = \text{mengden olje i funnet, i } \underline{\text{antall millioner oljefat totalt}} \quad (\text{kontinuerlig}) \quad (11)$$

hvor

$$M \sim \text{N}[\mu = 1000, \sigma = 200] \quad (12)$$

d) La oss se på en gitt brønn hvor det er funnet olje.

Hva er sannsynligheten for at denne gitte brønnen inneholder mer enn 1100 millioner oljefat? ¹⁰

⁹Enheten her er millioner oljefat. At $\mu = 1000$ betyr derfor 1000 millioner oljefat.

¹⁰Bruk 4 desimalers nøyaktighet.

Anta at Shell finner olje i $n = 10$ brønner.

La oss i resten av oppgaven kun se disse på disse 10 brønnene.

Den totale mengden olje som er funnet er dermed:

$$M_{\text{tot}} = M_1 + M_2 + \dots + M_{10} \quad (\text{kontinuerlig}) \quad (13)$$

hvor

$$M_i = \text{mengden olje som er funnet i brønn nr. } i \quad (14)$$

hvor $i = 1, 2, \dots, 10$.

Anta videre at alle brønnene er uavhengige slik at også mengden olje i de forskjellige brønnene er uavhengige. Anta også at alle M_i 'ene har identiske **normal**fordelinger ihht. lign.(12), dvs.:

$$M_i \sim \mathbf{N}[\mu = 1000, \sigma = 200] \quad (15)$$

for alle $i = 1, 2, \dots, 10$.

e) Hva er $E[M_{\text{tot}}]$ og $Var[M_{\text{tot}}]$?

f) Hva slags sannsynlighetsfordeling har M_{tot} ?

g) Hva er sannsynligheten for at den totale mengden olje ligger i intervallet $[9\,000, 11\,000]$?

La oss videre definere den stokastiske variabelen:

$$Z = \text{antall letebrønner med mer enn 1100 millioner oljefat} \quad (\text{diskret})$$

Med samme argumentasjon som i oppgave **2a** og **2b** foran så innser man at:

$$Z \sim \text{Bin} \left[n = 10, \underbrace{p = P(M > 1100)}_{\text{suksess sanns.}} \right] \quad (16)$$

hvor $p = P(M > 1100)$ spiller rollen som suksess-sannsynlighet.

h) Hva er sannsynligheten for at minst 2 brønner inneholder mer enn 1100 millioner oljefat?

■

Oppgave 3: (logistikk , økonomi , “*avisguttens problem*” - normalfordeling , CLT) ¹¹

En gutt jobber som avisselger. Han selger aviser for løssalg på gata. Etterspørselen av aviser en gitt dag kan beskrives av en stokastisk variabel D (“*demand*”), hvor:

$$D = \text{antall aviser som etterspørres en gitt dag} \quad (17)$$

Anta videre at sannsynlighetsfordelingen til D er gitt ved fordelingen i følgende tabell: ¹²

d_i	0	1	2	3	4	5
$P(D=d_i)$	0.10	0.05	0.15	0.30	0.25	0.15

Figur 5: Sannsynlighetsfordeling $P(D = d_i)$, for $i = 0, 1, \dots, 4, 5$.



Figur 6: Avisgutt.

¹¹Problemet i denne oppgaven er kjent som “*avisguttens dilemma*” eller “*avisguttens problem*”. Dette grunnleggende problemet beskriver tilbud og etterspørsel i ubalanse.

¹²Ut fra denne sannsynlighetsfordelingen ser vi at etterspørselen er maksimalt 5 aviser per dag. Denne begrensningen er introdusert for å unngå for mye repeterende regning.

- a) Hva er **forventet** etterspørsel av aviser for en gitt dag?
- b) Hva er **variansen** til etterspørsel av aviser for en gitt dag?
- c) Hva er **standardavviket** til etterspørsel av aviser for en gitt dag?

Hver morgen må avisgutten bestemme seg for hvor mange aviser han ønsker å prøve å selge. La oss si at avisgutten bestiller q antall (“*order quantity*”) aviser fra distributøren en gitt morgen.

Avisguttens dilemma er følgende:

- Dersom han bestiller for få aviser så taper han salg.
- Dersom han bestiller for mange aviser så blir han sittende igjen med aviser som han ikke får solgt.

La oss derfor introdusere en stokastisk variabel S , hvor

$$S = \text{antall aviser som faktisk selges en gitt dag} \quad (18)$$

Denne variabelen er gitt ved

$$S = \min(D, q) , \quad (19)$$

hvor “ $\min(D, q)$ ” betyr den minste størrelsen av D og q .

d) Forklar *kort* hvorfor $S = \min(D, q)$ også er en stokastisk variabel. ¹³

¹³Variabelen D er stokastisk. Variabelen S er avhengig av D , se lign.(18).

En morgen bestemmer avisgutten seg for å bestille $\overbrace{q=3}^{\text{bestiller}}$ aviser.
 Anta at sannsynlighetsfordelingen til den stokastiske variabelen S er gitt ved fordelingen i figur 7:

q = 3:

s_i	0	1	2	3	4	5
$P(S=s_i)$	0.10	0.05	0.15	0.70	0	0

Figur 7: Sannsynlighetsfordeling $P(S = s_i)$, for $i = 0, 1, \dots, 4, 5$ når $q = 3$.

e) Vis at sannsynlighetsfordelingen i figur 7 er en gyldig sannsynlighetsfordeling.

f) i) Finn $E[S]$ når $q = 3$, dvs. når $P(S = s_i)$ er gitt ved tabellen i figur 7.

ii) Gi en tolkning av $E[S]$, dvs. forklar *kort* hva det betyr på “godt norsk”.

g) Sammenlign $E[D]$ fra oppgavene **3a** og $\overbrace{E[S]}^{q=3}$ fra **3f**.
 Er det rimelig at den ene verdien er større enn den andre?
 Gi en *kort* begrunnelse.

