



Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høyskole i logistikk

1. Grunnleggende emner

Løsning mandag 3. august: DEL 2

“MAT001 Forkurs i matematikk”, 2020

Problem 1.1 — Kvadratsetningene og pilmetoden

Setning 1.0.1 — Den generelle kvadratsetningen

La a , b , c og d være reelle tall. Fra den distributive lov følger at:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd, \quad (1.1)$$

som vi kaller den generelle kvadratsetningen.



Lign.(1.1) er så viktig at det er **tre spesialtilfeller** av denne ligningen som har egne navn.

Setning 1.0.2 — Kvadratsetningene og konjugatsetningen

Lign.(1.1) har følgende spesialtilfeller:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1. \text{ kvadratsetning}) \quad (1.2)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2. \text{ kvadratsetning}) \quad (1.3)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (\text{konjugatsetningen}) \quad (1.4)$$

Regn ut uttrykkene:

a) $(x + y)^2$

Løsning:

Vi gjenkjenner 1. kvadratsetning:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (1.5)$$

b) $(x - y)^2$

Løsning:

Vi gjenkjenner 2. kvadratsetning:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (1.6)$$

c) $(x - y)(x + y)$

Løsning:

Vi gjenkjenner konjugatsetningen: (3. kvadratsetning)

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 \quad (1.7)$$

d) $(5a + 2b)^2$

Løsning:

Vi bruker 1. kvadratsetning:

$$(5a + 2b)^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 2b + (2b)^2 \quad (1.8)$$

$$= 25a^2 + 20ab + 4b^2 \quad (1.9)$$

e) $-(2y - 3x)^2$

Løsning:

Vi bruker 2. kvadratsetning:

$$-(2y - 3x)^2 = -\left((2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3x + (3x)^2\right) \quad (1.10)$$

$$= -(4y^2 - 12xy + 9x^2) \quad (1.11)$$

$$= -4y^2 + 12xy - 9x^2 \quad (1.12)$$

f) $(ax - by)(ax + by)$

Løsning:

Vi bruker konjugatsetningen: (3. kvadratsetning)

$$(ax - by)(ax + by) = (ax)^2 - (by)^2 \quad (1.13)$$

$$= a^2x^2 - b^2y^2 \quad (1.14)$$

g) $-(2x - 6 + 2y)(y + 9 - 4x)$ (bruk "pilmetoden")

Løsning:

Vi bruker den distributive lov, eller "pilmetoden", se figur 1.1.

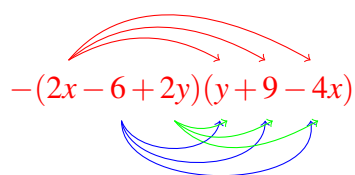


Figure 1.1: Distributive lov - pilmetoden.

$$\begin{aligned}
 -(2x - 6 + 2y)(y + 9 - 4x) &= - \left(2x \cdot y + 2x \cdot 9 + 2x \cdot (-4x) \right. \\
 &\quad \left. - 6 \cdot y - 6 \cdot 9 - 6 \cdot (-4x) \right. \\
 &\quad \left. + 2y \cdot y + 2y \cdot 9 + 2y \cdot (-4x) \right) \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left(2xy + 18x - 8x^2 \right. \\
 &\quad \left. - 6y - 54 + 24x \right. \\
 &\quad \left. + 2y^2 + 18y - 8xy \right) \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left(-8x^2 + 2y^2 - 6xy \right. \\
 &\quad \left. + 18x + 24x - 6y + 18y \right. \\
 &\quad \left. - 54 \right) \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left(-8x^2 + 2y^2 - 6xy \right. \\
 &\quad \left. + 42x + 12y \right. \\
 &\quad \left. - 54 \right) \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

$$= 8x^2 - 2y^2 + 6xy - 42x - 12y + 54 \quad (1.19)$$

■

Problem 1.2 — Visualisering av kvadratsetningene

Første kvadratsetning lyder:

Definisjon 1.0.1 For alle reelle tall a og b gjelder:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (1.20)$$

Første kvadratsetning kan "bevise" geometrisk ved hjelp av *arealbetraktninger*.

