



MAT100

Matematikk

Eksamensoppgaver 2012 - 2019

Bård-Inge Pettersen
Per Kristian Rekdal



Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Forord

Eksamensoppgaver:

Dette er en [samling av eksamensoppgaver](#) i emnet “*MAT100 Matematikk*” ved Høgskolen i Molde fra 2012 – 2019.

Det finnes også en tilhørende samling med komplette løsningsforslag til disse eksamensoppgavene. Samlingen med løsningsforslag finnes i et eget hefte, separert fra dette oppgaveheftet.

Gratis:

Både samlingen med eksamensoppgaver og tilhørende samling med komplette løsningsforslag kan lastes ned [gratis](#) via Høgskolen i Molde sin åpne kursportal www.himoldeX.no.

Hvordan bruke denne samlingen av gamle eksamensoppgaver?:

Man blir ikke god i matematikk kun ved å se på video. Man må løse oppgaver.

Videoer:

Komplette sett med forelesningsvideoer i MAT100 finner du [her](#).

Bård-Inge Pettersen
Per Kristian Rekdal

Copyright © Høgskolen i Molde, mai 2020.

Innhold

1	Hovedeksamen 2012	7
2	Kontinuasjonseksamen 2012	23
3	Hovedeksamen 2013	37
4	Kontinuasjonseksamen 2013	53
5	Hovedeksamen 2014	69
6	Kontinuasjonseksamen 2014	81
7	Hovedeksamen 2015	95
8	Kontinuasjonseksamen 2015	109
9	Hovedeksamen 2016	123
10	Kontinuasjonseksamen 2016	141
11	Hovedeksamen 2017	157
12	Kontinuasjonseksamen 2017	173
13	Hovedeksamen 2018	189
14	Kontinuasjonseksamen 2018	203
15	Testeksamen 2019	217
16	Hovedeksamen 2019	229
17	Kontinuasjonseksamen 2019	242

Hovedeksamen 2012



Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Tirsdag 11. desember 2012
Tid	: 09:00 – 13:00
Faglærer/telefonnummer	: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling
Antall sider inkl. forsiden	: 11 + vedlegg (1 side)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 4 oppgaver. I *gjennomsnitt* har du en time per oppgave.**

Oppgave 1: (kostnad, inntekt og fortjeneste)

Møretank AS er en produsent av varmtvannsberedere. De produserer både store og små beredere. De ansatte har funnet ut, uansett hva slags type varmtvannsbereder det dreier seg om, at den totale kostnaden forbundet med produksjon og salg av varmvannberedere med god tilnærming kan modelleres med en *kvadratisk* funksjon:

$$K(x) = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

hvor x = antall beredere produsert og solgt **per år** og hvor a , b og c er konstanter. For en spesifikk type varmtvannsbereder, “*MT Standard bereder*”, gjelder følgende tall:

$$a = 1 \text{ NOK} \cdot (\text{år})^2 \quad (2)$$

$$b = 200 \text{ NOK} \cdot \text{år} \quad (3)$$

$$c = 250\,000 \text{ NOK} \quad (\text{faste kostnader}) \quad (4)$$

De ansatte har også funnet ut at det er en *lineær* sammenheng mellom pris p og etterspørsel x :

$$p(x) = Ax + B \quad (5)$$

hvor A og B er konstanter. For berederen “*MT Standard bereder*” gjelder følgende tall:

$$A = -4 \text{ NOK} \cdot \text{år} \quad (6)$$

$$B = 3\,200 \text{ NOK} \quad (7)$$



Figur 1: Møretank AS lokalisert i Vestnes kommune, Møre og Romsdal.

Kostnader

- a) Total **enhetskostnad**, dvs. kostnad per bereder, er definert ved: $TEK(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x}$.
Vis at denne er gitt ved: ¹

$$TEK(x) = ax + b + \frac{c}{x} \quad (8)$$

- b) Vis at antall beredere som må produseres per år i bedriften for å **minimere** enhetskostnaden $TEK(x)$ er gitt ved: ²

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (9)$$

- c) Bruk lign.(2) og (4) til å regne ut den numeriske verdien av x i lign.(9). ³
- d) I vedlegg A er enhetskostnaden $TEK(x)$ plottet for intervallet $150 \leq x \leq 1000$ med de numeriske verdiene gitt ved lign.(2)-(4).

Markèr minimum av $TEK(x)$ på figuren i vedlegg A.

Stemmer det numeriske resultatet fra oppgave **c** med den blå grafen i vedlegg A?

¹Se side 12 i formelsamlingen, formelen for sum av brøker med samme nevner.

²Anta at $\frac{d^2 TEK(x)}{dx^2} > 0$ for $x > 0$, dvs. $TEK(x)$ er konveks slik at lign.(9) representerer et minimum, og ikke et maksimum. Med denne antagelsen behøver du altså ikke å utføre 2. derivasjonstesten eller lage fortegnsskjema i denne oppgaven.

³Husk å bruke riktig benevnning. Benevnningen til x er **per år**, dvs. $\frac{1}{\text{år}}$.

- e) Grensekostnaden er definert ved: $\frac{dK(x)}{dx}$.
Vis at denne er gitt ved:

$$\frac{dK(x)}{dx} = 2ax + b \quad (10)$$

- f) I vedlegg A finner du en tom verditabell for grensekostnaden $\frac{dK(x)}{dx}$.

Bruk de numeriske verdiene i lign.(2)-(3) og fyll ut denne verditabellen i vedlegg A.
Tegn også inn grensekostnaden $\frac{dK(x)}{dx}$ i figuren i vedlegg A.

- g) For hvilken verdi av x skjærer grafen til $TEK(x)$ og grafen til $\frac{dK(x)}{dx}$ hverandre? ⁴

- h) Vis, ved å sette

$$TEK(x) = \frac{dK(x)}{dx}, \quad (11)$$

at $TEK(x)$ og $\frac{dK(x)}{dx}$ skjærer hverandre ved x -verdien gitt ved lign.(9).

⁴Her skal du løse oppgaven grafisk, dvs. lese svaret direkte fra figuren i oppgave f. Ingen utregninger behøves.
Men husk å bruke **rett benevnning**.

Inntekter

- i) Vis at bedriftens totale resultat $TR(x)$ er gitt ved: ⁵

$$TR(x) = (A - a)x^2 + (B - b)x - c \quad (12)$$

- j) Vis at antall beredere som må produseres per år i bedriften for å *maksimere* det totale resultatet $TR(x)$ er gitt ved: ⁶

$$x = \frac{b - B}{2(A - a)} \quad (13)$$

- k) Bruk de numeriske verdiene på side 2 til å regne ut den numeriske verdien av x i lign.(13).
- l) Er produksjonskvantumet som *minimerer* enhetskostnaden $TEK(x)$ sammenfallende med produksjonskvantumet som *maksimerer* fortjenesten $TR(x)$ i dette tilfellet? ■

⁵Det totale resultatet $TR(x)$ er bedriftens fortjeneste, dvs. inntekt minus kostnad: $TR(x) = I(x) - K(x)$.

⁶Anta at $\frac{d^2TR(x)}{dx^2} < 0$, dvs. $TR(x)$ er konkav slik at lign.(9) representerer et maksimum, og ikke et minimum. Med denne antagelsen behøver du altså ikke å utføre 2. derivasjonstesten eller lage fortegnsskjema i denne oppgaven.

Oppgave 2: (*innbygger*elastisitet / transport)

I en studie angående transportsystemet i noen byer i USA har man estimert gjennomsnittlig reisetid t til jobb. Det viser seg at denne reisetiden er avhengig av størrelsen på byen målt i antall innbyggere N . Studien viser at sammenhengen er

$$t(N) = c \cdot N^{0.23} \quad (14)$$

hvor

$$c = 1.7 \text{ minutter} \quad (15)$$

$$t(N) = \text{gjennomsnittlig reisetid til jobb, i minutter (min)} \quad (16)$$

$$N = \text{antall innbyggere i byen} \quad (17)$$

I denne oppgaven skal vi se på *innbyggerelastisiteten*. Vi skal studere reisetiden sin følsomhet for endring i innbyggertallet i en by. *Innbyggerelastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_N(t) = \frac{\% \text{-vis endring i reisetiden}}{\% \text{-vis endring i innbyggertallet}} \quad (18)$$



Figur 2: New York City, USA.

Matematisk er denne *innbygger*elastisiteten gitt ved:

$$E_N(t) = \frac{dt(N)}{dN} \cdot \frac{N}{t(N)} \quad (19)$$

hvor funksjonen $t(N)$ og variabelen N er definert på forrige side.

- a) Finn *innbygger*elastisiteten $E_N(t)$.
- b) Tolk resultatet i oppgave a.
- c) Hvor mye vil %-vise reisetid tilnæremet endre seg med dersom *innbyggertallet* øker med 5 %? ⁷
- d) For New York er $N = 8.2$ millioner.
Hva er gjennomsnittlig reisetid til jobb i New York? ⁸
- e) Dersom *innbyggertallet* i New York øker med 5 %, hva blir gjennomsnittlig reisetid til jobben da? ⁹

■

⁷Du skal finne “%-vis endring i *reisetiden*” når du vet at:

$$\text{\%-vis endring i } \textit{innbyggertallet} = 5 \% \quad (20)$$

Dette betyr at du vet nevneren i lign.(18). Og du skal finne telleren.

⁸Oppgi svaret i minutter.

⁹Oppgi også dette svaret i minutter.

Oppgave 3: (annuitetslån vs serielån)

Du jobber som økonomiansvarlig hos “*Moldegaard Maritime Logistics*”. Dette firmaet skal investere i nytt datasystem. Dette nye datasystemet koster $K_0 = 300\,000$ NOK og skal finansieres ved låneopptak. Styret i firmaet har bestemt at lånet skal tilbakebetales i løpet av $n = 15$ år. Renten er $r = \frac{3}{100} \% = 0.03$ i hele perioden.

- a) Anta at lånet skal tilbakebetales som et annuitetslån.
Hvor stort blir det årlige *terminbeløpet* K (rente+avdrag)?
- b) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt annuitetslån?
- c) Anta at lånet istedet skal tilbakebetales som et serielån.
Hvor stort blir det årlige *avdraget*?
- d) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt serielån?
- e) Dersom du har regnet rett i oppgave b og d, så fant du at $R_n^{\text{ann}} > R_n^{\text{serie}}$.
Forklar kort, uten regning, hvorfor firmaet betaler mer rente til banken ved annuitet enn ved serie.¹⁰

■



Figur 3: Moldegaard Maritime Logistics.

¹⁰I starten av lånets tilbakebetalingstid, betaler firmaet mindre tilbake til banken ved et annuitetslån enn et serielån? Betyr det at firmaet låner pengene “lenger” i annuitetslånet? Dersom pengene lånes “lenger”, hva betyr det for renten? Større eller mindre?

Oppgave 4: (Lagrange multiplikatorer)

Made By Mom A/S (MBM) er en klesbutikk i Molde som spesialdesigner klær. MBM har egne design og egne kolleksjoner. Et av plaggene som lages, er kåper. Av en bestemt type kåpe lages det to versjoner:

A spesialversjon med ekstra lommer og ekstra dekor

B klassisk versjon

Ut fra erfaring angående lønnsutgifter og priser på stoff og andre råvarer har man funnet ut at kostnaden forbundet med å produsere disse kåpene kan beskrives, med god tilnærming til virkeligheten, av følgende funksjon:

$$K(x, y) = 500x + 100y + 100xy + 1200 \quad (21)$$

hvor

x = antall kåper som produseres og selges av type **A**, dvs. spesialversjon (22)

y = antall kåper som produseres og selges av type **B**, dvs. klassisk versjon (23)

Kostnaden er i NOK.



Figur 4: Made By Mom A/S.

Det viser seg at det er en sammenheng mellom prisen på kåpene, og antall kåper som produseres og selges. Hun som driver MBM har funnet ut at følgende sammenhenger mellom pris og etterspørsel er en god tilnærming til virkeligheten:

$$p_{\mathbf{A}}(x, y) = 4000 - 100x + 200y \quad (24)$$

$$p_{\mathbf{B}}(x, y) = 2600 + 200x - 100y \quad (25)$$

hvor

$$p_{\mathbf{A}}(x, y) = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{A}, \text{ dvs. spesialversjon} \quad (26)$$

$$p_{\mathbf{B}}(x, y) = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{B}, \text{ dvs. klassisk versjon} \quad (27)$$

Alle priser er i NOK.

a) Hva er den faste kostnaden forbundet med produksjon av kåpene? ¹¹

b) Vis at inntekten $I(x, y)$ er gitt ved:

$$I(x, y) = -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y \quad (28)$$

c) Vis at profittfunksjonen $P(x, y)$ er gitt ved:

$$P(x, y) = -100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y - 1200 \quad (29)$$

¹¹Se lign.(21). Husk benevning.

Når stoff kjøpes inn til kåpene så kjøpes stoffmengden i bestemte kvantum. Ut fra det kvantumet som er kjøpt inn kan man sy totalt 12 kåper. Matematisk betyr det:

$$x + y = 12 \quad (\text{bibetingelse}) \quad (30)$$

I tillegg må både x og y være positive størrelser. Bibetingelsene utgjør dermed et *lukket* mengde, i dette tilfellet en endelig linje bestemt av lign.(30). Ifølge **ekstremalverdi**setningen vil da $P(x, y)$ ha globale maksimum- og minimumspunkter i denne lukkede mengden.

Anta i denne oppgaven at:

- det stasjonære punktet til $P(x, y)$ under bibetingelsen i lign.(30) representerer et **maksimum** ¹²
- verdien av randpunktene til $P(x, y)$ under bibetingelsen i lign.(30) er mindre enn verdien av $P(x, y)$ i det stasjonære punktet ¹³

d) Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper **maksimerer** profitten $P(x, y)$? ¹⁴

e) Hva er den **maksimale** profitten P_{maks} for MBM ved salg av disse kåpene?

f) Hva slags pris må MBM sette på kåpene for å oppnå **maksimum** profitt P_{maks} ?

■

¹²Med denne antagelsen slipper du å sjekke at det stasjonære punktet faktisk er et maksimum, og ikke et minimum.

¹³Med denne antagelsen slipper du å sjekke randpunktene.

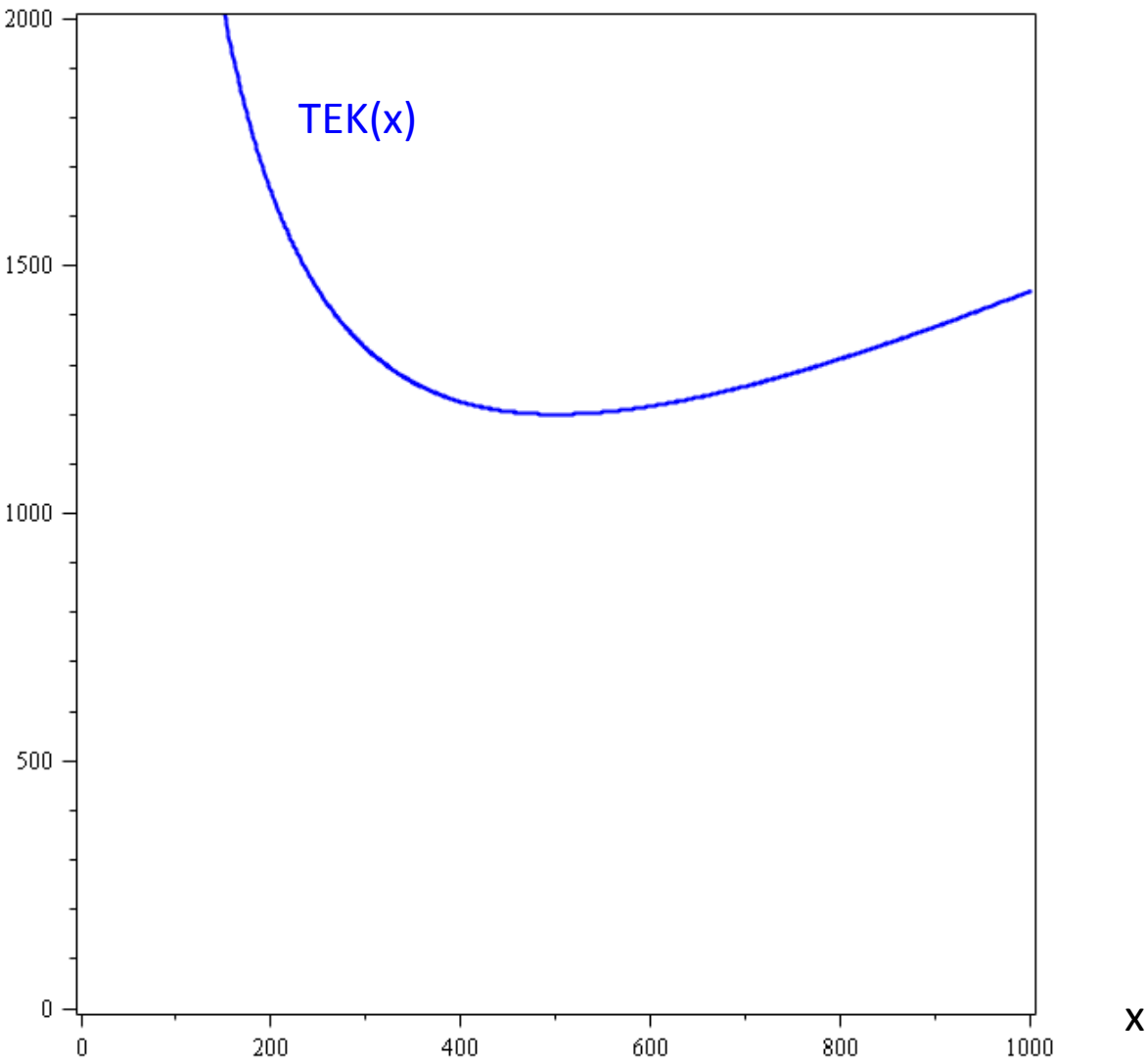
¹⁴Dvs. finn x og y som gir P_{maks} . Bruk **Lagrange multiplikator** metoden. Husk, du slipper å sjekke randen.

Vedlegg A

Studentnummer: _____

(Lever inn dette arket sammen med resten av besvarelsen din.)

x	0	400	800
$dK(x) / dx$			



Kontinuasjonseksamen 2012



Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Fredag 7. juni 2013
Tid	: 09:00 – 13:00
Faglærer/telefonnummer	: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling
Antall sider inkl. forsiden	: 10 + vedlegg (1 side)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- Kladdemark skal ikke leveres inn. Disse blir ikke sensurert.
- Ikke gå før tiden. Bruk alle 4 timene. Sjekk svarene dersom det er tid til overs.
- Det er totalt 4 oppgaver. I *gjennomsnitt* har du en time per oppgave.

Oppgave 1: (økonomi, kostnad, inntekt og fortjeneste)

Jobbfrukt leverer frukt til bedrifter og andre som ønsker det. Den totale kostnaden $K(x)$ i NOK per uke er:

$$K(x) = ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

hvor x = antall fruktfat produsert og solgt per uke og hvor a , b og c er konstanter. For det største og mest eksklusive fruktfatet gjelder følgende numeriske verdier:

$$a = 2 \text{ NOK} \cdot \text{uke} \quad (2)$$

$$b = 200 \text{ NOK} \quad (3)$$

$$c = 11\,200 \frac{\text{NOK}}{\text{uke}} \quad (\text{faste kostnader per uke}) \quad (4)$$

Prisen på dette fruktfatet er $p = 560$ NOK.

a) Vis at den totale fortjenesten $F(x)$ per uke er gitt ved:

$$F(x) = (p - b)x - ax^2 - c \quad (5)$$

b) Finn hvilke produksjonsmengder som gir balanse mellom inntekt og den totale kostnaden.¹



Figur 1: Jobbfrukt.

¹Dvs. finn de verdiene av x slik at $F(x) = 0$.

- c) Vis at antall fruktfat som må produseres og selges per uke for å *maksimere* fortjenesten $F(x)$ er gitt ved:

$$x = \frac{p-b}{2a} \quad (6)$$

Forsikre deg om at lign.(6) faktisk er et maksimum ved å betrakte $F''(x)$.

- d) Sett inn tall og regn ut x i lign.(6). ²

- e) Enhetskostnaden, dvs. kostnad per fruktfat, er definert ved: $E(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x}$.
Vis at denne er gitt ved: ³

$$E(x) = ax + b + \frac{c}{x} \quad (7)$$

- f) Vis at antall fruktfat som må produseres og selges for å minimere enhetskostnaden er gitt ved:

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (8)$$

Forsikre deg om at lign.(8) faktisk representerer et minimum, og ikke et maksimum, ved å betrakte $E''(x)$.

- g) Sett inn tall og regn ut x i lign.(8). ⁴

- h) Sammenlign oppgave d og g. Kommenter svaret. ⁵

²Husk rett benevning.

³Se side 12 i formelsamlingen, formelen for sum av brøker med samme nevner.

⁴Husk rett benevning.

⁵Er maksimum av fortjenesten $F(x)$ sammenfallende med minimum av enhetskostnaden $E(x)$?

Oppgave 2: (priselastisitet / økonomi)

I denne oppgaven skal vi se på *priselastisiteten* til et produkt. Vi skal studere etterspørselen sin følsomhet for endring i prisen på produktet. *Priselastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_p(x) = \frac{\% \text{-vis endring i etterspørselen}}{\% \text{-vis endring i prisen}} \quad (9)$$

Matematisk er denne *priselastisiteten* gitt ved:

$$E_p(x) = \frac{dx(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \quad (10)$$

hvor $x(p)$ er etterspørselen og p er prisen. Denne priselastisiteten $E_p(x)$ kan deles inn i 3 kategorier. Disse tre kategoriene er:

Uelastisk: etterspørselen er lite følsom for prisendring.

Nøytralelastisk: etterspørselen har samme følsomhet som prisen.

Elastisk: etterspørselen er følsom for prisendring.

I vedlegg A (1 side) finner en figur med en tallinje. På forskjellige plasser i denne tallinjen er det 3 bokser. I disse 3 boksene skal du skrive inn de 3 kommentarene nevnt ovenfor.

a) Fyll ut boksene i vedlegg A med de 3 kommentarene ovenfor.

Du er ansatt i markedsavdelingen til Oskar Sylte mineralvannfabrikk i Molde. Du ønsker å finne ut mer om hvordan markedet responderer på prisendring på 0.5 liter brus. Ut fra historiske data for salgstall og pris kan man estimere, ved hjelp av regresjonsanalyse, en modell for etterspørselen $x(p)$ som funksjon av prisen p . Resultatet fra denne analysen viser at $x(p)$, med god tilnærming, er gitt ved:

$$x(p) = c \cdot p^{-1.2} \quad (11)$$

hvor

$$c = 65\,000 \quad (12)$$

$$x(p) = \text{etterspørsel etter 0.5 liter ananasbrus per dag} \quad (13)$$

$$p = \text{pris for 0.5 liter ananasbrus} \quad (14)$$

- b) Bestem **priselastisiteten** $E_p(x)$.
- c) Tolk resultatet i oppgave a.
- d) Hvor mye vil den %-vise etterspørselen tilnærmet endre seg med dersom **prisen** på brus øker med 8 %? ⁶



Figur 2: Brus.

⁶Du skal finne “%-vis endring i **etterspørselen**” når du vet at:

$$\text{\%-vis endring i } \text{prisen} = 8\% \quad (15)$$

Dette betyr at du vet nevneren i lign.(9). Og du skal finne telleren.

- e) Prisen på 0.5 liter brus er $p = 18$ NOK.
Hvor stor etterspørsel er det på 0.5 liter brus per dag?
- f) Dersom prisen på 0.5 liter brus øker med 12 %, hva blir da etterspørselen $x(p)$ per dag?



Oppgave 3: (diskret vs kontinuert rente)

Du har startkapitalen $K_0 = 10\,000$ NOK som du skal sette i banken. I den sammenheng vurderer du tilbud fra to forskjellige banker, DnB og Sparebanken Møre.

- a) Anta at DnB tilbyr **terminmessig** forrentning.
Vis at antall terminer n det tar for at startkapitalen K_0 har forrentet seg til verdien K_n , er gitt ved: ⁷

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+r)} \quad (16)$$

hvor r er renten.

- b) DnB tilbyr **årlig** rente, med rentefot $r = \frac{3}{100} \% = 0.03$ i hele perioden.
Hvor lang tid tar det før startkapitalen K_0 har forrentet seg til $K_n = 15\,000$ NOK? ⁸



Figur 3: DnB.

⁷Hvilken formel bør du ta utgangspunkt i for å utlede lign.(16)? Se formelsamlingen dersom du ikke har den formelen i hodet.

⁸Bruk resultatet fra oppgave a.

- c) Anta at Sparebanken Møre tilbyr **kontinuerlig** forrentning. Vis at den dimensjonsløse tiden t det tar for at startkapitalen K_0 har forrentet seg til verdien K_t , er gitt ved: ⁹

$$t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{r} \quad (17)$$

hvor r er renten.

- d) Sparebanken Møre tilbyr **kontinuerlig** rente, men med litt dårligere rente enn DnB, nemlig $r = \frac{2.8}{100} \% = 0.028$ i hele perioden. Hvor lang tid tar det før startkapitalen K_0 har forrentet seg til $K_t = 15\,000$ NOK? ¹⁰
- e) Hvilket tilbud er best? ■



Figur 4: Sparebanken Møre.

⁹Hvilken formel bør du ta utgangspunkt i for å utlede lign.(17)? Se formelsamlingen dersom du ikke har den formelen i hodet.

¹⁰Bruk resultatet fra oppgave c.

Oppgave 4: (nyttemaksimering / Lagrange multiplikatorer / økonomi)

En person som liker å gå på kino og teater har funnet ut at følgende nyttefunksjon gjelder for henne:

$$U(x, y) = 4x^{0.4}y^{0.6} \quad (18)$$

hvor

$$x = \text{antall kinobesøk} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (19)$$

$$y = \text{antall teaterbesøk} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (20)$$

I løpet av ett år ønsker hun maksimalt å bruke m kroner på teater og kino. Denne summen, samlet konsumutgift, skal dekke både kinoutgifter og teaterutgifter. **Budsjettlikningen** for ett år blir dermed:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq m \quad (21)$$

hvor

$$p_x = \text{pris for en kinobillett} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (22)$$

$$p_y = \text{pris for en teaterbillett} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (23)$$



Figur 5: Kino og teater.

- a)** Gjør om ulikheten i budsjettligningen til likhet og formulør kort dette som et maksimaliseringsproblem.
- b)** Vis at løsningen på maksimeringsproblemet i oppgave **a** er:

$$\boxed{x = \frac{2}{5} \cdot \frac{m}{p_x} \quad , \quad y = \frac{3}{5} \cdot \frac{m}{p_y} \quad (24)}$$

Bruk Lagrange multiplikator metoden. ¹¹

Anta at prisen på kinobilletter er $p_x = 75$ NOK og at prisen på teaterbilletter er $p_y = 150$ NOK. Vår kino- og teaterentusiast bestemmer seg for å begrense de årlige utgiftene på kino og teater til $m = 6\,000$ NOK.

- c)** Hva blir de numeriske verdiene av lign.(24)?
- d)** Tolk svaret i oppgave **c**. ¹²
- e)** Hvor mye penger bruker hun på kinobilletter i året?
- f)** Hvor mye penger bruker hun på teaterbilletter i året?

■

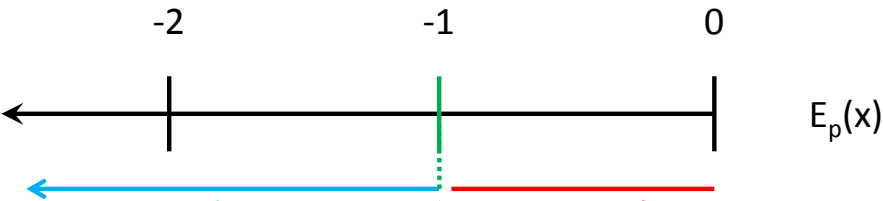
¹¹For å være helt sikre på at lign.(24) gir maksimal nytte $U_{\max}$, og ikke minimal nytte $U_{\min}$, må man gjøre mer analyse. Men det trenger du ikke gjøre i denne oppgaven.

¹²Dvs. skriv svaret på “godt norsk”.

Vedlegg A

(Husk å skrive studentnummer på vedlegget.)

Studentnummer: _____



Hovedeksamen 2013



Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Onsdag 18. desember 2013
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling
Antall sider inkl. forsiden	: 11 + vedlegg (1 side)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 5 oppgaver.**

Oppgave 1: (algebra / faktorisering / brøk)

I makroøkonomi lærer man at en viktig sammenheng for realøkonomien er at tilgang på varer og tjenester i løpet av en periode er lik bruken. Dette kalles ofte for *generalbudsjettlikningen*. For et land som er i økonomisk likevekt kan denne ligningen skrives:

$$R = C + I + G + X , \quad (1)$$

hvor

$$R = \text{inntekt, (nasjonalprodukt)} \quad (R = \text{“revenue”}) \quad (2)$$

$$C = \text{konsumentfunksjon} \quad (C = \text{“consumption”}) \quad (3)$$

$$I = \text{investering} \quad (I = \text{“investment”}) \quad (4)$$

$$G = \text{offentlige utgifter} \quad (G = \text{“government”}) \quad (5)$$

$$X = \text{netto eksport} \quad (X = \text{“export”}) \quad (6)$$

La oss anta at konsumentfunksjon C og netto eksport X er gitt ved følgende formler:

$$C = C_0 + c(R - T) \quad (7)$$

$$X = X_0 - bR , \quad (8)$$

hvor

$$C_0 = \text{konstant, (inntektsuavhengig konsum)} \quad (9)$$

$$c = \text{marginal konsumrate} \quad (10)$$

$$T = \text{skattenivå} \quad (11)$$

$$X_0 = \text{konstant, (inntektsuavhengig eksport)} \quad (12)$$

$$b = \text{investors marginale rentefølsomhet} \quad (13)$$



Figur 1: Makroøkonomi.

- a) Vis at inntekten R (nasjonalprodukt) kan skrives

$$R = m \cdot (C_0 + X_0 - cT + I + G) , \quad (14)$$

hvor vi har definert

$$m \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{1 - c + b} , \quad (15)$$

som kalles *inntektsmultiplikatoren*.

- b) La oss se nærmere på inntektsmultiplikatoren m i lign.(15).

i) Dersom c øker, vil da m øke eller minke?

ii) Dersom b øker, vil da m øke eller minke?

- c) I matematikken kan man ikke dele på 0.

Hva slags sammenheng mellom c og b kan man derfor ikke ha i lign.(15)?

- d) La oss se på følgende konkrete modell:

$$C = 100 + 0.25(R - T) \quad (16)$$

$$I = 150 + 0.25R - 800r \quad (17)$$

$$X = 0 \quad (18)$$

$$T = 200 \quad (19)$$

$$G = 200 , \quad (20)$$

hvor r = realrenten.