Avisgutten betaler c NOK per avis (innkjøpspris), og deretter selger han dem for p NOK per avis (utslagspris). Fortjenesten blir da:

$$\pi(S, q) = pS - cq, \quad (20)$$

hvor, som tidligere angitt

$$S = \min(D, q) \quad (21)$$

Anta at:

$$c = 5 \text{ NOK} \quad (\text{innkjøpspris, dvs. kostnad}) \quad (22)$$

$$p = 20 \text{ NOK} \quad (\text{utsalgspris}) \quad (23)$$

i resten av oppgaven.

h) Hva er da forventet fortjeneste $E[\pi(S, q = 3)]$ dersom avisgutten bestiller $q = 3$ aviser? ¹⁴

¹⁴Tips:

- Bruk en av regnereglene vi har lært om.
- Bruk gjerne resultatet fra oppgave **3f**.

Avisgutten går fra gate til gate for å selger aviser.

Derfor er det hensiktsmessig å introdusere følgende stokastiske variabel:

$$D_k = \text{antall aviser som etterspørres en gitt dag i gate nr. } k \quad (24)$$

hvor $k = 1, 2, 3, \dots, n$, og hvor n er antall gater som avisgutten er innom i løpet av en dag.

La oss forenkle virkeligheten og anta følgende:

1. etterspørselen etter aviser i de forskjellige gatene er uavhengige:
 D_k er gjensidig uavhengige for alle $k = 1, 2, 3, \dots, n$
2. alle gatene antas å ha samme sannsynlighetsfordeling:
 D_k har samme sanns.fordeling for alle $k = 1, 2, 3, \dots, n$ gitt ved tabellen i figur 5

Antall aviser som etterspørres når avisgutten rekker over n antall gater på en dag er da:

$$D_{\text{total}} = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n \quad (25)$$

hvor

$$n = \text{antall } \underline{\text{gater}} \text{ som avisgutten selger aviser i løpet av en dag} \quad (26)$$



Figur 8: Fra gate til gate.

- i) Vis, ved hjelp av regnereglene for forventingsverdi, at

$$E[D_{\text{total}}] = n E[D] \quad (27)$$

hvor $E[D]$ er forventet etterspørsel av aviser en gitt dag når avisgutten selger aviser i n gater.

- j) Med antagelsen om at etterspørselen etter aviser i de ulike gatene er uavhengige, vis da, ved hjelp av regnereglene for varians, at

$$Var[D_{\text{total}}] = n Var[D] \quad (28)$$

hvor $Var[D]$ er variansen til etterspørselen en gitt dag når avisgutten selger aviser i n gater.

- k) Bruk lign.(28) og vis at ¹⁵

$$\sigma[D_{\text{total}}] = \sqrt{n} \sigma[D] \quad (29)$$

hvor $\sigma[D] = \sqrt{Var[D]}$ er standardavviket til etterspørselen en gitt dag når avisgutten selger aviser i n gater.

¹⁵Denne oppgaven er svært kort.

Anta at avisgutten selger aviser i $n = 30$ gater.

- 1) Med antagelsene som nevnt ovenfor, hva slags fordeling har den stokastiske variabelen D_{total} i lign.(25) med god tilnærming?

Dersom du har løst deloppgaven foran rett, dvs. oppgave **3l**, så innser du at D_{total} er en **kontinuerlig** stokastisk variabel. Man kan da vise at maksimal forventet fortjeneste oppnås når ¹⁶

$$P(D_{\text{total}} \leq q^*) = 1 - \frac{c}{p} \quad (30)$$

hvor

$$q^* = \begin{array}{l} \text{antall aviser som avisgutten må kjøpe inn om morgenen} \\ \text{for å maksimere sin fortjeneste} \end{array} \quad (31)$$

m) Finn q^* .

n) Forventningsverdien til D_{total} , dvs. forventet etterspørsel av aviser en gitt dag, er

$$E[D_{\text{total}}] = 3 \cdot 30 = 90 \quad (32)$$

Denne forventningsverdien og verdien på q^* fra oppgave **3m** er ikke sammenfallende.

Gi en *kort* forklaring på hvorfor den ene verdien er større enn den andre.

■

¹⁶Du skal ikke vise lign.(30). Bare ta den for gitt.

Oppgave 4: (økonomi)

Du er ansatt som salgssjef og økonomiansvarlig for bilvarehuset Slatlem & Co A/S i Molde. Som ansvarlig for bilsalget er du interessert i å vite mer om **forventet bilsalg**. Derfor definerer du den stokastiske variabelen:

$$X = \text{antall biler solgt per dag}$$

Basert på **historiske data** så vet du at X har følgende sannsynlighetsfordeling: ¹⁷

x	0	1	2	3
P(X=x)	0.50	0.30	0.15	0.05

Figur 9: Sannsynlighetsfordeling $P(X = x)$.

- a) i) Finn forventet antall biler solgt per dag, dvs. $E[X]$.
- ii) Finn variansen til antall biler solgt per dag, dvs. $Var[X]$. ¹⁸



Figur 10: Bilvarehuset Slatlem & Co A/S i Molde.

¹⁷Spørsmål som ikke er en del av øvingen, men som du gjerne kan undersøke “på kladd”: Er sannsynlighetsfordelingen $P(X = x)$ i figur 9 en gyldig sannsynlighetsfordeling/(”vekt”)?

¹⁸Bruk 4 desimalers nøyaktighet både på $Var[X]$ og $\sigma[X]$.

