



MAT100

Matematikk

Løsning av eksamensoppgaver 2012 - 2019

Bård-Inge Pettersen
Per Kristian Rekdal



Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Forord

Eksamensoppgaver:

Dette er en [samling av eksamensoppgaver](#) i emnet “*MAT100 Matematikk*” ved Høgskolen i Molde fra 2012 – 2019.

Det finnes også en tilhørende samling med komplette løsningsforslag til disse eksamensoppgavene. Samlingen med løsningsforslag finnes i et eget hefte, separert fra dette oppgaveheftet.

Gratis:

Både samlingen med eksamensoppgaver og tilhørende samling med komplette løsningsforslag kan lastes ned [gratis](#) via Høgskolen i Molde sin åpne kursportal www.himoldeX.no.

Hvordan bruke denne samlingen av gamle eksamensoppgaver?:

Man blir ikke god i matematikk kun ved å se på video. Man må løse oppgaver.

Videoer:

Komplette sett med forelesningsvideoer i MAT100 finner du [her](#).

Bård-Inge Pettersen
Per Kristian Rekdal

Copyright © Høgskolen i Molde, mai 2020.

Innhold

1	Hovedeksamen 2012	7
2	Kontinuasjonseksamen 2012	25
3	Hovedeksamen 2013	41
4	Kontinuasjonseksamen 2013	59
5	Hovedeksamen 2014	73
6	Kontinuasjonseksamen 2014	87
7	Hovedeksamen 2015	105
8	Kontinuasjonseksamen 2015	121
9	Hovedeksamen 2016	143
10	Kontinuasjonseksamen 2016	165
11	Hovedeksamen 2017	185
12	Kontinuasjonseksamen 2017	199
13	Hovedeksamen 2018	217
14	Kontinuasjonseksamen 2018	231
15	Testeksamen 2019	248
16	Hovedeksamen 2019	276
17	Kontinuasjonseksamen 2019	306

Hovedeksamen 2012

LØSNING: Eksamen 11. des. 2012

MAT100 Matematikk

Oppgave 1: (kostnad, inntekt og fortjeneste)

a) Total **enhetskostnad**, dvs. kostnad per bereder:

$$\underline{\underline{TEK(x)}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x} \quad (1)$$

$$= \frac{ax^2 + bx + c}{x} = \underline{\underline{ax + b + \frac{c}{x}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (2)$$

b) Den **deriverte** av $TEK(x)$:

$$\underline{\underline{\frac{dTEK(x)}{dx}}} = \frac{d}{dx} \left(ax + b + \frac{c}{x} \right) = \underline{\underline{a - \frac{c}{x^2}}} \quad (3)$$

Minimum til $TEK(x)$ finnes ved å **derivere** og deretter sette den deriverte lik **null**:

$$\frac{dTEK(x)}{dx} = 0 \quad (4)$$

$$a - \frac{c}{x^2} = 0 \quad \left| \cdot x^2 \right. \quad (5)$$

$$ax^2 - c = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{a} \right. \quad (6)$$

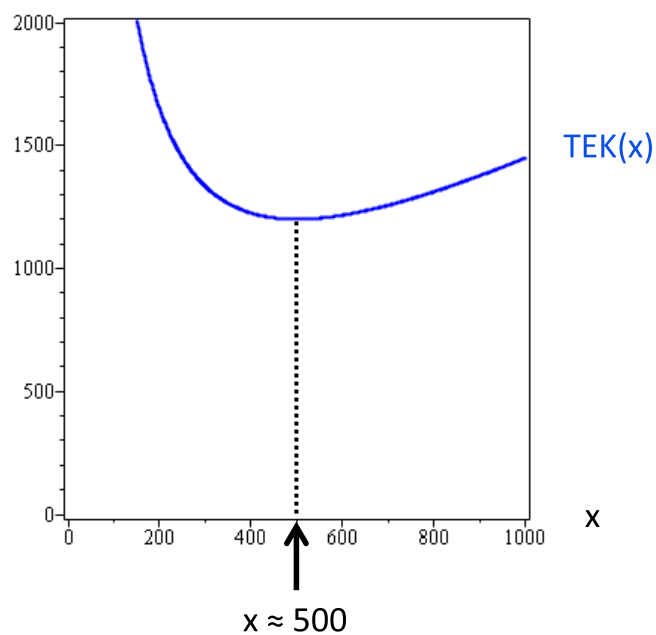
$$x^2 - \frac{c}{a} = 0 \quad (7)$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{\frac{c}{a}}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (8)$$

c) Setter inn numeriske verdier:

$$\underline{\underline{x}} = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{250\,000 \text{ NOK}}{1 \text{ NOK} \cdot (\text{år})^2}} = \underline{\underline{500 \frac{1}{\text{år}}}} \quad (9)$$

d) Markør **minimum** av $TEK(x)$ på figuren fra vedlegg A:



Figur 1: Minimum av $TEK(x)$ er markert på figuren.

Ved å sammenligne lign.(9) og fig.(1) ser vi at den analytiske og den grafiske løsningen er sammenfallende.

- e) Grensekostnaden finnes ved å derivere kostnaden $K(x)$:

$$\frac{dK(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (ax^2 + bx + c) \quad (10)$$

$$= \underline{\underline{2ax + b}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (11)$$

- f) Se vedlegg A.

- g) Av figuren i vedlegg A ser vi at grafen til $TEK(x)$ og grafen til $\frac{dK(x)}{dx}$ skjærer hverandre ved $x = 500 \text{ 1/år}$.

- h) Skjæringspunktet mellom $TEK(x)$ og $\frac{dK(x)}{dx}$ finnes analytisk ved å sette funksjonene lik hverandre:

$$TEK(x) = \frac{dK(x)}{dx} \quad (12)$$

$$ax + b + \frac{c}{x} = 2ax + b \quad (13)$$

$$-ax = -\frac{c}{x} \quad \left| \cdot (-x) \right. \quad (14)$$

$$ax^2 = c \quad \left| \cdot \frac{1}{a} \right. \quad (15)$$

$$x^2 = \frac{c}{a} \quad (16)$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{\frac{c}{a}}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (17)$$

i) Bedriftens **totale resultat** $TR(x)$:

$$\underline{\underline{TR(x)}} = I(x) - K(x) \quad (18)$$

$$= x \cdot p(x) - K(x) \quad (19)$$

$$= x \cdot (Ax + B) - (ax^2 + bx + c) \quad (20)$$

$$= \underline{\underline{(A-a)x^2 + (B-b)x - c}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (21)$$

j) Den **deriverte** av $TEK(x)$:

$$\underline{\underline{\frac{dTR(x)}{dx}}} = \frac{d}{dx} \left((A-a)x^2 + (B-b)x - c \right) = \underline{\underline{2(A-a)x + (B-b)}} \quad (22)$$

Maksimum til $TR(x)$ finnes ved å derivere og sette den deriverte lik **null**:

$$\frac{dTR(x)}{dx} = 0 \quad (23)$$

$$2(A-a)x + (B-b) = 0 \quad (24)$$

$$2(A-a)x = -(B-b) \quad \left| \cdot \frac{1}{2(A-a)} \right. \quad (25)$$

$$\underline{\underline{x = \frac{b-B}{2(A-a)}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (26)$$

k) Den numeriske verdien av lign.(26):

$$\underline{\underline{x}} = \frac{b - B}{2(A - a)} = \frac{(200 - 3\,200) \text{ NOK} \cdot \cancel{\text{år}}}{2(-4 - 1) \cancel{\text{NOK}} \cdot (\text{år})^2} = \underline{\underline{300 \text{ 1/år}}} \quad (27)$$

l) Nei, produksjonskvantumet som minimerer enhetskostnaden $TEK(x)$, $x = 500$,
er ikke sammenfallende produksjonskvantumet som *maksimerer*
fortjenesten $TR(x)$, $x = 300$.

■

Oppgave 2: (innbyggerelastisitet / transport)

a) Innbyggerelastisiteten $E_N(t)$:

$$\underline{\underline{E_N(t)}} = \frac{dt(N)}{dN} \cdot \frac{N}{t(N)} \quad (28)$$

$$= \frac{d}{dN} \left(c \cdot N^{0.23} \right) \cdot \frac{N}{c \cdot N^{0.23}} \quad (29)$$

$$= \left(c \cdot 0.23 \cdot N^{0.23-1} \right) \cdot \frac{N}{c \cdot N^{0.23}} \quad (30)$$

$$= \underline{\underline{0.23}} \quad (31)$$

■

b) Tolking:

Dersom innbyggertallet N øker med 1 % så vil den gjennomsnittlige reisetiden til jobb øke med 0.23 %.