Sett de fem ligningene (16), (17), (18), (19) og (20) inn i generalbudsjettlikningen i lign.(1) og vis at renten r som funksjon av inntekten R kan skrives på formen:

$$r = -0.000625R + 0.5 \quad (\text{IS-kurve}) \quad (21)$$

- e) I vår modell inngår også tilbud M^T og etterspørsel M^E av penger. Dersom

$$M^E = 3R - 8000r \quad (M^E = \text{“money”, etterspørsel}) \quad (22)$$

$$M^T = 2000 \quad (M^T = \text{“money”, tilbud}) \quad (23)$$

og pengemarkedet er i likevet, dvs. $M^E = M^T$, kan man vise at renten r sfa. inntekten R kan skrives på formen: (Du skal ikke vise lign.(24). Bare ta den for gitt.)

$r = 0.000375R - 0.25$	(LM-kurve)	(24)
------------------------	------------	------

Hva er inntekten R når økonomien er i likevekt? ¹

- f) Hva er rentenivået r når det er likevekt i økonomien?
- g) Hva slags type ligninger er lign.(21) og (24)?
- h) I vedlegg A finner du to verditabeller og et koordinatsystem.
Fyll ut verditabellene og plott lign.(21) og (24) i dette koordinatsystemet.
- i) For hva slags verdi av inntekten R (nasjonalprodukt) skjærer grafene hverandre i forrige oppgave?
Stemmer denne grafiske løsningen med den algebraiske løsningen i oppgave f?

Investeringsnivået er $I_1 = 468$ når $R = 1200$ og $r = 0.04$ (=4 %). Når R økes til $R = 1500$ så øker investeringsnivået til $I_2 = 543$.

- j) Hvor stor er den prosentvise endringen? ²



¹Dvs. finn R ved å sette lign.(21) og (24) lik hverandre. Løs med hensyn på R .

²I formelsamlingen finnes det en formel for prosentvis endring.

Oppgave 2: (derivasjon / algebra / tolkning / forståelse av ligninger)

Det koster penger å ha varer på lager. La oss i denne oppgaven kun se på kostnadene forbundet med **lager-** og **bestillingskostnadene**. Anta at lagerkostnadene per periode er gitt ved $HQ/2$ og at bestillingskostnadene er DS/Q slik at den totale kostnaden $TC(Q)$ per periode, “*total cost*”, er:

$$TC(Q) = \underbrace{\frac{H}{2} Q}_{\text{lagerkost.}} + \underbrace{\frac{DS}{Q}}_{\text{ordrekost.}} \quad (25)$$

hvor

$$Q = \text{ordrestørrelse} \quad (\text{“quantity”}) \quad (26)$$

$$H = \text{lagerholdkostnader per enhet per periode} \quad (27)$$

$$D = \text{etterspørsel per periode} \quad (\text{“demand”}) \quad (28)$$

$$S = \text{kostnad per ordre} \quad (29)$$

a) La oss se nærmere på hvert av leddene i $TC(Q)$, lign.(25)

i) Dersom Q øker, vil da lagerkostnaden øke eller minke?

ii) Dersom Q øker, vil da ordrekostnaden øke eller minke?

b) Vis at optimum av $TC(Q)$ inntreffer når

$$\underbrace{\frac{H}{2} Q}_{\text{lagerkost.}} = \underbrace{\frac{DS}{Q}}_{\text{ordrekost.}} \quad (30)$$

dvs. kostnaden optimeres når **lager-** og **ordrekostnadene** er like.

- c) For å være sikker på at lign.(30) representerer et *minimum* av $TC(Q)$, og ikke et maksimum, må vi gjøre “2. deriverttesten”. Vis at den 2. deriverte av $TC(Q)$ er

$$\frac{d^2 TC(Q)}{dQ^2} = \frac{2DS}{Q^3}, \quad (31)$$

og argumenter for hvorfor dette resultatet viser at lign.(30) representerer et *minimum* av $TC(Q)$.

- d) Vis at lign.(30) er ekvivalent med den velkjente “EOQ”-formelen i lagerstyring, dvs. vis at lign.(30) gir, etter litt omskriving, følgende formel:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \quad (32)$$

- e) Gi en tolkning av EOQ -formelen i lign.(32).³

- f) Vis at den totale kostnaden i minimum, dvs. $TC_{\min} = TC(EOQ)$, er gitt ved:

$$TC_{\min} = \sqrt{2DSH} \quad (33)$$

- g) Gi en tolkning av $TC_{\min}$ i lign.(33).

³Dvs. hva betyr lign.(32) på “godt norsk”? Gi et kort svar.

Øverland bil og dekk A/S i Molde selger dekk til personbilmarkedet. De selger 100 dekk i måneden. Lagerkostnaden er 150 NOK per dekk per måned. Bestillingskostnadene er 1 850 NOK per bestilling. Dermed:

$$D = 100 \frac{\text{dekk}}{\text{måned}}, \quad \text{etterspørsel per måned} \quad (34)$$

$$S = 1\,850 \text{ NOK}, \quad \text{kostnad per ordre} \quad (35)$$

$$H = 150 \frac{\text{NOK}}{\text{dekk måned}}, \quad \text{lagerholdkostnader per dekk per måned} \quad (36)$$

- h) Vanlig praksis hos Øverland bil og dekk er å bestille 100 dekk om gangen, dvs. én bestilling per måned.

Hva er den totale kostnaden $TC(Q)$ med en ordrestørrelse på $Q = 100$?

- i) Du blir ansatt som innkjøpsansvarlig hos Øverland dekk og bil. Du forklarer til sjefen din at du mener ordrestørrelsen ikke er riktig, og at kostnadene kan reduseres dersom det bestilles mindre antall dekk per bestilling. Før sjefen går med på å endre ordrestørrelsen vil hun ha tall på bordet.

Hva slags ordrestørrelse bør firmaet ha for å minimere $TC(Q)$?

Hva er den totale kostnaden $TC(Q)$ da?



Figur 2: Øverland dekk og bil.

Oppgave 3: (diskret vs kontinuertlig rente)

Du har startkapitalen $K_0 = 10\,000$ NOK som du skal sette i banken. I den sammenheng vurderer du tilbud fra to forskjellige banker.

- a) Anta at en bank tilbyr **terminmessig** forrentning.
Vis at antall terminer n det tar for at startkapitalen K_0 har forrentet seg til verdien K_n , er gitt ved: ⁴

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1+r)} \quad (37)$$

hvor r er renten.

- b) DnB tilbyr **årlig** rente, med rentefot $r = \frac{3}{100} \% = 0.03$ i hele perioden.
Hvor lang tid tar det før startkapitalen K_0 har forrentet seg til $K_n = 15\,000$ NOK?



Figur 3: DnB.

⁴Hvilken formel bør du ta utgangspunkt i for å utlede lign.(37)? Se formelsamlingen dersom du ikke har den formelen i hodet.

- c) Anta at en annen bank tilbyr **kontinuerlig** forrentning.
Vis at den dimensjonsløse tiden t det tar for at startkapitalen K_0 har forrentet seg til verdien K_t , er gitt ved: ⁵

$$t = \frac{\ln\left(\frac{K_t}{K_0}\right)}{r} \quad (38)$$

hvor r er renten.

- d) Sparebanken Møre tilbyr **kontinuerlig** rente, men med litt dårligere rente enn DnB, nemlig $r = \frac{2.8}{100} \% = 0.028$ i hele perioden.
Hvor lang tid tar det før startkapitalen K_0 har forrentet seg til $K_t = 15\,000$ NOK?
- e) Hvilket tilbud er best?



Figur 4: Sparebanken Møre.

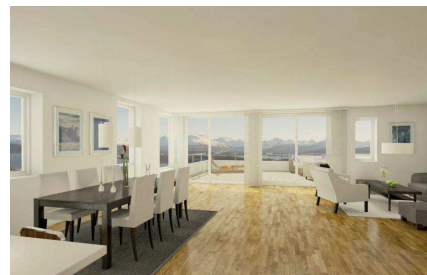
⁵Hvilken formel bør du ta utgangspunkt i for å utlede lign.(38)? Se formelsamlingen dersom du ikke har den formelen i hodet.

Oppgave 4: (annuitetslån vs serielån)

En person har bestemt seg for å kjøpe ei leilighet. Leiligheten koster $K_0 = 1\,200\,000$ NOK. Lånet skal tilbakebetales over $n = 20$ år. Anta at renten er konstant $r = \frac{5\%}{100\%} = 0.05$ i hele perioden.

- a) Lånet skal nedbetales som en etterskuddsannuitet.
Hvor stort blir det årlige *terminbeløpet* K ?
- b) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt annuitetslån?
- c) Anta at lånet i stedet skal tilbakebetales som et serielån.
Hvor stort blir det årlige *avdraget*?
- d) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt serielån?

■

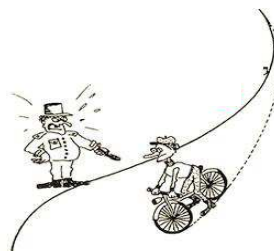
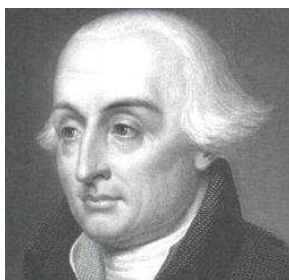


Figur 5: Kjøp av leilighet.

Oppgave 5: (Lagrange multiplikatorer)

I dette kurset har vi lært om funksjoner med flere variabler. Noe av det vi lærte om i den sammenheng var Lagranges multiplikator metode.

- a) Hva kan Lagranges multiplikator metode brukes til?
- b) Formuler Lagrange sin metode for en funksjon $z = f(x, y)$ med to variabler.

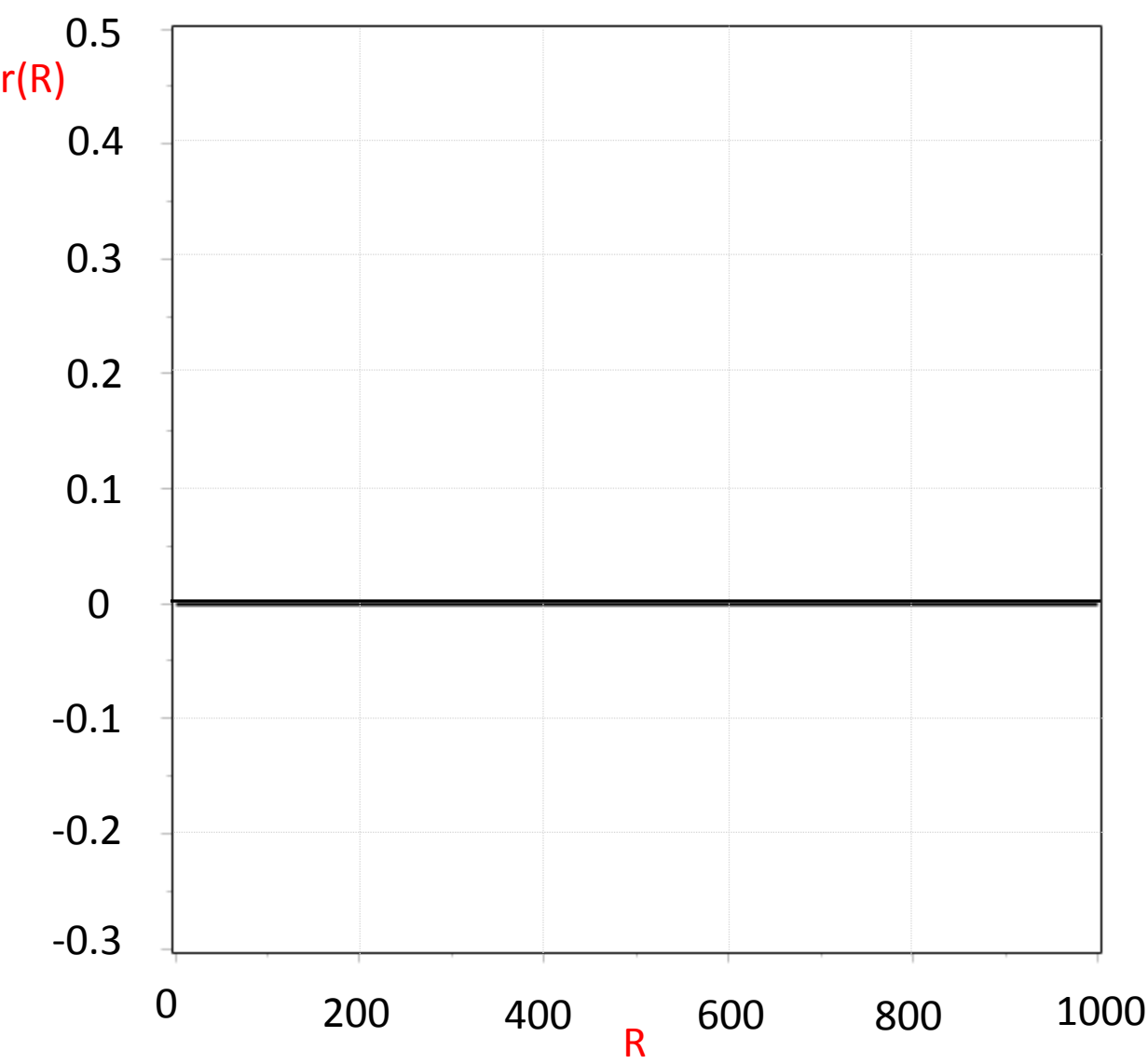


Figur 6: Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Vedlegg A

R	0	500	1000
$r(R) = -0.000625 \cdot R + 0.5$			

R	0	500	1000
$r(R) = 0.000375 \cdot R - 0.25$			



Kontinuasjonseksamen 2013



Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Tirsdag 3. juni 2014
Tid	: 09:00 – 13:00
Faglærer/telefonnummer	: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling
Antall sider inkl. forsiden	: 11 + vedlegg (2 sider)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- Kladdemark skal ikke leveres inn. Disse blir ikke sensurert.
- Ikke gå før tiden. Bruk alle 4 timene. Sjekk svarene dersom det er tid til overs.
- Det er totalt 5 oppgaver. I *gjennomsnitt* har du *under* en time per oppgave.

Oppgave 1: (logistikkøkonomi)

Shell har oppdaget et nytt oljefelt i Barentshavet. Fagfolk har anslått oljefunnet til å inneholde 60 millioner fat med olje. Kostnadene ved å utvinne og føre oljen frem til markedet fra feltet er anslått til å være:

$$K(x) = x^2 + 50x + 425 \quad , \quad (1)$$

hvor x = antall **millioner** oljefat og $x \in [0, 60]$.
Funksjonen $K(x)$ gir kostnadene i millioner dollar.

- a)** Finn grensekostnaden $K'(x)$.
- b)** **i)** Finn grensekostnaden for å produsere 50 millioner oljefat, dvs. finn $K'(50)$.
ii) Gi en *kort* tolkning av resultatet fra oppgave **b i** ut fra et økonomisk perspektiv.

Anta at oljeprisen er 100 dollar per fat i hele produksjonsperioden på feltet. Inntektene ved å selge x millioner oljefat er dermed:

$$I(x) = 100 x \quad , \quad (2)$$

målt i millioner dollar.



Figur 1: Oljefunn.

- c) Vis at fortjenesten $F(x)$ som funksjon av x er gitt ved:

$$F(x) = -x^2 + 50x - 425 \quad (3)$$

- d) i) Finn antall oljefat som bør utvinnes fra feltet for å **maksimere** profitten.
- ii) Begrunn ved en *kort* regning hvorfor det stasjonære punktet du har funnet er et maksimum og ikke et minimum.¹
- iii) Hva er den maksimale fortjenesten?
- e) Dersom oljeprisen er 110 dollar per oljefat istedet for 100 kan man vise, på samme måte som over, at fortjenesten til Shell blir 475 millioner dollar. (Dette skal **ikke** vises. Bare ta det for gitt).

Hvor stor er økningen av fortjenesten i prosent i forhold til svaret i oppgave d iii)?²



¹Tips: Betrakt $K''(x)$.

²Hint: Økningen er mer enn 100 %.

Oppgave 2: (finansmatematikk)

Både serielån og annuitetslån kan beskrives av følgende formel:

$$\boxed{\text{terminbeløp} = \text{avdrag} + \text{renter} \quad (4)}$$

For et serielån er èn av de tre størrelsene i lign.(4) konstant.

For et annuitetslån er en annen av disse tre størrelsene konstant.

a) Hva slags størrelse av de tre er konstant for et serielån? Og for et annuitetslån? ³

Prisene på boliger har de siste 5 årene fordoblet seg.

Anta at det er en konstant årlig prisvekst r disse årene.

b) Finn r . ⁴



Figur 2: Bolig.

³Tips: Se formelsamling.

⁴Hva slags formel beskriver årlig vekst (årlig “rente”)? Oppgi svaret i prosent %.

Du har tatt opp et lån på 900 000 NOK til kjøp av din første bolig.
Lånet skal tilbakebetales over $n = 20$ år.
Renten er 5 %, dvs. $r = 0.05$, per år i hele nedbetalingsperioden.

c) Anta at lånet er et **annuitetslån**.

- i) Finn beløpet som skal betales ved utgangen av hvert år.⁵
- ii) Finn det totale rentebeløpet R_n^{ann} som må betales i lånets løpetid.

d) Anta at lånet istedet skal tilbakebetales som et **serielån**.

Finn det totale rentebeløpet R_n^{serie} som må betales i lånets løpetid.

e) Dersom du har regnet rett i de to foregående oppgavene så har du funnet ut at man betaler mer i totale renter dersom man betaler lånet tilbake ved annuitet enn serie, dvs.:

$$R_n^{\text{ann}} > R_n^{\text{serie}} \quad (5)$$

Gi en *kort* forklaring på dette.⁶

■

⁵Dvs. finn *terminbeløpet* K .

⁶Ingen regning behøves. Kun en kort, enkel kvalitativ forklaring.

Oppgave 3: (logistikk og økonomi)

ASKO er Norges største grossist, og leverer dagligvarer til forskjellige dagligvarekjeder.

Anta at du er ansatt som trailersjåfør hos ASKO. Føringsene du har fått fra din arbeidsgiver er at de samlede konsumutgiftene må være begrenset - maksimum m NOK per måned. Konsumutgiftene skal dekke dieselutgifter og vedlikeholdsutgifter på den traileren som du disponerer.

La:

$$p_x = \text{pris per time for vedlikehold, NOK/time} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (6)$$

$$p_y = \text{pris på diesel, NOK/liter} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (7)$$

Budsjettlikningen per måned blir dermed:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y \leq m, \quad (8)$$

hvor $m = \text{samlet konsumutgift}$ og

$$x = \text{antall timer på verksted i gjennomsnitt per måned} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (9)$$

$$y = \text{antall liter diesel per måned} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (10)$$

Anta at nytt ved forbruk av vedlikehold x (gode 1) og diesel y (gode 2) per måned er bestemt av nyttefunksjonen:

$$U(x, y) = cxy^5, \quad (11)$$

hvor c er en konstant.



Figur 3: Trailer fra Asko.

- a) Gjør om ulikheten til likhet i lign.(8) og vis at y som funksjon av x er gitt ved:

$$y = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x \quad (12)$$

for gitt m .

- b) i) Finn et uttrykk for hvor linjen i lign.(12) skjærer y -aksen. ⁷
ii) Finn et uttrykk for hvor linjen i lign.(12) skjærer x -aksen.
iii) Lign.(12) definerer en rett linje. Skriv ned et uttrykk for stigningstallet. ⁸

Anta at prisen på vedlikehold av trailere er $p_x = 1250$ NOK/time og prisen på diesel er $p_y = 15$ NOK/liter. Din arbeidsgiver gir deg et budsjett på maksimalt $m = 35\,000$ NOK/mnd.

- c) Sett inn tallene som oppgitt for parametrene og vis at lign.(12) blir:

$$y = 2333.33 - 83.33 \cdot x \quad (13)$$

med to desimales nøyaktighet.

- d) For en gitt, bestemt nytte $U_0 = U(x, y)$, vis at y som funksjon av x i lign.(11) er gitt ved:

$$y = \left(\frac{U_0}{c x} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (14)$$

Denne ligningen kalles *indifferensligningen* for vår aktuelle nyttefunksjon.

⁷Finn et uttrykk for y når du setter $x = 0$.

⁸Her behøves ingen regning. Bare bruk lign.(12) og skriv ned et uttrykk for stigningstallet direkte.

- e) I vedlegg A er indifferensligningen, dvs. lign.(14), plottet for en gitt verdi av c og tre forskjellige verdier av U_0 . I tillegg finner du en verditabell i vedlegg A.

For lign.(13), fyll ut verditabellen og tegn inn kurven i figuren.⁹

- f) Dersom du har tegnet den rette linjen riktig i oppgave e så ser du at den tangerer én av de tre indifferenskurvene.
Dette tangeringspunktet mellom indifferenskurven og budsjettligningen representerer et maksimum, altså den optimale kombinasjonen av x og y som gir maksimal nytte.

- i) Hva er den optimale kombinasjonen av vedlikehold og diesel som gir maksimal nytte?¹⁰
- ii) Marker tangeringspunktet på figuren i vedlegg A.



⁹Vedlegg A skal **legges ved** i din besvarelse. Husk å skriv på studentnummer på vedlegget.

¹⁰Dvs. hvilken kombinasjon av x og y gir størst nytte $U(x, y)$ innenfor budsjettet? Du skal løse problemet grafisk, dvs. kun ved avlesningen av figuren i vedlegg A. Ingen regning behøves.

Oppgave 4: (økonomi)

Anta at etterspørselen av aviser for løssalg er gitt ved:

$$x(p) = c e^{-0.1p}, \quad (15)$$

hvor

$$c = 800 \quad (16)$$

$$x(p) = \text{etterspørsel av aviser per dag} \quad (17)$$

$$p = \text{pris per avis} \quad (18)$$

- a) En gutt som selger aviser setter seg som mål å selge $x(p) = 80$ i løpet av en dag. Hva må prisen på avisen settes til for at han skal nå dette målet? ¹¹

La oss nå se på *priselastisiteten* til avisene. Vi skal studere etterspørselen sin følsomhet for endring i prisen på aviser. *Priselastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_p(x) = \frac{\% \text{-vis endring i etterspørselen}}{\% \text{-vis endring i prisen}} \quad (19)$$



Figur 4: Avisgutt.

¹¹Sett $x(p) = 80$ inn i lign.(15) og løs med hensyn på p .

Matematisk er denne *pris*elastisiteten definert ved:

$$E_p(x) = \frac{d x(p)}{d p} \cdot \frac{p}{x(p)} \quad (20)$$

hvor $x(p)$ er etterspørselen og p er prisen.

b) Vis at *pris*elastisiteten $E_p(x)$ for avisene er ved:

$$E_p(x) = -0.1 p \quad (21)$$

I oppgave **c** og **d** nedenfor, anta at prisen er $p = 25$ NOK per avis.

c) Tolk resultatet i oppgave **b**.

d) Hva er “%-vis endring i etterspørselen” dersom *prisen* på aviser øker med 5 %? ¹²



¹²Tips: Bruk lign.(19).

Oppgave 5: (Lagrange multiplikatorer)

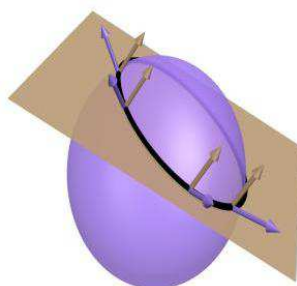
Oppgave 3 dreide seg om å finne maksimum av en funksjon under en bibetingelse (budsjettlikningen). Vi løste oppgaven grafisk ved å finne tangeringspunktet mellom indifferenskurven og budsjettlikningen.

I denne oppgaven skal vi diskutere den algebraiske tilnærmelsen til et slikt problem. I den sammenheng skal vi se på Lagranges multiplikator-metode.

- a) Forklar *kort*, på generelt grunnlag, hva Lagranges multiplikator-metode kan brukes til.
- b) Formuler Lagrange sin metode for en funksjon $z = f(x, y)$ med to variabler.
- c) I vedlegg B ser du en figur med en parabol $z = f(x, y)$. I tillegg er det tegnet inn tre nivåkurver samt en bibetingelse $g(x, y) = c$ (blå kurve), hvor c er en konstant.

Marker tydelig på figuren i vedlegg B hvor maksimum av $z = f(x, y)$ er under bibetingelsen $g(x, y) = c$.¹³

■



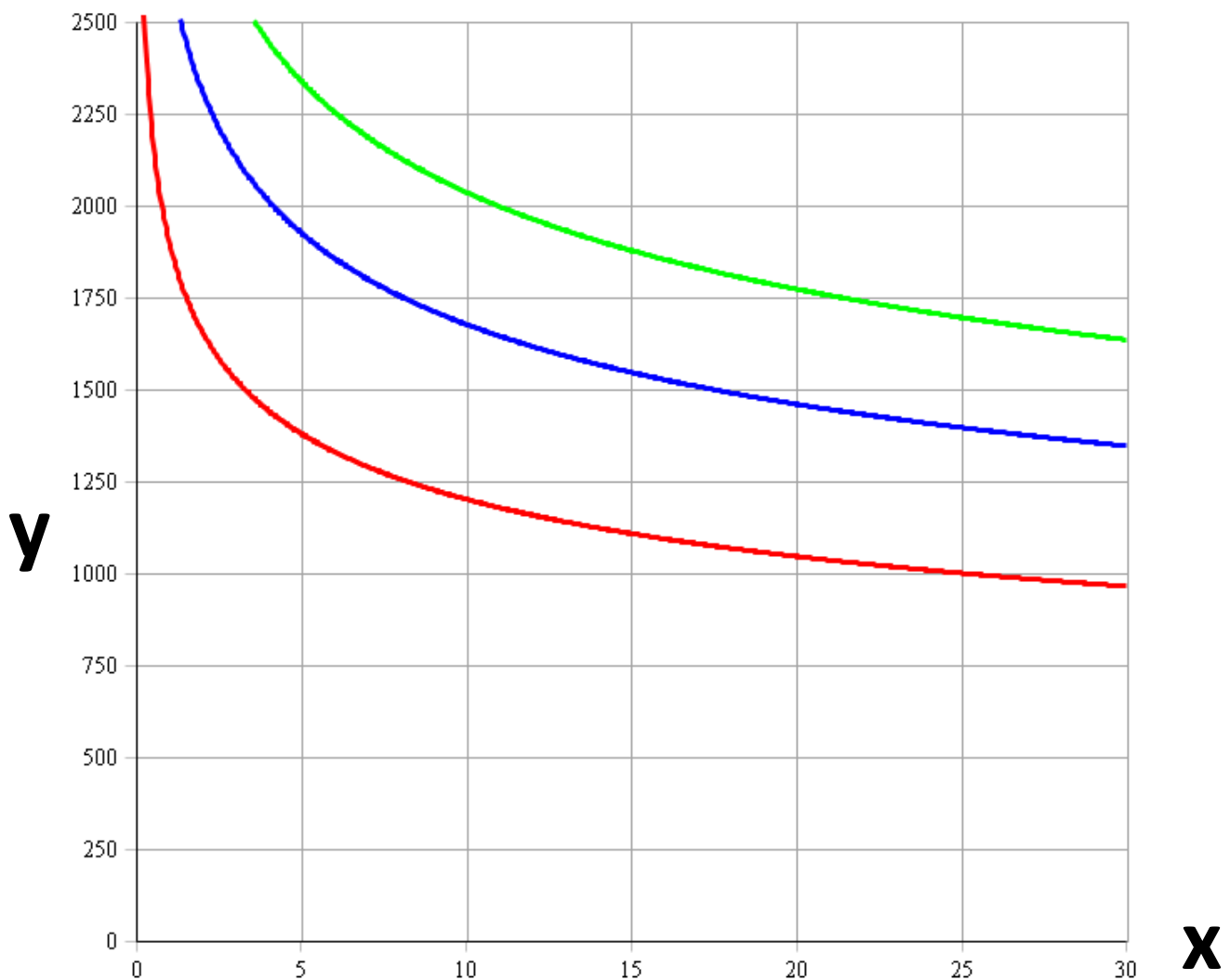
Figur 5: Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

¹³Vedlegg B skal **legges ved** i din besvarelse. Husk å skriv på studentnummer på vedlegget.

Vedlegg A: Student nummer: _____

Verditabell:

x	0	10	15	25
y				

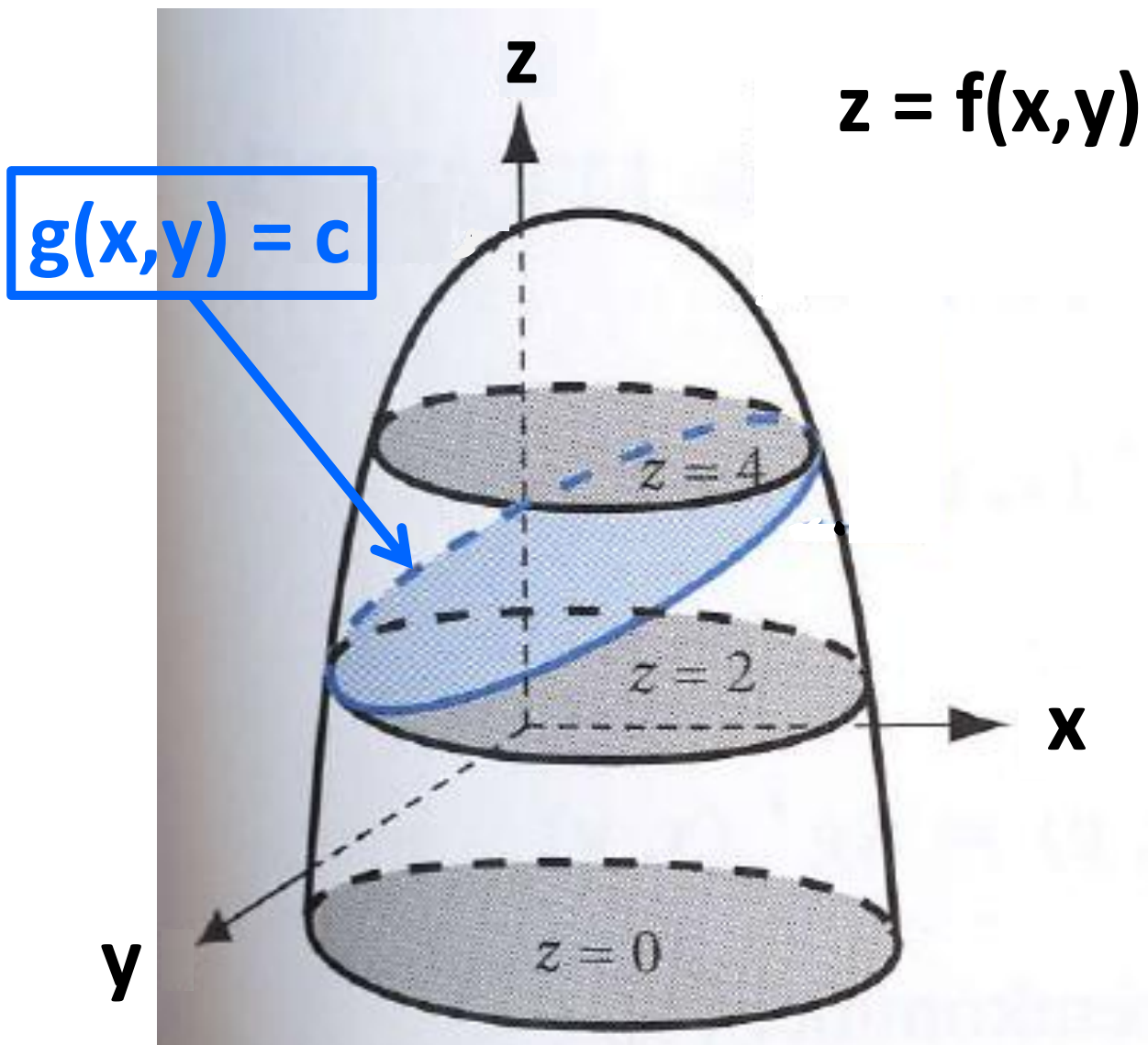


(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Vedlegg B:

Student nummer: _____

Marker tydelig på figuren
maksimum av $z=f(x,y)$
under bibetingelsen $g(x,y)=c$:



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Hovedeksamen 2014

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Torsdag 18. desember 2014
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde: Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Terje Bach / 932 55 838
Hjelpemidler	: KD + formelsamling
Antall sider inkl. forsiden	: 9 + vedlegg (1 side)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.
- Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.
- Det er totalt 4 oppgaver. Dvs. i *gjennomsnitt* én time per oppgave.