La

$$X_1, X_2, X_3 \dots X_n \quad (33)$$

være antall biler solgt på dag nr. 1, 2, 3, ... , n . Gjennomsnittet av antall solgte biler er

$$\boxed{\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} \quad (34)}$$

Anta videre at:

1. antall biler solgt på ulike dager er uavhengige:
 $X_i \sim$ er uavhengige for alle $i = 1, 2, 3 \dots n$
2. alle dager antas å ha samme sannsynlighetsfordeling (gitt ved tabell 5):
 $X_i \sim$ samme sannsynlighetsfordeling for alle $i = 1, 2, 3 \dots n$

Slatlem har $n = 303$ åpningsdager i året.

- b)** **i)** Finn forventet antall biler solgt per dag i *gjennomsnitt* over ett år, dvs. $E[\bar{X}]$.
- ii)** Finn variansen til *gjennomsnittet* over ett år av antall biler solgt per dag, dvs. $Var[\bar{X}]$.¹⁹
- c)** Bruk svarene fra foregående oppgaver og fyll ut tabellen på neste side. Kommenter resultatet.²⁰

¹⁹Husk at dersom to stokastiske variabler X og Y er uavhengige så er $Cov[X, Y] = 0$.

²⁰Hvordan er $E[X]$ sammenlignet med $E[\bar{X}]$? Hvordan er $\sigma[X]$ sammenlignet med $\sigma[\bar{X}]$?

tyngdepunkt		spredning	
$E[X]$		$\sigma[X]$	
$E[\bar{X}]$		$\sigma[\bar{X}]$	

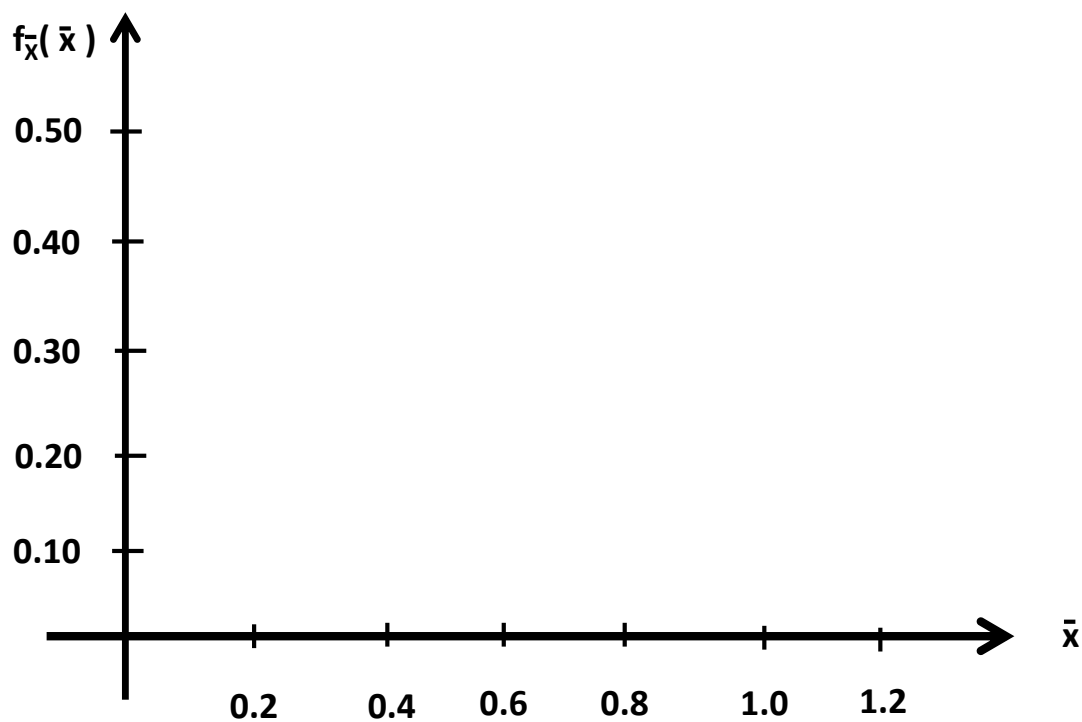
Figur 11: Fyll ut tabellen.

- d) i) Med forutsetningene 1. og 2. som oppgitt på forrige side, **hvilken setning** gjelder da?
- ii) Hvilken fordeling har gjennomsnittet $\bar{X}$?
- iii) Hvor stor må n ($n =$ antall “forsøk”) være, **omtrent**, for at setningen fra oppgave **d i** skal gjelde? ²¹
- e) På neste side ser du en figur med et koordinatsystem.
På y -aksen finner du tetthetsfunksjonen $f_{\bar{X}}(\bar{x})$ for den stok. gjennomsnittsvariabelen $\bar{X}$.
På x -aksen finner du verdier for gjennomsnittet, dvs. $\bar{x}$.

Tegn inn tetthetsfunksjonen $f_{\bar{X}}(\bar{x})$. ²²

²¹Kun en tommelfingerregel er godt nok her.

²²Bruk at $f_{\bar{X}}(\bar{x} = E[\bar{X}]) \approx 0.45$. Bruk også resultatene for $E[\bar{X}]$ og $\sigma[\bar{X}]$ fra figur 11.



Figur 12: Tegn inn for hånd tetthetsfunksjonen $f_{\bar{X}}(\bar{x})$.

- f) Hva er sannsynligheten for at Slatlem selger **mer enn 220** biler i året?
Finn tilnærmet svar v.h.a. sentralgrensesetningen.²³

■

²³Tips:

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > 220) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} > \frac{220}{n}\right) \quad (35)$$

$$= P\left(\bar{X} > \frac{220}{n}\right) \quad (36)$$

Så kan du argumentere for hva slags fordeling $\bar{X}$ har, og deretter standardisere lign.(36). Bruk 4 desimalers nøyaktighet.