(Altså “vekstfaktoren” er 0.23.)

c) Siden

$$E_N(t) = \frac{\% \text{-vis endring i reisetid}}{\% \text{-vis endring i innbyggertallet}} \quad (32)$$

så ser vi at:

$$\underline{\underline{\text{\textcolor{blue}{\%}-vis} \text{ endring i reisetid}}} = \underbrace{E_N(t)}_{= 0.23} \cdot \underbrace{\text{\textcolor{blue}{\%}-vis} \text{ endring i } \text{\textcolor{red}{inntekt}}}_{= 5 \%} \quad (33)$$

$$= 0.23 \cdot 5 \% \quad (34)$$

$$= \underline{\underline{1.15 \%}} \quad (35)$$

- d)** Gjennomsnittlig reisetid til jobben for innbyggere i New York:

$$\underline{\underline{t(N)}} = c \cdot N^{0.23} \quad (36)$$

$$= 1.7 \cdot 8\,200\,000^{0.23} \text{ minutter} \approx \underline{\underline{66 \text{ minutter}}} \quad (37)$$

- e)** Gjennomsnittlig reisetid for innbyggere i New York dersom innbyggertallet N øker med 5 %:

$$\underline{\underline{t(N)}} = c \cdot \left[\left(1 + \frac{5 \%}{100 \%} \right) \cdot N \right]^{0.23} \quad (38)$$

$$= 1.7 \cdot (1.05 \cdot 8\,200\,000)^{0.23} \text{ minutter} \approx \underline{\underline{67 \text{ minutter}}} \quad (39)$$

eller man kan bruke svaret fra oppgave **c** og **d**:

$$\underline{\underline{t(N)}} = 66 \cdot \left(1 + \frac{1.15 \%}{100 \%} \right) \text{ minutter} \approx \underline{\underline{67 \text{ minutter}}} \quad (40)$$

■

Oppgave 3: (annuitetslån vs serielån)

- a) Terminbeløpet for **ann**uitetslånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{K}} = K_0 \cdot \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (41)$$

$$= 300\,000 \cdot \frac{0.03}{1 - \frac{1}{(1+0.03)^{15}}} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{25\,130 \text{ NOK}}} \quad (42)$$

- b) For et **ann**uitetslån gjeider:

$$n \cdot K = K_0 + R_n^{\text{ann}} \quad (43)$$

Denne ligningen kan vi løse med hensyn på R_n^{ann} :

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = n \cdot K - K_0 \quad (44)$$

$$\approx (15 \cdot \underbrace{25\,130}_{\text{oppg. a}} - 300\,000) \text{ NOK} = \underline{\underline{76\,950 \text{ NOK}}} \quad (45)$$

hvor svaret fra oppgave **a** er benyttet.

Alternativt kan man også bruke formelen fra formelsamlingen:

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = K_0 \cdot \left[\frac{n \cdot r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right] \quad (46)$$

$$= 300\,000 \cdot \left[\frac{15 \cdot 0.03}{1 - \frac{1}{(1+0.03)^{15}}} - 1 \right] \text{ NOK} \approx \underline{\underline{76\,950 \text{ NOK}}} \quad (47)$$

- c) Avdragene for et serielån er konstante:

$$\underline{\underline{\text{avdrag}}} = \frac{K_0}{n} = \frac{300\,000}{15} \text{ NOK} = \underline{\underline{20\,000 \text{ NOK}}} \quad (48)$$

- d) Renten for **seriel**lånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{serie}}}} = K_0 \cdot r \frac{n+1}{2} = 300\,000 \cdot 0.03 \cdot \frac{15+1}{2} \text{ NOK} = \underline{\underline{72\,000 \text{ NOK}}} \quad (49)$$

- e) Forklaring på hvorfor $R_n^{\text{ann}} > R_n^{\text{serie}}$:

I starten av lånets tilbakebetalingstid betaler firmaet **mindre** tilbake til banken ved et **annuitetslån** enn et **seriel**lån. Dermed lånes pengene “**lenger**”.
Renten blir derfor **større** for et **annuitetslån**.