Oppgave 1: (logistikk og økonomi)

Varme- og belysningsprodusenten *Glamox* produserer to typer varmeovner for offshore og maritim industri. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{antall produserte varmeovner av type 1 per dag} \\ X_2 &= \text{antall produserte varmeovner av type 2 per dag} \end{aligned}$$

Inntekten til Glamox ved salg av slike varmeovner er da gitt ved inntektsfunksjonen $I(X_1, X_2)$:

$$\boxed{I(X_1, X_2) = 1200X_1 + 1750X_2} \quad (1)$$

Denne inntektsfunksjonen er gitt i norske kroner (NOK). Glamox ønsker å maksimere denne inntekten.

Avdelingen til Glamox som kun driver med produksjon av disse varmeovnene har begrenset med ressurser. Per dag har de 75 timer disponibelt til produksjon av komponenter, 160 timer til montering og kun 30 timer til pakking. Disse **restriksjonene** kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$\text{restriksjoner} : \begin{cases} 3X_1 + 3X_2 \leq 75 & (\text{produksjon av komponenter}) \\ 4X_1 + 8X_2 \leq 160 & (\text{montering}) \\ X_1 + X_2 \leq 30 & (\text{pakking}) \end{cases} \quad (2)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $X_1 \geq 0$ og $X_2 \geq 0$.



Figur 1: Glamox heating.

- a) Hva er prisen på en ovn av type 1? Og type 2?
Hvor lang tid brukes på å pakke en ovn av type 1? Og type 2? ¹
- b) Gjør om ulikhetene i lign.(2) til likheter og vis at restriksjonene kan skrives

$X_2(X_1) = 25 - X_1$	(3)
$X_2(X_1) = 20 - \frac{1}{2}X_1$	(4)
$X_2(X_1) = 30 - X_1$	(5)

hvor X_2 er en funksjon av X_1 .

- c) I vedlegg A finner du tre verditabeller og et koordinatsystem.
Fyll ut verditabellene og plott lign.(3), (4) og (5) i dette koordinatsystemet. ²
- d) Skraver det området i figuren som tilfredsstiller alle restriksjonene.
- e) Vil “pakking” være en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av X_1 og X_2 ?
- f) Inntekten i lign.(1) skal **maksimeres** under restriksjonene beskrevet av lign.(2).
Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.
- i) Indiker alle *hjørneløsninger* på figuren fra c.
- ii) Les av alle hjørneløsninger ³ fra grafen og regn ut tilhørende inntekt $I(X_1, X_2)$.
- iii) Hvilken kombinasjon av X_1 og X_2 gir *maksimal* inntekt $I(X_1, X_2)$?



¹I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

²Husk at vedlegg A skal legges ved i din eksamensbesvarelse.

Husk også å skrive inn ditt studentnummer på vedlegget.

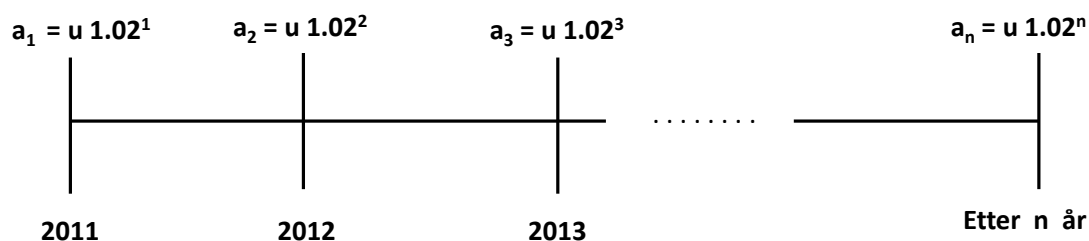
³Dvs. les av koordinatene (X_1, X_2) for alle hjørneløsninger.

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

I 2010 ble det totalt utvunnet

$$u = 31.2 \cdot 10^9 \text{ fat olje} \quad (6)$$

Analytikerne i Statoil estimerer at produksjonen av olje på verdensbasis må øke med 2 % de kommende år for å dekke den økende etterspørselen. Det betyr at det i 2011 må produseres $a_1 = u \cdot 1.02$ fat olje, $a_2 = u \cdot 1.02^2$ fat olje i 2012, $a_3 = u \cdot 1.02^3$ fat olje i 2013 osv. Se figur 2:



Figur 2: Utvinning av olje.

Summen av produsert olje n år etter 2010 er da:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (7)$$

a) Hva slags type rekke representerer a_i , hvor $i = 1, 2, \dots, n$?

b) Vis at summen S_n etter n år er gitt ved:

$$S_n = 51u (1.02^n - 1) \quad (8)$$



Figur 3: Olje.

Verdens kjente reserver R av olje var ved utgangen av 2010:

$$R = 1.33 \cdot 10^{12} \text{ fat olje} \quad (9)$$

- c) Vis at antall år de kjente oljereservene vil rekke dersom man ikke finner mer olje er gitt ved:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{51u} + 1\right)}{\ln 1.02} \quad (10)$$

- d) Hvor lang tid tar det før man bruker opp oljereservene R dersom man ikke finner mer olje? ⁴

■

⁴Regn ut det numeriske svaret.

Oppgave 3: (finansmatematikk)

Innen finansmatematikk er det mange formler. To viktige formler i den sammenheng som vi har lært om i “MAT100 Matematikk” er:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (11)$$

og

$$K_0 = K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad (12)$$

- a) Forklart *kort* hva disse formlene beskriver.
Hva slags restriksjoner må man ha på renten r for at formlene skal gjelde?
- b) Tegn en **enkel figur** som illustrerer tidslinjen som beskrives av formelen S_n^{ann} i lign.(11) for tilfellet med $n = 3$ terminer, i tråd med gjennomgangen i forelesningene og kompendiet. Sett inn blant annet formlene

$$K_1 = K(1+r) \quad (13)$$

$$K_2 = K(1+r)^2 \quad (14)$$

$$K_3 = K(1+r)^3 \quad (15)$$

$$S_3^{\text{ann}} = K_1 + K_2 + K_3 \quad (16)$$

på relevante plasser i figuren du lager.

- c) Tegn en **enkel figur** som illustrerer tidslinjen som beskrives av formelen K_0 i lign.(12) for tilfellet med $n = 3$ terminer, i tråd med gjennomgangen i forelesningene og kompendiet. Sett inn blant annet formlene

$$K_{01} = \frac{K}{1+r} \quad (17)$$

$$K_{02} = \frac{K}{(1+r)^2} \quad (18)$$

$$K_{03} = \frac{K}{(1+r)^3} \quad (19)$$

$$K_0 = K_{01} + K_{02} + K_{03} \quad (20)$$

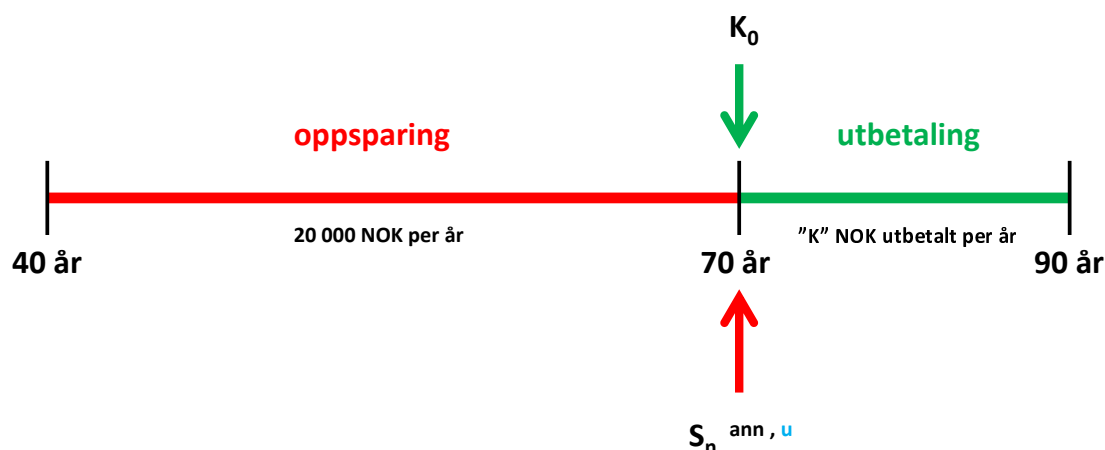
på relevante plasser i figuren du lager.

Anne Hansen er 40 år og ønsker å sette av penger til sin pensjon. Istedenfor å betale til en pensjonskasse så bestemmer Anne seg for sette penger i banken.

Anne bestemmer seg videre for å sette av et fast beløp hvert år, $K = 20\,000$ NOK, de neste 30 årene, dvs. frem til hun blir 70 år.

Anta at renten er $r = \frac{5\%}{100\%} = 0.05$ i hele perioden på $n = 30$ år.

- d) Hvor stort beløp har Anne oppspart når hun fyller 70 år, like etter at siste beløp er satt inn i banken?
- e) Det oppsparte beløpet som du fant i oppgave d ønsker Anne å ta ut i faste beløp én gang i året, fra hun er 70 år til hun blir 90 år, altså i $n = 20$ år. Anta at renten er den samme, dvs. $r = 0.05$, for alle 20 årene. Hvor mye kan Anne ta ut i året?



Figur 4: Først sparing. Så utbetaling.

- f) Istedenfor å få utbetalt et fast beløp i året over “bare” 20 år så ønsker Anne få utbetalt et fast beløp til evig tid. Anta at renten er den samme hele tiden, $r = 0.05$.

Hvor stort beløp kan Anne ta ut i hvert år til evig tid?



Oppgave 4: (logistikk og økonomi)

Varme- og belysningsprodusenten *Glamox* produserer mange typer lamper. En av disse lampene heter “*lux light*”. Denne lampen produseres både ved fabrikken som Glamox har i USA og ved fabrikken i Molde.

Timeprisen for arbeiderne i USA er 320 NOK og timeprisen for arbeiderne i Molde er 360 NOK. Utgiften $u(x, y)$ til Glamox ved produksjon av “*lux light*” lamper når man bruker x antall timer i produksjonen i USA og y antall timer i produksjonen i Molde er dermed:

$$u(x, y) = 320x + 360y \quad (21)$$

i NOK, hvor

$$x = \text{antall timer i produksjonen av “lux light” lamper ved fabrikken i USA} \quad (22)$$

$$y = \text{antall timer i produksjonen av “lux light” lamper ved fabrikken i Molde} \quad (23)$$

$$u(x, y) = \text{utgift ved produksjon av “lux light”} \quad (24)$$

Glamox har funnet ut at sammenhengen mellom antall enheter “*light lux*” som produseres og antall timer som behøves til produksjon er gitt ved:

$$g(x, y) = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} \quad (25)$$

hvor

$$g(x, y) = \text{antall produserte enheter av lampen “lux light”} \quad (26)$$



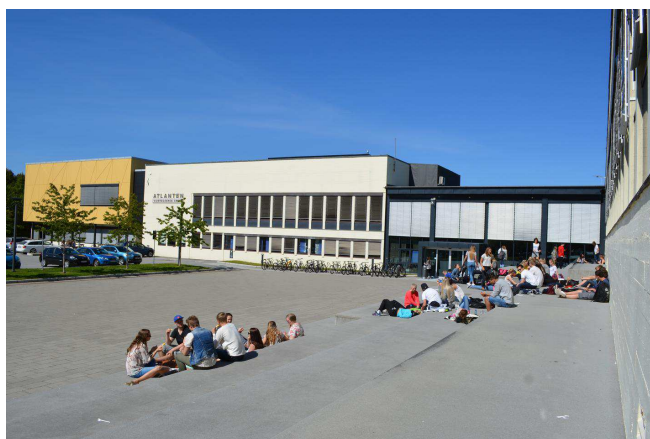
Figur 5: Glamox.

Da Atlanten videregående skole i Kristiansund ble bygget trengte man 360 “*lux light*” lamper. Glamox vant anbudsrunden og skal levere 360 slike lamper. Glamox ønsker å minimere utgiftene $u(x, y)$ ved produksjon av 360 slike enheter, dvs. $u(x, y)$ skal minimeres under bibetingelsen:

$$g(x, y) = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} = 360 \quad (\text{bibetingelse}) \quad (27)$$

- a) Hvordan må fordelingen av produksjonstimer være mellom fabrikken i USA og Molde for å minimere utgiftene $u(x, y)$? ⁵ ⁶
- b) Hva er den minimale utgiften $u_{\min}$ for Glamox i denne sammenheng?

■



Figur 6: Atlanten videregående skole.

⁵Dvs. finn x og y som gir minst $u(x, y)$. Bruk **Lagrange multiplikator** metoden.

⁶For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(21), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse. Men en slik analyse behøver du ikke å gjøre her. Du trenger heller ikke å sjekke randen.

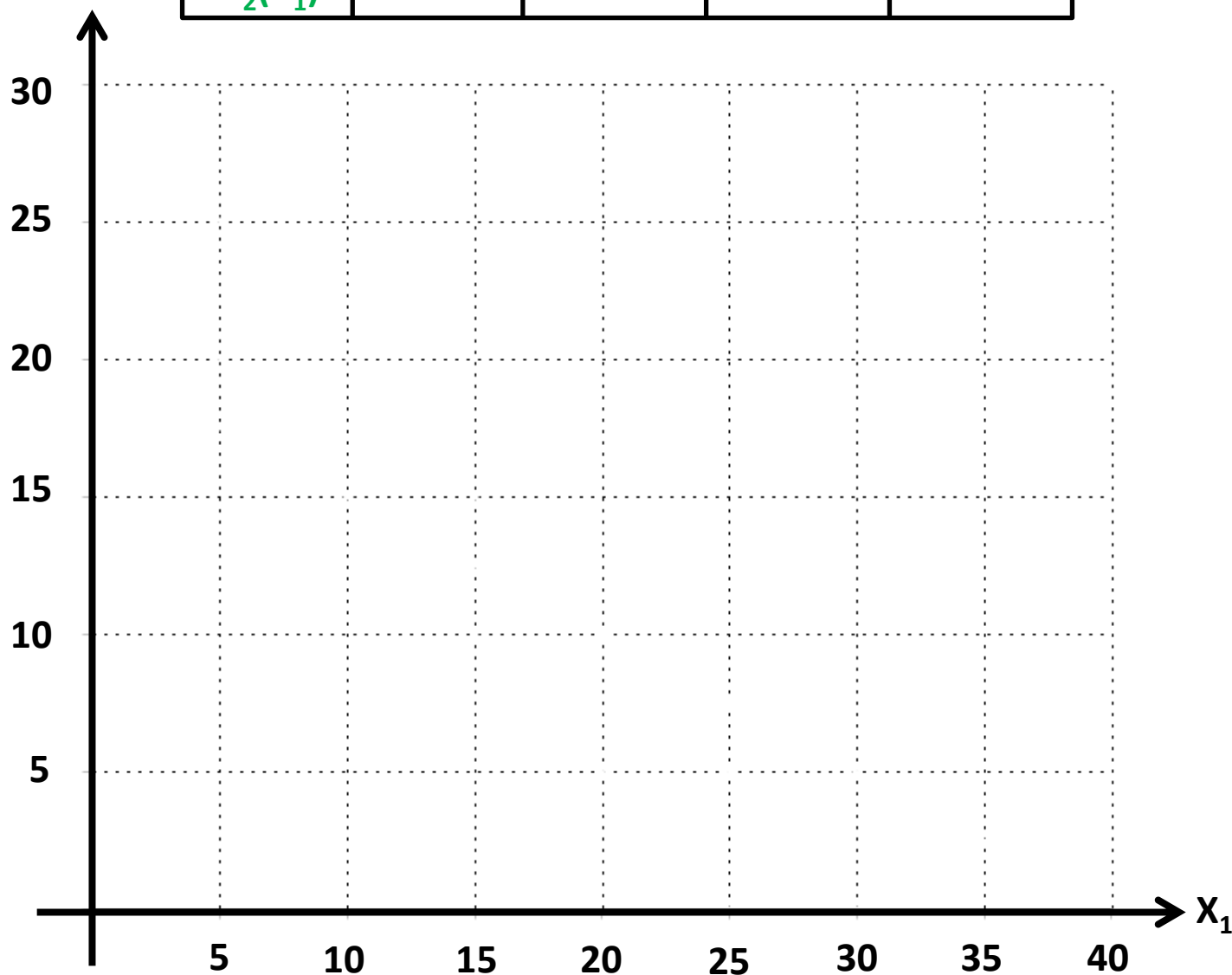
Vedlegg A

Studentnummer: _____
(skriv inn ditt studentnummer her)

x_1	0	10	20	25
$x_2(x_1)$				

x_1	0	10	20	40
$x_2(x_1)$				

x_1	0	10	20	30
$x_2(x_1)$				



Kontinuasjonseksamen 2014

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Fredag 5. juni 2015
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde: Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Terje Bach / 932 55 838
Hjelpemidler	: KD + formelsamling fra 2014
Antall sider inkl. forsiden	: 9 + vedlegg (2 sider)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.
- Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.
- Det er totalt 4 oppgaver. Dvs. i *gjennomsnitt* én time per oppgave.

Oppgave 1: (teori)

En andregradsligning kan skrives på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

hvor a , b og c er koeffisienter. Nullpunktene til en slik andregradsligning kalles røttene til ligningen. Røttene kan uttrykkes ved hjelp av den såkalte “ ABC -formelen”:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

Uttrykket $b^2 - 4ac$ i kvadrat-roen kalles *diskriminanten*. La oss i denne oppgaven kun se på reelle røtter. For løsningsmengden til $f(x) = 0$ skiller man mellom tre tilfeller:

- to løsninger
- en løsning
- ingen løsninger

Alternativene ovenfor er avhengig av om diskriminanten er null, negativ eller positiv:

- $b^2 - 4ac = 0$
- $b^2 - 4ac < 0$
- $b^2 - 4ac > 0$

a) Se vedlegg A. Dette vedlegget har 6 ledige ruter.
Fyll inn de 6 kulepunktene ovenfor i rett rute slik at antall løsninger og riktig verdi på diskriminanten hører sammen.

b) For reelle koeffisienter a , b og c så fremstiller $f(x)$ i lign.(1) en parabel.
I vedlegg B ser du et koordinatsystem. Tegn inn enkle prinsippskisser for hånd av lign.(1) som grafisk illustrerer tilfellene med en, to og ingen løsninger av $f(x) = 0$.¹

■

¹Du behøver ikke spesifikke verdier for a , b og c for å løse denne oppgaven.

Oppgave 2: (økonomi)

Bedriften “Rofi” i Molde produserer telt til forskjellige formål. Anta at bedriftens totale kostnaden ved produksjon og slag av x antall telt av en bestemt type er beskrevet av:

$$K(x) = x^2 + 200x + 250\,000 \quad (3)$$

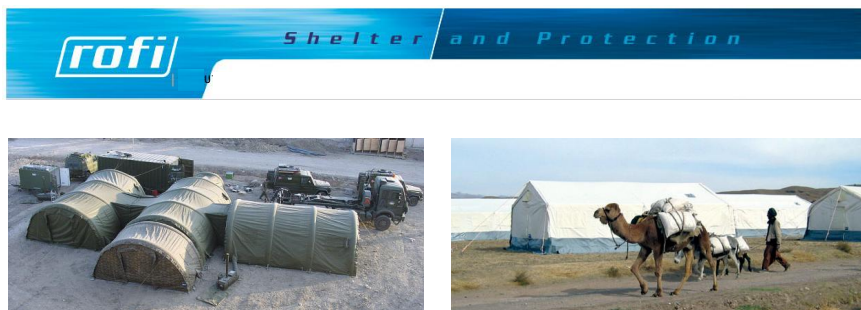
med definisjonsmengde $x \in [0, 800]$. Funksjonen $K(x)$ gir kostnadene i NOK.

- a) Finn grensekostnaden $K'(x)$.
- b)
 - i) Finn grensekostnaden når det produseres 150 telt, dvs. finn $K'(150)$.
 - ii) Gi en *kort* tolkning av resultatet fra oppgave **b i** ut fra et økonomisk perspektiv.
- c) Vis at $K(x)$ er en voksende funksjon.²

Anta at prisen $p(x)$ på det aktuelle teltet varierer med antall enheter x som etterspørres, og er gitt ved formelen:

$$p(x) = 3200 - 4x, \quad (4)$$

hvor $x \in [0, 800]$. Funksjonen $p(x)$ gir prisen i NOK.



Figur 1: Telt fra Rofi.

²Hva kan du si om $K'(x)$ innenfor definisjonsmengden $x \in [0, 800]$ dersom $K(x)$ er voksende?

- d) Finn bedriftens inntektsfunksjon $I(x) = x \cdot p(x)$, og vis at fortjenesten $F(x)$ er gitt ved:

$$F(x) = -5x^2 + 3000x - 250\,000 \quad (5)$$

- e) Rofi går med overskudd når $F(x) > 0$.
Sett opp fortegnsskjema og finn for hvilke verdier av x Rofi går med overskudd.
- f) i) Finn antall telt som må produseres og selges for å **maksimere** fortjenesten.
ii) Begrunn ved en *kort* regning hvorfor det stasjonære punktet du har funnet er et maksimum og ikke et minimum.³
iii) Hva er den maksimale fortjenesten?

- g) Total enhetskostnad $TEK(x)$, dvs. gjennomsnittlig kostnad per telt, er gitt ved:

$$TEK(x) = \frac{K(x)}{x} \quad (6)$$

Finn minste enhetskostnad og for hvilken x det inntreffer.⁴

- h) Sammenlign svaret i oppgave **2f** med svaret i oppgave **2g**.
Inntreffer maksimum for fortjenesten for samme verdi av x som minimum av enhetskostnaden?
- i) Anta at Rofi selger $x_0 = 675$ telt ett gitt år.
Anta videre at de selger $x_1 = 540$ telt året etter.

Hva er den tilhørende prosentvise endringen i prisen på telt?

■

³Tips: Betrakt $K''(x)$.

⁴Husk også å begrunne hvorfor det er et minimum, og ikke et maksimum, du finner.

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

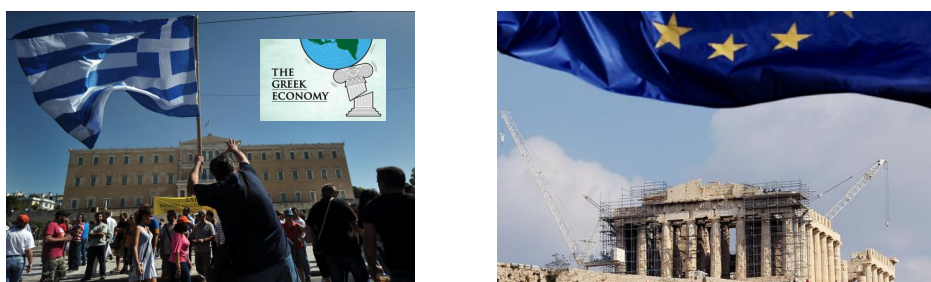
Inflasjon er at det generelle prisnivået stiger sammenhengende over tid. I Hellas har inflasjonen, altså prisnivået, kommet helt ut av kontroll.

Anta at den årlige inflasjonen er 50 % i Hellas. La oss bruke notasjonen $r_{inf} = 0.50$ for inflasjonen.

Ved innskudd i bank får man 25 % rente. La oss bruke notasjonen $r_{inn} = 0.25$ for innskuddsrenten.

Myntenheten i Hellas er euro.

- a) Du setter inn $K_0 = 100\,000$ euro i banken ved starten av et år.
Hvor mye penger K_5 har du i banken etter $n = 5$ år?
- b) Inflasjonen vil redusere verdien på bankinnskuddet.
Hva er nåverdien $K_{0,b}$ til kapitalen K_5 som du har i **banken** etter 5 år? ⁵
- c) Sammenlign innskuddet $K_0 = 100\,000$ euro med nåverdien $K_{0,b}$ fra oppgave **3b**.
Kommenter sammenligningen. ⁶



Figur 2: Hellas har en økonomi med stor inflasjon.

⁵Bruk resultatet for K_5 fra oppgave **3a**. Formelen for nåverdi finner du i formelsamlingen.

⁶Lønner det seg å ha penger i banken?

Istedet for å la pengene stå passivt på en bankkonto som i de foregående deloppgavene så tar du ut et fast beløp B fra kontoen ved slutten av hvert år. Etter n år blir da saldoen S_n i banken:

$$S_n = K_0 \cdot k^n - B(1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}) \quad (7)$$

hvor vi har innført notasjonen $k \equiv 1 + r_{inn}$.

d) Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke til å forenkle uttrykket i lign.(7). ⁷

e) Vis at beløpet B du kan ta ut hvert år er:

$$B = 37\,185 \text{ euro} \quad (8)$$

dersom du bestemmer deg for å bruke opp saldoen S_n i løpet av $n = 5$ år. ⁸

f) Du tar opp et lån på x euro i banken. Anta at renten på dette lånet er 30 %, dvs. $r = 0.30$. Anta videre at lånet er avdragsfritt, dvs. du behøver **kun** å betale rente på lånet.

Hvor stort lån x kan du ta opp dersom du bestemmer deg for å bruke det årlige beløpet B fra oppgave **3e** til å betale de årlige rentene?

g) Du bestemmer deg for å investere lånebeløpet x fra oppgave **3f** i eiendom. Anta at verdien av eiendommen stiger i takt med inflasjonen, dvs. verdien V_n på eiendommen er:

$$V_n = x \cdot (1 + r_{inf})^n \quad (9)$$

etter n antall år.

Etter $n = 5$ år bestemmer du deg for å selge eiendommen.

Hvor stor kapital $K_{5,e}$ sitter du da igjen med ved en slik investering i **eiendom**? ⁹

⁷Se formelsamlingen for formelen for summen av en geometrisk rekke.

⁸Sett $S_n = 0$ i ligningen du fant i oppgave **3d** og løs med hensyn på B .

⁹Tips: Kapitalen $K_{5,e}$ som du sitter igjen med er verdien på eiendommen V_n minus lånets størrelse x .

- h)** Regn ut nåverdien $K_{0,e}$ til kapitalen $K_{n,e}$ etter $n = 5$ år ved en slik investering i eiendom.¹⁰
- i)** Sammenlign svaret i oppgave **3b**, dvs. nåverdien $K_{0,b}$ ved å sette pengene i banken, med svaret i oppgave **3h**, dvs. nåverdien $K_{0,e}$ ved å investere i eiendom. Kommenter sammenligningen.¹¹

■

¹⁰Tips: Det er inflasjonen som bestemmer nåverdien for kapitalen som er bundet opp i eiendom.

¹¹Lønner det seg å investere i eiendom kontra det å ha pengene i banken?

Oppgave 4: (logistikk og økonomi)

NEAS, Nordmøre Energiverk AS, eier Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk. La x og y betegne antall megawatt timer, MWh, som produseres i disse to lokale kraftverkene per døgn:

$$x = \text{antall MWh per døgn som produseres ved Reinset kraftverk} \quad (10)$$

$$y = \text{antall MWh per døgn som produseres ved Ulvund kraftverk} \quad (11)$$

Anta at kostnadene per døgn ved kraftverkene på Reinset og Ulvund er henholdsvis: (i NOK)

$$K_R(x) = x^2 + 500x \quad (12)$$

$$K_U(y) = y^2 + 300y \quad (13)$$

Den samlede kostnaden per døgn for disse to kraftverkene $K(x, y)$ er dermed: (i NOK)

$$K(x, y) = x^2 + 500x + y^2 + 300y \quad (14)$$

Antall MWh som samlet produseres per døgn $g(x, y)$ for disse to kraftverkene er $g(x, y) = x + y$.

NEAS inngår en avtale med Norsk Hydro på Sunndalsøra om å produsere og levere 500 MWh per døgn til en **fast pris**. Siden de har en fast pris på strømmen så ønsker de å minimere totalkostanden. NEAS ønsker altså å minimere $K(x, y)$ under bibetingelsen:

$$g(x, y) = x + y = 500 \quad (15)$$

I tillegg må selvsagt størrelsene x og y være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.



Figur 3: Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk.

- a) Hvordan må fordelingen av antall MWh være mellom de to kraftverkene for at NEAS skal minimere sine samlede kostnader $K(x, y)$?^{12 13}
- b) Hva er den minste samlede kostnaden $K_{\min}$ for NEAS i denne sammenheng?



¹²Dvs. finn x og y som gir minst $K(x, y)$. Bruk **Lagrange multiplikator** metoden.

¹³For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(14), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse. Men en slik analyse behøver du ikke å gjøre her. Du trenger heller ikke å sjekke randen.

Vedlegg A

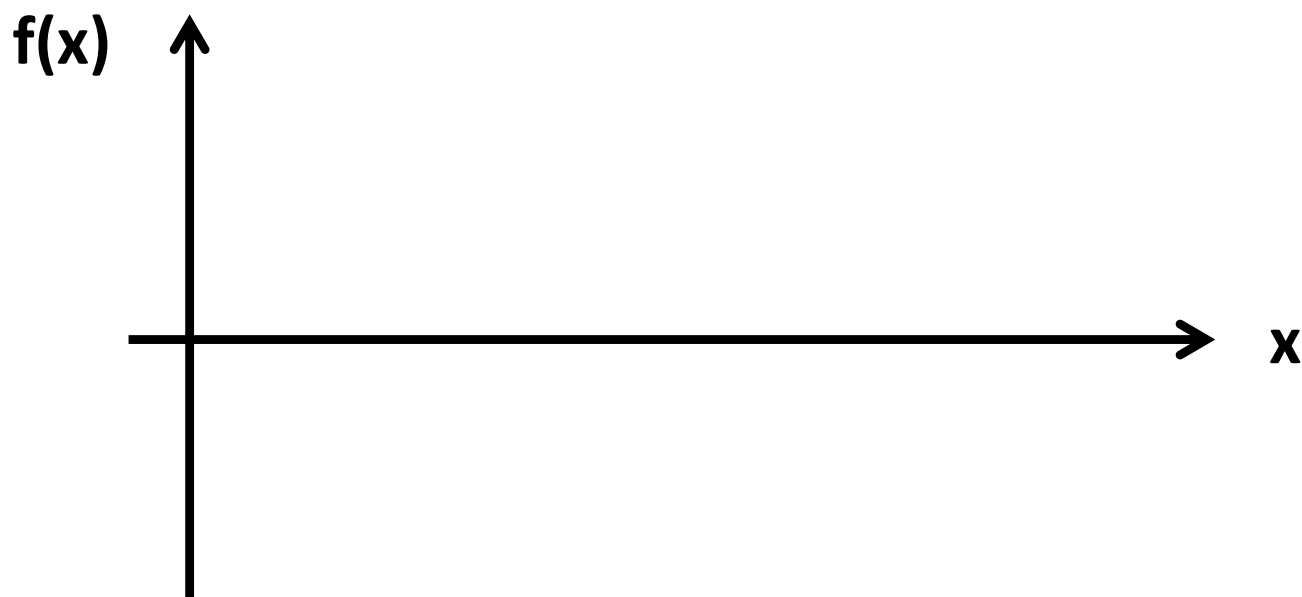
Studentnummer: _____

Diskriminant	Antall løsninger

(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Vedlegg B

Studentnummer: _____



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Hovedeksamen 2015

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Torsdag 17. desember 2015
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde: Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Terje Bach / 932 55 838
Hjelpemidler	: KD + formelsamling
Antall sider inkl. forsiden	: 11 + vedlegg (1 side)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.
- Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.
- Det er totalt 4 oppgaver. Dvs. i *gjennomsnitt* én time per oppgave.