Oppgave 5: (lagerstyring , *SCM200* , logistikk - normalfordeling , sum av stok. var.)

Statistikk anvendes i svært mange disipliner.

I denne oppgaven, oppgave 5, skal vi se hvordan statistikk anvendes i logistikk, og helt spesifikt i emnet "*SCM200 Lager- og produksjonsplanlegging*".

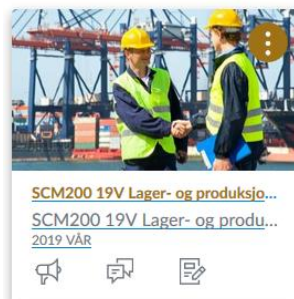
Selv om oppgave 5 er relatert til emnet "*SCM200 Lager- og produksjonsplanlegging*" så behøver man *ikke* å ha dette emnet for å løse oppgaven. Alle *MAT110*-studenter kan løse denne oppgaven, uansett om de har *SCM200* eller ikke. Oppgaven illustrerer hvordan statistikk kan anvendes i en bestemt disiplin, i dette tilfelle logistikk. Helt tilsvarende kan statistikk også anvendes innen andre disipliner som økonomi, revisjon og Sport Management.

MAT110



Per Kristian Rekdal
(faglærer MAT110)

SCM200



Bård-Inge Pettersen
(faglærer SCM200)

Figur 13: Faglig fellesskap mellom MAT110 og SCM200.

I 2015 fikk belysningsprodusenten Glamox i Molde en stor kontrakt med det “*danske sygehusvæsen*” for leveranse av spesiallys til operasjonsstuene i alle statlige sykehus i Danmark.
 På grunn av strenge krav til god belysning i operasjonsstuene må lampene ofte skiftes ut.
 Det viser seg at typisk 10 lamper må skiftes **per dag** ved de forskjellige sykehusene i Danmark.

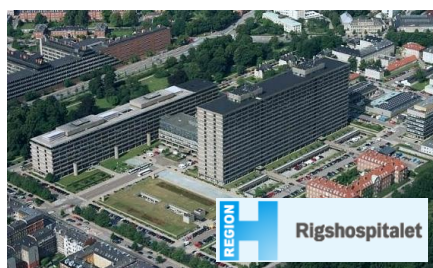
For å sikre nok lamper til enhver tid må det være et lager med lamper lokalt i Danmark.
Men hvor stort må dette lageret være?

Sykehusene ønsker å bestille nye lamper slik at de ikke risikerer å gå tom.
Men hvor mange lamper har de på lager i Danmark når de må gjøre ny bestilling?
Bør de de ha sikkerhetslager? Hvor stort må i så fall dette sikkerhetslageret være?

Disse og andre spørsmål skal vi se nærmere på i denne oppgaven.

Vi skal dele denne oppgaven inn i 3 deler:

- 1) **Del 1:** etterspørsel er ikke usikker
Deterministisk tilnærmede. Konstant etterspørsel $D = 10$.
- 2) **Del 2:** Stokastisk tilnærmede: Usikker etterspørsel.
- 3) **Del 3:** etterspørsel usikker
Stokastisk tilnærmede: Usikker etterspørsel **og** usikker ledetid.



Figur 14: Operasjonsstue.

Definisjon: (bestillingspunkt R - generell definisjon)

bestillingspunktet R = det **antall enheter** som befinner seg på lager
når man foretar en ny bestilling



God og dårlig R :

- Høy R betyr tidlig bestilling slik at lageret ikke er tomt når varene ankommer
- gir økte lagerkostnader
- Lav R betyr sein bestilling slik at lageret er tomt før varene ankommer
- gir tapt salg

God R :

- Hva er et bra bestillingspunkt R i det **deterministiske** tilfellet?
- Hva er et bra bestillingspunkt R i det **stokastiske** tilfellet?

I denne oppgaven skal vi finne **gode** bestillingspunkt R for det **deterministiske** tilfellet sogar som det **stokastiske**.

Gode bestillingspunkt R for det deterministiske tilfellet er generelt *ikke* sammenfallende med det stokastiske.



Figur 15: Tomt og fullt lager.

Del 1 Deterministisk tilnærming

Anta at etterspørselen av lamper for alle statlige sykehus i Danmark er konstant lik 10 per dag, dvs.:

$$D = 10 \quad (\text{konstant}) \quad (37)$$

hvor D er lamper/dag.

Vi antar altså at det ikke er noen usikkerhet i etterspørselen D - en **deterministisk** tilnærming. Pga. konstant etterspørsel vil lageret tømmes og fylles med jevne mellomrom som vist i fig. 16.²⁴

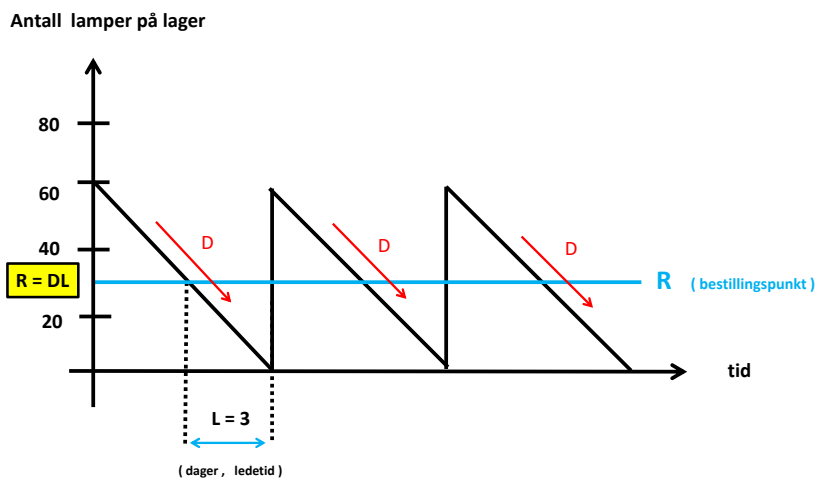
Ledetiden er den tiden det tar fra bestilling til man får varene på lager.