Oppgave 4: (Lagrange multiplikator)

- a) Den faste kostnaden er den kostnaden som er uavhengig av produksjonen, dvs. $K(x, y)$ når $x = 0$ og $y = 0$:

$$\underline{\underline{K(0,0)}} = 500x + 100y + 100xy + 1200 \Big|_{x=0,y=0} = \underline{\underline{1200 \text{ NOK}}} \quad (50)$$

- b) Inntekten $I(x, y)$ er:

$$\underline{\underline{I(x,y)}} = p_{\text{A}}(x, y)x + p_{\text{B}}(x, y)y \quad (51)$$

$$= (4000 - 100x + 200y)x + (2600 + 200x - 100y) \cdot y \quad (52)$$

$$= 4000x - 100x^2 + 200xy + 2600y + 200xy - 100y^2 \quad (53)$$

$$= \underline{\underline{-100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (54)$$

- c) Profitten $P(x, y)$ er:

$$\underline{\underline{P(x,y)}} = I(x, y) - K(x, y) \quad (55)$$

$$= -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y \quad (56)$$

$$- (500x + 100y + 100xy + 1200) \quad (57)$$

$$= -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y \quad (58)$$

$$- 500x - 100y - 100xy - 1200 \quad (59)$$

$$= \underline{\underline{-100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y - 1200}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (60)$$

- d) Dette er et maksimeringsproblem under en **bibetingelse**. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Bibetingelsen kan skrives:

$$g(x, y) = x + y = 12 \quad (61)$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$F(x, y) = P(x, y) - \lambda [g(x, y) - c] \quad (62)$$

hvor $c = 12$. De **stasjonære punktene** til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (64)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (x + y - 12) = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (x + y - 12) = 0 \quad (66)$$

$$-200x + 300y + 3500 - \lambda = 0 \quad (67)$$

$$-200y + 300x + 2500 - \lambda = 0 \quad (68)$$

$$-200x + 300y + 3500 = \lambda \quad (69)$$

$$-200y + 300x + 2500 = \lambda \quad (70)$$

De to ligningene i lign.(69) og (70) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsetningsmetoden”¹. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(69) og (70):

$$\lambda = \lambda \quad (71)$$

$$-200x + 300y + 3500 = -200y + 300x + 2500 \quad (72)$$

$$300y + 200y = 300x + 200x + 3500 - 3500 \quad (73)$$

$$500y = 500x - 1000 \quad (74)$$

$$\underline{y = x - 2} \quad (75)$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(75) inn i bibetingelsen:

$$x + \textcolor{red}{y} = 12 \quad (76)$$

$$x + \left(\textcolor{red}{x - 2} \right) = 12 \quad (77)$$

$$2x = 12 + 2 \quad (78)$$

$$\underline{x = 7} \quad (79)$$

som gir, f.eks. via lign.(75), $y = 12 - 7 = 5$.

¹Med “innsetningsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

Maksimum for profitten $P(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (7, 5)$.
 For å **maksimere profitten** bør MBM produsere:

$$\underline{\underline{x = 7}} \quad \text{A k per, spesialversjon} \quad (80)$$

$$\underline{\underline{y = 5}} \quad \text{B k per, klassisk versjon} \quad (81)$$

e) Maksimal profitt P_{maks} for MBM:

$$\underline{P(7, 5)} \stackrel{\text{lign. (60)}}{=} -100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y - 1200 \Big|_{x=7, y=5} \quad (82)$$

$$= (-100 \cdot 7^2 - 100 \cdot 5^2 + 300 \cdot 7 \cdot 5 + 3500 \cdot 7 + 2500 \cdot 5 - 1200) \text{ NOK} \quad (83)$$

$$= \underline{\underline{38\,900 \text{ NOK}}} \quad (84)$$

Den st rste profitten til MBM, som f s ved   produsere $x = 7$ k per av type **A** og $y = 5$ k per av type **B**, er $P_{\text{maks}} = 38\,900 \text{ NOK}$.