Oppgave 1: (økonomi)

La oss se på en bedrift som produserer et produkt. Anta at det totale resultatet $TR(x)$ som bedriften får ved å produsere x antall enheter er et bestemt produkt, kan beskrives av funksjonen

$$TR(x) = I(x) - K(x) \quad (1)$$

hvor

$$TR(x) = \text{totalt resultat} \quad (2)$$

$$I(x) = \text{total inntekt} \quad (3)$$

$$K(x) = \text{total kostnad} \quad (4)$$

$$x = \text{antall enheter produsert av produktet} \quad (5)$$

Innen økonomi defineres grenseinntekt og grensekostnad som den deriverte av henholdsvis inntekts- og kostandsfunksjonen:

$$\text{grenseinntekt} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{dI(x)}{dx} \quad (6)$$

$$\text{grensekostnad} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{dK(x)}{dx} \quad (7)$$

a) Vis at **maksimalt resultat** TR_{max} oppnås når: ¹

$$\text{grenseinntekt} = \text{grensekostnad} \quad (8)$$

b) Gi en kort generell tolkning av grensekostnaden i et økonomisk perspektiv. ²

¹Denne oppgaven krever lite regning. I tillegg, anta at $\frac{d^2 TR(x)}{dx^2} < 0$ for $x > 0$, dvs. $TR(x)$ er konkav slik at lign.(8) representerer en betingelse for *maksimum* av $TR(x)$, ikke et minimum. Dermed behøver du heller ikke å utføre 1. derivasjonstesten eller 2. derivasjonstesten.

²Tips: Se formelsamling, kapittel 3.

Ello i Kristiansund produserer blant annet vaskemidler, såpeprodukter samt produkter for personlig pleie. Eksempler på dette er merkevarer som *Blenda*, *Lano* og *Solidox*.

Basert på erfaring viser det seg at kostnadsfunksjonen $K(x)$ per måned for en gitt type såpe er:

$$K(x) = ax^2 + bx + c \quad (9)$$

hvor x = antall liter såpe produsert en bestemt måned, og a , b og c er konstanter.

Anta at prisen som Ello får for sitt såpeprodukt er p NOK/liter. Inntekten per måned for dette produktet dersom det selges x antall liter såpe per måned er:

$$I(x) = p \cdot x \quad (10)$$

c) Vis at det **totale resultatet** $TR(x)$ per måned for Ello er gitt ved:

$$TR(x) = (p - b)x - ax^2 - c \quad (11)$$

d) Vis at antall liter såpe som må produseres en bestemt måned for å **maksimere** resultatet $TR(x)$ er gitt ved:

$$x_{max} = \frac{p - b}{2a} \quad (12)$$



Figur 1: Ello i Kristiansund.

- e) Begrunn ved en *kort* regning hvorfor lign.(12) representerer et maksimum og ikke et minimum av $TR(x)$. Anta at konstanten a er positiv.³

- f) Vis at det **maksimale** totale resultatet $TR_{max} \equiv TR(x_{max})$ er gitt ved:

$$TR_{max} = \frac{(p-b)^2}{4a} - c \quad (13)$$

For en bestemt type såpe er kostantene a , b og c gitt ved:

$$a = 0.001 \frac{\text{NOK}}{\text{liter}^2} \quad (14)$$

$$b = 10 \frac{\text{NOK}}{\text{liter}} \quad (15)$$

$$c = 3\,000 \text{ NOK} \quad (\text{faste kostnader}) \quad (16)$$

Anta at prisen som Ello får for sitt såpeprodukt er $p = 22$ NOK/liter.

- g) Hvor mange liter såpe må Ello produsere per måned for å maksimere det totale resultatet $TR(x)$?

- h) Hva er det maksimale resultatet TR_{max} som Ello kan oppnå per måned?⁴



³Tips: 2. derivasjonstesten.

⁴Her er vi på jakt etter tallverdien for TR_{max} .

Oppgave 2: (finansmatematikk)

Innen finansmatematikk er det mange formler. To viktige formler i den sammenheng som vi har lært om i “*MAT100 Matematikk*” er:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (17)$$

og

$$K_0 = K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad (18)$$

- a) Forklart *kort* hva disse formlene beskriver.
Hva slags restriksjoner må man ha på renten r for at formlene skal gjelde?
- b) Ta utgangspunkt i lign.(17) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på K alene og skrives på følgende form:

$$K = \frac{r S_n^{\text{ann}}}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]} \quad (19)$$



Figur 2: Sparing.

- c) Anta at du trenger 100 000 NOK om 4 år.
 Du bestemmer deg for å sette av et *månedlig* beløp på K kroner de neste 4 årene.
 Anta videre at renten er 4.5 % per år, dvs. den *månedlige* renten er:

$$r = \frac{0.045}{12} = 0.00375 \quad (20)$$

I løpet av 4 år er det

$$n = 12 \cdot 4 = 48 \quad (21)$$

månedlige terminer.

Hvor stort beløp K må du sette av i måneden for å få $S_n^{\text{ann}} = 100\,000$ NOK etter 4 år, en termin etter at siste beløp er satt av?

- d) Ta utgangspunkt i lign.(17) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på n og skrives på følgende form:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)} \quad (22)$$

- e) Anta istedet at renten er 6 %, dvs. den månedlige renten er:

$$r = \frac{0.06}{12} = 0.005 \quad (23)$$

Anta videre at du setter av det samme månedlige beløpet K som du fant i oppgave 2c.

Hvor mange måneder må du nå spare for å få 100 000 NOK, en termin etter at siste beløp er satt av?

■

Oppgave 3: (priselastisitet og logistikk)

I denne oppgaven skal vi se på *priselastisiteten* til et produkt.

Vi skal studere etterspørselen sin følsomhet for endring i prisen på produktet. *Priselastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_p(x) = \frac{\% \text{-vis endring i etterspørselen}}{\% \text{-vis endring i prisen}} \quad (24)$$

Matematisk er denne *priselastisiteten* gitt ved:

$$E_p(x) = \frac{dx(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \quad (25)$$

hvor

$$x(p) = \text{etterspørselen av produktet} \quad (26)$$

$$p = \text{prisen på produktet} \quad (27)$$

Denne priselastisiteten $E_p(x)$ kan deles inn i 3 kategorier. Disse tre kategoriene er:

Uelastisk:	etterspørselen er <u>lite</u> følsom for prisendring.
Nøytralelastisk:	etterspørselen har <u>samme</u> følsomhet som prisen.
Elastisk:	etterspørselen er <u>følsom</u> for prisendring.

I vedlegget helt bakerst i denne eksamensoppgaven (1 side) finner en figur med en tallinje. På forskjellige plasser i denne tallinjen er det 3 bokser. I disse 3 boksene skal du skrive inn de 3 kommentarene nevnt ovenfor.

a) Fyll ut boksene i vedlegget med de 3 kommentarene ovenfor.

b) Deler av den røde linjen i vedlegget er stiplet, for $E_p(x) > 0$.
Hva betyr det at $E_p(x) > 0$? Gi en *kort* tolkning.⁵

⁵En kort begrunnelse på én linje er nok.

Maersk er verdens største containerskipsoperatør. Anta at for en av rutene til Maersk mellom Norge og USA så kan sammenhengen mellom etterspørselen av antall containere som skal fraktes på denne ruten per måned, og prisen p per container for transporten, gitt ved:

$$x(p) = 300 - p^2 \quad (28)$$

hvor

$$x(p) = \text{etterspørsel av antall containere som skal transporteres} \quad (29)$$

$$\text{fra Norge til USA i måneden} \quad (30)$$

$$p = \text{pris per container for transport mellom Norge og USA} \quad (31)$$

$$\text{i 1000 NOK}$$

c) Vis at priselastisiteten for den aktuelle ruten er gitt ved:

$$E_p(x) = -\frac{2p^2}{300 - p^2} \quad (32)$$

d) Hvor stor er priselastisiteten når $p = 5$?

e) Tolk resultatet i oppgave 3d.



Figur 3: Maersk.

- f) Bruk svaret fra oppgave 3d til å finne hvor mye den %-vise etterspørselen vil endre seg dersom **prisen** på containertransporten øker med 5 %.⁶
- g) Hva slags pris p må Maersk sette for at priselastisiteten skal være nøytralelastisk?

■



Figur 4: Maersk.

⁶Bruk gjerne lign.(24). Du skal finne “%-vis endring i **etterspørselen**” når du vet at:

$$\text{\%-vis endring i } \textbf{prisen} = 5 \% \quad (33)$$

Dette betyr at du vet nevneren i lign.(24). Og du skal finne telleren.

Oppgave 4: (logistikk og lagerkostnader)

Hustadmarmor AS i Elnesvågen er en bedrift som leverer “*slurry*” til industrien. Slurry er en hvit flytende masse som blant annet brukes til bleking av papir (se figur 5).

Det finnes to typer slurry, type 1 og type 2. Disse to typene slurry kan lagres i samme tank siden en tank kan deles to. Med variablene

$$x_1 = \text{antall tonn slurry av type 1 som lagres i en tank} \quad (\text{i 1000 tonn}) \quad (34)$$

$$x_2 = \text{antall tonn slurry av type 2 som lagres i en tank} \quad (\text{i 1000 tonn}) \quad (35)$$

og siden en tank har en kapasitet på 100 000 tonn, så har vi betingelsen:

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 100 \quad (36)$$

Anta at lagerkostnadene per uke forbundet med å lagre slurry av type 1 og 2 er henholdsvis: (i NOK)

$$C_1(x_1) = x_1^2 + 400x_1 \quad (37)$$

$$C_2(x_2) = x_2^2 + 300x_2 \quad (38)$$

Den totale lagerkostnaden per uke, $C(x_1, x_2) = C_1(x_1) + C_2(x_2)$, er dermed: (i NOK)

$$C(x_1, x_2) = x_1^2 + 400x_1 + x_2^2 + 300x_2 \quad (39)$$

I tillegg må selvsagt størrelsene x_1 og x_2 være positive, dvs. $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$.



Figur 5: Hustadmarmor. Slurry.

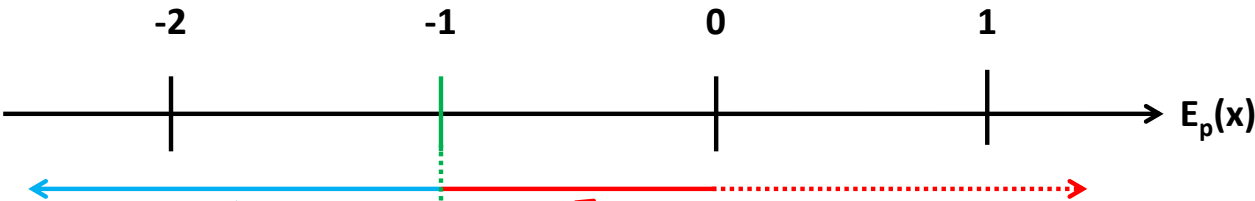
- a) Hustadmarmor ønsker å *minimere* den totale lagerkostanden $C(x_1, x_2)$.
Bruk **Lagrange multiplikator** metoden til å finne den x_1 og den x_2
som gir *minst* total lagerkostnad $C(x_1, x_2)$.⁷
- b) Hva er den minste samlede lagerkostnaden $C_{\min}$ for Hustadmarmor
i denne sammenheng?



⁷For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(39), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse. Men en slik analyse behøver du ikke å gjøre her. Du trenger heller ikke å sjekke randen.

Vedlegg:

Kandidatnummer: _____



A large empty rectangular box with a blue border, intended for the student's answer to the first question.

A large empty rectangular box with a green border, intended for the student's answer to the second question.

A large empty rectangular box with a red border, intended for the student's answer to the third question.

(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Kontinuasjonseksamen 2015

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Fredag 10. juni 2016
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde: Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Terje Bach / 932 55 838
Hjelpemidler	: KD + formelsamling fra 2015
Antall sider inkl. forsiden	: 12
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.
- Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.
- Det er totalt 4 oppgaver. Dvs. i *gjennomsnitt* én time per oppgave.

Oppgave 1: (økonomi)

Denne oppgaven handler blant annet om økonomi, kostnad og enhetskostnad.

Først et teorisørsmål, deretter skal vi anvende teorien på en bedrift som er opptatt av både økonomi og logistikk.

Anta at en bedrifts totale kostnader ved produksjon og salg av x antall enheter er $K(x)$. Tilhørende total enhetskostnad $TEK(x)$, dvs. gjennomsnittlig kostnad per enhet, er da definert ved:

$$TEK(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x} \quad (1)$$

for $x > 0$.

Enhetskostnadens **minimumsverdi** $TEK_{\min}$ er bestemt at betingelsen

$$\boxed{\frac{d TEK(x)}{dx} = 0} \quad (2)$$

eller

$$\boxed{\frac{d K(x)}{dx} = TEK(x)} \quad (3)$$

a) Vis at lign.(2) og (3) er ekvivalente, dvs. at ligningene beskriver ett og samme utsagn. ¹

¹Tips: Start med definisjonen av $TEK(x)$ i lign.(1). Deriver denne med hensyn på x og sett den deriverte lik null, slik som lign. (2) sier. Til slutt vil du ende opp med lign.(3).

Belysningsprodusenten Glamox produserer lysartikler for blant annet offshore og maritim industri.

En av lampene som Glamox selger er “FL60”, se figur 1.

Anta at prisen $p(x)$ på en lampe av typen FL60 varierer med antall enheter x som produseres og selges, og er gitt ved formelen:

$$p(x) = 18 - 0.006x \quad , \quad 0 \leq x \leq 3000 \quad (4)$$

i antall 100 NOK.

Anta at Glamox sine totale kostnader ved produksjon og salg av x antall lamper er:

$$K(x) = 0.004x^2 + 4x + 4500 \quad (5)$$

også det i antall 100 NOK.

b) Finn Glamox sin inntektsfunksjon $I(x) = x \cdot p(x)$, og vis at fortjenesten $F(x)$ er gitt ved:

$$F(x) = -0.01x^2 + 14x - 4500 \quad (6)$$

c) Glamox går med overskudd når fortjenesten er positiv, dvs. $F(x) > 0$.
Sett opp fortegnsskjema og finn for hvilke verdier av x Glamox går med overskudd. ²



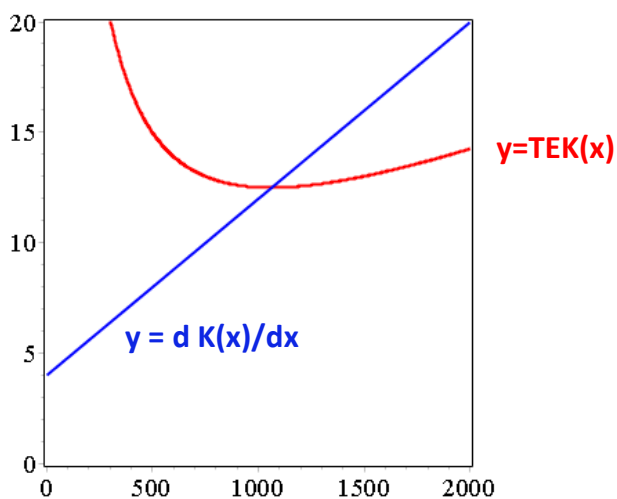
Figur 1: FL60 fra Glamox.

²Bruk “ABC-formelen”, se formelsamling.

d) Total enhetskostnad $TEK(x)$, dvs. gjennomsnittlig kostnad per lampe, er definert ved lign.(1).

- i) For hvilken verdi av x inntreffer minste enhetskostnad?
- ii) Begrunn, med en *kort* regning, hvorfor det stasjonære punktet du fant i deloppgaven foran er et minimum, og ikke et maksimum.³
- iii) Finn minste enhetskostnad.

I figur 2 nedenfor ser du plott av kurvene $y = \frac{dK(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$.



Figur 2: Plott av $y = \frac{dK(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$.

e) Finn grensekostnaden $\frac{dK(x)}{dx}$.

³Tips: Betrakt $TEK''(x)$.

f) Fra figur 2 ser vi at kurvene $y = \frac{dK(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$ har et skjæringspunkt.

Finn ved regning, ikke avlesning fra figuren, skjæringspunktet mellom $y = \frac{dK(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$.⁴

g) Sammenlign svaret fra oppgave **1d** med svaret fra oppgave **1f** og svar på/kommenter følgende:

- Er svarene sammenfallende?
- Stemmer dette med kurvene i figur 2? Gi en *kort* begrunnelse.



⁴Her skal du altså finne x og y når kurvene $y = \frac{dK(x)}{dx}$ og $y = TEK(x)$ er like.

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

Anta at verdens totale **forbruk** av olje i år 2020 er 30 milliarder fat, dvs.

$$f = 30 \cdot 10^9 \text{ fat olje} \quad (7)$$

hvor 10^9 er én milliard.

La oss i denne oppgaven bruke notasjonen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{verdens totale oljeforbruk i år 2021} \\ a_2 &= \text{verdens totale oljeforbruk i år 2022} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_n &= \text{verdens totale oljeforbruk } n \text{ år etter år 2020} \end{aligned} \quad (8)$$

Analytikere i OPEC, “*Organization of the Petroleum Exporting Countries*”, har estimert at forbruket av olje i verden vil øke med 4 % per år etter år 2020.

Det betyr at i 2021 så vil verdens totale oljeforbruk være: $a_1 = f \cdot 1.04^1$

Og i 2022 er det totale oljeforbruk være: $a_2 = f \cdot 1.04^2$

a) Hvor stort vil forbruket av olje være på verdensbasis i år 2027, dvs. hva er a_7 ?



Figur 3: Olje.

Verdens samlede forbruk av olje n år etter år 2020 er da:

$$S_n^{\text{forbruk}} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (9)$$

b) Hva slags type rekke representerer a_i , hvor $i = 1, 2, \dots, n$?

c) Vis at summen S_n^{forbruk} er gitt ved:

$$S_n^{\text{forbruk}} = 26f(1.04^n - 1) \quad (10)$$

d) Hvor stort er verdens totale oljeforbruk i 10 årsperioden fra og med 2021 og til med 2030?

Anta at verdens kjente reserver R av olje ved utgangen av 2020 er estimert til å være:

$$R = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ fat olje} \quad (11)$$

e) Vis at antall år de kjente oljereservene R vil rekke dersom man ikke finner mer olje etter 2020, er gitt ved:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{26f} + 1\right)}{\ln 1.04} \quad (12)$$

f) Dersom verden ikke finner mer olje enn de kjente oljereservene R , ved hvilket år vil verden gå tom for olje?

■

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

Innen finansmatematikk er det mange formler. To viktige formler i den sammenheng som vi har lært om i “*MAT100 Matematikk*” er:

$$S_n^{\text{ann, u}} = K \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (13)$$

og

$$K_0 = K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad (14)$$

for konstant rente $r > 0$.

Formelen $S_n^{\text{ann, u}}$ beskriver summen av oppspart kapital når man setter av samme kapitalen K ved begynnelsen av hver termin i n antall terminer.

Summen $S_n^{\text{ann, u}}$ er da oppspart beløp umiddelbart etter at siste beløp er avsatt.

K_0 beskriver den nåverdien man må ha dersom man skal ta ut/betale tilbake samme beløp K i n terminer fremover.

- a) Ta utgangspunkt i lign.(14) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på K alene og skrives på følgende form:

$$K = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (15)$$

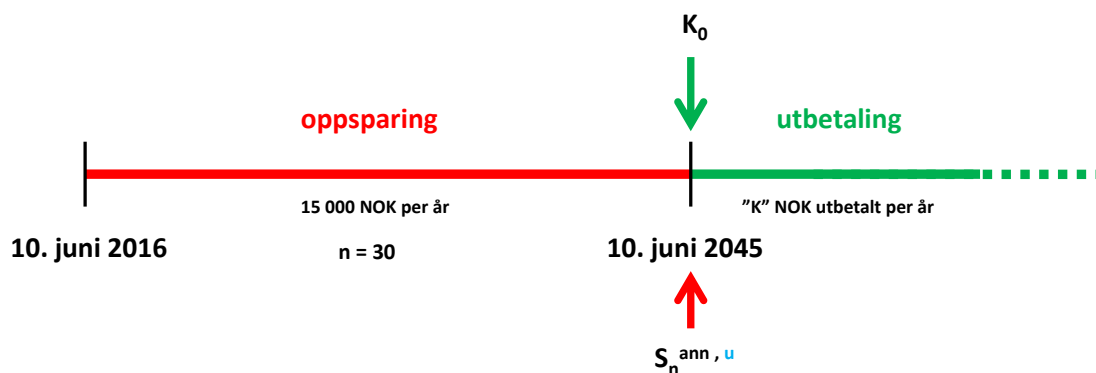
- b) Ta atter en gang utgangspunkt i lign.(14) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på n alene og skrives på følgende form:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{K_0 r}{K}}\right)}{\ln(1+r)} \quad (16)$$

Ola Johansen er 40 år og ønsker å sette av penger til sin pensjon.
Vi skal bruke lign.(13)-(16) for å se nærmere på pensjonen til Ola.

Han bestemmer seg for å sette av et årlig beløp på $K = 15\,000$ NOK med første innbetaling i dag, dvs. 10. juni 2016.
Siste beløp blir satt inn 10. juni 2045, dvs. det settes inn totalt $n = 30$ årlige beløp.

Anta at renten er $r = \frac{5\%}{100\%} = 0.05$ i resten av oppgaven.



Figur 4: Først sparing. Så utbetaling.

- c) Hvor stort beløp $S_n^{\text{ann}, u}$ har Ola spart opp den 10. juni 2045, dvs. like etter at siste innskudd er satt inn i banken?
- d) Den 10. juni 2045 så ønsker han å ta ut det oppsparte beløpet fra oppgave 3c i faste årlige beløp de neste $n = 10$ årene.

Hvor stor blir den årlige utbetalingen disse 10 årene?

e) Dersom Ola istedet bestemmer seg å ta ut 60 000 NOK i året i pensjon, hvor lenge rekker da det oppsparte beløpet fra oppgave 3c? ⁵

f) Anta at Ola kun ønsker å leve på renten av sin pensjon $S_n^{\text{ann}, u}$.

Hvor mye kapital K må Ola sette av årlig fra og med år 2016 til og med år 2045, dvs. $n = 30$, dersom han skal få utbetalt 55 000 NOK per år som pensjonist? ⁶



Figur 5: Pensjon.

⁵Tips: bruk en av formlene fra en av deloppgavene foran.

⁶Denne oppgaven er litt vanskelig. Ikke bruk for mye tid på den dersom du ikke får den til.

Oppgave 4: (økonomi)

En student ved Høgskolen i Molde har et budsjett på 8500 NOK per måned som hun skal bruke på bensinutgifter og husleie.

Anta at prisen på bensin er 15 NOK per liter. Anta videre at den typiske husleieprisen på hybler i Molde er 250 NOK per kvadratmeter. Dermed:

$$p_x = 15 \text{ NOK/liter} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (17)$$

$$p_y = 250 \text{ NOK/m}^2 \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (18)$$

Budsjettligningen for studenten er da $p_x x + p_y y \leq m$, dvs.:

$$15x + 250y \leq 8500 \quad (19)$$

hvor $m = 8500$ NOK er samlet budsjett per måned for de to godene og

$$x = \text{antall liter bensin per måned} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (20)$$

$$y = \text{antall kvadratmeter m}^2 \text{ på hybelen} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (21)$$

Anta at nytt ved forbruk av bensin x (gode 1) og husleiegifter y (gode 2) er bestemt av nyttefunksjonen: ($x > 0$ og $y > 0$)

$$U(x, y) = 2 \ln(x) + 15 \ln(y) \quad (22)$$



Figur 6: Bensin og hybel.

- a) Regn ut nytten $U(x, y)$ for $x = 60$ og $y = 25$.
- b) Vis at $x = 60$ og $y = 25$ er innenfor budsjettet.
- c) Hvor mye bensin x og hvor stor hybel y kan studenten leie for å *maksimere* nytten $U(x, y)$ innenfor budsjettets rammer? ⁷ ⁸
- d) Hvor mye av budsjettet på 8500 NOK brukes dersom nytten maksimeres?



⁷Dvs. finn x og y som gir størst nytte $U(x, y)$. Bruk **Lagrange multiplikator** metoden.

⁸Ta det for gitt at $U(x, y)$ oppnår et globalt maksimum med budsjettligningen som bibetingelse.

Hovedeksamen 2016

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Mandag 19. desember 2016
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde, Bergen, Egersund, Orkdal, Kragerø, Vefsn: Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Terje Bach / 932 55 838
Hjelpemidler	: KD + formelsamling + generell ordbok morsmål/norsk/engelsk i papirformat
Antall sider inkl. forsiden	: 15 + vedlegg (1 side)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**

Oppgave 1: (økonomi, logistikk og LP optimalisering)

Ekornes ASA er en norsk møbelprodusent med hovedkontor i Sykkylven i Møre og Romsdal. Selskapet er mest kjent for varemerket Stressless. Stressless blir brukt på firmaets kolleksjon av regulerbare stoler, se figur 1.

La oss forenkle situasjonen for Ekornes og anta at de kun produserer to typer stressless-stoler. En standard versjon, type 1, og en luksus versjon, type 2. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

$$\begin{aligned}x &= \text{antall produserte stresslesser per dag av type 1} \\y &= \text{antall produserte stresslesser per dag av type 2}\end{aligned}$$

Anta at avdelingen til Ekornes som driver med produksjon av disse stolene har begrenset med ressurser. Arbeidsstyrken de rår over har 24 timer disponibelt til produksjon av komponenter per dag, 16 timer til montering per dag og kun 9 timer til pakking per dag.

Disse **restriksjonene** kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$\text{restriksjoner} : \begin{cases} 3x + 2y \leq 24 & (\text{produksjon av komponenter}) \\ x + 2y \leq 16 & (\text{montering}) \\ x + y \leq 9 & (\text{pakking}) \end{cases} \quad (1)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.



Figur 1: Stressless.

Anta videre at fortjenesten $F(x, y)$ til Ekornes ved salg av slike stoler er gitt ved:

$$F(x, y) = 4000x + 3000y \quad (2)$$

Denne funksjonen er gitt i norske kroner (NOK).

Ekornes ønsker å **maksimere** denne fortjenesten.

- a) Hvor lang tid tar det å **produsere komponentene** til en stol av type 1? Og type 2?
Hvor lang tid tar det å **montere** en stol av type 1? Og type 2? ¹

- b) Gjør om ulikhetene i lign.(1) til likheter og vis at restriksjonene kan skrives

$$y(x) = 12 - \frac{3}{2}x \quad (3)$$

$$y(x) = 8 - \frac{1}{2}x \quad (4)$$

$$y(x) = 9 - x \quad (5)$$

hvor y er en funksjon av x .

- c) I vedlegget helst bakerst i oppgavesettet finner du tre verditabeller og ett koordinatsystem.
Fyll ut verditabellene og plott lign.(3), (4) og (5) i dette koordinatsystemet. ²

- d) Skraver det området i figuren som tilfredsstiller alle restriksjonene.

¹I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

²Husk at vedlegget skal legges ved i din eksamensbesvarelse.

Husk også å skrive inn ditt kandidatnummer på vedlegget.

- e) Er det noen av de tre ressursene som ikke er en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av x og y ? Gi en *kort* begrunnelse.
- f) Fortjenesten i lign.(2) skal **maksimeres** under restriksjonene beskrevet av lign.(1). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.
- i) Indiker alle *hjørneløsninger* på figuren fra oppgave 1c.
- ii) Les av alle hjørneløsninger ³ fra grafen og regn ut tilhørende fortjenester $F(x, y)$.
- iii) Hvilken kombinasjon av x og y gir *maksimal* fortjeneste $F(x, y)$?



³Dvs. les av koordinatene (x, y) for alle hjørneløsninger.

Oppgave 2: (finansmatematikk)

Hardhaus-Per skal endelig få oppfylt sin drøm om å få sin egen motorsykkel.
For å realisere denne drømmen må hardhaus-Per låne

$$K_0 = 210\,000 \text{ NOK} \quad (6)$$

i en bank. Anta at renten er $r = \frac{6.5\%}{100\%} = 0.065$ og at lånet er et **annuitetslån**.
Lånet skal betales tilbake etter $n = 15$ år. Første terminbeløp betales inn ett år etter låneopptak.

- a) Hvor stort er det årlige terminbeløpet K ? ⁴
- b) Det første året må Per betalte rente av hele beløpet K_0 .
Hvor mye rente betaler han det første året?
- c) Hvor mye avdrag betaler han det første året? ⁵



Figur 2: Motorsykkel.

⁴Se side 83 i formelsamlingen.

⁵Tips: Bruk sammenhengen

$$\overbrace{\text{terminbeløp}}^{\text{oppg. 2a}} = \text{avdrag} + \overbrace{\text{rente}}^{\text{oppg. 2b}} \quad (7)$$

for det første året.

Hardhaus-Per ønsker også å kjøpe seg en båt.

For å oppfylle drømmen om båt må han ta opp et nytt lån.

Siden dette er et forbrukslån så er renten høy, nemlig $r = \frac{9\%}{100\%} = 0.09$.

Men hardhaus-Per er usikker på hvor stort lån han greier å ta opp.

Anta at han har to mulige alternativ for tilbakebetaling av et slikt båtlån:

A) Han betaler faste terminbeløp $K = 25\,000$ hvert år i $n = 15$ år.
Første avbetaling skjer om ett år.

B) Han betaler faste terminbeløp $K = 29\,000$ hvert år i $n = 15$ år.
Første avbetaling skjer om 4 år.

d) Hvor stort lån kan hardhaus-Per ta opp med alternativ **A**? ⁶



Figur 3: Båt.