Ledetiden i vårt tilfelle er derfor den tiden som Glamox bruker på å starte opp en ny produksjonsserie og helt til lampene er **ferdig produsert og levert** i Danmark.

Anta at ledetiden for Glamox er 3 dager, dvs.

$$L = 3 \quad (38)$$

hvor L er antall dager.



Figur 16: Antall lamper på lager - D er **konstant**.

²⁴I denne oppgaven bruker vi bestillingsmengden $q^* = 60$ som vist i figur 16, men vi kommer ikke til å bruke denne verdien til noe spesielt i denne oppgaven.

Betingelse: (beste bestillingspunkt R - deterministisk tilfelle)

Best bestillingspunkt R i det deterministiske tilfellet er det som *minimerer* lageret



Siden etterspørselen D er konstant så innser vi - ut fra betingelsen om minimum lager - at bestillingspunktet R er gitt ved:

$$R = DL \quad (D \text{ konstant}) \quad (39)$$

altså R er det *antall varer som etterspørres i ledetiden*.

- a) Hvor mange lamper R har sykehusene i Danmark på lager når de må gjøre en ny bestilling?

Fra forelesning i *SCM200*:

HimoldeX

$R = D \cdot L$

D = ETTERSPØRSEL
 R = BESTILLINGSPUNKT

Setning: (bestillingspunkt R - uten sikkerhetslager)

Anta at forutsetningene for EOQ-formelen er oppfylt, se side [179](#).
Konstant etterspørsel og ingen stockout er noen av disse forutsetningene.
Bestillingspunktet R er da:

$$R = DL \quad (5.27)$$

hvor

D	=	etterspørsel (demand)
L	=	ledetid
R	=	bestillingspunkt

OPPSUMMERING: EOQ OG BESTILLINGSPUNKT

$R = DL$

D = ETTERSPØRSEL (konstant etterspørsel)
 L = LEDETID

$X^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_o}{H}}$

$X^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_o}{H}}$

Figur 17: Bestillingspunkt R .

Del 2 Stokastisk tilnærkelse (usikker etterspørsel)

I virkeligheten er ikke etterspørselen konstant. Etterspørselen kan variere fra dag til dag. Lageret av lamper i Danmark tømmes derfor med ujevne mellomrom - det er en usikkerhet i etterspørselen.

For å ta hensyn til denne usikkerheten i etterspørselen så introduserer vi **stokastiske variabler** - en stokastisk tilnærkelse.

Anta at *forventet* antall lamper som må skiftes **per dag** ved de forskjellige sykehusene i Danmark er 10, dvs.:

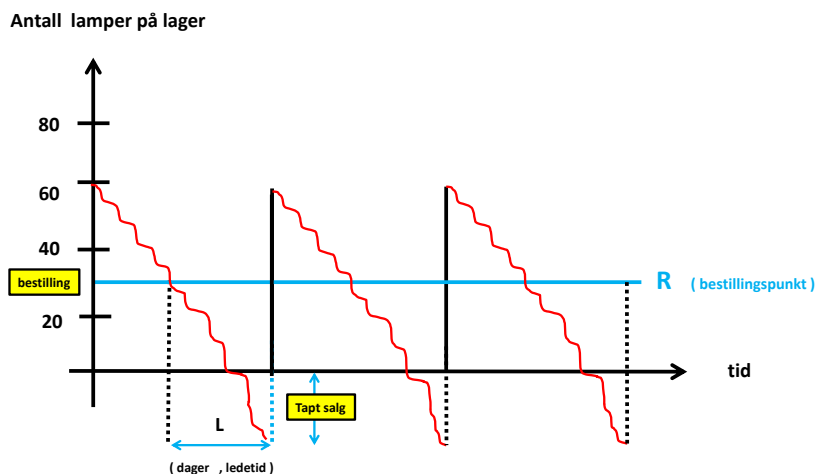
$$\mu_D = 10 \quad (40)$$

hvor μ_D er *lamper/dag*.

Standardavviket σ_D sier noe om hvor stor/liten usikkerheten til etterspørselen av lamper er. Anta at standardavviket **per dag** er ganske stort, nemlig:

$$\sigma_D = 6 \quad (41)$$

hvor σ_D er *lamper/dag*.



Figur 18: Antall lamper på lager - usikker etterspørsel.

Vi definerer den stokastiske variabelen:

$$D_t = \text{antall lamper som etterspørres av sykehusene i Danmark for en gitt dag nr. } t \quad (42)$$

hvor $t = 1, 2, 3, \dots$

Med relativt god tilnærming viser det seg at disse stok. variabelene D_t er **normal**fordelte, dvs.

$$D_t \sim \mathbf{N}[\mu_D = 10, \sigma_D = 6] \quad (43)$$

for alle $t = 1, 2, 3, \dots$, og hvor altså $E[D_t] = \mu_D = 10$ og $\sigma[D_t] = \sigma_D = 6$.

- b) Hvor stor er sannsynligheten for at etterspørselen D_t av lamper fra de danske sykehusene er større enn 15 for en gitt dag t ? ²⁵

²⁵Dvs. hva er $P(D_t > 15)$?