f) Prising for å oppnå P_{maks} :

$$\underline{p_{\text{A}}(7, 5)} = 4000 - 100x + 200y \Big|_{x=7, y=5} \quad (85)$$

$$= (4000 - 100 \cdot 7 + 200 \cdot 5) \text{ NOK} = \underline{4300 \text{ NOK}} \quad (86)$$

$$\underline{p_{\text{B}}(7, 5)} = 2600 + 200x - 100y \Big|_{x=7, y=5} \quad (87)$$

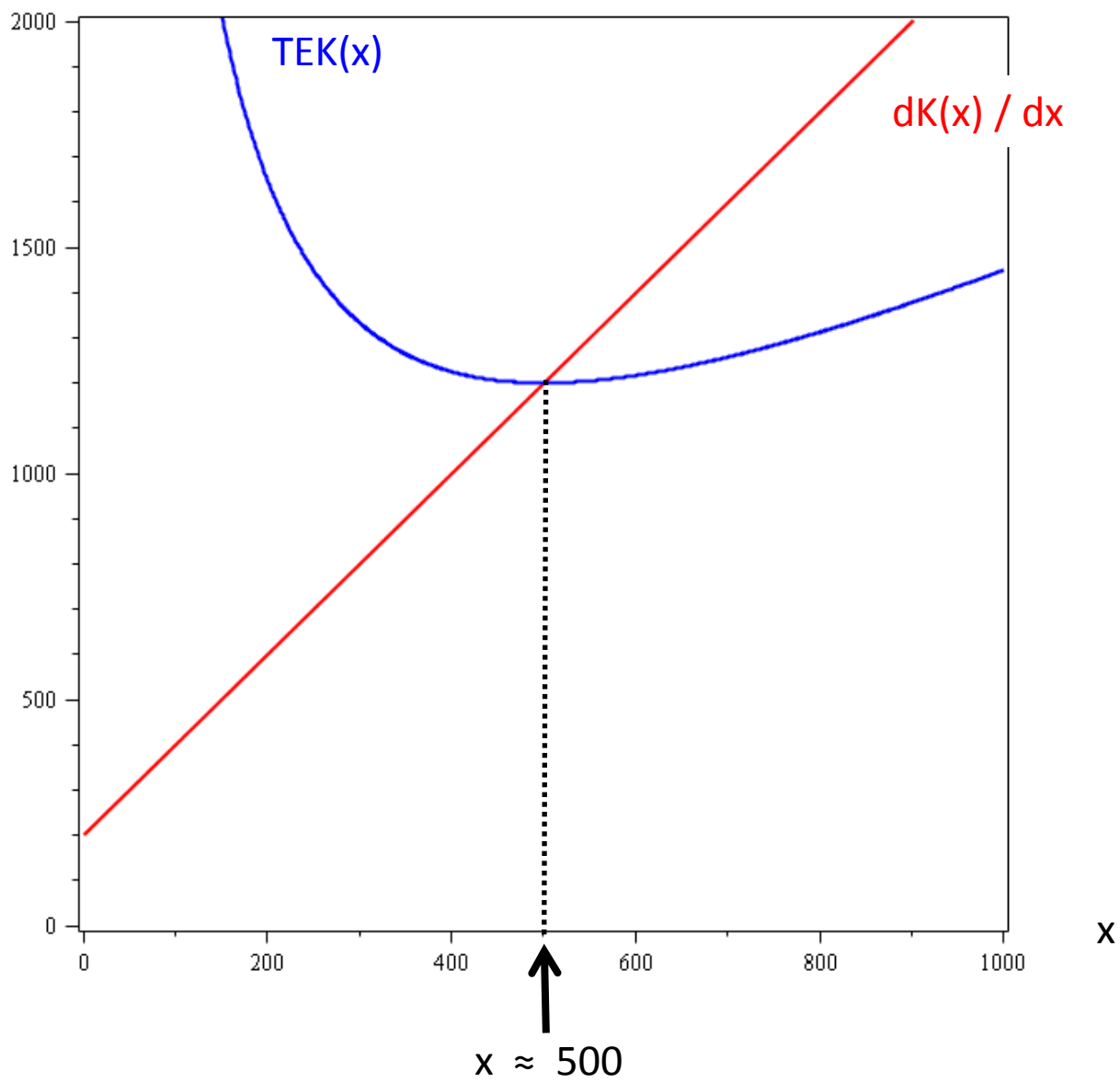
$$= (2600 + 200 \cdot 7 - 100 \cdot 5) \text{ NOK} = \underline{3500 \text{ NOK}} \quad (88)$$

Den største profitten oppnås dersom prisen på spesialkåper **A** settes til $p_{\text{A}}(7, 5) = 4300 \text{ NOK}$ og klasisk kåpe **A** prises til $p_{\text{B}}(7, 5) = 3500 \text{ NOK}$.