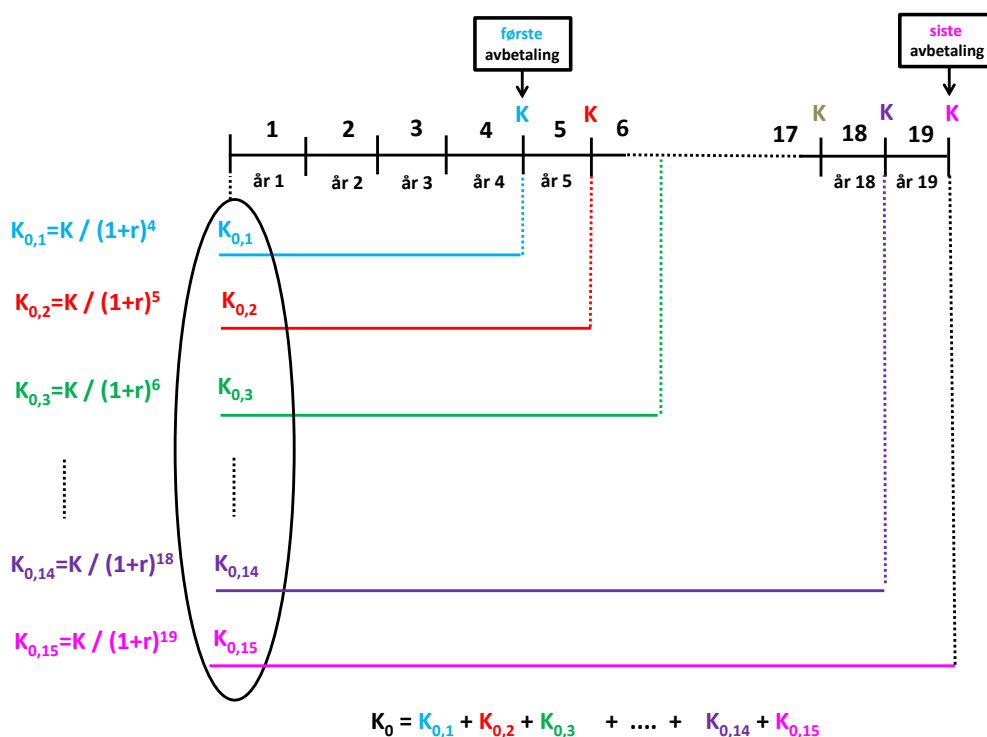
⁶Finn hva slags nåverdi K_0 som alternativ **A** svarer til. Se formelsamlingen side 81.

Dersom første avbetaling skjer etter 4 år, som i alternativ **B**, så er tidslinjen som beskriver nedbetalingen vist i figur 4. Det totale lånet som Per kan ta opp er da:

$$K_0 = K_{0,1} + K_{0,2} + K_{0,3} + \dots + K_{0,14} + K_{0,15} \quad (8)$$

- e) Bruk lign.(8) samt formlene for $K_{0,1}$, $K_{0,2}$ osv. fra figur 4 til å vise at det totale lånet K_0 som Per kan ta opp, for alternativ **B**, er gitt ved:

$$K_0 = \frac{K}{(1+r)^4} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{14}} + \frac{1}{(1+r)^{15}} \right)}^{\text{geometrisk rekke}} \quad (9)$$



Figur 4: Tidslinje.

- f)** Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke og vis at lign.(9) kan skrives

$$K_0 = \frac{K}{(1+r)^4} \frac{\frac{1}{(1+r)^{15}} - 1}{\frac{1}{1+r} - 1} \quad (10)$$

- g)** Bruk lign.(10) og regn ut hvor stort lån K_0 som Per kan ta opp med alternativ **B**.⁷



⁷Sett tallene for K og r inn i lign.(10) og regn ut tallsvaret.

Oppgave 3: (priselastisitet og logistikk)

CMA Group er verdens tredje største containerskipsoperatør.

Anta at for en av rutene til CMA Group mellom Norge og Asia så kan sammenhengen mellom etterspørselen av antall containere som skal fraktes på denne ruten per måned, og prisen p per container for transporten, beskrives av følgende lineære funksjon:

$$x(p) = 50 - 2p \quad , \quad 0 \leq p \leq 25 \quad (11)$$

hvor

$$x(p) = \text{etterspørsel av antall containere som skal transporteres fra Norge til Asia per måned} \quad (12)$$

$$p = \text{pris per container for transport mellom Norge og Asia i 1000 NOK} \quad (13)$$

I denne oppgaven skal vi se på *priselastisiteten* til etterspørselen av transport av containere for den aktuelle ruten. Vi skal studere etterspørselen sin følsomhet for endring i prisen. *Priselastisiteten* kan skrives på følgende halvmatematiske form:

$$E_p(x) = \frac{\% \text{-vis endring i etterspørselen}}{\% \text{-vis endring i prisen}} \quad (14)$$



Figur 5: CMA Group.

Matematisk er denne *pris*elastisiteten definert ved:

$$E_p(x) = \frac{dx(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \quad (15)$$

- a) Vis at priselastisiteten for den aktuelle ruten er gitt ved:

$$E_p(x) = \frac{p}{p - 25} \quad (16)$$

- b) Definisjonsmengden til $E_p(x)$ i lign.(16) er $0 \leq p < 25$, altså $p = 25$ er ikke inkludert. Hvorfor er ikke $p = 25$ en del av definisjonsmengden til $E_p(x)$ i lign.(16)?

- c) Hva slags pris p må CMG Group sette for at priselastisiteten skal være nøytralelastisk? ⁸

- d) Priselastisiteten er elastisk dersom $E_p(x) < -1$.
Vis at $E_p(x)$ er elastisk og innenfor definisjonsmengden til $E_p(x)$ dersom

$$12.5 < p < 25 \quad (17)$$

- e) Hva er verdien på priselastisiteten dersom prisen er $p = 13.64$?

- f) Bruk svaret fra oppgave 3e til å finne hvor mye den %-vise etterspørselen vil endre seg dersom *prisen* på containertransporten øker med 2.8 %. ⁹

■

⁸Se side 53 eller 54 i formelsamlingen dersom du ikke husker hva nøytralelastisk er.

⁹Bruk gjerne lign.(14): Du skal finne “%-vis endring i *etterspørselen*” når du vet at:

$$\text{\%-vis endring i } \textit{prisen} = 2.8 \% \quad (18)$$

Dette betyr at du vet nevneren i lign.(14). Og du skal finne telleren.

Oppgave 4: (økonomi , optimalisering , Lagrange multiplikator)

Doosan i Fræna utenfor Molde produserer dumpere.

Anta at kostnaden $K(x)$ ved å produsere x antall dumpere er beskrevet av følgende matematiske modell:

$$K(x) = 2x^2 + 72x + 720 \quad (19)$$

hvor ¹⁰ ¹¹

$$x = \text{antall dumpere som produseres} \quad (20)$$

$$K(x) = \text{kostnaden ved å produsere } x \text{ antall dumpere, i } \underline{\text{antall}} \text{ 1000 NOK} \quad (21)$$

Doosan selger dumpere til det **norske** og **amerikanske** markedet.



Figur 6: Doosan dumpere.

¹⁰Legg merke til at x er en *dimensjonsløs* variabel, dvs. en størrelse *uten benevning*. Det samme gjelder kostnadsfunksjonen $K(x)$ - den er dimensjonsløs - dvs. uten benevning. For å finne den virkelige kostnaden må man multiplisere $K(x)$ med 1000 NOK.

¹¹Vi antar at antall produserte dumpere er det samme som antall dumpere som selges, dvs. Doosan har ikke lager.

La oss først kun se på det **norske** markedet.

Anta at sammenhengen mellom prisen p_x på dumpere og antall dumpere x som selges til det **norske** markedet er:

$$p_x = 312 - 2x \quad (22)$$

hvor

$$p_x = \begin{array}{l} \text{prisen for en dumper som selges til det } \textbf{norske} \text{ markedet} \\ \text{i } \underline{\text{antall}} \text{ } 1000 \text{ NOK} \end{array} \quad (23)$$

$$x = \underline{\text{antall}} \text{ dumpere som selges til det } \textbf{norske} \text{ markedet} \quad (24)$$

- a)** Vis at fortjenesten $F(x)$ ved å selge x antall dumpere til det **norske** markedet er gitt ved: ¹²

$$F(x) = -4x^2 + 240x - 720 \quad (25)$$

- b)** Hvor mange dumpere må Doosan produsere og selge til det **norske** markedet for å maksimere fortjenesten $F(x)$? ¹³

- c)** Vis at det ekstremalpunktet du fant i oppgave **4b** er et maksimum. ¹⁴

- d)** Hvor stor blir den maksimale fortjenesten?

- e)** Hva slags pris p_x bør Doosan sette på sine dumpere for å maksimere fortjenesten $F(x)$?

¹²Tips: $F(x) = p_x x - K(x)$.

¹³Dvs. finn verdien til x som gir maksimal $F(x)$.

¹⁴Tips: Bruk 2. derivasjonstesten, se formelsamling.

La oss nå også inkludere det **amerikanske** markedet.

Anta at sammenhengen mellom prisen p_y på dumpere og etterspørselen y av antall dumpere i USA er:

$$p_y = 432 - 4y \quad (26)$$

hvor

$$p_y = \text{prisen for en dumper som selges til det amerikanske markedet i antall 1000 NOK} \quad (27)$$

$$y = \text{antall dumpere som selges til det amerikanske markedet} \quad (28)$$

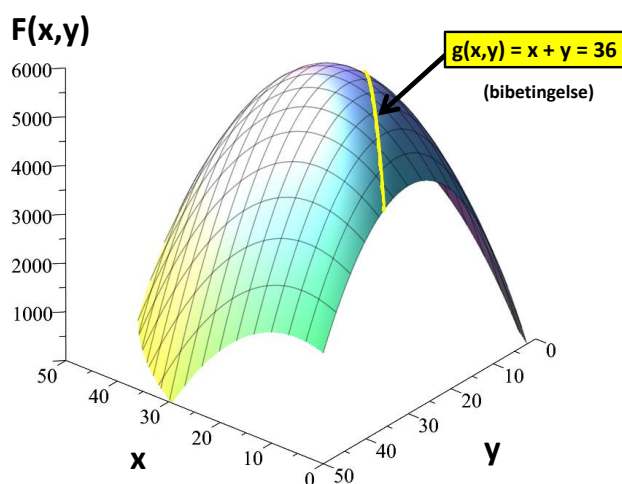
Dersom Doosan selger dumpere til begge markedene samtidig, dvs. både til det **norske** og det **amerikanske** markedet, så er fortjenesten $F(x, y) = p_x x + p_y y - K(x + y)$ gitt ved:

$$F(x, y) = -4x^2 - 4xy - 6y^2 + 240x + 360y - 720 \quad (29)$$

(Du skal ikke vise lign.(29). Bare ta den for gitt.)

La oss se på en begrenset tidsperiode, f.eks. et halvt år. Pga. begrenset bemanning med riktig kompetanse så greier Doosan kun å produsere 36 dumpere i halvåret. Matematisk betyr det:

$$g(x, y) = x + y = 36 \quad (\text{bibetingelse}) \quad (30)$$



Figur 7: $F(x, y)$ og $g(x, y)$.

f) Skriv opp Lagrange-funksjonen $L(x, y)$ for optimaliseringsproblemet bestemt av lign.(29) og (30).

g) Deriver Lagrange-funksjonen $L(x, y)$ og vis at vi da får ligningene:

$$-8x - 4y + 240 - \lambda = 0 \quad (31)$$

$$-4x - 12y + 360 - \lambda = 0 \quad (32)$$

h) Hvor mange dumpere må Doosan selge på det **norske** og det **amerikanske** markedet for å maksimere fortjenesten $F(x, y)$?^{15 16}



Figur 8: **Amerikanske** markedet.

¹⁵Altså finn x og y som gir maksimal $F(x, y)$, dvs. løs ligningssettet i lign.(31) og (32) sammen med bibetingelsen i lign.(30).

¹⁶For å være helt sikre på at vi finner maksimum av $F(x, y)$, og ikke et minimum, må man gjøre mer analyse. Det trenger du ikke gjøre i denne oppgaven. Vi antar i denne oppgaven at det stasjonære punktet man finner faktisk er **maksimum**. Du trenger heller ikke sjekke randen.

Økonomiavdelingen til Doosan oppdager at de er 120 000 NOK bak budsjett hva fortjeneste angår.

For å holde budsjettet så bestemmer ledelsen seg for å øke bemanningen slik at de kan produsere ϵ flere dumpere i halvåret. Den nye fortjenesten blir da:

$$F\left(x^* + \frac{2}{3}\epsilon, y^* + \frac{1}{3}\epsilon\right) = F(x^*, y^*) + 40\epsilon - \frac{10}{3}\epsilon^2 \quad (33)$$

hvor x^* og y^* er løsningen som du fant i oppgave 4h foran.
(Du skal ikke vise lign.(33). Bare ta den for gitt.)

- i) Hvor mange dumpere x og y må Doosan selge til det norske og det amerikanske markedet, henholdsvis, for å oppnå den ønskede økningen i fortjeneste? ¹⁷

■

¹⁷Denne oppgaven er kort, men litt vanskelig. Ikke bruk alt for lang tid på den dersom du ikke får den til.

Vedlegg

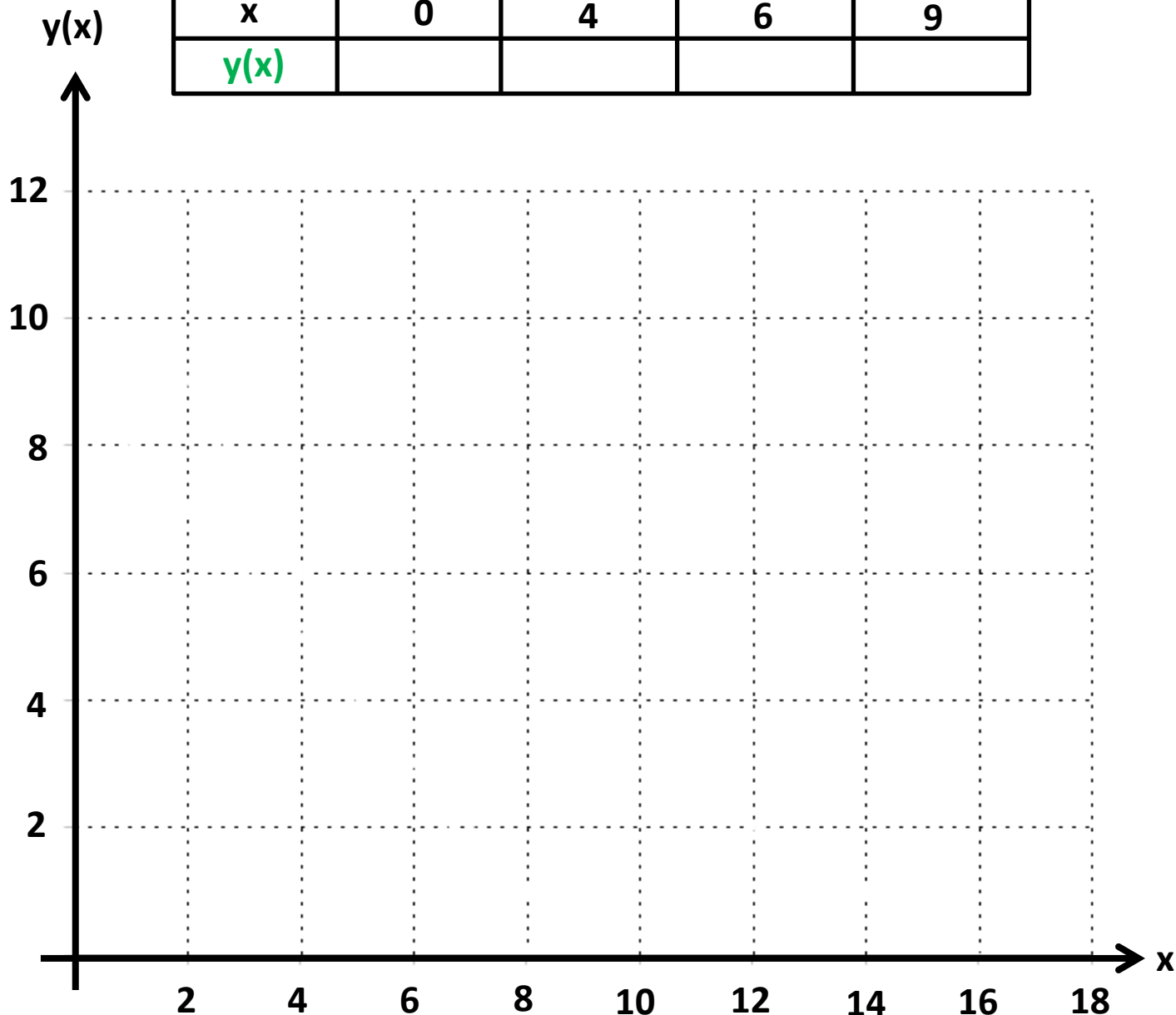
Kandidatnummer: _____

(skriv inn ditt kandidatnummer her)

x	0	2	4	8
y(x)				

x	0	6	12	16
y(x)				

x	0	4	6	9
y(x)				



Kontinuasjonseksamen 2016

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Tirsdag 6. juni 2017
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling i MAT100 fra 2016 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 13 + vedlegg (1 side)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.
- Det er totalt 4 oppgaver.

Oppgave 1: (logistikk og transport)

Glamox AS er en produsent av lysarmatur og varmeovner. Fra fabrikkene i Molde leverer Glamox produkter til forhandlere over hele verden, blant annet USA.

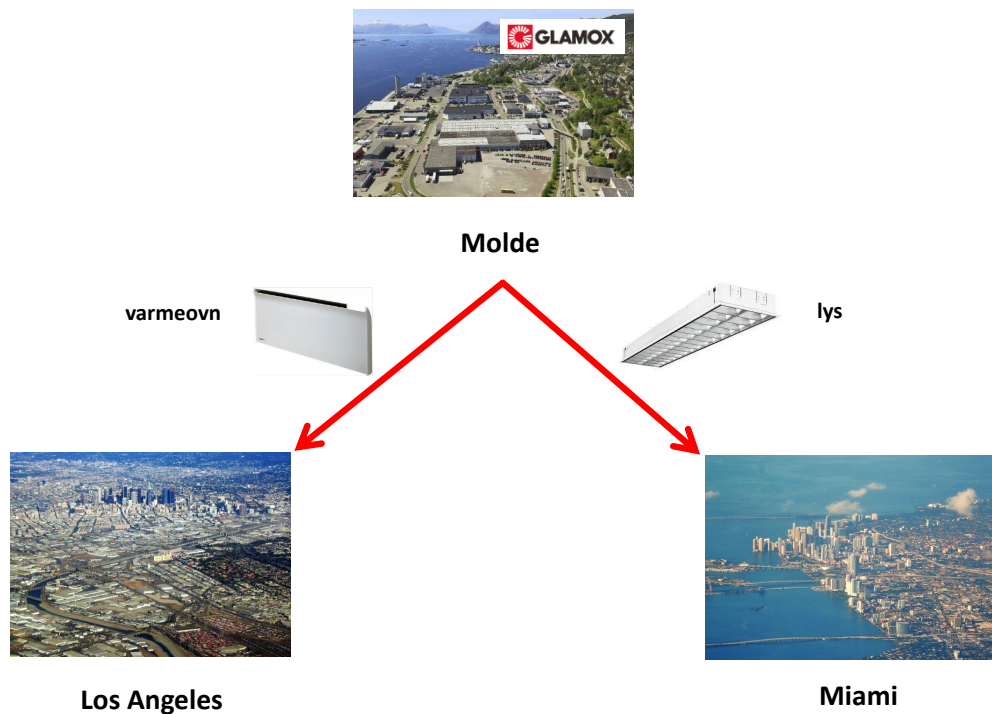
Vi skal i denne oppgaven se på transporten av varmeovner av typen “*TPA 1000W Panel*” til Los Angeles og lysarmaturen av typen “*DLT RT(M)*” til Miami, se figur 1.

Disse varmeovnene og lysarmaturene blir produsert i Molde og skal transporteres til henholdsvis Los Angeles og Miami.

Glamox vurderer å bruke følgende rederier for transporten mellom Norge og USA:

- CMA Group
- Hapag-Lloyd

som begge har ruter til både Los Angeles og Miami.



Figur 1: Transport til Los Angeles og Miami.

La oss definere følgende variabler:

$$x_1 = \text{antall varmeovner som skal transporteres til Los Angeles med CMA Group} \quad (1)$$

$$x_2 = \text{antall lysarmatur som skal transporteres til Miami med CMA Group} \quad (2)$$

og

$$y_1 = \text{antall varmeovner som skal transporteres til Los Angeles med Hapag-Lloyd} \quad (3)$$

$$y_2 = \text{antall lysarmatur som skal transporteres til Miami med Hapag-Lloyd} \quad (4)$$

dvs. 1 = Los Angeles og 2 = Miami.

Etterspørselen er 800 stk. varmeovner til Los Angeles og 900 lysarmaturer til Miami:

$x_1 + y_1$	$=$	800	(varmeovner)	(5)
$x_2 + y_2$	$=$	900	(lys)	(6)

Begge rederiene CMG Group og Hapag-Lloyd har begrenset kapasitet.

CMG Group har begrenset kapasitet hva volum angår, de kan maksimalt ta med 20 000 dm³.

Hapag-Lloyd har begrensning når det gjelder vekt. De kan maksimalt ta med 3 000 kg.¹

Matematisk kan disse kapasitetsbegrensningene formuleres slik:

$10x_1 + 20x_2$	$\leq$	20 000 dm ³	(CMG Group)	(7)
$6y_1 + 6y_2$	$\leq$	3 000 kg	(Hapag-Lloyd)	(8)

a) Hvor stort volum tar en varmeovn? Og hvor mye veier en varmeovn?²

¹Årsaken til at kapasiteten er så liten er at fraktbåtene allerede er nesten fylt opp med annet gods.

²I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv ned svaret direkte. Uten regning.

- b) Vis at kapasitetsbegrensningen i lign.(7) kan skrives

$$x_2 \leq 1000 - 0.5x_1 \quad (\text{CMG Group}) \quad (9)$$

- c) Bruk etterspørselene i lign.(5) og (6) og vis at kapasitetsbegrensningen i lign.(8) kan skrives

$$x_2 \geq 1200 - x_1 \quad (\text{Hapag-Lloyd}) \quad (10)$$

- d) I vedlegget bakerst i dette oppgavesettet finner du to verditabeller og et koordinatsystem. Fyll ut verditabellene og plott ligningene $x_2(x_1) = 1000 - 0.5x_1$ og $x_2(x_1) = 1200 - x_1$, som tilsvarer likhet istedet for ulikhet i lign.(9) og (10), i dette koordinatsystemet.

- e) Skraver det området i figuren som tilfredsstiller kapasitetsbegrensningene. ³

³Legg merke til at ulikhetene i lign.(9) og (10) er motsatt vei.

Anta at transportkostnaden C forbundet med transporten av varene til USA er:

$$C = 70x_1 + 90x_2 + 20y_1 + 60y_2 \quad (11)$$

f) Bruk etterspørselene i lign.(5) og (6) og vis at C i lign.(11) kan skrives

$C(x_1, x_2) = 50x_1 + 30x_2 + 70\,000 \quad (12)$

g) Transportkostnaden i lign.(12) skal **minimeres** under kapasitetsbegrensningene i lign.(5) og (6). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.

i) Indiker alle *hjørneløsninger* på figuren fra **1e**.

ii) Les av alle hjørneløsninger ⁴ fra grafen og regn ut tilhørende kostnad $C(x_1, x_2)$.

iii) Hvor mange varmeovner og hvor mange lysarmaturer må transporteres med **CMA Group** dersom transportkostnaden $C(x_1, x_2)$ skal minimeres? ⁵
Hva er transportkostnaden $C(x_1, x_2)$ da?

h) Hvor mange varmeovner og hvor mange lysarmaturer må transporteres med **Hapag-Lloyd** dersom transportkostnaden $C(x_1, x_2)$ skal minimeres? ⁶



⁴Dvs. les av koordinatene (x_1, x_2) for alle hjørneløsninger.

⁵Dvs. finn x_1 og x_2 .

⁶Dvs. finn y_1 og y_2 . Tips: Bruk lign.(5) og (6).

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

Ormen Lange-feltet er et gassfelt som ligger omtrent 140 km nordvest for Kristiansund. Gassen fra dette feltet går i rørledninger til øya Gossen utenfor Molde.

Anta at etterspørselen er 25 milliarder kubikkmeter gass det første året etter at produksjonen har startet, dvs.:⁷

$$d_1 = 25 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \quad (13)$$

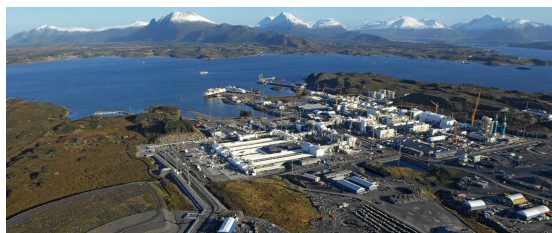
hvor 10^9 er en milliard.

La oss i denne oppgaven anta at etterspørselen av gass øker med 5 % per år, dvs. etterspørselen for de påfølgende årene er:

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 1.05 \\ d_3 &= d_1 1.05^2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ d_n &= \text{årlig ettersørsel av gass } n \text{ år etter oppstart} \end{aligned} \quad (14)$$

dvs. $d_n = d_1 1.05^{n-1}$.

a) Hvor stor vil etterspørselen av gass være 15 år etter oppstart, dvs. hva er d_{15} ?



Figur 2: Nyhamna på Gossen.

⁷Grunnen til at vi bruker notasjonen “ d ” er at ettersørsel er *demand* på engelsk.

Den samlede etterspørselen S_n av gass etter n år er da:

$$S_n = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n = \sum_{i=1}^n d_i \quad (15)$$

- b)** Hva slags type rekke representerer d_i , hvor $i = 1, 2, \dots, n$?
Gi en *kort* begrunnelse.

- c)** Vis at summen S_n er gitt ved:

$$S_n = 20 d_1 (1.05^n - 1) \quad (16)$$

- d)** Hvor stor er den totale etterspørselen av gass de 15 første årene?

Anta at påvist forekomst for Ormen Lange-feltet er 1200 milliarder kubikkmeter naturgass, dvs.:

$$F = 1200 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \quad (17)$$

- e)** Vis at antall år det vil ta før Ormen Lange-feltet er tømt, er gitt ved:

$$n = \frac{\ln \left(\frac{F}{20 d_1} + 1 \right)}{\ln 1.05} \quad (18)$$

- f)** Hvor lang tid tar det før Ormen Lange-feltet er tømt?



Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

Innen finansmatematikk er det mange formler.

En viktig formel i den sammenheng som vi har lært om i “*MAT100 Matematikk*” er:

$$S_n^{\text{ann, u}} = K \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (19)$$

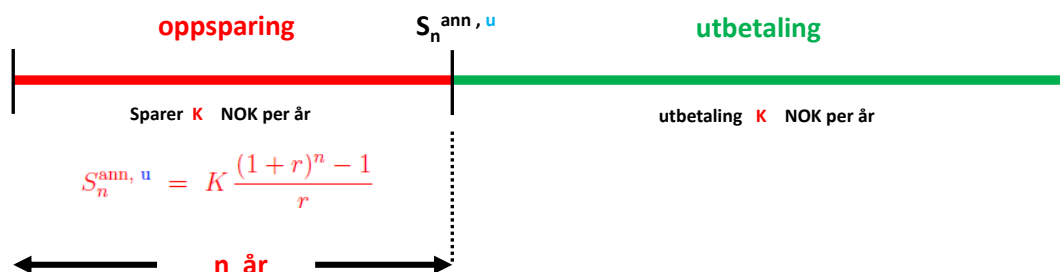
for konstant rente $r > 0$.

Formelen $S_n^{\text{ann, u}}$ beskriver summen av oppspart kapital når man setter av samme kapitalen K ved begynnelsen av hver termin i n antall terminer.

Summen $S_n^{\text{ann, u}}$ er da oppspart beløp umiddelbart etter at siste beløp er avsatt.

I denne oppgaven skal vi se på situasjonen når man først sparer penger, og deretter får utbetalt disse oppstarte midlene etter oppsparing, se figur 3.

a) Hvor mye har man spart – ifølge formelen i lign.(19) – når $n = 0$?



Figur 3: Først sparing, så utbetaling.

Du bestemmer det for å sette av et fast beløp på $K = 10\,000$ NOK per år i $n = 10$ år. Anta at renten er $r = \frac{2.65\%}{100\%} = 0.0265$ i resten av denne oppgaven.

- b) Hvor stort beløp $S_n^{\text{ann, u}}$ har du spart opp etter 10 år like etter at siste innskudd er satt inn i banken?

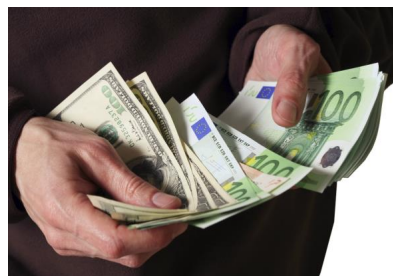
Den oppstarte summen $S_n^{\text{ann, u}}$ fra oppgave **3b** ønsker du å få utbetalt i samme årlige rate som innbetalingene var, dvs. $K = 10\,000$ NOK.

- c) Vil utbetalingene være kortere eller lengere enn 10 år?
Gi en *kort* begrunnelse.
- d) Ta utgangspunkt i lign.(19) og vis at denne ligningen kan løses med hensyn på K alene og skrives på følgende form:

$$K = \frac{r S_n^{\text{ann, u}}}{(1+r)^n - 1} \quad (20)$$



Foto: Colourbox



Figur 4: Først sparing, så utbetaling.

- e) Hvor stor må $S_n^{\text{ann}, \text{u}}$ være for å få en årlig renteutbetaling på 8 000 NOK etter oppsparingsperioden? ⁸
- f) Hvor mye kapital K må du sette av i året de $n = 10$ årene du sparer for å få utbetalt en rente på 8 000 NOK per år etter oppsparingsperioden?



⁸Altså man skal leve på renten som $S_n^{\text{ann}, \text{u}}$ gir.

Oppgave 4: (økonomi og logistikk)

NEAS, Nordmøre Energiverk AS, eier Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk.

La x og y betegne antall megawatt timer, MWh , som produseres i disse to lokale kraftverkene per døgn:

$$x = \text{antall } MWh \text{ per døgn som produseres ved Reinset kraftverk} \quad (21)$$

$$y = \text{antall } MWh \text{ per døgn som produseres ved Ulvund kraftverk} \quad (22)$$

Anta at kostnadene per døgn ved kraftverkene på Reinset og Ulvund er henholdsvis: (i NOK)

$$K_R(x) = x^2 + 500x \quad (23)$$

$$K_U(y) = y^2 + 300y \quad (24)$$

Den samlede kostnaden per døgn for disse to kraftverkene $K(x, y) = K_R(x) + K_U(y)$, dvs.: (i NOK)

$$K(x, y) = x^2 + 500x + y^2 + 300y \quad (25)$$



Figur 5: Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk.