Tanken med bestillingspunktet R er at vi skal ha akkurat nok lamper på lager slik at vi ikke går tom i løpet av ledetiden. Som nevnt tidligere, problemet med bestillingspunktet funnet i oppgave 5a er at det ikke tar høyde for variasjonen i etterspørselen.

På grunn av variasjonen i etterspørselen kan det likevel skje at sykehusene går tom for lamper på lager.

Vi skal nå bestemme hvordan bestillingspunktet R endres dersom ledelsen ved sykehusene bestemmer seg for at sannsynligheten for ikke å gå tom for lamper på lager i ledetiden skal være f.eks. 99%.

Derfor:

Vi definerer en ny stokastisk variabel Y_L som er etterspørselen av lamper i løpet av L antall dager (ledetiden):

$$Y_L = \text{total etterspørsel av lamper i løpet av de neste } L \text{ dagene}$$

Siden etterspørselen for en gitt dag t er D_t så er:

$$Y_L = D_1 + D_2 + D_3 + \cdots + D_L = \sum_{t=1}^L D_t \quad (44)$$

etterspørselen i løpet av L antall dager.

- c) Vis, ved hjelp av regnereglene for forventingsverdi, at ²⁶

$$E[Y_L] = \mu_D L \quad (45)$$

hvor

$$E[Y_L] = \text{forventet etterspørsel de neste } L \text{ antall dagene} \quad (46)$$

$$L = \text{ledetiden i } \underline{\text{antall}} \text{ dager} \quad (47)$$

Anta videre at de stokastiske variablene D_t er gjensidig uavhengige for alle $t = 1, 2, 3, \dots$, dvs. at etterspørselen av lamper for en dag ikke påvirker etterspørselen av lamper for en annen dag.

- d) Med antagelsen om uavhengighet, vis da, ved hjelp av regnereglene for varians, at

$$Var[Y_L] = \sigma_D^2 L \quad (48)$$

hvor $Var[Y_L]$ er variansen til etterspørselen de neste L antall dagene.

- e) Vis at

$$\sigma[Y_L] = \sigma_D \sqrt{L} \quad (49)$$

hvor $\sigma[Y_L]$ er standardavviket til etterspørselen de neste L antall dagene.

²⁶Formelen i lign.(45) er analog med formelen $R = DL$ i lign.(39) i oppgave **5a**.

Man kan også vise at en lineærkombinasjon av uavhengige og normalfordelte stokastiske variabler fortsatt er normalfordelt. Dette faktum har vi *ikke* bevist i *MAT110 Statistikk 1*, vi har bare formulert det i en læresetning uten bevis, se figur 7.

Dermed:

Siden D_t er normalfordelte for alle $t = 1, 2, 3, \dots$ så er også summen $\overbrace{Y_L}^{\sim N} = \overbrace{D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_L}^{\sim N}$ normalfordelt ifølge denne læresetningen.

Dette faktum, sammen med resultatene fra deloppgavene på forrige side, gjør at vi kan konkludere med følgende:

$$Y_L \sim N[\mu_D L, \sigma_D \sqrt{L}] \quad (50)$$

siden forventningen er $\underbrace{E[Y_L] = \mu_D L}_{\text{se lign. (45)}}$ og standardavviket er $\underbrace{\sigma[Y_L] = \sigma_D \sqrt{L}}_{\text{se lign. (49)}}$.

Setning: (normalfordeling)

Anta at vi har uavhengige og normalfordelte stokastiske variabler
 $X_1 \sim N[\mu_1, \sigma_1^2]$, $X_2 \sim N[\mu_2, \sigma_2^2]$ og $X_3 \sim N[\mu_3, \sigma_3^2]$
 Da er også lineærkombinajonen

$$Y = aX_1 + bX_2 + cX_3$$

normalfordelt:

$Y \sim N[\mu_Y, \sigma_Y^2] \quad (7.86)$

hvor

$$\mu_Y = a\mu_1 + b\mu_2 + c\mu_3$$

$$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + c^2\sigma_3^2$$

Figur 19: Fra kompendiet i *MAT110*.

La oss nå anta at bestillingspunktet er lik det forventede salget i løpet av ledetiden, dvs.:

$$\underline{R} = E[Y_L] \quad (51)$$

$$\stackrel{\text{ign. (45)}}{=} \mu_D L = 10 \cdot 3 = \underline{30 \text{ lamper}} \quad (52)$$

Dersom etterspørselen i ledetiden er større enn R , dvs.

$$Y_L > R \quad (\text{tom på lager}) \quad (53)$$

så vil sykehusene i Danmark gå tom for lamper på lager, altså “*stockout*”.

Å *ikke* gå tom for lamper blir dermed:

$$Y_L \leq R \quad (\text{ikke tom på lager}) \quad (54)$$

- f) Hvor stor er sannsynligheten for at sykehusene i Danmark går tom for lamper på lager, dvs. hva er $P(Y_L > R)$, “*stockout*”?

π

BESTILLINGSPUNKT-MODELL

STØRRELSEN PÅ SIKKERHETSLAGERET ER AVHENGIG AV TO FAKTORER:

1. VARIASJONEN I ETTERSPÒRSELEN
2. POLICYKRAV

A. SANNSYNLIGHET FOR STOCKOUT

B. SERVICEGRAD - % AV ETTERSPÒRSELEN SOM FÅR VAREN

Figur 20: Bestillingspunkt. Utdrag fra *SCM200*.

Men i det stokastiske tilfellet er det ofte slik at **ledelsen** i en bedrift **bestemmer** seg for hva slags servicegrad ²⁷ de ønsker å legge seg på.

Deretter regner man ut hva slags bestillingspunkt R det gir.