Anta vi starter med et kvadrat hvis sider er $a + b$, som vist i figur 1.2.
Arealet av hele kvadratet er

$$A = (a + b)^2, \quad (1.21)$$

som vi ønsker å finne et uttrykk for.

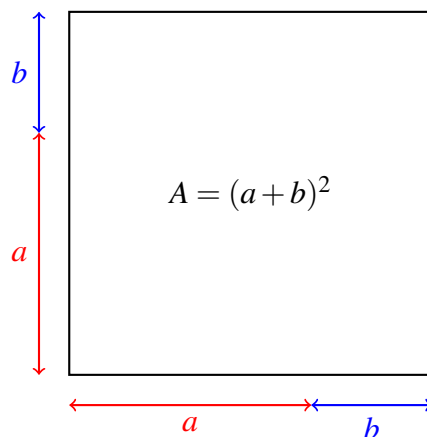


Figure 1.2: Et kvadrat med sidene $a + b$.

Ideen er nå å *dele opp* kvadratet i 4 *rektangler* ved å trekke linjer akkurat hvor a ender og b starter, se figur 1.3.

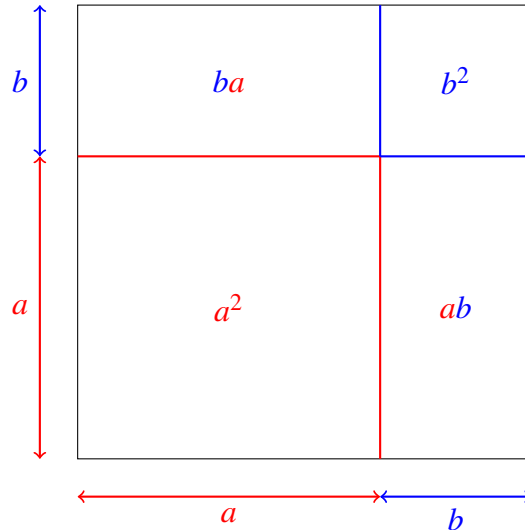


Figure 1.3: Oppdeling.

Summen av arealene av de fire mindre rektanglene må være lik det totale arealet:

$$A = (a + b)^2 \tag{1.22}$$

$$= a^2 + ba + ab + b^2 \tag{1.23}$$

$$= a^2 + 2ab + b^2, \tag{1.24}$$

som beviser 1. kvadratsetning.

- a) Finn et tilsvarende geometrisk "bevis" for 2. kvadratsetning:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (1.25)$$

Løsning:

Vi starter med å anta at $a > b$.¹

Anta vi har et kvadrat hvis sider er a , som vist i figur 1.4. Arealet av hele kvadratet er da gitt ved

$$A = a^2. \quad (1.26)$$

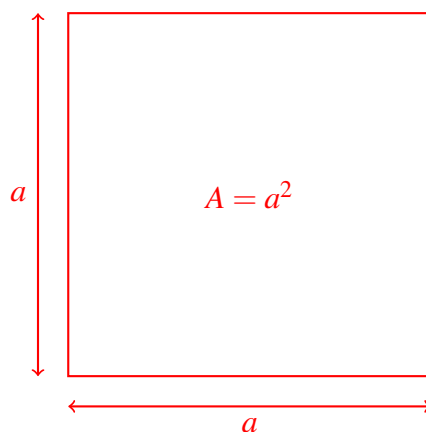


Figure 1.4: Et kvadrat med sidene a .

Vi kan løse oppgaven på 2 alternative måter.

¹Dersom $a < b$ kan vi bare bytte rollene til a og b i beviset.

Løsning alternativ 1:

Siden $a > b$, kan vi dele opp kvadratet i 4 rektangler ved å trekke linjer som vist i figur 1.5.