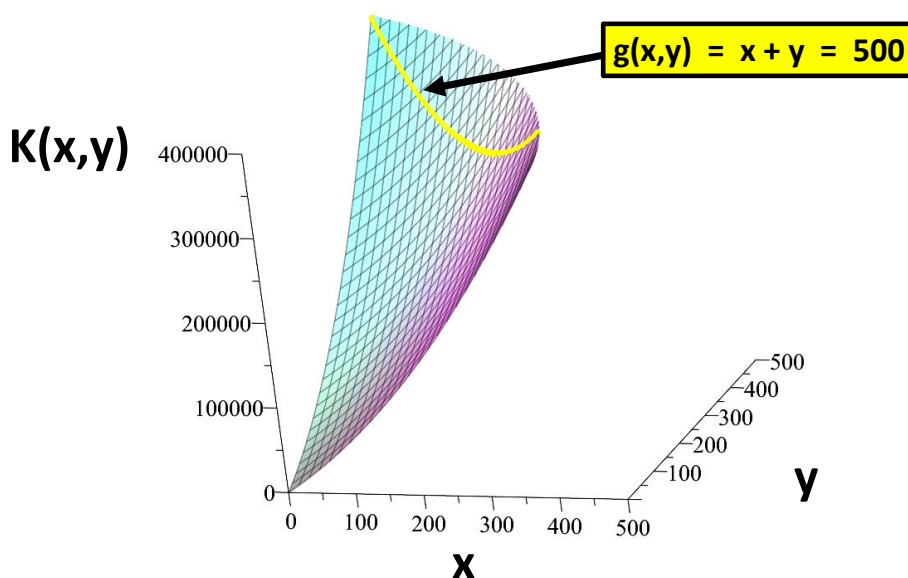
Antall MWh som samlet produseres per døgn $g(x, y)$ for disse to kraftverkene er $g(x, y) = x + y$.

NEAS har inngått en avtale med Norsk Hydro på Sunndalsøra om at de to aktuelle kraftverkene skal produsere og levere 500 MWh per døgn til en **fast pris**. Siden de har en fast pris på strømmen så ønsker de å minimere totalkostanden. NEAS ønsker altså å minimere $K(x, y)$ under bibetingelsen:

$$g(x, y) = x + y = 500 \quad (26)$$

I tillegg må selvsagt størrelsene x og y være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

- a) Hvordan må fordelingen av antall MWh være mellom de to kraftverkene for at NEAS skal minimere sin samlede kostnad $K(x, y)$?^{9 10}
- b) Hva er den minste samlede kostnaden $K_{\min}$ for NEAS i denne sammenheng?



Figur 6: $K(x, y)$ og $g(x, y)$.

⁹Dvs. finn x og y , si x^* og y^* , som gir minst $K(x, y)$. Bruk **Lagrange multiplikator** metoden.

¹⁰For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(25), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse. Men en slik analyse behøver du ikke å gjøre her. Du trenger heller ikke å sjekke randen.

NEAS opplever en økning i total etterspørsel av strøm per døgn.

Derfor vurderer de å produsere mer strøm. Ulvund kraftverket kan øke produksjonen med opptil 120 *MWh* per døgn. En slik økning av strømproduksjonen gir en økning i driftskostnadene på 10 *NOK/MWh* per døgn. Den nye, økte og samlede produksjonskostnaden blir da:

$$K_{\text{ny}}(x, y) = x^2 + 500x + y^2 + (300 + 10\epsilon)y \quad (27)$$

hvor $0 \leq \epsilon \leq 120$ med beslutningsvariabelen

$$\epsilon = \text{antall } MWh \text{ per døgn som NEAS bestemmer seg for å øke} \quad (28)$$

strømproduksjonen med for Ulvund kraftverk

Den nye, optimale fordelingen av antall *MWh* mellom krafverkene blir da:

$$x_{\text{ny}}^* = x^* + \frac{10}{4}\epsilon \quad (29)$$

$$y_{\text{ny}}^* = y^* - \frac{10}{4}\epsilon \quad (30)$$

hvor x^* og y^* er løsningen som du fant i oppgave 4a foran.

Ny, minimal og samlet kostnad er da lik den gamle optimale kostnaden + et nytt ekstreledd:

$$K_{\text{ny}}(x_{\text{ny}}^*, y_{\text{ny}}^*) = \overbrace{K(x^*, y^*)}^{\text{gammel}} + \overbrace{3000\epsilon - \frac{25}{2}\epsilon^2}^{\text{ekstra}} \quad (31)$$

(Lign.(27)-(31) skal du ikke vise. Bare ta dem for gitt.)

- c) For å oppnå tilstrekkelig dekningsbidrag sier økonomiavdelingen til NEAS at ekstrautgiftene forbundet med en eventuell økning i strømproduksjonen ikke må overskride 55 000 *NOK* per døgn.

Vis at den nye, optimale fordelingen av antall *MWh* mellom de to kraftverkene er: ¹¹

$$x_{\text{ny}}^* = 250 \text{ } MWh \quad , \quad y_{\text{ny}}^* = 250 \text{ } MWh \quad (32)$$

- d) Hvorfor blir de nye, optimale verdiene i lign.(32) like?
Gi en *kort* begrunnelse.

■

¹¹Denne oppgaven er litt vanskelig. Men det er ikke mye regning som skal til for å løse den.

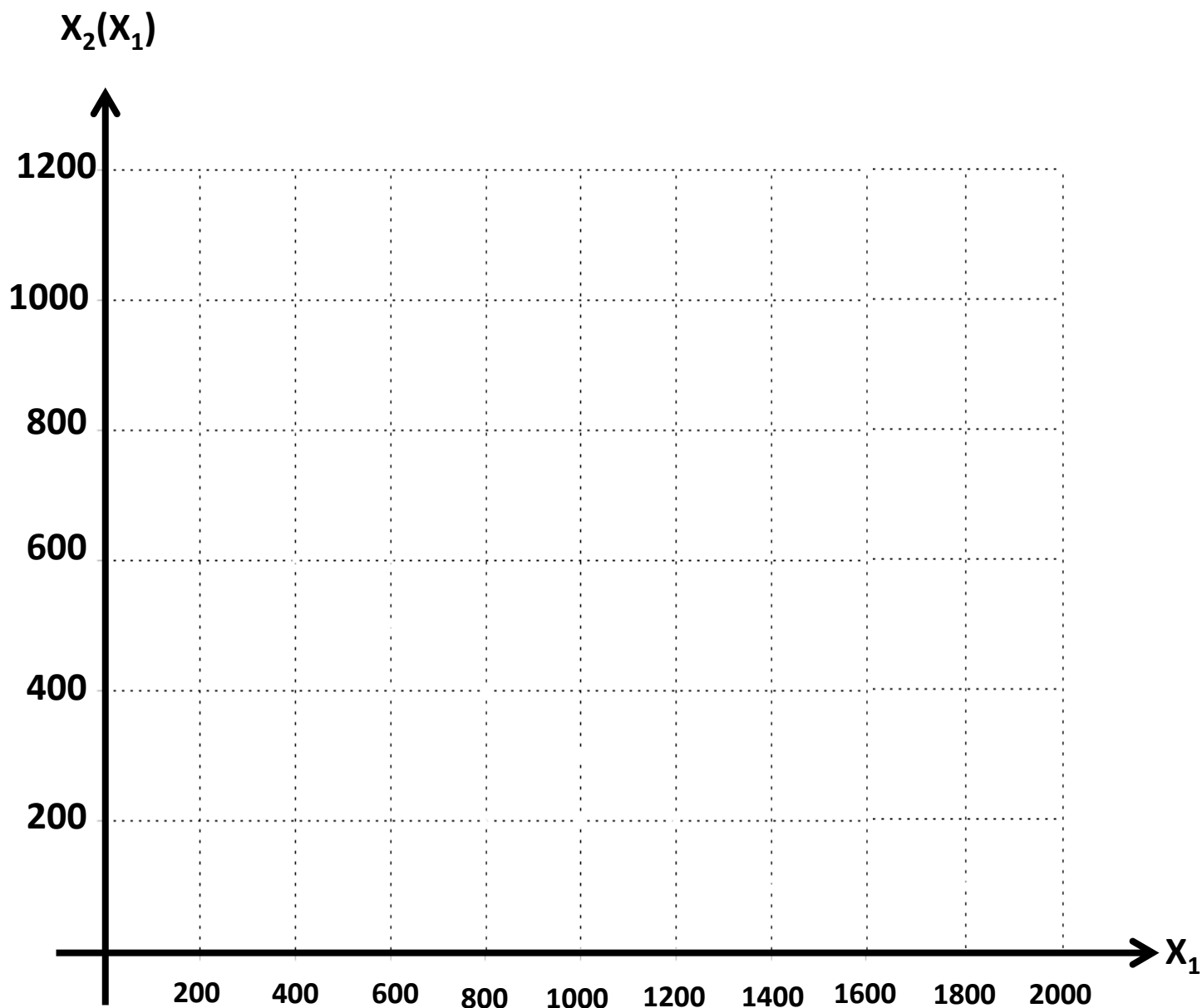
Vedlegg

Kandidatnummer: _____

(skriv inn ditt kandidatnummer her)

x_1	0	600	1400	2000
$x_2(x_1)$				

x_1	0	400	800	1200
$x_2(x_1)$				



Hovedeksamen 2017

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Torsdag 21. desember 2017
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling i MAT100 fra 2017 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 13
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**

Oppgave 1: (logistikk og økonomi)

Norsk Hydro på Sunndalsøra produserer aluminium, se figur 1.

Anta at anlegget på Sunndalsøra produserer aluminium i produksjonsserier.

For å bestemme produksjonsplanen for 2018 så ønsker Norsk Hydro å bestemme hvor mange tonn aluminium de skal produsere i hver produksjonsserie slik at de relevante kostnadene minimeres.

Selv om den årlige etterspørselen D av aluminium faktisk er varierende, gjør Hydro en forenkling og antar at denne etterspørselen er konstant.

Norsk Hydro ønsker da å se på en situasjon hvor **lager**kostnadene per år er $HQ/2$ og **oppstarts**kostnadene er DS/Q slik at summen av kostnader $TC(Q)$ per år er gitt ved:

$$TC(Q) = \underbrace{\frac{H}{2} Q}_{\text{lagerkost.}} + \underbrace{\frac{DS}{Q}}_{\text{oppstartskost.}} \quad (1)$$

hvor

$$Q = \text{størrelse på produksjonsserien (i antall tonn)} \quad (\text{“quantity”}) \quad (2)$$

$$H = \text{lagerkostnaden per tonn per år} \quad (3)$$

$$D = \text{etterspørsel per år} \quad (\text{“demand”}) \quad (4)$$

$$S = \text{oppstartskostnad} \quad (5)$$



Foto: Norsk Hydro



Figur 1: Norsk Hydro på Sunndalsøra.

- a) La oss se nærmere på hvert av leddene i $TC(Q)$ i lign.(1).
- i) Dersom Q øker, vil da **lager**kostnaden øke eller minke?
 - ii) Dersom Q øker, vil da **oppstart**skostnaden øke eller minke?

Minimum av kostnadsfunksjonen $TC(Q)$ i lign.(1) inntreffer ved kvantumet

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \quad (6)$$

og kalles *EOQ*-formelen. (Denne formelen skal du ikke vise. Bare ta den for gitt).

- b) Lagernivået $i(t)$, hvor mange tonn aluminium som er på lager, varierer som funksjon tiden t . Innenfor en lagersyklus er lagernivået $i(t)$ gitt ved: ¹

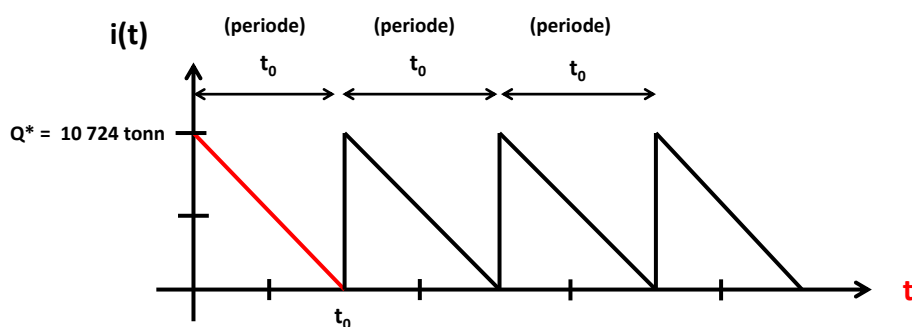
$$i(t) = Q^* - Dt \quad (7)$$

se rød linje i figur 2. Mønsteret repeterer seg som vist i figuren.

Lengden av lagersyklusen, dvs. perioden t_0 , er definert ved nullpunktet $i(t_0) = 0$ til den lineære funksjonen i lign.(7).

Vis at t_0 er gitt ved:

$$t_0 = \frac{Q^*}{D} \quad (8)$$



Figur 2: Lagernivå $i(t)$.

¹Lagersyklus - tiden fra lageret er fullt til lageret er tomt.

Anta at etterspørselen av aluminium for Norsk Hydro på Sunndalsøra er:

$$D = 230\,000 \text{ tonn per år} \quad (9)$$

Anta videre at oppstartstiden for en produksjonsserie av aluminium er 25 timer. Kostnaden for en slik oppstart er estimert til 50 000 NOK per time. Oppstartskostnaden S blir dermed:

$$S = 25 \cdot 50\,000 \text{ NOK} = 1\,250\,000 \text{ NOK} \quad (10)$$

Lagerkostnaden H per tonn aluminium per år er:

$$H = 5\,000 \text{ NOK per tonn per år} \quad (11)$$

- c) Sett inn tall og vis at antall tonn aluminium Q^* som må produseres i hver produksjonsserie for å minimere kostanden $TC(Q)$ er: ²

$$Q^* = 10\,724 \text{ tonn} \quad (12)$$

- d) Sett inn tall og vis at: ³

$$t_0 = 17 \text{ dager} \quad (13)$$

dvs. det tar 17 dager fra lageret er fullt til lageret er tomt.

■

²Tips: Bruk formelen i lign.(6).

³Tips: Bruk formelen i lign.(8). Husk at det er 365 dager i året.

Oppgave 2: (logistikk og økonomi - utvidet EOQ -formel)

Som tidligere nevnt, formelen i lign.(1) gjelder kun under en del forutsetninger.

En av disse forutsetningene er at hele ordren kan leveres i én leveranse.

Men ved produksjon av aluminium har man i realiteten en produksjonshastighet P , dvs. lageret fylles opp gradvis etterhvert som aluminiumen produseres.

Derfor får man en litt justert kostnadsfunksjon.

Anta at den nye, justerte kostnadsfunksjonen er:

$$K(Q) = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P}\right) Q + \frac{DS}{Q} \quad (14)$$

hvor

$$P = \text{produksjonshastighet, tonn per år} \quad (15)$$

a) Vis at optimum av den nye kostnadsfunksjonen $K(Q)$ i lign.(14) inntreffer når:

$$\tilde{Q}^* = \sqrt{\frac{2DS}{H(1 - \frac{D}{P})}} \quad (16)$$

Denne formelen er en *utvidelse* av EOQ -formelen.



Figur 3: Aluminium.

- b) For å være sikker på at $\tilde{Q}^*$ i lign.(16) representerer et *minimum* av $K(Q)$, og ikke et maksimum, kan vi f.eks. bruke “2. derivasjonstesten”.

Vis at den 2. deriverte av $K(Q)$ i lign.(14) er

$$\frac{d^2 K(Q)}{dQ^2} = \frac{2 D S}{Q^3}, \quad (17)$$

og argumenter for hvorfor dette resultatet viser at $\tilde{Q}^*$ i lign.(16) representerer et *minimum* av $K(Q)$.

I motsetning til oppgave 1 så består lagersyklusen her, i oppgave 2, av to faser:

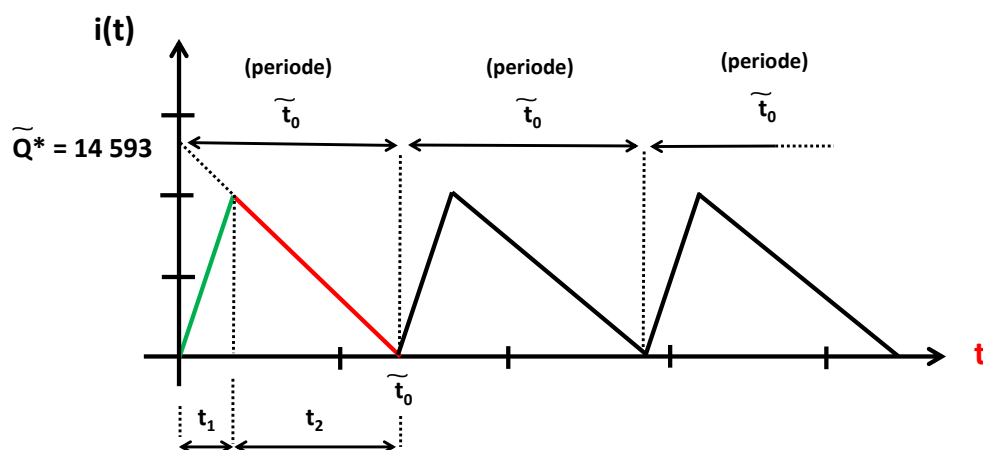
- 1) Fase 1: Produksjon og salg forekommer samtidig: (grønn linje i figur 4)

$$i_g(t) = (P - D)t \quad (18)$$

- 2) Fase 2: Kun salg fra lager: (rød linje i figur 4)

$$i_r(t) = \tilde{Q}^* - Dt \quad (19)$$

Mønsteret repeteres som funksjon av tiden t som vist i figuren:



Figur 4: Lagernivå $i(t)$.

- c) Vis at tiden t_1 , tiden for fase 1 i lagersyklusen, er gitt ved: ⁴

$$t_1 = \frac{\tilde{Q}^*}{P} \quad (20)$$

- d) Vis at tiden t_2 , tiden for fase 2 i lagersyklusen, er gitt ved: ⁵

$$t_2 = \tilde{Q}^* \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P} \right) \quad (22)$$

- e) Anlegget på Sunndalsøra har en produksjonsrate på:

$$P = 500\,000 \text{ tonn per år} \quad (23)$$

Regn ut tallverdien for t_2 ved å bruke lign.(22), $\tilde{Q}^* = 14\,593$ tonn per lagersyklus og etterspørslen D er som oppgitt i lign.(9) i oppgave 1.

Oppgi svaret i antall dager. ⁶

■

⁴Tips: t_1 bestemmes av *skjæringspunktet* mellom den grønne og den røde linjen.

⁵Tips: Fra figur 4 ser vi at $t_1 + t_2 = \tilde{t}_0$, dvs.:

$$t_2 = \tilde{t}_0 - t_1 \quad (21)$$

hvor t_1 er gitt ved lign.(20). I tillegg må du finne $\tilde{t}_0$.

⁶Husk at det er 365 dager i året.

Oppgave 3: (logistikk og økonomi - følsomhetsanalyse)

Kostnadsfunksjonen $K(Q)$ fra oppgave 2 er basert på flere antagelser.
Det er ikke sikkert at disse antagelsene er oppfylt.

Spørsmålet er om vi skal utvide *EOQ*-modellen videre eller om vi skal beholde $K(Q)$ som den er.

For å vurdere dette spørsmålet bestemmer Norsk Hydro seg for å gjøre en følsomhetsanalyse for kostnadsfunksjonen $K(Q)$ fra oppgave 2.

De ønsker altså å finne ut hvor følsom $K(Q)$ er for endringer i Q rundt $\tilde{Q}^*$, se figur 5.

Dermed har de et bedre grunnlag for å vurdere om de skal gjøre ytterligere utvidelser av *EOQ*-formelen.

La oss anta at det *virkelige* optimale kvantumet Q_{real}^* er en faktor z multiplisert med kvantumet $\tilde{Q}^*$ i lign.(16) fra oppgave 2, dvs. anta at:

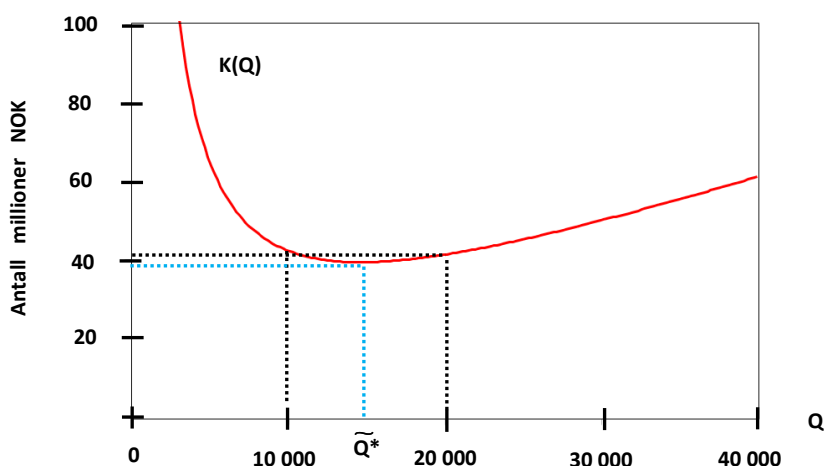
$$Q_{\text{real}}^* = z\tilde{Q}^* \quad (24)$$

hvor z er positiv, dvs. $z > 0$.

Man kan da vise at:

$$\frac{K(Q_{\text{real}}^*)}{K(\tilde{Q}^*)} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (25)$$

(Formelen i lign.(25) skal du ikke vise. Bare ta den for gitt).



Figur 5: Plott av $K(Q)$ fra oppgave 2.

- a) Dersom kostnaden $K(Q_{\text{real}}^*)$ ikke skal avvike med mer enn 5 % fra $K(\tilde{Q}^*)$, dvs. dersom $K(Q_{\text{real}}^*)/K(\tilde{Q}^*) \leq 1.05$, så er:

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \leq 1.05 \quad (26)$$

Vis da at: ⁷

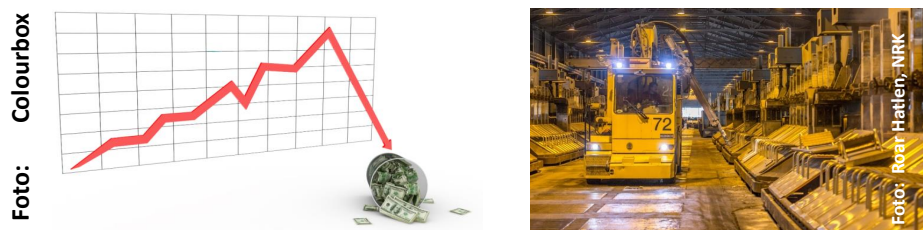
$$z^2 - 2.1z + 1 \leq 0 \quad (27)$$

- b) Faktoriser lign.(27) ved å bruke *ABC*-formelen og vis at den kan skrives:

$$(z - 0.73)(z - 1.37) \leq 0 \quad (28)$$

- c) Sett opp et fortegnsskjema for lign.(28) og vis at intervallet som z må ligge innenfor for at ulikheten i lign.(28) skal gjelde, er gitt ved:

$$0.73 \leq z \leq 1.37 \quad (29)$$



Figur 6: Økonomi og logistikk.

⁷Her er det meningen at du skal starte fra lign.(26) og komme frem til lign.(27).

- d) Dersom det virkelige optimale kvantumet Q_{real}^* er 20 % større enn $\tilde{Q}^*$, vil da Norsk Hydro bomme med mer eller mindre enn 5 % på lager- og oppstartskostnadene $K(Q)$?

Gi en *kort* begrunnelse for svaret.⁸



⁸Ingen utregninger behøves her. Bruk lign.(29) i din argumentasjon.

Oppgave 4: (økonomi)

Å framstille aluminium er en svært energikrevende prosess.

Anta at totalt forbruk b av elektrisk energi ved Norsk Hydro på Sunndalsøra i 2010 var ⁹

$$b = 5.0 \cdot 10^9 \text{ kWh} \quad (30)$$

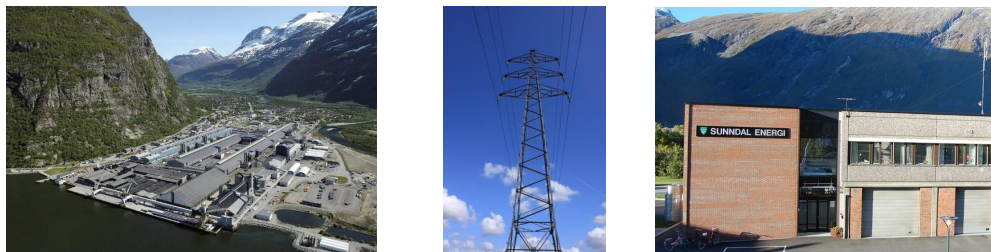
hvor 10^9 er én milliard.

Anta videre at strømforbruket til Norsk Hydro på Sunndalsøra øker med 2 % per år etter år 2010. Med notasjonen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{Hydros strømforbruk i år 2011} \\ a_2 &= \text{Hydros strømforbruk i år 2012} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_n &= \text{Hydros strømforbruk } n \text{ år etter år 2010} \end{aligned} \quad (31)$$

så ser vi da mønsteret

$$\begin{aligned} a_1 &= b \cdot 1.02^1 \\ a_2 &= b \cdot 1.02^2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_n &= b \cdot 1.02^n \end{aligned} \quad (32)$$



Figur 7: Strøm.

⁹kWh = kilowatt timer, men det ikke viktig for denne oppgaven.

- a) Hvor stort vil strømforbruket være i år 2022, dvs. hva er a_{12} ?

Oppgi svaret i antall milliarder kWh.

Norsk Hydro sitt samlede strømforbruk n år etter år 2010 er da:

$$S_n^{\text{forbruk}} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (33)$$

- b) Hva slags type rekke representerer a_i , hvor $i = 1, 2, \dots, n$?

- c) Vis at summen S_n^{forbruk} er gitt ved:

$$S_n^{\text{forbruk}} = 51b(1.02^n - 1) \quad (34)$$

- d) Hvor stort er Norsk Hydro sitt samlede strømforbruk i $n = 10$ årsperioden fra og med 2011 og til med 2020?

Oppgi svaret i antall milliarder kWh.

Ledelsen i Norsk Hydro ønsker å investere i bedre elektrolyselinjer for anlegget på Sunndalsøra. Anta at kostnaden av en slik oppgradering av anlegget er

$$K_0 = 250 \cdot 10^6 \text{ NOK} \quad (35)$$

dvs. 250 millioner kroner.

Hydro tar opp lån for å finansiere denne oppgraderingen. De tar opp et serielån. Renten er 2.8 %, dvs. $r = 0.028$.

- e) Dersom Norsk Hydro ønsker å betale tilbake lånet i løpet av 20 år, hvor mye rente R_{20}^{serie} betaler de totalt disse årene? ¹⁰

Anta at renten r er konstant alle 20 årene. Oppgi svaret i antall millioner NOK.

Strømforbruket reduseres med 10 % som følge av forbedringen av elektrolyselinjene. Dersom strømprisen er p NOK per kWh så vil Norsk Hydro, n år etter investeringene, ha redusert strømkostnadene med

$$\Delta K_n = 0.1 p S_n^{\text{forbruk}} \quad (36)$$

- f) Vis at antall år n det tar før Norsk Hydro har spart inn investeringskostnaden K_0 og rentekostnaden R_{20}^{serie} som et resultat av reduserte strømkostnader ΔK_n , er gitt ved: ¹¹

$$n = \frac{\ln \left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1 \right)}{\ln 1.02} \quad (38)$$

■

¹⁰Se formelsamling for å finne formelen for R_n^{serie} .

¹¹Sett

$$\Delta K_n = K_0 + R_{20}^{\text{serie}} \quad (37)$$

bruk lign.(36) samt lign.(34) og løs med hensyn på n alene.

Kontinuasjonseksamen 2017

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Fredag 8. juni 2018
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling fra 2017 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 13
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.
- Kladdark skal ikke leveres inn. De blir ikke sensurert.
- Det er totalt 4 oppgaver.

Oppgave 1: (algebra)

a) Regn ut:

i) -5^2

ii) $(-5)^2$

b) Regn ut. Vis gjerne litt mellomregning. ¹

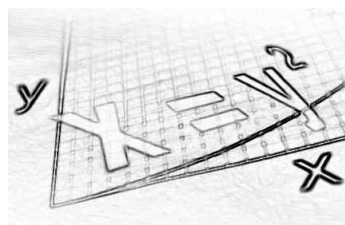
$$\frac{(4 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{-3})}{(6 \cdot 10^{-6})} \quad (1)$$

c) Løs ligningen:

$$\frac{2x - 5}{x - 1} = 1 \quad (2)$$

d) Løs ulikheten: ²

$$\frac{2x - 5}{x - 1} > 1 \quad (3)$$



Figur 1: Algebra.

¹Selv om det her ikke er nødvendig å bruke kalkulator så kan du gjerne bruk kalkulatoren til å sjekke at svaret ditt er rett.

²Her bør du sette opp fortegnsskjema.

e) Deriver funksjonen:

$$f(x) = x^2 + 2 \quad (4)$$

f) Deriver funksjonen:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} \quad (5)$$

g) Deriver funksjonen:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (6)$$

h) Deriver funksjonen:

$$TC(Q) = D \cdot C + \frac{H}{2}Q + \frac{D \cdot S}{Q} \quad (7)$$

hvor C , D , H og S er konstanter.

i) Flybillettprisen går opp fra 2 000 NOK til 2 200 NOK.
Hva er endringen i prosent?

■

Oppgave 2: (logistikk)

Hustadmarmor AS er en stor produksjonsfabrikk i Elnesvågen i Fræna kommune.

Bedriften produserer og leverer “*slurry*”.

Slurry er en flytende hvit væske produsert fra kalkstein og marmor.

Når slurryen er ferdigprodusert så lagres den i en stor lagertank.

Hustadmarmor AS overvåker **lagernivået** $i(t)$ kontinuerlig ved hjelp av høydemålere i tanken.

Lagernivået kan beskrives av *balanseligningen* ved tiden t :

$$i(t) = \underbrace{q(t)}_{\text{inn}} - \underbrace{d(t)}_{\text{ut}} + i_0 \quad (8)$$

hvor (tiden t måles i antall timer)

$$i(t) = \text{antall tonn slurry på lager i tanken ved tiden } t, (“inventory”) \quad (9)$$

$$q(t) = \text{antall tonn slurry som er kommet inn på tanken i løpet av tiden } t \quad (10)$$

$$d(t) = \text{antall tonn slurry som har blitt tatt ut av tanken i løpet av tiden } t \quad (11)$$

$$i_0 = 10\,000, \text{ dvs. lagernivået ved tiden } t = 0 \text{ (i tonn slurry)} \quad (12)$$



Figur 2: Hustadmarmor. Slurry.

Anta at etterspørselsraten D av slurry er *konstant*, dvs. etterspørselen $d(t)$ er lineær i tid:

$$d(t) = Dt \quad (13)$$

hvor

$$D = \text{etterspørselsrate} \quad (\text{tonn/time}) \quad (14)$$

Anta videre at produksjonshastigheten α av slurry hos Hustadmarmor også er konstant, dvs. produksjonen $q(t)$ er linær i tid:

$$q(t) = \alpha t \quad (15)$$

hvor

$$\alpha = \text{produksjonshastighet} \quad (\text{tonn/time}) \quad (16)$$

Denne produksjonshastigheten α kan bestemmes av Hustadmarmor.

a) Vis, ved lign.(8), at lagernivået $i(t)$ kan beskrives av følgende ligning:

$$i(t) = (\alpha - D)t + i_0 \quad (17)$$

Anta at etterspørselen er $D = 3.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}$.