■

Vedlegg A

x	0	400	800
$dK(x) / dx$	200	1000	1800



Kontinuasjonseksamen 2012

LØSNING: Eksamen 7. juni 2013

“MAT100 Matematikk”, konteeksamen, 2013

Oppgave 1: (økonomi, kostnad, inntekt og fortjeneste)

a) Den totale fortjenesten $F(x)$ per uke er:

$$\underline{\underline{F(x)}} = \underbrace{\text{inntekt}}_{= p \cdot x} - \underbrace{\text{kostnad}} \quad (1)$$

$$= p \cdot x - K(x) \quad (2)$$

$$= p \cdot x - (ax^2 + bx + c) \quad (3)$$

$$= \underline{\underline{(p - b)x - ax^2 - c}}, \text{ q.e.d.} \quad (4)$$

b) Produksjonsmengden som gir balanse mellom inntekt og den totale kostnaden er bestemt av $F(x)$:

$$F(x) = 0 \quad (5)$$

$$(p - b)x - ax^2 - c = 0 \quad (6)$$

$$-2x^2 + (560 - 200)x - 11\,200 = 0 \quad (7)$$

$$-2x^2 + 360x - 11\,200 = 0 \quad (8)$$

som er en 2. gradsligning.

Løser 2. gradsligningen: (se side 16 i formelsamlingen fra 2012)

$$x = \frac{-360 \pm \sqrt{360^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-11\,200)}}{2 \cdot (-2)} = \begin{cases} 40 \\ 140 \end{cases} \quad (9)$$

Dersom Jobbfrukt produserer og selger 40 eller 140 fruktfat så er det balanse mellom inntekt og kostnad.

c) Fortjenesten $F(x)$ optimeres når $F'(x)$:

$$F'(x) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dx} \left((p-b)x - ax^2 - c \right) = 0 \quad (12)$$

$$p - b - 2ax = 0 \quad (13)$$

som gir, når man løser med hensyn på x :

$$\underline{\underline{x = \frac{p-b}{2a}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (14)$$

Den 2. deriverte:

$$\underline{\underline{F''(x)}} = \frac{d^2 F}{dx^2} \quad (15)$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} \left((p-b)x - ax^2 - c \right) \quad (16)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(p - b - 2ax \right) = \underline{\underline{-2a}} \quad (17)$$

er negativ siden $a > 0$. Dermed representerer x i lign.(14) et maksimum.

d) Setter inn tall og regner ut x i lign.(14).¹

$$\underline{\underline{x}} = \frac{p-b}{2a} \quad (18)$$

$$= \frac{(560 - 200) \text{ NOK}}{2 \cdot 2 \text{ NOK} \cdot \text{uke}} = \underline{\underline{90 \frac{1}{\text{uke}}}} \quad (19)$$

e) Enhetskostnad, dvs. kostnad per fruktfat:

$$\underline{\underline{E(x)}} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x} \quad (20)$$

$$= \frac{ax^2 + bx + c}{x} = \underline{\underline{ax + b + \frac{c}{x}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (21)$$

f) Den **deriverte** av $E(x)$:

$$\underline{\underline{\frac{d E(x)}{dx}}} = \frac{d}{dx} \left(ax + b + \frac{c}{x} \right) = \underline{\underline{a - \frac{c}{x^2}}} \quad (22)$$

Optimum til $E(x)$ finnes ved å **derivere** og deretter sette den deriverte lik **null**:

$$\frac{d E(x)}{dx} = 0 \quad (23)$$

$$a - \frac{c}{x^2} = 0 \quad \left| \cdot x^2 \right. \quad (24)$$

$$ax^2 - c = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{a} \right. \quad (25)$$

¹Husk rett benevning.

$$x^2 - \frac{c}{a} = 0 \quad (26)$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{\frac{c}{a}}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (27)$$