Betingelsen for beste bestillingspunkt i det stokastiske tilfellet er derfor:

Betingelse: (beste bestillingspunkt R - stokastisk tilfelle)

Bestillingspunktet R i det stokastiske tilfellet er det

$$\underline{\text{antallet lamper}} \tag{55}$$

man har på lager når man må gjøre en ny bestilling, som gir et servicegrad på p %, dvs. det er p % sannsynlighet for at man ikke går tom på lageret i løpet av ledetiden L .

R er derfor bestemt av ligningen:

$P(Y_L \leq R) = p$

 (56)

hvor

$$p = \text{sikkerhetsnivå} \tag{57}$$

$$Y_L = \text{total etterspørsel av varer i ledetiden} \tag{58}$$

$$R = \text{bestillingspunkt} \tag{59}$$



²⁷Også kalt sikkerhetsnivå.

Helsemyndighetene i Danmark synes at “*stockout*”-sannsynligheten i oppgave 5f er for stor. De ønsker derfor en mye strengere “policy” for å unngå å gå tom for lamper. Helsemyndighetene pålegger derfor sykehusene å heve sikkerhetsnivået til 99 %, dvs. det skal være 99 % sannsynlighet for at det er nok lamper på lager i Danmark:

$$P(Y_L \leq R) = 0.99 \quad (60)$$

hvor R er bestillingspunktet.

Vi skal nå regne ut det nye bestillingspunktet R , dvs. vi skal løse lign.(60). Siden Y_L er normalfordelt så vet vi at vi må omskalere Y_L -variable til Z -variabler, dvs. vi må Y_L -standardisere:

$$P(Y_L \leq R) = 0.99 \quad (61)$$

$$P\left(\underbrace{\frac{Y_L - E[Y_L]}{\sigma[Y_L]}}_{\equiv Z} \leq \underbrace{\frac{R - E[Y_L]}{\sigma[Y_L]}}_{\equiv Z_{0.99}}\right) \stackrel{\text{standardiser}}{=} 0.99 \quad (62)$$

$$P(Z \leq Z_{0.99}) = 0.99 \quad (63)$$

g) Bruk definisjonen av $Z_{0.99}$ i lign.(62) (rød formel) samt lign.(45) og (49) til å vise at:

$$\boxed{R_{0.99} = \mu_D L + \overbrace{Z_{0.99} \sigma_D \sqrt{L}}^{= SS} \quad (64)}$$

hvor sikkerhetslaget SS altså er:

$$SS = Z_{0.99} \sigma_D \sqrt{L} \quad (65)$$

h) Regne ut $R_{0.99}$.²⁸

Ser du at lign.(64) stemmer med lign.(5.45) i figur 21 fra *SCM200* ?

Vi har nå, via oppgave 5g, utledet lign.(5.45) i figur 21 fra emnet *SCM200 Lager- og produksjonsplanlegging*.²⁹

Setning: (bestillingspunkt R - med sikkerhetslager)

La D være en stokastisk variabel som beskriver en etterspørsel. Anta at denne er normalfordelt

$$D \sim N[\mu, \sigma] \quad (5.44)$$

Siden $R_p = \mu L + SS$ og hvor $SS = z_p \sigma \sqrt{L}$ fra lign.(5.43), så er bestillingspunktet R_p gitt ved:

$$R_p = \mu L + z_p \sigma \sqrt{L} \quad (5.45)$$

hvor

z_p	=	sikkerhetsfaktoren (tabelloppslag)
p	=	servicegrad
μ	=	$E[D]$
σ	=	$\sqrt{Var[D]}$
L	=	ledetid

Figur 21: Utdrag fra *SCM200*.

²⁸Tips: Finn $Z_{0.99}$ ved omvendt tabelloppslag.

²⁹Men siden det er en del *SCM200*-studenter som ikke har *MAT110 Statistikk 1* så inneholder ikke kompendiet i *SCM200* detaljene som vi nå nettopp har gått gjennom. I *SCM200* blir derfor formelen for bestillingspunktet R presentert *uten* bevis, jfr. figur 21.

Som vi ser ut fra lign.(64) har vi fått et **ekstra**ledd sammenlignet med ligningen for $R = DL$ i figur 17 for det deterministiske tilfellet.

Dette ekstraledet kalles **sikkerhetslager** SS , (*Safety Stock*).

Fra lign.(64) ser vi at dette ekstraledet SS er:

$$SS = Z_0 \sigma[Y_L] \quad (66)$$

hvor

$$SS = \text{“Safety Stock”, antall enheter på sikkerhetslager} \quad (67)$$

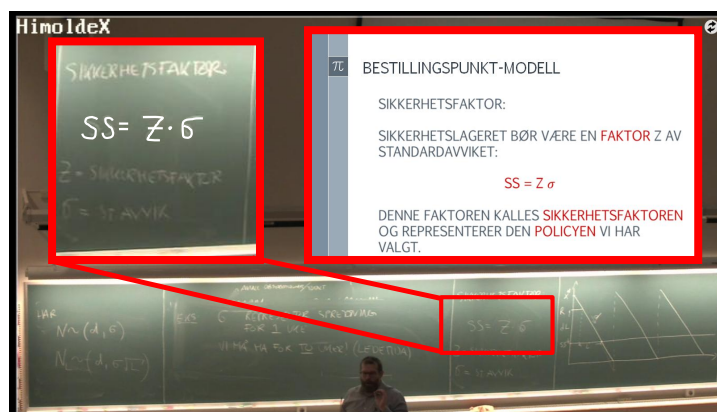
$$Z_0 = \text{sikkerhetsfaktor/antall standardavvik} \quad (68)$$

$$\sigma[Y_L] = \text{standardavvik for etterspørsel i ledetiden} \quad (69)$$

$$= \sigma_D \sqrt{L} \quad (\text{jfr. lign.(49)}) \quad (70)$$

$$L = \text{ledetiden} \quad (71)$$

- i) Hvor mange lamper SS må sykehusene i Danmark ha på sikkerhetslager for å oppnå **99%** sikkerhetsnivå? ³⁰