Dersom produksjonsraten er:

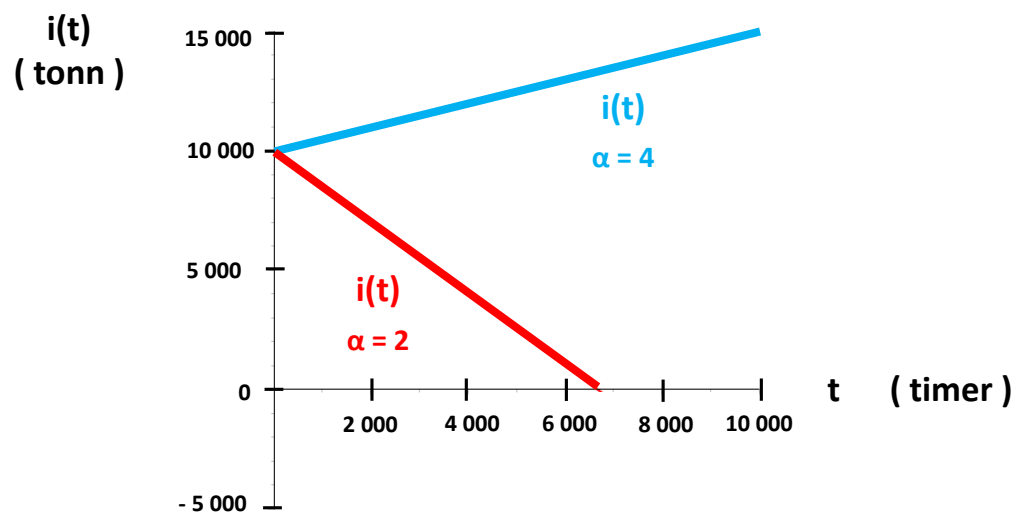
$$\alpha = 2 \frac{\text{tonn}}{\text{time}} \quad (18)$$

så blir lagernivået $i(t)$ i tanken som vist i den **røde** linjen i figur 3.

Dersom produksjonsraten er:

$$\alpha = 4 \frac{\text{tonn}}{\text{time}} \quad (19)$$

så blir grafen til lagernivået $i(t)$ i tanken som vist i den **blå** linjen i figur 3.



Figur 3: Plott av $i(t)$.

- b) Dersom produksjonsraten er "bare" $\alpha = 2 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}$, se rød linje i figur 3, så vil tanken gå tom ved et tidspunkt, si, t_{tom} .

Finn t_{tom} ved regning.³

- c) For å unngå at tanken blir tom for slurry så bestemmer Hustadmarmor seg for å øke produksjonshastigheten av slurry til $\alpha = 4 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}$, se blå linje i figur 3.

Anta at tanken vi ser på har maksimal kapasitet $i_{\text{max}} = 20\,000$ tonn slurry. Tanken vil da bli full ved et tidspunkt t_{full} .

Finn t_{full} ved regning.⁴

- d) Anta at Hustadmarmor bestemmer seg for å ha et konstant nivå $i_0 = 10\,000$ tonn slurry på tanken, dvs. uten at tanken går tom eller blir full med tiden.

Hvilken produksjonshastighet α må da Hustadmarmor benytte?⁵

³Oppgi svaret i antall måneder.

Bruk lign.(17). Tiden t_{tom} er nullpunktet for grafen og er bestemt av: $i(t_{\text{tom}}) = 0$.

⁴Oppgi svaret i antall år.

Bruk lign.(17). Tiden t_{full} er bestemt av: $i(t_{\text{full}}) = i_{\text{max}}$

⁵Denne oppgaven kan du løse enten ved å bare argumentere uten utregninger (1-2 setninger) eller begrunne via lign.(17).

Til tross for antagelsen om konstant etterspørselsrate D så forekommer det svingninger i virkeligheten, dvs. usikkerhet i etterspørselen.

For å ta høyde for denne usikkerheten så bestemmer Hustadmarmor seg for å ha et *sikkerhetslager* i_s .⁶

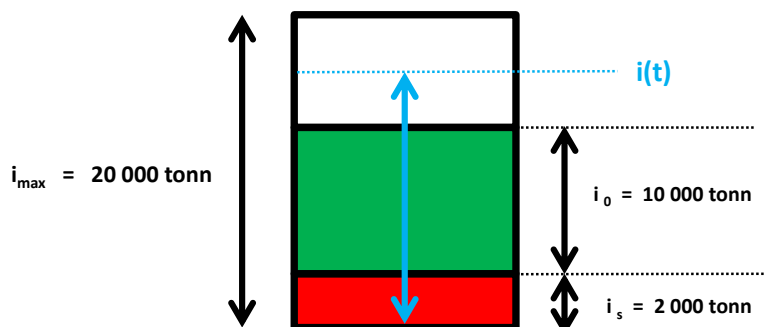
Anta Hustadmarmor bestemmer seg for at sikkerhetslageret skal være:

$$i_s = 2\,000 \text{ tonn} \quad (20)$$

- e) Bestem produksjonshastigheten α som Hustadmarmor må ha dersom de skal oppnå et lagernivå på:

$$i(t) = i_s + i_0 \quad (21)$$

i løpet av $t = 1000$ timer.⁷



Figur 4: Lagernivå.

⁶Et *sikkerhetslager* er et reservelager for sikre seg mot at man går tom for råstoff.

⁷Bruk lign.(17) og (21) for å finne α .

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

Emma er ferdig med sin utdanning om to år, nemlig sommeren 2020.

Da vil hun ha $K_0 = 400\,000$ NOK i studiegjeld.

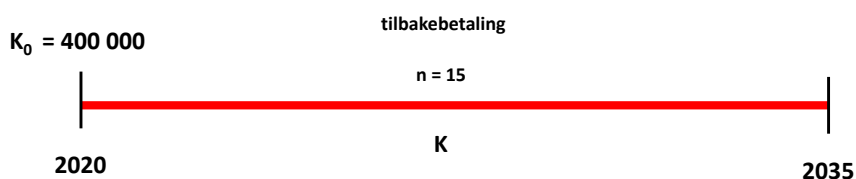
Lånet skal betales tilbake over $n = 15$ år, altså innen 2035.

Emma velger å betale tilbake lånet via annuitet, dvs. i like store innbetalinger K per år.

Fra formelsamlingen vet vi at dette terminbeløpet K er gitt ved:

$$K = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (22)$$

Anta at renten er 3 %, dvs. $r = 0.03$, gjennom hele perioden. Vi ser bort fra gebyrer på lånet.



Figur 5: Tilbakebetaing.

a) Bruk lign.(22) og vis at terminbeløpet K som Emma må betale per år er:

$$K = 33\,506 \text{ NOK/år} \quad (23)$$



Foto: Colourbox



Figur 6: Studielån.

Emma ønsker å få litt bedre råd de første årene.

Derfor ønsker hun å ha såkalt *halv betalingsutsettelse* de første $n_1 = 6$ årene.
I denne perioden betaler hun halvparten av terminbeløpet fra oppgave **3a**, dvs.:

$$K_1 = \frac{K}{2} = \frac{33\,506}{2} \text{ NOK/år} = 16\,753 \text{ NOK/år} \quad (24)$$

Gjelden på $K_0 = 400\,000$ NOK splittes da opp i to deler:

$$K_0 = K_{01} + K_{02} \quad (25)$$

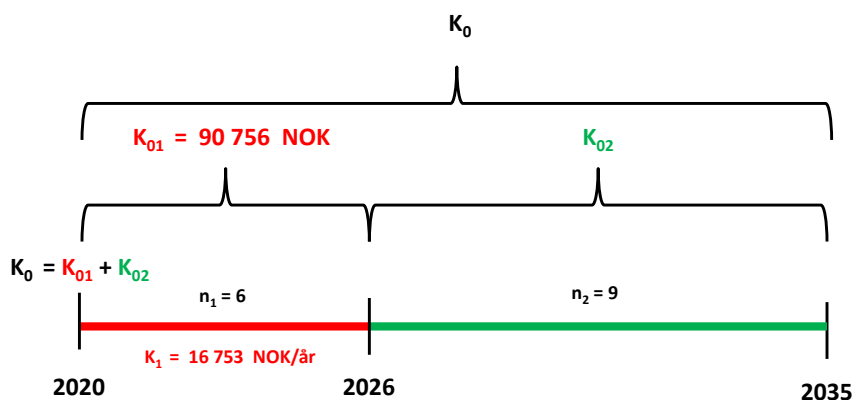
hvor

$$K_{01} = \text{nåverdien, i år 2020,} \\ \text{av den delen av lånet } K_0 \text{ som blir tilbakebetalt de første } n_1 = 6 \text{ årene} \quad (26)$$

$$K_{02} = \text{nåverdien, i år 2020,} \\ \text{av den delen av lånet } K_0 \text{ som blir tilbakebetalt de siste } n_2 = 9 \text{ årene} \quad (27)$$

b) Bruk lign.(22) samt $K_1 = 16\,753$ NOK/år og vis at: ⁸

$$K_{01} = 90\,756 \text{ NOK} \quad (28)$$



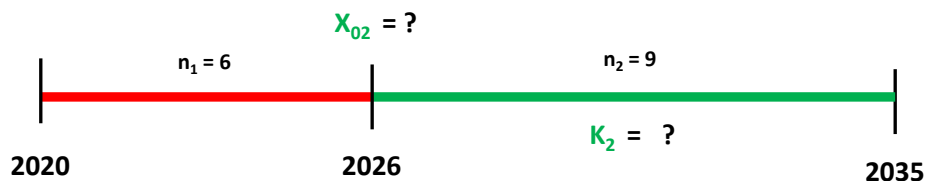
Figur 7: Tilbakebetaling.

⁸Dette er en litt vanskelig oppgave. Hopp over den dersom du har dårlig tid.

Siden vi nå kjenner K_{01} fra lign.(28) i oppgave 3b så kan vi regne ut K_{02} via lign.(25).

Men K_{02} tilsvarer nåverdien av del 2 av gjelden i år 2020.

La oss kalle den tilhørende nåverdien i år 2026 for X_{02} , se figur 8.



Figur 8: Tilbakebetaling.

- c) Finn tallverdien for X_{02} via renteformelen:

$$X_{02} = K_{02} (1 + r)^{n_1} \quad (29)$$

hvor K_{02} er gitt ved lign.(25).⁹

- d) Bruk lign.(22) og finn hva slags årlig terminbeløp K_2 Emma må betale i den andre perioden, dvs. de siste $n_2 = 9$ årene, for å innfri lånet.¹⁰

■

⁹Tips: For å regne ut K_{02} via lign.(25), bruk også resultatet fra oppgave 3b, dvs. bruk lign.(28).

¹⁰Tips: Bruk K_2 istedet for K og X_{02} istedet for K_0 i lign.(22) for perioden n_2 .

Oppgave 4: (økonomi)

En student ved Høgskolen i Molde har et budsjett på 8500 NOK per måned som hun skal bruke på bensinutgifter og husleie.

Anta at prisen på bensin er 15 NOK per liter. Anta videre at den typiske husleieprisen på hybler i Molde er 250 NOK per kvadratmeter. Dermed:

$$p_x = 15 \text{ NOK/liter} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (30)$$

$$p_y = 250 \text{ NOK/m}^2 \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (31)$$

Budsjettligningen for studenten er da $p_x x + p_y y \leq m$, dvs.:

$$15x + 250y \leq 8500 \quad (32)$$

hvor $m = 8500$ NOK er samlet budsjett per måned for de to godene og

$$x = \text{antall liter bensin per måned} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (33)$$

$$y = \text{antall kvadratmeter m}^2 \text{ på hybelen} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (34)$$

Anta at nytten ved forbruk av bensin x (gode 1) og husleiegifter y (gode 2) er bestemt av nyttefunksjonen: ($x > 0$ og $y > 0$)

$$U(x, y) = 2 \ln(x) + 15 \ln(y) \quad (35)$$



Figur 9: Bensin og hybel.

- a) Regn ut nytten $U(x, y)$ for $x = 60$ og $y = 25$.
- b) Vis at $x = 60$ og $y = 25$ er innenfor budsjettet.
- c) Hvor mye bensin x og hvor stor hybel y kan studenten leie for å *maksimere* nytten $U(x, y)$ innenfor budsjettets rammer? ¹¹ ¹²
- d) Hvor mye av budsjettet på 8500 NOK brukes dersom nytten maksimeres?



¹¹Dvs. finn x og y som gir størst nytte $U(x, y)$. Bruk **Lagrange multiplikator** metoden.

¹²Ta det for gitt at $U(x, y)$ oppnår et globalt maksimum med budsjettligningen som bibetingelse.

Hovedeksamen 2018

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Onsdag 19. desember 2018
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling i MAT100 fra 2018 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 12
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**

Oppgave 1: (grunnleggende emner)

- a) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(x + y)(x - y) \quad (1)$$

- b) Trekk sammen brøkene og gjør forenklinger:

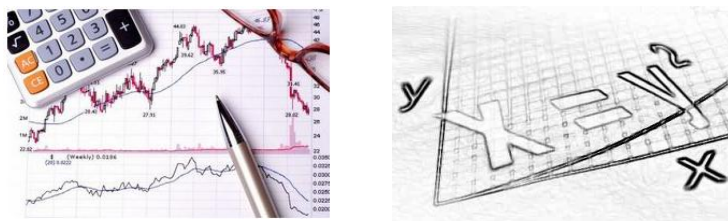
$$\frac{3}{2a} - \frac{6}{3a} + \frac{1}{a} \quad (2)$$

- c) Forkort brøken:

$$\frac{x^3 - xy^2}{(x + y)^2} \quad (3)$$

- d) Løs ligningen, dvs. finn x :

$$\frac{4}{x + 1} + 2 = \frac{2x + 6}{x - 1} \quad (4)$$



Figur 1: Algebra.

e) Løs ulikheten:

$$2x - (3 + 7x) > x + 9 \quad (5)$$

f) Skriv tallet nedenfor på standardform:

$$570\,000\,000\,000 \quad (6)$$



Oppgave 2: (derivasjon og integrasjon)

Deriver funksjonene nedenfor:

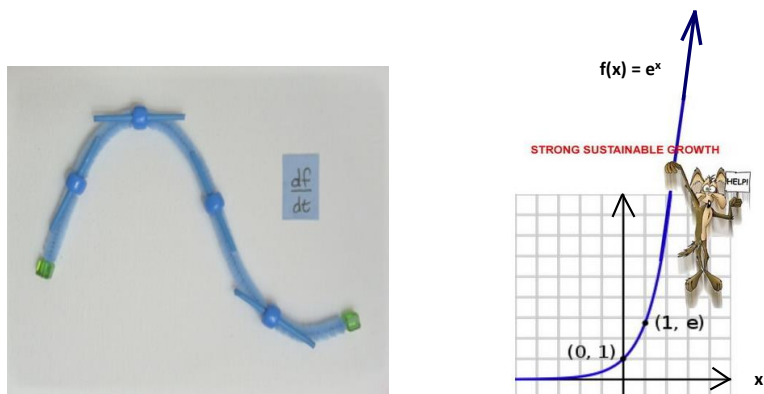
a) $f(x) = \frac{7}{x^3}$

b) $f(z) = z + \frac{1}{z}$

c) $f(x) = e^{3x}$

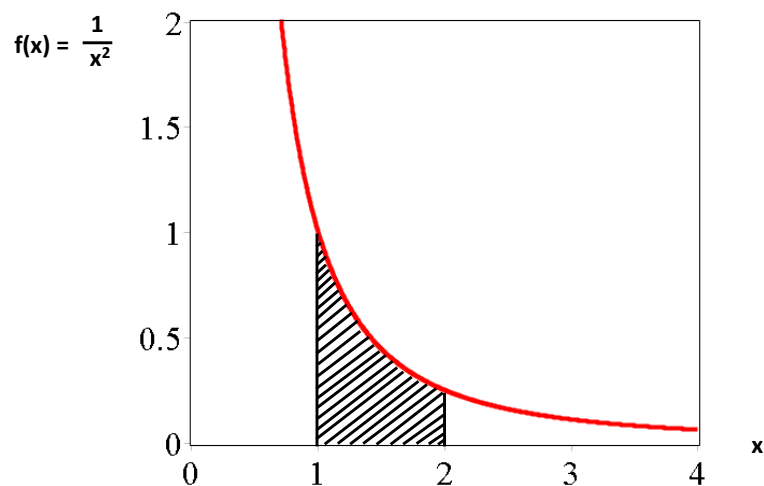
d) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$

e) $f(x) = e^{\ln(x^3)}$



Figur 2: Derivasjon.

- f) Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ er plottet i figur 3.
Regn ut det skraverte arealet nedenfor.¹



Figur 3: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

■

¹Husk at arealet under en graf er det samme som et **integral**. Arealet starter i vårt tilfelle ved $x = 1$ og slutter ved $x = 2$, se figur 3.

Oppgave 3: (logistikk)

Glamox er en norsk produsent og leverandør av belysning.

Anta at lampen C10-S1, se figur 4, skal fases ut på grunn av nye forskrifter. De nye forskriftene trer i kraft 1. juli 2019.

Anta videre at Glamox har 246 slike lamper på lager per 1. januar 2019. De ønsker derfor å selge alle disse lampene i løpet av de første $n = 6$ månedene i 2019.

Anta at det etterspørres 125 slike lamper i januar 2019, dvs.:

$$d_1 = 125 \text{ lamper} \quad (7)$$

Siden dette er lamper som fases ut så vil etterspørselen reduseres fra måned til måned.

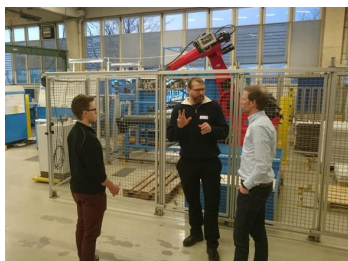
Anta at etterspørselen reduseres med en konstant faktor $k < 1$ per måned, dvs.:

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 k \\ d_3 &= d_1 k^2 \\ &\vdots \\ d_6 &= d_1 k^5 \end{aligned} \quad (8)$$

altså

$$d_i = d_1 k^{i-1} \quad (9)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ og d_i = etterspørselen av lampen C10-S1 i måned nr. i .



Figur 4: Lampen C10-S1.

- a) Anta at $k = 0.2472$.
Hvor stor vil etterspørselen av lampen i mars 2019 være, dvs. hva er d_3 ?
- b) Hva slags type rekke representerer d_i , hvor $i = 1, 2, \dots, 6$?
Gi en *kort* begrunnelse.

Den samlede etterspørselen av lampen de 6 første månedene i 2019 er:

$$S_6 = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_6 = \sum_{i=1}^6 d_i \quad (10)$$

- c) Med $k = 0.2472$, vis at: ²

$$\boxed{S_6 = 166} \quad (11)$$

²I denne oppgaven er det meningen at du skal regne ut summen S_6 via en formel (se formelsamling), **ikke** ved å "for hånd" legge sammen de seks leddene i lign.(10).

Siden Glamox har

$$N = 246 \tag{12}$$

lamper på lager per 1. januar 2019 så vil $246 - 166 = 80$ lamper forbli usolgt. For å unngå å brenne inne med 80 lamper så vurderer Glamox å **sette ned prisen** på lampen.

- d) Ved å sette ned prisen p på lampen så får man en **ny og større** konstant faktor k . Dersom Glamox skal selge alle N lampene de første 6 månedene så betyr det at:

$$S_6 = N \tag{13}$$

Bruk lign.(13) og vis at den nye konstante faktoren k de da må ha er bestemt av ligningen: ³

$$k^6 - \frac{N}{d_1} k + \frac{N}{d_1} - 1 = 0 \tag{14}$$

³Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke.

Med

$$N = 246 \quad , \quad d_1 = 125 \quad (15)$$

er det to løsninger av 6. gradsligningen i lign.(14), nemlig $k = 0.5$ og $k = 1$.

Siden etterspørselen reduseres fra måned til måned i 2019, dvs. $k < 1$, så må vi velge løsningen:

$$k = 0.5 \quad (16)$$

Anta videre at det er en sammenheng mellom pris og etterspørsel av den aktuelle lampen slik at den konstante faktoren k og prisen $p \geq 0$ har følgende sammenheng:

$$k = k_0 e^{-ap} \quad (17)$$

hvor

$$k_0 = 0.8 \quad (18)$$

$$a = 0.000783 \quad (19)$$

e) Vis, ved å bruke lign.(17), at prisen p er gitt ved:

$$p = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right) \quad (20)$$

f) Hva slags pris må Glamox sette på lampen dersom de skal selge alle $N = 246$ lampene i løpet av de første 6 månedene i 2019, og dersom etterspørselen i januar 2019 er $d_1 = 125$? ⁴

■

⁴Det viktige her er å forstå hva slags størrelser (tall) man skal bruke for å finne det oppgaven spør etter.

Oppgave 4: (Lagrange optimering - smarthus)

Scandic Seilet hotell har kontaktet Høgskolen i Molde for å få hjelp til å oppnå mest mulig effektiv oppvarming av konsertsalen i Bjørnsonhuset, som er et moderne kommunalt kulturhus integrert i hotellet, se figur 5.

Anta at konsertsalen varmes opp av to typer varmeovner. Disse varmovnene er plassert rundt omkring i salen. Oppvarming måles i enheten *watt*, som er energioverføring per sekund, dvs. effekt. Anta at hver dag må salen ha et visst samlet effektbehov b , i watt, tilført fra ovnene for å opprettholde fast romtemperatur.

Ovnstypene, kall dem type A og type B, er forskjellige og er plassert på ulike posisjoner i salen. Hotellet ønsker å bestemme hvor mange watt som *totalt* skal produseres fra hver av de to ovnstypene slik at *effekten* av ovnene blir maksimal.

Følgende variabler defineres:

$$x = \text{antall watt produsert fra ovnene av type A på en gitt dag} \quad (21)$$

$$y = \text{antall watt produsert fra ovnene av type B på en gitt dag} \quad (22)$$



Figur 5: Scandic Seilet hotell og Bjørnsonhuset.

Noe av effekten fra varmeovnene forsvinner til omgivelsene.

For ovnene av type A er det kun 60% av den forbrukte effekten går med til å dekke det daglige oppvarmingsbehovet. Tilsvarende for type B ovner, som er en gammel type, går kun 40 % av effekten til å oppvarming.

Kravet om at b antall watt skal produseres på en gitt dag, kan dermed skrives som:

$$0.6x + 0.4y = b \quad (23)$$

Anta at den totale effekten $P(x, y)$ til ovnene, for valgt fordeling x og y , er estimert ved funksjonen: ⁵

$$P(x, y) = 200 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

a) Skriv opp Lagrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(23). ⁶

b) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(23) har følgende kritiske punkt, nemlig:

$$x^* = b, \quad y^* = b \quad (25)$$

som maksimerer effekten. ⁷

⁵ P står for "power", som er "effekt".

⁶Altså her kreves ingen regning.

⁷Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

Hvor *sensitiv* er den optimale effekten $P(x^*, y^*)$ som funksjon av behovet av watt b ? Dette er et viktig spørsmål siden behovet b endrer med flere faktorer, f.eks. med temperaturen ute.

Et velkjent resultat innen Lagrange-teorien er:

$$\frac{d P(x^*, y^*)}{d b} = \lambda(b) \quad (26)$$

hvor

$$\lambda(b) = \text{optimal Lagrange-multiplikator, en funksjon av } b \quad (27)$$

$$P(x^*, y^*) = \text{optimal effekt, en funksjon av } b \quad (28)$$

c) Vis at lign.(26) stemmer i vårt tilfelle. ⁸

■

⁸Tips: Her må du blant annet bruke noen av resultatene fra mellomregningene i oppgave 4b. Dette er regnet som en A-oppgave.

Kontinuasjonseksamen 2018

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Onsdag 13. februar 2019
Tid	: 13:00 – 17:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling i MAT100 fra 2018 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 12
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**

Oppgave 1: (grunnleggende emner)

- a) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(5a + 2b)^2 \quad (1)$$

- b) Trekk sammen brøkene og gjør forenklinger:

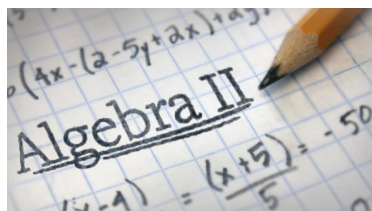
$$\frac{x+2}{3} + \frac{1-3x}{4} \quad (2)$$

- c) Forkort brøken:

$$\frac{2a^2 - 2b^2}{3a + 3b} \quad (3)$$

- d) Skriv tallet på standardform:

$$0,000\,000\,093 \quad (4)$$



Figur 1: Algebra.

e) Løs ligningen:

$$\frac{2x-5}{x-1} = 1 \quad (5)$$

f) Løs ulikheten:

$$\frac{2x-5}{x-1} > 1 \quad (6)$$

ved å bruke fortegnsskjema.

■

Oppgave 2: (derivasjon og integrasjon)

Deriver funksjonene nedenfor:

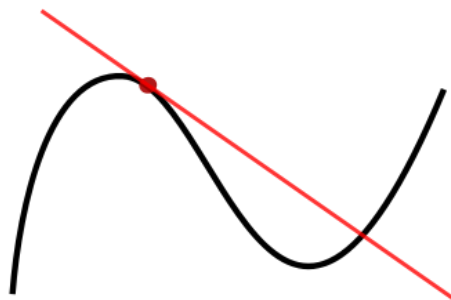
a) $f(x) = \frac{2}{3x^3}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

c) $f(x) = 7e^x$

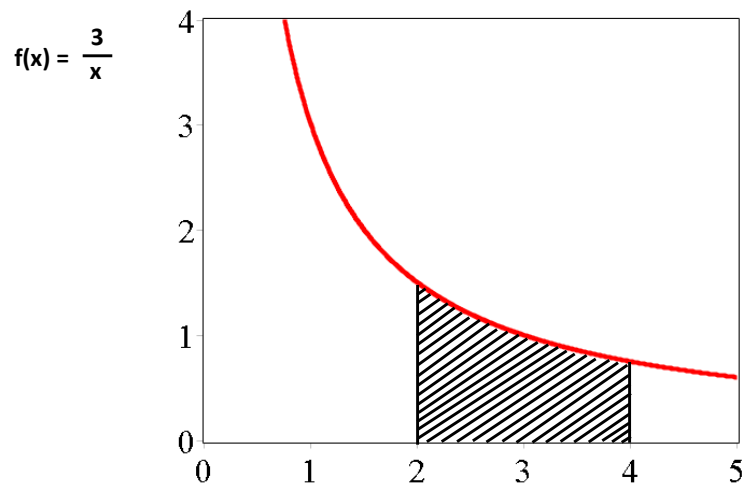
d) $f(x) = \ln(7e^x)$

e) $f(x) = x e^x$



Figur 2: Derivasjon.

- f) Funksjonen $f(x) = \frac{3}{x}$ er plottet i figur 3.
Regn ut det skraverte arealet nedenfor.¹



Figur 3: Funksjonen $f(x) = \frac{3}{x}$.

■

¹Husk at arealet under en graf er det samme som et **integral**. Arealet starter i vårt tilfelle ved $x = 2$ og slutter ved $x = 4$, se figur 3.

Oppgave 3: (logistikk)

Glamox er en norsk produsent og leverandør av belysning.

Anta at lampen ”Modul P”, se figur 4, skal fases ut på grunn av nye forskrifter. De nye forskriftene trer i kraft 1. september 2019.

Anta videre at Glamox har 300 slike lamper på lager per 1. januar 2019. De ønsker derfor å selge alle disse lampene i løpet av de første $n = 8$ månedene i 2019.

Anta at det etterspørres 86 lamper i januar 2019, dvs.:

$$d_1 = 86 \text{ lamper} \quad (7)$$

Siden dette er lamper som skal fases ut så vil etterspørselen reduseres fra måned til måned.

Anta at etterspørselen reduseres med en konstant faktor $k < 1$ per måned, dvs.:

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 k \\ d_3 &= d_1 k^2 \\ &\vdots \\ d_8 &= d_1 k^7 \end{aligned} \quad (8)$$

altså

$$d_i = d_1 k^{i-1} \quad (9)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ og d_i = etterspørselen av lampen ”Modul P” i måned nr. i .



Figur 4: Lampen ”Modul P”.

- a) Anta at $k = 0.6174$.
Hvor stor vil etterspørselen av lampen i april 2019 være, dvs. hva er d_4 ?
- b) Hva slags type følge representerer d_i , hvor $i = 1, 2, \dots, 8$?
Gi en *kort* begrunnelse.

Den samlede etterspørselen av lampen de 8 første månedene i 2019 er:

$$S_8 = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_8 = \sum_{i=1}^8 d_i \quad (10)$$

- c) Med $k = 0.6174$, vis at: ²

$$S_8 = 220 \quad (11)$$

²I denne oppgaven er det meningen at du skal regne ut summen S_8 via en formel (se formelsamling), **ikke** ved å "for hånd" legge sammen de seks leddene i lign.(10).

Siden Glamox har

$$N = 300 \tag{12}$$

lamper på lager per 1. januar 2019 så vil $300 - 220 = 80$ lamper forbli usolgt. For å unngå å brenne inne med 80 lamper så vurderer Glamox å **sette ned prisen** på lampen.

- d) Ved å redusere prisen p på lampen så får man en **ny og større** konstant faktor k . Dersom Glamox skal selge alle N lampene de første 8 månedene så betyr det at:

$$S_8 = N \tag{13}$$

Bruk lign.(13) og vis at den nye konstante faktoren k de da må ha er bestemt av ligningen: ³

$$k^8 - \frac{N}{d_1} k + \frac{N}{d_1} - 1 = 0 \tag{14}$$

³Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke.

Med

$$N = 300 \quad , \quad d_1 = 86 \quad (15)$$

er det to løsninger av 8. gradsligningen i lign.(14), nemlig $k = 0.74$ og $k = 1$.

Siden etterspørselen reduseres fra måned til måned i 2019, dvs. $k < 1$, så må vi velge løsningen:

$$k = 0.74 \quad (16)$$

Anta videre at det er en sammenheng mellom pris og etterspørsel av den aktuelle lampen slik at den konstante faktoren k og prisen $p \geq 0$ har følgende sammenheng:

$$k = k_0 e^{-ap} \quad (17)$$

hvor

$$k_0 = 0.8 \quad (18)$$

$$a = 0.00006496 \quad (19)$$

e) Vis, ved å bruke lign.(17), at prisen p er gitt ved:

$$p = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right) \quad (20)$$

f) Hva slags pris må Glamox sette på lampen dersom de skal selge alle $N = 300$ lampene i løpet av de første 8 månedene i 2019? ⁴

■

⁴Med etterspørselen $d_1 = 86$ så finner du de relevante størrelsene du trenger i oppgaveteksten for å regne ut prisen p .

Oppgave 4: (Lagrange optimering - smarthus)

Sportsklubben Træff har kontaktet Høgskolen i Molde for å få hjelp til å oppnå mest mulig effektiv strømforsyning til oppvarmingen av kunstgressbanen om vinteren, se figur 5.

Anta at kunstgressbanen varmes opp av to strømkilder. Oppvarming måles i enheten *watt*, som er energioverføring per sekund, dvs. effekt. Anta at for en gitt vinterdag må kunstgressbanen ha et visst samlet effektbehov b , i watt, tilført fra strømkildene for å holde unna snø og is.