Den 2. deriverte:

$$\underline{E''(x)} = \frac{d^2 E}{dx^2} \quad (28)$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} \left(ax + b + \frac{c}{x} \right) \quad (29)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(a - \frac{1}{x^2} \right) \quad (30)$$

$$= -\frac{(-2)}{x^3} = \underline{\underline{\frac{2}{x^3}}} \quad (31)$$

er positiv siden $x > 0$. Dermed representerer x i lign.(27) et minimum.

g) Setter inn numeriske verdier:

$$\underline{\underline{x}} = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{11\,200 \text{ NOK}}{2 \text{ NOK} \cdot (\text{uke})^2}} \approx \underline{\underline{75 \frac{1}{\text{uke}}}} \quad (32)$$

h) Maksimum av fortjenesten $F(x)$ inntreffer for $x = 90 \frac{1}{\text{uke}}$, mens minimum av enhetskostnaden $E(x)$ inntreffer ved $x = 75 \frac{1}{\text{uke}}$.

Disse er altså ikke sammenfallende.

Man skal ikke minimere enhetskostnadene for “enhver pris”.

■

Oppgave 2: (priselastisitet / økonomi)

a) Se vedlegg A.

b) Priselastisiteten $E_p(x)$:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = \frac{d x(p)}{d p} \cdot \frac{p}{x(p)} \quad (33)$$

$$= \frac{d}{dp} \left(c \cdot p^{-1.2} \right) \cdot \frac{p}{c \cdot p^{-1.2}} \quad (34)$$

$$= \left(\cancel{c} \cdot (-1.2) \cdot \cancel{p^{-1.2-1}} \right) \cdot \frac{\cancel{p}}{\cancel{c} \cdot \cancel{p^{-1.2}}} \quad (35)$$

$$= \underline{\underline{-1.2}} \quad (36)$$

■

c) Tolking:

Dersom prisen p på brus øker med 1 % så vil etterspørselen minke med 1.2 %.

(Altså “reduksjonsfaktoren” er 1.2.)

d) Siden

$$E_p(x) = \frac{\% \text{-vis endring i etterspørsel}}{\% \text{-vis endring i pris}} \quad (37)$$

så ser vi at:

$$\underline{\underline{\text{\textcolor{blue}{\%}-vis} \text{ endring i etterspørsel}}} = \underbrace{E_p(t)}_{= -1.2} \cdot \underbrace{\text{\textcolor{blue}{\%}-vis} \text{ endring i } \text{\textcolor{red}{inntekt}}}_{= 8 \%} \quad (38)$$

$$= (-1.2) \cdot 8 \% \quad (39)$$

$$= \underline{\underline{-9.6 \%}} \quad (40)$$

e) Etterspørselen av 0.5 liter brus per dag:

$$\underline{\underline{x(p = 18)}} = c \cdot p^{-1.2} \quad (41)$$

$$= 65\,000 \cdot 18^{-1.2} \approx \underline{\underline{2\,026}} \quad (42)$$

f) Etterspørsel per dag dersom prisen øker med 12 %:

$$\underline{\underline{x(p)}} = c \cdot \left[\left(1 + \frac{12 \%}{100 \%} \right) \cdot p \right]^{-1.2} \quad (43)$$

$$= 65\,000 \cdot (1.12 \cdot 18)^{-1.2} \approx \underline{\underline{1\,768}} \quad (44)$$

■

Oppgave 3: (diskret vs kontinuerlig rente)

a) Tar utgangspunkt i **renteformelen**² og løser med hensyn på ***n*** alene:

$$K_n = K_0 (1 + r)^n \quad \left| \cdot \frac{1}{K_0} \right. \quad (45)$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1 + r)^n \quad (46)$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1 + r)^n \quad \text{ta } \ln \text{ (eller log) på hver side av ligningen} \quad (47)$$

$$\ln \left(\frac{K_n}{K_0} \right) = \ln(1 + r)^n \quad \text{bruker regneregel: } \ln x^n = n \ln x \quad (48)$$

$$\ln \left(\frac{K_n}{K_0} \right) = n \cdot \ln(1 + r) \quad \left| \cdot \frac{1}{\ln(1 + r)} \right. \quad (49)$$

$$\frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1 + r)} = n \quad (50)$$

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1 + r)}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (51)$$

b) Bruker lign.(51) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{n} \stackrel{\text{lign. (51)}}{=} \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1 + r)} \quad (52)$$

$$= \frac{\ln(\frac{15\,000 \text{ NOK}}{10\,000 \text{ NOK}})}{\ln(1 + 0.03)} \stackrel{\text{kalkis}}{=} \underline{13.7} \quad (53)$$

Med tilbudet fra DnB tar det 13.7 år å spare til 15 000 NOK.