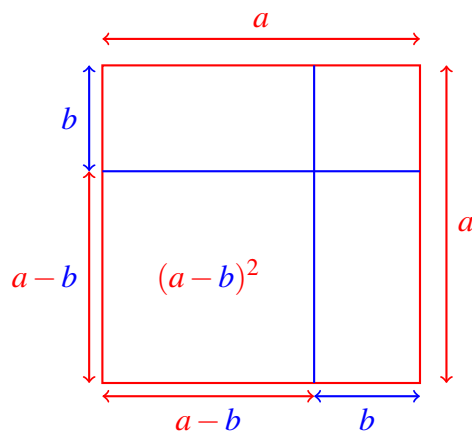


Figure 1.5: Oppdeling.

Vi er interessert i et uttrykk for arealet til kvadratet med sidene $a - b$, se figur 1.5.

1. Det totale arealet $= a^2$.
2. Trekker vi fra arealet til det øvre rektangelet med areal ba , se figur 1.6.

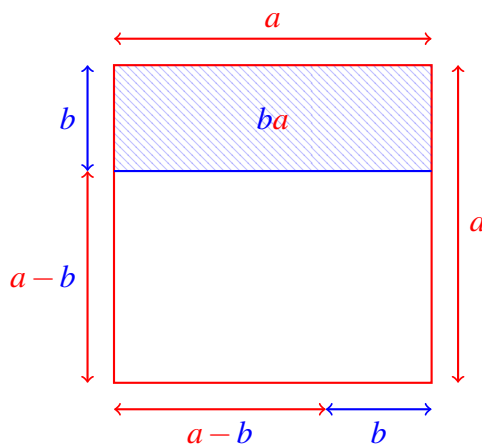


Figure 1.6: Trekker fra arealet ba fra det øvre rektangelet.

3. Videre trekker vi fra arealet til det høyre rektangelet med areal ba , se figur 1.7.

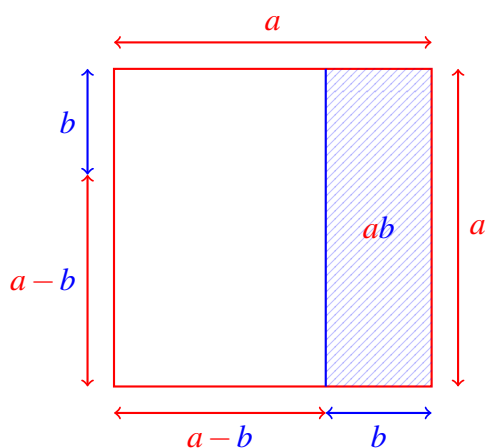


Figure 1.7: Vi trekker fra arealet ab fra det høyre rektangelet.

4. Arealene som overlapper i figur 1.8 dobbeltelles.

Vi har trekt fra dette arealet, dvs. b^2 , to ganger.

For å unngå å trekke fra dette arealet to ganger så legger vi til b^2 .

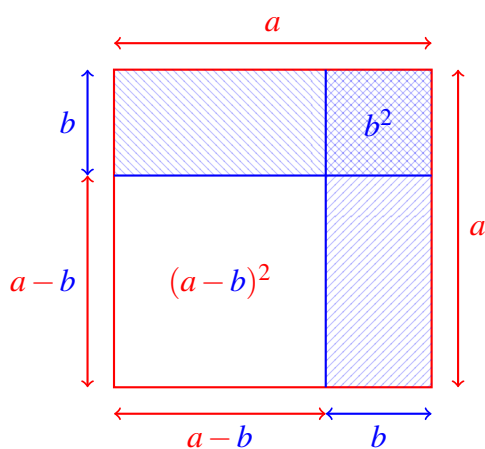


Figure 1.8: Vi deler opp kvadratet i 4 mindre deler.

Vi har dermed følgende arealregnskap:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (1.27)$$

som beviser 2. kvadratsetning.

Løsning alternativ 2:

Siden $a > b$, kan vi dele opp kvadratet i 4 rektangler ved å trekke linjer som vist i figur 1.9.

