



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høgskole i logistikk

1. Grunnleggende emner

Oppgaver onsdag 5. august: DEL 2

“MAT001 Forkurs i matematikk”, 2020

1.0.1 n 'te kvadratrott

Setning 1.0.1 — n 'te kvadratrott og n 'te potens er inverse operasjoner

La $a \geq 0$ være et reelt tall. Da gjelder:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad (1.1)$$

$$\sqrt[n]{a}^n = a \quad (1.2)$$

Problem 1.1 — n 'te kvadratrott og n 'te potens

a) Regn ut:

$$i) \sqrt[5]{27^5} \quad (1.3)$$

$$ii) (\sqrt[5]{27})^5 \quad (1.4)$$

$$iii) \sqrt[3]{x^3} \quad (1.5)$$

$$iv) (\sqrt[3]{x})^3 \quad (1.6)$$

b) Regn ut: ¹

$$i) \sqrt[4]{8.1 \cdot 10^5} \quad (1.7)$$

$$ii) \sqrt[5]{0.32 \cdot 10^7} \quad (1.8)$$

$$iii) \sqrt[3]{\frac{x^6}{64}} \quad (1.9)$$

$$iv) \sqrt{125} \quad (1.10)$$

■

¹Bruk at: $81 = 3^4$, $32 = 2^5$, $64 = 4^3$, $125 = 25 \cdot 5$.

1.0.2 Potenser med brøk i eksponenten

Det er mulig å utvide potenser til å omfatte brøker i eksponenten.

Definisjon 1.0.1 La $a \geq 0$ være et reelt tall. La $\frac{m}{n}$ være en vilkårlig brøk. Potensen

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (1.11)$$

er veldefinert.

Problem 1.2 — Potenser med brøk i eksponenten

a) Regn ut uten bruk av kalkulator: ²

$$i) \ 8^{\frac{2}{3}} \quad (1.12)$$

$$ii) \ 81^{\frac{3}{4}} \quad (1.13)$$

b) Regn ut:

$$i) \ \sqrt{9} \quad (1.14)$$

$$ii) \ \sqrt[3]{8} \quad (1.15)$$

$$iii) \ \sqrt[4]{81} \quad (1.16)$$

■

²Bruker at: $8 = 2^3$ og $81 = 3^4$.

Problem 1.3 — Regne ut kvadratroten

For å få bedre fundamental forståelse av hva kvadratroten er, så skal vi her vise metoden som de fleste datamaskiner bruker for å regne ut kvadratroten av et tall.³

Metoden setter oss også i stand til å regne ut kvadratrøtter relativt raskt for hånd, **uten** bruk av kalkulator.



Figure 1.1: Kvadratroten. Datamaskin.

Vi starter med *definisjonen* av hva kvadratroten av et tall a er:

Definisjon 1.0.2 — Kvadratroten $\sqrt{a}$

Kvadratroten $\sqrt{a}$ av et positivt tall a er definert som det tallet som løser ligningen

$$x^2 = a. \tag{1.17}$$

³Denne metoden kalles **Newton's metode** og er svært mye brukt for å finne nullpunkter til funksjoner.

Omskriver lign.(1.17) slik:

$$x^2 - a = 0. \quad (1.18)$$

Eksempel:

Anta nå at vi setter $a = 10$, dvs. vi ønsker å finne en tilnærming til

$$\sqrt{10} = 3.1622... \quad (1.19)$$

Da vet vi fra lign.(1.18) at $x = \sqrt{10}$ løser ligningen

$$x^2 - 10 = 0. \quad (1.20)$$

For å visualisere det som skjer, la oss tegne opp *graf*en til $x^2 - 10$ opp i et (x, y) -koordinatsystem, dvs. alle punktene (x, y) hvor $y = x^2 - 10$.

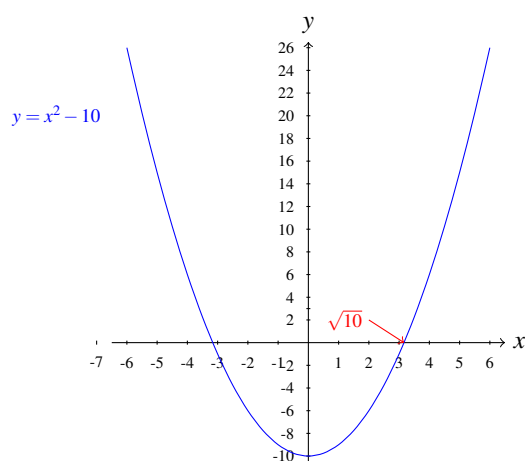


Figure 1.2: Grafen til $y = x^2 - 10$.

Stirr litt på figur 1.2 og bli enig med deg selv at $\sqrt{10}$ er akkurat det punktet hvor grafen krysser x -aksen, siden her er $y = 0$ som betyr at $x^2 - 10 = 0$ i dette punktet. Som vi ser så skjærer ikke grafen akkurat i punktet 3, men veldig nærme.