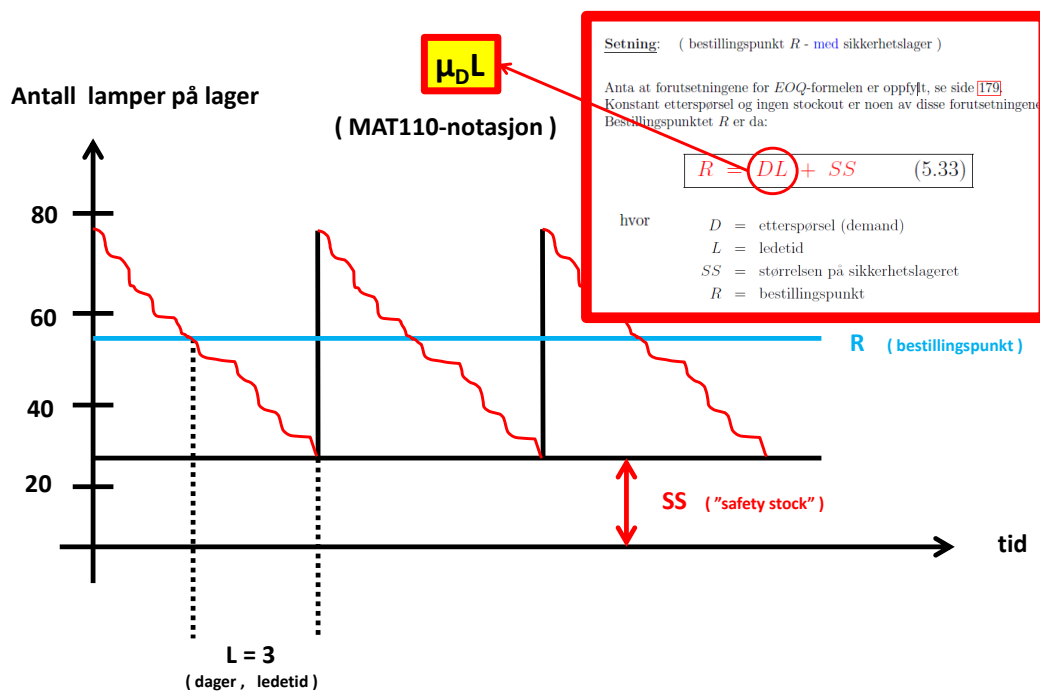


Figur 22: Sikkerhetslager SS . Fra forelesning fra *SCM200*.

³⁰I hele oppgave 5 antar vi at sykehusene i Danmark kan oppfattes som en enhet med ett lager, og at det enkelte sykehus kan få tak i nye lamper fra dette lageret så raskt at lamper kan byttes ut når det er behov for det uten at man trenger mer enn ett lager.

j) Figur 23 viser antall lamper på lager som funksjon av tid. ³¹

Marker på den vertikale akse i figur 23 ditt svar for sikkerhetslageret SS fra oppgave 5i og ditt svar for bestillingspunktet R fra oppgave 5h.



Figur 23: Antall lamper på lager - usikker etterspørsel.

³¹Figur 23 er en velkjent figur innen logistikk og lagerstyring, se f.eks. *SCM200 Lager- og produksjonsplanlegging*. For de av dere som ikke har dette faget så kan dere bare se på figuren som en enkel illustrasjon.

Del 3 Stokastisk tilnærming (usikker etterspørsel og ledetid)

Sykehusene i Danmark opplever også at **ledetiden** varierer en del. Dette medfører at de får stockout **oftere** enn forventet, til tross for at de bruker sikkerhetslageret funnet i oppgave **5i**.

Ledelsen ved sykehusene ønsker derfor ikke bare å ta høyde for variasjoner i etterspørselen, men de ønsker også å ta høyde for variasjoner i ledetiden L . Derfor ser vi i resten av oppgaven på L som en stokastisk variabel. Ikke en konstant.

Vi antar nå at L er normalfordelt med forventningsverdi $\mu_L = 3$ og standardavvik $\sigma_L = 2$, dvs.

$$L \sim N[\mu_L, \sigma_L] \quad (72)$$

hvor

$$\mu_L = 3 \quad (73)$$

$$\sigma_L = 2 \quad (74)$$

Ved å bruke regneregler som er utenfor pensum i dette emnet, kan man vise at: ³²

$$E[Y_L] = \mu_L + \mu_D \quad (75)$$

$$Var[Y_L] = \sigma_D^2 \mu_L + \sigma_L^2 \mu_D \quad (76)$$

hvor standardavviket følger direkte fra siste ligning:

$$\sigma[Y_L] = \sqrt{\sigma_D^2 \mu_L + \sigma_L^2 \mu_D} \quad (77)$$

³²Du skal ikke vise lign.(75) og (76). Bare ta de for gitt.

- k) Hvor mange lamper SS må sykehusene i Danmark nå ha på sikkerhetslager for å oppnå 99 % sikkerhetsnivå?

Tips, bruk lign.(66) med samme sikkerhetsnivå Z_0 som i oppgave 5i, men ny $\sigma[Y_L]$ som i lign.(77).

- l) Hvilken effekt har usikkerheten av ledetiden på sikkerhetslageret SS ? Vil sikkerhetslageret øke eller minke som følge av usikkerheten i L ?