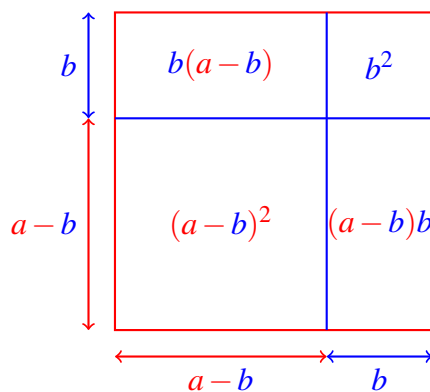


Figure 1.9: Oppdeling.

Oppdeling: ²

$$a^2 = \text{areal 1} + \text{areal 2} + \text{areal 3} + \text{areal 4} \quad (1.28)$$

$$a^2 = (a-b)^2 + \underbrace{b(a-b)} + \underbrace{(a-b)b} + b^2 \quad (1.29)$$

$$a^2 = (a-b)^2 + \overbrace{ba - b^2} + \overbrace{ab - b^2} + b^2 \quad (1.30)$$

$$a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2. \quad (1.31)$$

Løser mhp. $(a-b)^2$ alene:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (1.32)$$

som beviser 2. kvadratsetning.

²Summen av arealene av de fire mindre rektanglene må være lik det totale arealet

Kommentar:

Alternativ 1 er et "bedre" bevis enn alternativ 2, siden vi i alternativ 1 *ikke* bruker den distributive lov og manipulasjon av ligninger. Vi sier alternativ 1 er mer *elementær* eller mer *fundamental* enn alternativ 2.

- b) Finn et tilsvarende geometrisk "bevis" for 3. kvadratsetning (konjugatsetningen):

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \quad (1.33)$$

Løsning:

Vi starter med å anta at $a > b$.³

Anta vi har et kvadrat hvis sider er a , som vist i figur 1.10. Arealet av hele kvadratet er da gitt ved

$$A = a^2. \quad (1.34)$$

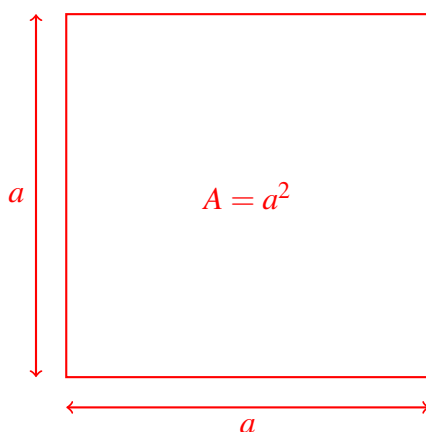


Figure 1.10: Et kvadrat med sidene a .

³Dersom $a < b$ kan vi bare bytte rollene til a og b i beviset.

1. Vi deler opp rektangelet i *to* deler som vist i figur 1.11.

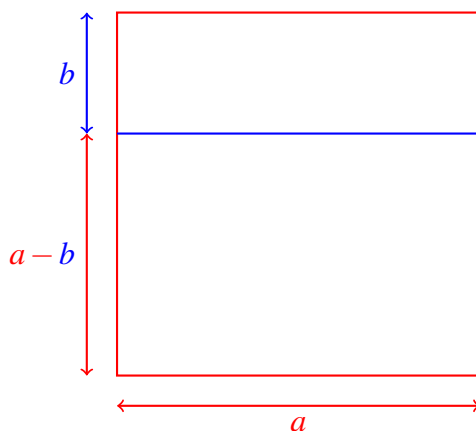


Figure 1.11: Vi deler opp kvadratet i 2 mindre deler.

2. Deretter *klipper* vi av det øvre rektangelet og legger delen loddrett inntil høyresiden til det opprinnelige kvadratet, som vist i figur 1.12.