Sportsklubben Træff ønsker å bestemme hvor mange watt som *totalt* skal produseres fra hver av de to ovnstypene slik at *effekten* av ovnene blir maksimal.

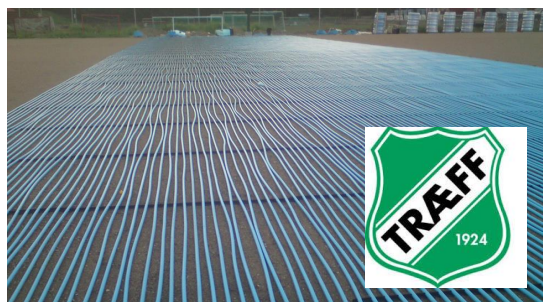
La oss kalle strømkildene 1 og 2 og definere følgende variabler:

$$x = \text{antall watt produsert av strømkilde 1 en gitt vinterdag} \quad (21)$$

$$y = \text{antall watt produsert strømkilde 2 en gitt vinterdag} \quad (22)$$

Noe av effekten fra strømkildene forsvinner til omgivelsene før de når varmekablene under kunstgresset.

For strømkilde 1 er det kun 75% av den forbrukte effekten går med til å dekke det daglige oppvarmingsbehovet. Tilsvarende for strømkilde 2, som er en gammel type, går kun 25 % av effekten til oppvarming.



Figur 5: Kunstgress og varmekabler.

Kravet om at b antall watt skal produseres på en gitt dag, kan dermed skrives som:

$$0.75x + 0.25y = b \quad (23)$$

Anta at den totale effekten $P(x, y)$ til ovnene, for valgt fordeling x og y , er estimert ved funksjonen: ⁵

$$P(x, y) = 600 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} \quad (24)$$

- a) Skriv opp Lagrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(23). ⁶
- b) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(23) har følgende kritiske punkt, nemlig:

$$x^* = b, \quad y^* = b \quad (25)$$

som maksimerer effekten. ⁷

⁵ P står for "power", som er "effekt".

⁶Altså her kreves ingen regning.

⁷Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

Hvor *sensitiv* er den optimale effekten $P(x^*, y^*)$ som funksjon av behovet av watt b ? Dette er et viktig spørsmål siden behovet b endrer med flere faktorer, f.eks. med temperaturen ute.

Et velkjent resultat innen Lagrange-teorien er:

$$\frac{d P(x^*, y^*)}{d b} = \lambda(b) \quad (26)$$

hvor

$$\lambda(b) = \text{optimal Lagrange-multiplikator, en funksjon av } b \quad (27)$$

$$P(x^*, y^*) = \text{optimal effekt, en funksjon av } b \quad (28)$$

c) Vis at lign.(26) stemmer i vårt tilfelle. ⁸

■

⁸Tips: Her må du blant annet bruke noen av resultatene fra mellomregningene i oppgave 4b. Dette er regnet som en A-oppgave.

Testeksamen 2019



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

2. TESTeksamen

“MAT100 Matematikk”, 2019

versjon 01

- (Test)eksamensdag / øvingsdag:
 - torsdag 9. des.
- Tid:
 - kl. 12:15 - 16:00
- Hjelpemidler:
 - KD (kalkulator)
 - Kompendium del 1, del 2 og del 3
 - Generell ordbord (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)

Oppgave 1 — 25%

- a) (2.5%) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(-1 + 2a)(1 + 2a) \quad (2.1)$$

- b) (2.5%) Skriv brøken på enklest mulig form:

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \quad (2.2)$$

- c) (5%) Vis ved hjelp av ABC -formelen at løsningsmengden til ligningen

$$x^2 - 7x - 1 = 0 \quad (2.3)$$

er gitt ved:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{7 - \sqrt{53}}{2}, \frac{7 + \sqrt{53}}{2} \right\}. \quad (2.4)$$

- d) (5%) Skriv følgende uttrykk på faktorisert form: ¹

$$(4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) \quad (2.5)$$

- e) (10%) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: ²

$$f(x) = (4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) \leq 0 \quad (2.6)$$

■

¹Bruk svaret fra oppgave c).

²Bruk løsningen fra oppgave d)

Oppgave 2 — 25%

- a) (5%) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = e^{2x} \quad (2.7)$$

i punktet $x = 1$.

- b) (5%) Anta en følge er definert rekursivt ved:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= \frac{1}{2}a_{n-1} \end{aligned} \quad n \geq 2 \quad (2.8)$$

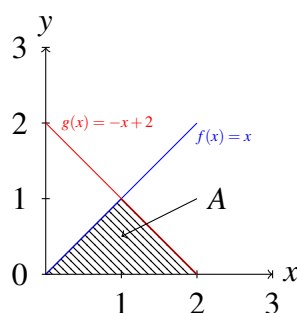
Finn en formel for a_n som kun er avhengig av n og regn ut summen S_5 .

- c) (5%) Finn, ved hjelp av integrasjon, arealet A av området avgrenset av funksjonene

$$f(x) = x \quad (2.9)$$

$$g(x) = -x + 2 \quad (2.10)$$

og x -aksen, som vist i figur 2.1.



Figur 2.1: Det skraverte arelaet A .

- d)** (5%) Vis at de partiell deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ av funksjonen

$$f(x) = \sqrt{xy + e^x} \quad (2.11)$$

er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y + e^x}{2\sqrt{xy + e^x}} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy + e^x}} \quad (2.13)$$

- e)** (5%) Finn retningsderivert av funksjonen f fra oppgave **d** i punktet $(1, 1)$ langs retningen $a = 2$ og $b = 1$.³

■

³Den retningsderiverte er definert i kompendiet.

Oppgave 3 — 25%

Ormen Lange-feltet er et gassfelt som ligger omtrent 140 km nordvest for Kristiansund. Gassen fra dette feltet går i rørledninger til øya Gossen utenfor Molde.

Anta at etterspørselen er 25 milliarder kubikkmeter gass det første året etter at produksjonen har startet, dvs.:⁴

$$d_1 = 25 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \quad (2.14)$$

hvor 10^9 er én milliard.

La oss i denne oppgaven anta at etterspørselen av gass øker med 5 % per år, dvs. etterspørselen for de påfølgende årene er:

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 1.05 \\ d_3 &= d_1 1.05^2 \\ &\vdots \\ d_n &= \text{årlig ettersørsel av gass } n \text{ år etter oppstart} \end{aligned} \quad (2.15)$$

dvs. $d_n = d_1 1.05^{n-1}$.



Figur 2.2: Nyhamna på Gossen.

⁴Grunnen til at vi bruker notasjonen “ d ” er at etterspørsel er *demand* på engelsk.

- a) (2.5%) Hvor stor vil etterspørselen av gass være 15 år etter oppstart, dvs. hva er d_{15} ?

Den samlede etterspørselen S_n av gass etter n år er da:

$$S_n = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n = \sum_{i=1}^n d_i \quad (2.16)$$

- b) (2.5%) Hva slags type følge representerer d_i , hvor $i = 1, 2, \dots, n$?
Gi en *kort* begrunnelse.

- c) (5%) Vis at summen S_n er gitt ved:

$$S_n = 20d_1 (1.05^n - 1) \quad (2.17)$$

- d) (2.5%) Hvor stor er den totale etterspørselen av gass de 15 første årene?

Anta at påvist forekomst for Ormen Lange-feltet er 1200 milliarder kubikkmeter naturgass, dvs.:

$$F = 1200 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \quad (2.18)$$

- e) (10%) Vis at antall år det vil ta før Ormen Lange-feltet er tømt, er gitt ved:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{F}{20d_1} + 1\right)}{\ln 1.05} \quad (2.19)$$

- f) (2.5%) Hvor lang tid tar det før Ormen Lange-feltet er tømt?

■

Oppgave 4 — 25%

Scandic Seilet hotell har kontaktet Høgskolen i Molde for å få hjelp til å oppnå mest mulig effektiv oppvarming av konsertsalen i Bjørnsonhuset, som er et moderne kommunalt kulturhus integrert i hotellet, se figur 2.3.

Anta at konsertsalen varmes opp av to typer varmeovner. Disse varmovnene er plassert rundt omkring i salen. Oppvarming måles i enheten *watt*, som er energioverføring per sekund, dvs. effekt. Anta at hver dag må salen ha et visst samlet effekt**behov** b , i watt, tilført fra ovnene for å opprettholde fast romtemperatur.

Ovnstypene, kall dem type A og type B, er forskjellige og er plassert på ulike posisjoner i salen. Hotellet ønsker å bestemme hvor mange watt som *totalt* skal produseres fra hver av de to ovnstypene slik at *effekten* av ovnene blir maksimal.

Følgende variabler defineres:

$$x = \text{antall watt produsert fra ovnene av type A på en gitt dag} \quad (2.20)$$

$$y = \text{antall watt produsert fra ovnene av type B på en gitt dag} \quad (2.21)$$



Figur 2.3: Scandic Seilet hotell og Bjørnsonhuset.

Noe av effekten fra varmeovnene forsvinner til omgivelsene.

For ovnene av type A er det kun 60% av den forbrukte effekten går med til å dekke det daglige oppvarmingsbehovet. Tilsvarende for type B ovner, som er en gammel type, går kun 40 % av effekten til å oppvarming.

Kravet om at b antall watt skal produseres på en gitt dag, kan dermed skrives som:

$$0.6x + 0.4y = b \quad (2.22)$$

Anta at den totale effekten $P(x, y)$ til ovnene, for valgt fordeling x og y , er estimert ved funksjonen: ⁵

$$P(x, y) = 200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} \quad (2.23)$$

a) (2.5%) Skriv opp Lagrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(2.22). ⁶

b) (12.5%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(2.22) har følgende kritiske punkt, nemlig:

$$x^* = b, \quad y^* = b \quad (2.24)$$

som maksimerer effekten. ⁷

⁵ P står for "power", som er "effekt".

⁶Altså her kreves ingen regning.

⁷Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

Hvor *sensitiv* er den optimale effekten $P(x^*, y^*)$ som funksjon av behovet av watt b ? Dette er et viktig spørsmål siden behovet b endrer med flere faktorer, f.eks. med temperaturen ute.

Et velkjent resultat innen Lagrange-teorien er:

$$\frac{dP(x^*, y^*)}{db} = \lambda(b) \quad (2.25)$$

hvor

$$\lambda(b) = \text{optimal Lagrange-multiplikator, en funksjon av } b \quad (2.26)$$

$$P(x^*, y^*) = \text{optimal effekt, en funksjon av } b \quad (2.27)$$

- c) (10%) Vis at lign.(2.25) stemmer i vårt tilfelle. ⁸

■

⁸Tips: Her må du blant annet bruke noen av resultatene fra mellomregningene i oppgave 4b). Dette er regnet som en A-oppgave.

Hovedeksamen 2019

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Onsdag 18. desember 2019
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde/Bergen Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Bård-Inge Pettersen / 477 11 886
Hjelpemidler	: KD + kompendium 2019 del 1, 2 og 3 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 11 (10 + 1 vedlegg)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**
- **Hver oppgave teller 25 %**

Oppgave 1 — 25%

- a)** (2.5%) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(2x + 3y)^2 \tag{1}$$

- b)** (2.5%) Skriv brøken på enklest mulig form:

$$\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \tag{2}$$

- c)** (2.5%) Regn ut uten bruk av kalkulator. Vis mellomregninger.

$$\frac{(8 \cdot 10^3)(5 \cdot 10^{-3})}{4 \cdot 10^6} \tag{3}$$

- d)** (7.5%) Gitt funksjonene:

$$f(x) = 3x^2 + 3x - 12 \quad , \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 4 \tag{4}$$

Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene. ¹

- e)** (10%) Løs ulikheten ved bruk av fortegnsskjema:

$$\frac{4 + 6x}{x - 1} \geq 4 \tag{5}$$

■

¹Husk at skjæringspunkt(en) har både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. (x, y) .

Oppgave 2 — 25%

- a) (5%) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = \ln(x^2) \quad (6)$$

i punktet $x = 3$.

- b) (5%) Anta en følge er definert rekursivt ved:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= \ln 3 \cdot a_{n-1} \end{aligned} \quad n \geq 2 \quad (7)$$

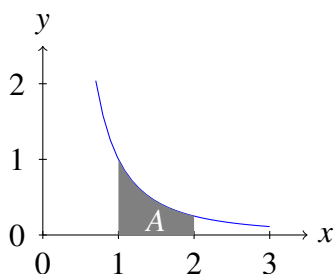
Finn en formel for a_n som kun er avhengig av n og regn ut summen S_5 .

- c) (5%) Finn arealet A under grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (8)$$

i intervallet $[a, b] = [1, 2]$, dvs. finn:

$$A = \int_1^2 f(x) \, dx \quad (9)$$



Figur 1: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

d) (10%) Finn løsningen til ligningen ²

$$6^x + 4^x = 9^x \quad (10)$$

■

²Dette er regnet som en A-oppgave. Denne oppgaven er litt vanskelig. Hopp over den dersom du bruker lang tid på den.

Oppgave 3 — 25%

Ekornes ASA er en norsk møbelf produsent med hovedkontor i Sykkylven i Møre og Romsdal. Selskapet er mest kjent for varemerket Stressless. Stressless blir brukt på firmaets kolleksjon av regulerbare stoler, se figur 2.

La oss forenkle situasjonen for Ekornes og anta at de kun produserer to typer stressless-stoler. En standard versjon, type 1, og en luksus versjon, type 2. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

x = antall produserte stresslesser per dag av type 1

y = antall produserte stresslesser per dag av type 2

Anta at avdelingen til Ekornes som driver med produksjon av disse stolene har begrenset med ressurser. Arbeidsstyrken de rår over har 12 timer disponibelt til produksjon av komponenter per dag, 8 timer til montering per dag og kun 8 timer til pakking per dag. Disse **føringene**³ kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$3x + y \leq 12 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (11)$$

$$\frac{4}{3}x + y \leq 8 \quad (\text{montering}) \quad (12)$$

$$x + y \leq 8 \quad (\text{pakking}) \quad (13)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.



Figur 2: Stressless.

³Terminologien "restriksjoner" brukes også om "føringer" og representerer et krav som må være oppfylt.

Anta videre at fortjenesten $F(x, y)$ til Ekornes ved salg av slike stoler er gitt ved:

$$F(x, y) = 6000x + 3000y \quad (14)$$

Denne funksjonen er gitt i norske kroner (NOK).
Ekornes ønsker å **maksimere** denne fortjenesten.

- a) (2.5%) Hvor lang tid tar det å **produsere komponentene** til en stol av type 1 og type 2 hhv.? Hvor lang tid tar det å **montere** en stol av type 1 og 2 hhv.? ⁴
- b) (2.5%) Føringen for pakking, dvs. lign.(13), kan fjernes fra problemet. Forklar kort hvorfor. ⁵
- c) (2.5%) Gjør om ulikhetene i lign.(11) og (12) til likheter og vis at føringene kan skrives

$$y(x) = 12 - 3x \quad (15)$$

$$y(x) = 8 - \frac{4}{3}x \quad (16)$$

hvor y er en funksjon av x .

- d) (7.5%) I vedlegget helt bakerst i oppgavesettet finner du et koordinatsystem. Plott lign.(15) og (16) i dette koordinatsystemet. ⁶
- e) (2.5%) Skraver det området i figuren fra oppgave d) som tilfredsstiller alle føringene.

⁴I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

⁵Tips: Sammenlign lign.(12) og lign.(13). Er den ene av disse ligningene overflødig?

⁶Begrens plottingen til 1. kvadrant siden $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

Husk at vedlegget skal legges ved i din eksamensbesvarelse.

Husk også å skrive inn ditt kandidatnummer på vedlegget.

Fortjenesten i lign.(14) skal **maksimeres** under føringene beskrevet av lign.(11)-(13). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.

f) (5%) Les av alle hjørneløsninger ⁷ fra grafen og regn ut tilhørende fortjenester $F(x,y)$.

g) (2.5%) Hvilken kombinasjon av x og y gir *maksimal* fortjeneste $F(x,y)$?

■

⁷Dvs. les av koordinatene (x,y) for alle hjørneløsninger. Anta at krysningspunktet mellom de to føringene er gitt ved $(x,y) = (\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$.

Oppgave 4 — 25%

Scandic Seilet hotell har kontaktet Høgskolen i Molde for å få hjelp til å oppnå mest mulig effektiv oppvarming av konsertsalen i Bjørnsonhuset, som er et moderne kommunalt kulturhus integrert i hotellet, se figur 3.

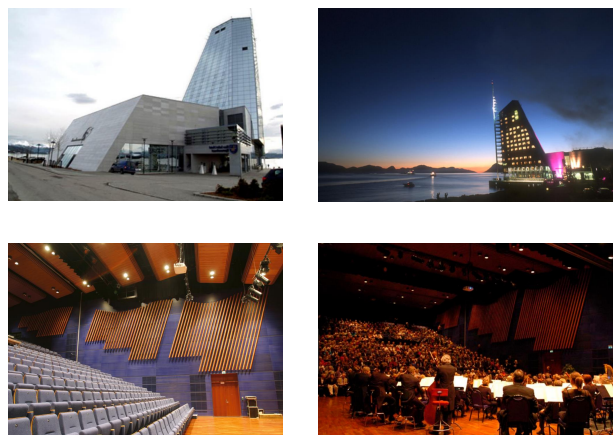
Anta at konsertsalen varmes opp av to typer varmeovner. Disse varmovnene er plassert rundt omkring i salen. Oppvarming måles i enheten *watt*, som er energioverføring per sekund, dvs. effekt. Anta at hver dag må salen ha et visst samlet effekt**behov** b , i watt, tilført fra ovnene for å opprettholde fast romtemperatur.

Ovnstypene, kall dem type A og type B, er forskjellige og er plassert på ulike posisjoner i salen. Hotellet ønsker å bestemme hvor mange watt som *totalt* skal produseres fra hver av de to ovnstypene slik at *effekten* av ovnene blir maksimal.

Følgende variabler defineres:

$$x = \text{antall watt produsert fra ovnene av type A på en gitt dag} \quad (17)$$

$$y = \text{antall watt produsert fra ovnene av type B på en gitt dag} \quad (18)$$



Figur 3: Scandic Seilet hotell og Bjørnsonhuset.

Noe av effekten fra varmeovnene forsvinner til omgivelsene.

For ovnene av type A er det kun 80% av den forbrukte effekten går med til å dekke det daglige oppvarmingsbehovet. Tilsvarende for type B ovner, som er en gammel type, går kun 40 % av effekten til å oppvarming.

Kravet om at b antall watt skal produseres på en gitt dag, kan dermed skrives som:

$$0.8x + 0.4y = b \quad (19)$$

Anta at den totale effekten $P(x, y)$ til ovnene, for valgt fordeling x og y , er estimert ved funksjonen: ⁸

$$P(x, y) = 200e^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{4}y^2} - 200 \quad (20)$$

- a) (2.5%) Skriv opp Lagrange-funksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(19). ⁹

- b) (5%) Vis at

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 200xe^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{4}y^2} - 0.8\lambda \quad (21)$$

- c) (5%) Vis at

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 100ye^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{4}y^2} - 0.4\lambda \quad (22)$$

⁸ P står for "power", som er "effekt".

⁹Altså her kreves ingen regning.

- d) (12.5%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(19) har følgende stasjonære punkter, nemlig:

$$x^* = \frac{5}{6}b \quad , \quad y^* = \frac{5}{6}b \quad (23)$$

som maksimerer effekten.^{10 11}

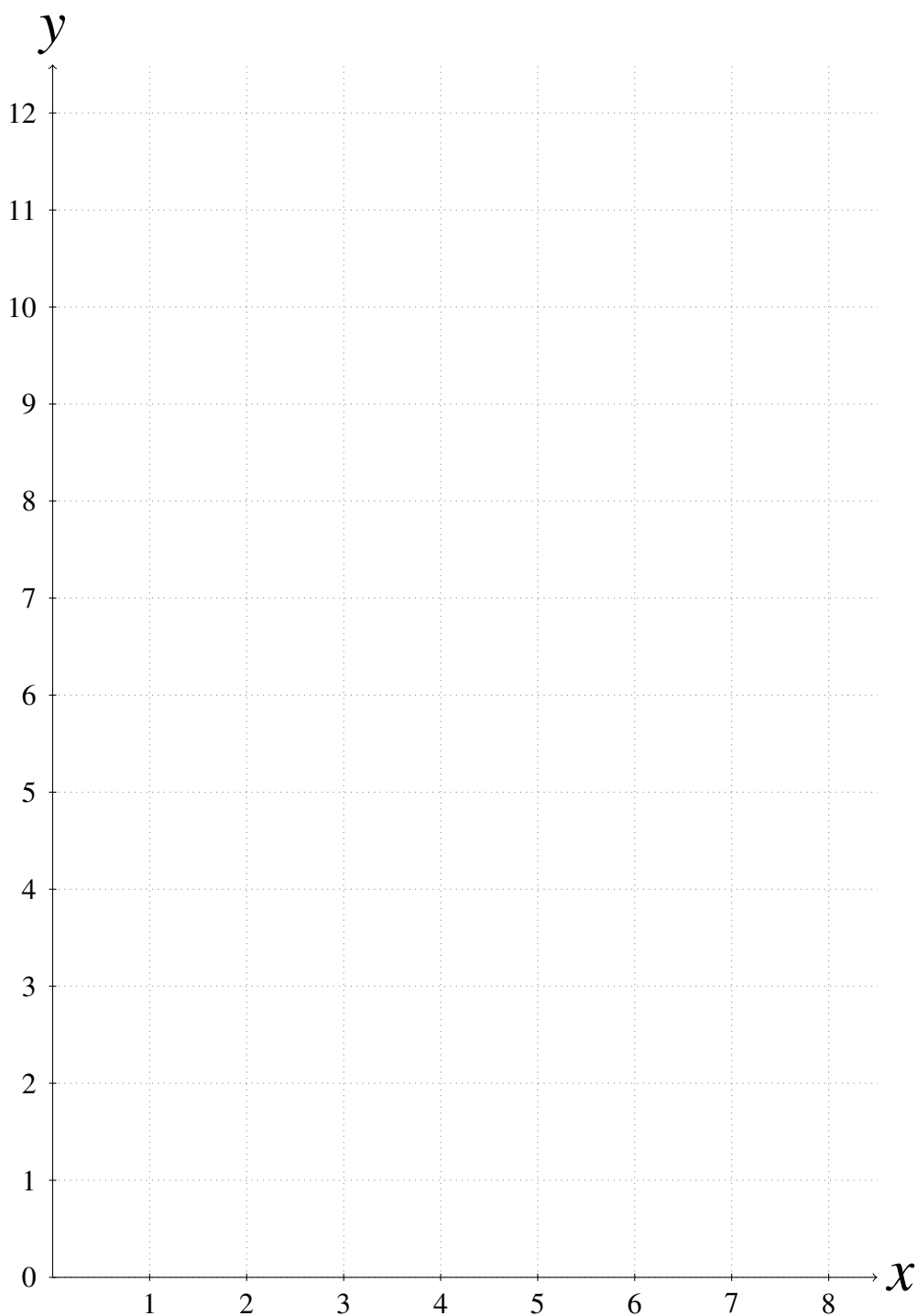
■

¹⁰Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

¹¹Bruk det du viste i oppgave 4b) og 4c).

VEDLEGG

Kandidatnummer: _____
(Skriv inn ditt kandidatnummer her)



Kontinuasjonseksamen 2019

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Torsdag 13. februar 2020
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde/Bergen Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Bård-Inge Pettersen / 477 11 886
Hjelpemidler	: KD + kompendium 2019 del 1, 2 og 3 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 11 (10 + 1 vedlegg)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**
- **Hver oppgave teller 25 %**

Oppgave 1 — 25%

- a)** (2.5%) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(3x - 2y)^2 \tag{1}$$

- b)** (2.5%) Skriv brøken på enklest mulig form:

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \tag{2}$$

- c)** (2.5%) Regn ut uten bruk av kalkulator. Vis mellomregninger.

$$\frac{(16 \cdot 10^{-3})(5 \cdot 10^4)}{8 \cdot 10^{-6}} \tag{3}$$

- d)** (7.5%) Gitt funksjonene:

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - x - 1 \tag{4}$$

Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene. ¹

- e)** (10%) Løs ulikheten ved bruk av fortegnsskjema:

$$\frac{16 - 4x}{x - 1} \leq 4x \tag{5}$$

■

¹Husk at skjæringspunkt(en) har både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. (x, y) .

Oppgave 2 — 25%

- a)** (5%) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad (6)$$

i punktet $x = 1$.

- b)** (5%) Anta en følge er definert rekursivt ved:

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_n &= 2 \cdot a_{n-1} \end{aligned} \quad n \geq 2 \quad (7)$$

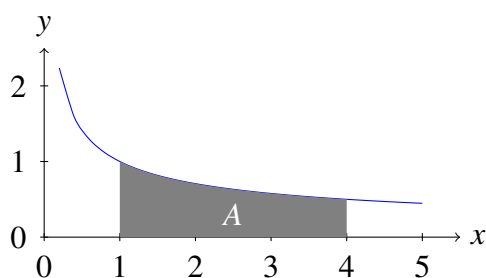
Finn en formel for a_n som kun er avhengig av n og regn ut summen S_5 .

- c)** (5%) Finn arealet A under grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (8)$$

i intervallet $[a, b] = [1, 4]$, dvs. finn:

$$A = \int_1^4 f(x) \, dx \quad (9)$$



Figur 1: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

d) (10%) Finn løsningen til ligningen ²

$$4^x + 6 \cdot 4^{-x} = 5 \quad (10)$$

■

²Dette er regnet som en A-oppgave. Denne oppgaven er litt vanskelig. Hopp over den dersom du bruker lang tid på den.

Oppgave 3 — 25%

Ekornes ASA er en norsk møbelprodusent med hovedkontor i Sykkylven i Møre og Romsdal. Selskapet er mest kjent for varemerket Stressless. Stressless blir brukt på firmaets kolleksjon av regulerbare stoler, se figur 2.

La oss forenkle situasjonen for Ekornes og anta at de kun produserer to typer stressless-stoler. En standard versjon, type 1, og en luksus versjon, type 2. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

x = antall produserte stresslesser per dag av type 1

y = antall produserte stresslesser per dag av type 2

Anta at avdelingen til Ekornes som driver med produksjon av disse stolene har begrenset med ressurser. Arbeidsstyrken de rår over har 8 timer disponibelt til produksjon av komponenter per dag, 8 timer til montering per dag og også 8 timer til pakking per dag. Disse **føringene**³ kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$x + 2y \leq 8 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (11)$$

$$\frac{8}{5}x + \frac{8}{5}y \leq 8 \quad (\text{montering}) \quad (12)$$

$$\frac{16}{9}x + \frac{4}{3}y \leq 8 \quad (\text{pakking}) \quad (13)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.



Figur 2: Stressless.

³Terminologien "restriksjoner" brukes også om "føringer" og representerer et krav som må være oppfylt.

Anta videre at fortjenesten $F(x, y)$ til Ekornes ved salg av slike stoler er gitt ved:

$$F(x, y) = 3000x + 6000y \quad (14)$$

Denne funksjonen er gitt i norske kroner (NOK).
Ekornes ønsker å **maksimere** denne fortjenesten.

- a) (2.5%) Hvor lang tid tar det å **produsere komponentene** til en stol av type 1 og type 2 hhv.? Hvor lang tid tar det å **montere** en stol av type 1 og 2 hhv.? ⁴

- b) (2.5%) Gjør om ulikhetene i lign.(11) og (12) til likheter og vis at føringene kan skrives

$$y = 4 - \frac{1}{2}x \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (15)$$

$$y = 5 - x \quad (\text{montering}) \quad (16)$$

$$y = 6 - \frac{4}{3}x \quad (\text{pakking}) \quad (17)$$

hvor y er en funksjon av x .

- c) (10%) I vedlegget helt bakerst i oppgavesettet finner du et koordinatsystem. Plott lign.(15), (16) og (17) i dette koordinatsystemet. ⁵

- d) (2.5%) Skraver det området i figuren fra oppgave c) som tilfredsstiller alle føringene.

⁴I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

⁵Begrens plottingen til 1. kvadrant siden $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

Husk at vedlegget skal legges ved i din eksamensbesvarelse.

Husk også å skrive inn ditt kandidatnummer på vedlegget.

Fortjenesten i lign.(14) skal **maksimeres** under føringene beskrevet av lign.(11)-(13). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.

- e) (5%) Les av alle hjørneløsninger ⁶ fra grafen og regn ut tilhørende fortjenester $F(x,y)$.

- f) (2.5%) Hvilke to hjørneløsninger gir *maksimal* fortjeneste $F(x,y)$?

■

⁶Dvs. les av koordinatene (x,y) for alle hjørneløsninger.

Oppgave 4 — 25%

Scandic Seilet hotell har kontaktet Høgskolen i Molde for å få hjelp til å oppnå mest mulig effektiv oppvarming av konsertsalen i Bjørnsonhuset, som er et moderne kommunalt kulturhus integrert i hotellet, se figur 3.

Anta at konsertsalen varmes opp av to typer varmeovner. Disse varmovnene er plassert rundt omkring i salen. Oppvarming måles i enheten *watt*, som er energioverføring per sekund, dvs. effekt. Anta at hver dag må salen ha et visst samlet effekt**behov** b , i watt, tilført fra ovnene for å opprettholde fast romtemperatur.

Ovnstypene, kall dem type A og type B, er forskjellige og er plassert på ulike posisjoner i salen. Hotellet ønsker å bestemme hvor mange watt som *totalt* skal produseres fra hver av de to ovnstypene slik at *effekten* av ovnene blir maksimal.

Følgende variabler defineres:

$$x = \text{antall watt produsert fra ovnene av type A på en gitt dag} \quad (18)$$

$$y = \text{antall watt produsert fra ovnene av type B på en gitt dag} \quad (19)$$



Figur 3: Scandic Seilet hotell og Bjørnsonhuset.

Noe av effekten fra varmeovnene forsvinner til omgivelsene.

For ovnene av type A er det kun 80 % av den forbrukte effekten går med til å dekke det daglige oppvarmingsbehovet. Tilsvarende for type B ovner, som er en gammel type, går kun 20 % av effekten til å oppvarming.

Kravet om at b antall watt skal produseres på en gitt dag, kan dermed skrives som:

$$0.8x + 0.2y = b \quad (20)$$

Anta at den totale effekten $P(x, y)$ til ovnene, for valgt fordeling x og y , er estimert ved funksjonen: ⁷

$$P(x, y) = 200e^{\frac{1}{3}x^3}e^{\frac{1}{3}y^3} - 200 \quad (21)$$

- a) (2.5%) Skriv opp Lagrange-funksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(20). ⁸

- b) (5%) Vis at

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 200x^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} - 0.8\lambda \quad (22)$$

- c) (5%) Vis at

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 200y^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} - 0.2\lambda \quad (23)$$

⁷ P står for "power", som er "effekt".

⁸Altså her kreves ingen regning.

- d) (12.5%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(20) har følgende stasjonære punkter, nemlig:

$$x^* = \frac{10}{9}b, \quad y^* = \frac{5}{9}b \quad (24)$$

som maksimerer effekten.^{9 10}

■

⁹Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

¹⁰Bruk det du viste i oppgave 4b) og 4c).

VEDLEGG

Kandidatnummer: _____
(Skriv inn ditt kandidatnummer her)