Metode:

1. Start med å gjette.

La oss gjette at 1 er kvadratroten av 10

$$x_0 = 1 \tag{1.21}$$

Vi bommer ganske kraftig siden $y_0 = x^2 - 10 = 1^2 - 10 = -9$, som vist i figur 1.3. Anta vi går til punktet $(x_0, y_0) = (1, -9)$ på grafen når $x_0 = 1$.

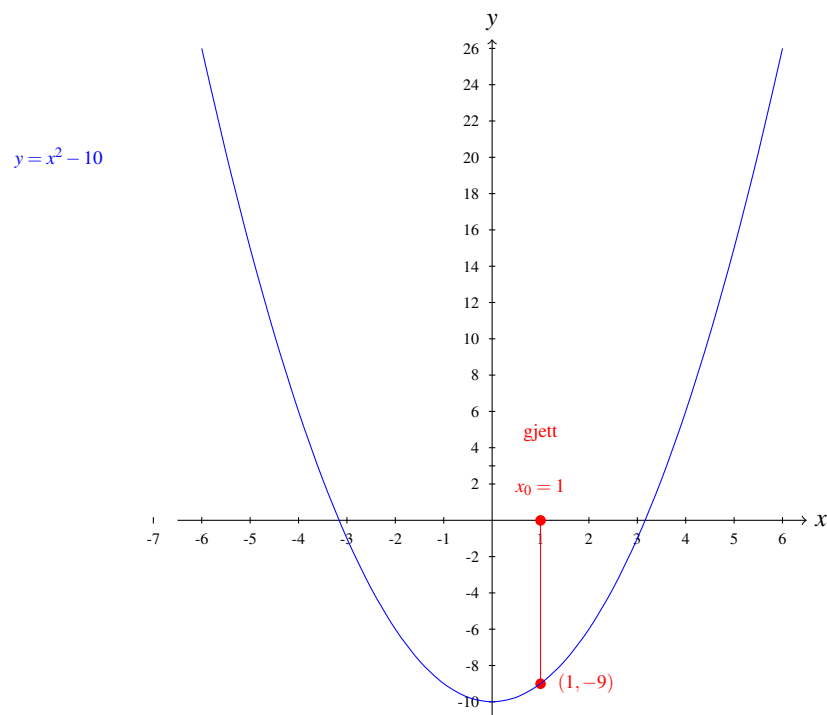


Figure 1.3: Gjett: $x_0 = 1$.

2. Tegn opp tangenten til grafen i punktet $(x_0, y_0) = (1, 9)$, som vist i figur 1.4.

Gå langs tangenten helt til du krysser x -aksen. Verdien for x i dette punktet er gitt ved formelen:

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{a}{x_0}}{2} \quad (\text{tangent}) \quad (1.22)$$

Setter inn for $x_0 = 1$ og $a = 10$:

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{a}{x_0}}{2} = \frac{1 + \frac{10}{1}}{2} = 5.5 \quad (1.23)$$

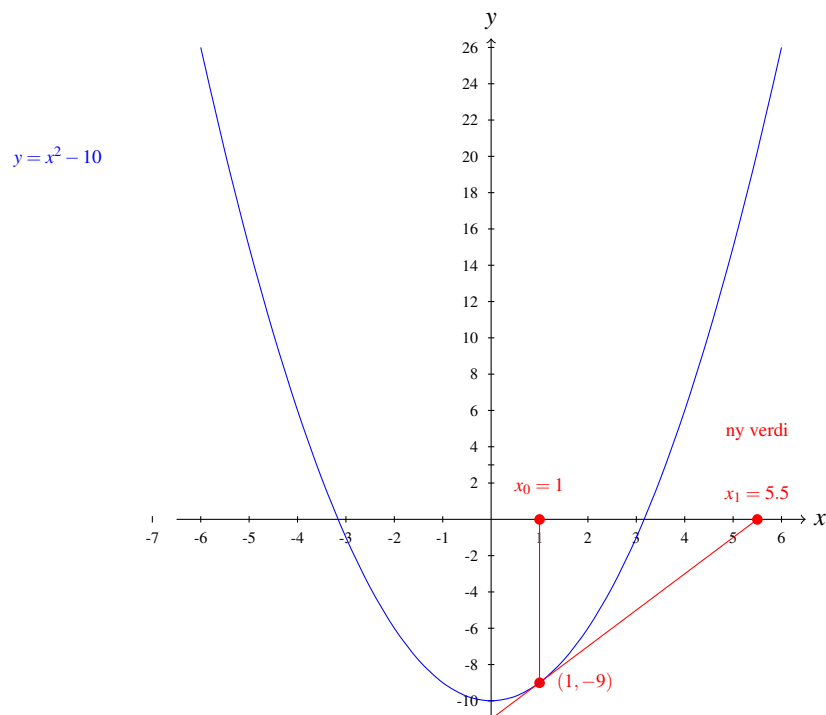


Figure 1.4: Nytt estimat: $x_1 = 5.5$.

Punktet $x_1 = 5.5$ blir da det nye estimatet for kvadratroten $\sqrt{10}$. Gjenta steg metoden med x_1 som det nye startverdien.

1. Ny startverdi: $x_1 = 5.5$.

Tilhørende y -verdi: $y_1 = x_1^2 - 10 = 5.5^2 - 10 = 20.25$.