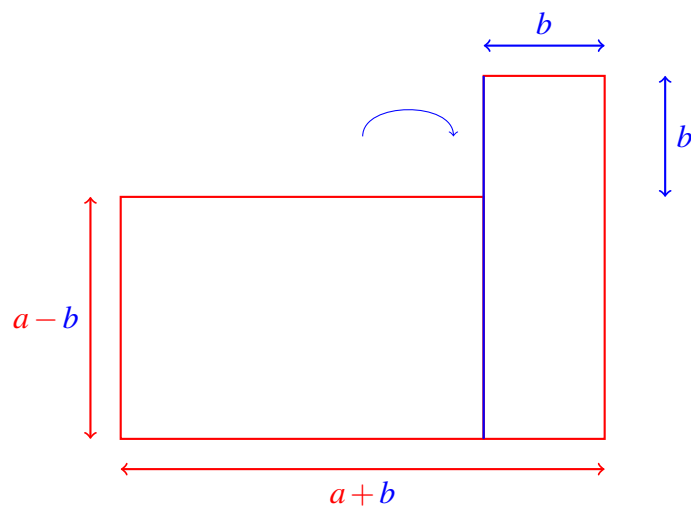


Figure 1.12: Vi klipper av det øvre rektangelet og vrir det.

3. Vi identifiserer at arealet av det skraverte rektanglet i figur 1.13 er gitt ved $(a-b)(a+b)$.

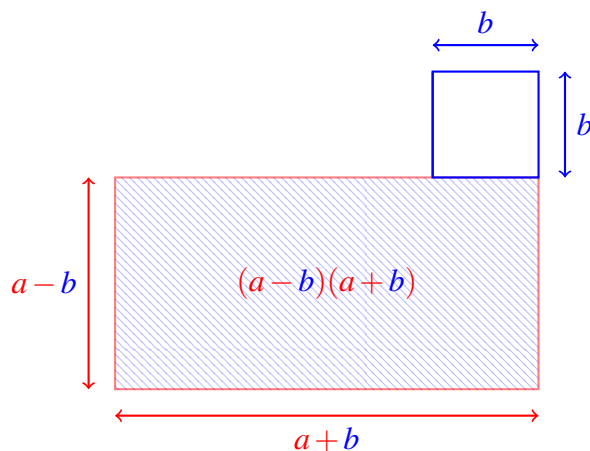


Figure 1.13: Vi identifiserer rektangelet med sidene $a-b$ og $a+b$.

4. Siden vi startet med et totalt areal på a^2 , må den resterende delen av arealet være gitt ved det lille kvadratet oppe til høyre. Arealet til dette kvadratet er b^2 , som vist i figur 1.14.

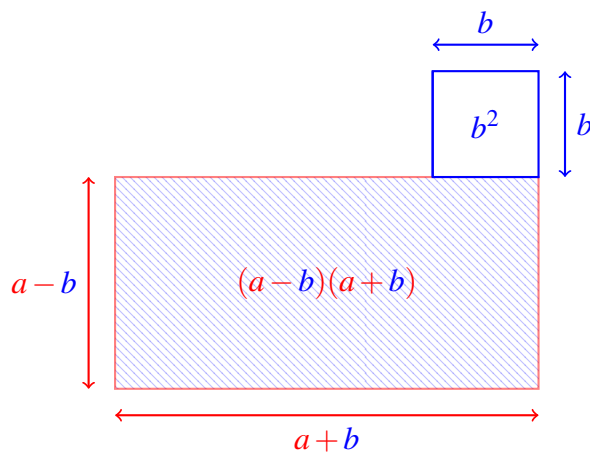


Figure 1.14: Det overflødige arealet er gitt ved b^2 .

Dermed:

$$\text{totalt areal} = a^2 \quad (1.35)$$

$$\underbrace{\text{areal 1} + \text{areal 2}}_{\text{arealene i figur 1.14}} = a^2 \quad (1.36)$$

$$(a - b)(a + b) + b^2 = a^2 \quad (1.37)$$

Flytter b^2 på høyre side:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2, \quad (1.38)$$

som beviser konjugatsetningen (3. kvadratsetning).

■