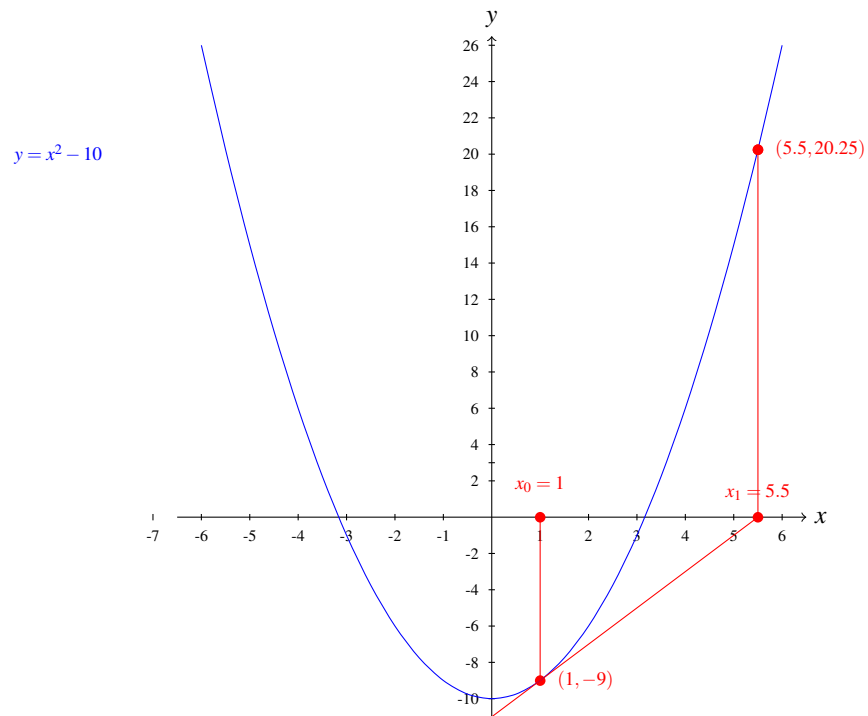


Figure 1.5: Går opp til grafen.

2. Tegn opp tangenten til grafen i punktet $(x_1, y_1) = (5.5, 20.25)$, som vist i figur 1.6.

Gå langs tangenten helt til du krysser x -aksen. Verdien for x i dette punktet er gitt ved formelen:

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{a}{x_1}}{2}. \quad (1.24)$$

Setter inn for $x_1 = 5.5$ og $a = 10$:

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{a}{x_1}}{2} = \frac{5.5 + \frac{10}{5.5}}{2} = 3.659 \quad (\text{kalkulator}) \quad (1.25)$$

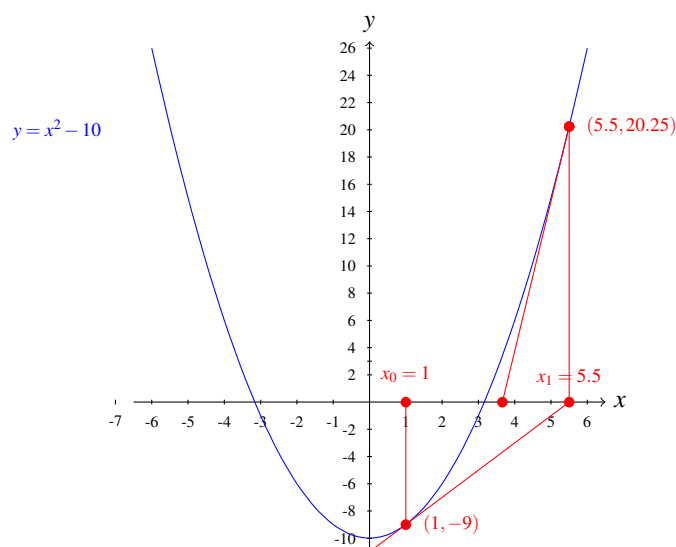


Figure 1.6: Nytt estimat: $x_2 = 3.659$.

Punktet $x_2 = 3.659$ blir da det nye estimatet for kvadratroten $\sqrt{10}$.

Dette estimatet er ganske bra, da eksakt svar er $\sqrt{10} = 3.1623\dots$

Vi stopper derfor algoritmen her, men dersom vi hadde gjentatt algoritmen enda en gang, hadde vi kommet enda nærmere!

- a) Finn $\sqrt{5}$ ved å bruke metoden ovenfor to ganger.

Hva slags gjetning/startpunkt synes dere det er fornuftig å starte med?

Dere behøver ikke å tegne noen figurer, kun korte utregninger.

Sammenlign med det eksakte svaret (bruk kalkulator).

Synes dere svaret som dere fikk er en god tilnærming?

- b) Finn $\sqrt{\frac{1}{5}}$ ved å bruke metoden ovenfor to ganger.

Hva slags gjetning/startpunkt synes dere det er fornuftig å starte med?

Dere behøver ikke å tegne noen figurer, kun korte utregninger.

Sammenlign med det eksakte svaret (bruk kalkulator).

Synes dere svaret som dere fikk er en god tilnærming?

■