²Se formelsamling.

- c) Tar utgangspunkt i den kontinuerlige renteformelen³ og løser med hensyn på t alene:

$$K_t = K_0 e^{rt} \quad \left| \cdot \frac{1}{K_0} \right. \quad (54)$$

$$\frac{K_t}{K_0} = e^{rt} \quad \text{ta } \ln \text{ på hver side av ligningen} \quad (55)$$

$$\ln \left(\frac{K_t}{K_0} \right) = \ln e^{rt} \quad \text{bruker regneregel: } \ln x^n = n \ln x \quad (56)$$

$$\ln \left(\frac{K_t}{K_0} \right) = r \cdot t \quad \left| \cdot \frac{1}{r} \right. \quad (57)$$

$$\frac{\ln(\frac{K_t}{K_0})}{r} = t \quad (58)$$

$$\underline{\underline{t = \frac{\ln(\frac{K_t}{K_0})}{r}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (59)$$

- d) Bruker lign.(59) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{t} \stackrel{\text{lign. (59)}}{=} \frac{\ln(\frac{K_t}{K_0})}{r} \quad (60)$$

$$= \frac{\ln(\frac{15\,000 \text{ NOK}}{10\,000 \text{ NOK}})}{0.028} \stackrel{\text{kalkis}}{=} \underline{14.5} \quad (61)$$

Med tilbudet fra Sparebanken Møre tar det 14.5 år å spare til 15 000 NOK.

- e) Det tar kortest tid å spare til 15 000 NOK med tilbudet fra DnB.

DnB har det beste tilbudet.



³Se formelsamling.

Oppgave 4: (nyttemaksimering / Lagrange multiplikatorer / økonomi)

a) Nyttefunksjonen

$$\underline{\underline{U(x, y) = 4x^{0.4}y^{0.6}}} \quad (62)$$

skal maksimeres under bibetingelsen

$$\underline{\underline{g(x, y) = p_x x + p_y y = m}} \quad (63)$$

b) Lagrange-funksjonen er:

$$F(x, y) = U(x, y) - \lambda [g(x, y) - m] \quad (64)$$

hvor m er en konstant. De stasjonære punktene til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (66)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(4x^{0.4}y^{0.6} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(p_x x + p_y y \right) = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(4x^{0.4}y^{0.6} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(p_x x + p_y y \right) = 0 \quad (68)$$

$$4 \cdot 0.4 \cdot x^{0.4-1} y^{0.6} - \lambda p_x = 0 \quad (69)$$

$$4 \cdot 0.6 \cdot x^{0.4} y^{0.6-1} - \lambda p_y = 0 \quad (70)$$

$$\frac{1.6 x^{-0.6} y^{0.6}}{p_x} = \lambda \quad (71)$$

$$\frac{2.4 x^{0.4} y^{-0.4}}{p_y} = \lambda \quad (72)$$

$$\frac{1.6}{p_x} x^{-0.6} y^{0.6} = \lambda \quad (73)$$

$$\frac{2.4}{p_y} x^{0.4} y^{-0.4} = \lambda \quad (74)$$

De to ligningene i lign.(73) og (74) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsetningsmetoden”⁴. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(73) og (74):

$$\lambda = \lambda \quad (75)$$

$$\frac{1.6}{p_x} x^{-0.6} y^{0.6} = \frac{2.4}{p_y} x^{0.4} y^{-0.4} \quad (76)$$

$$y^{0.6+0.4} = \frac{p_x}{1.6} \frac{2.4}{p_y} x^{0.4+0.6} \quad (77)$$

$$\underline{y = \frac{3}{2} \frac{p_x}{p_y} x} \quad (78)$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(78) inn i bibetingelsen:

$$p_x x + p_y y = m \quad (79)$$

$$p_x x + p_y \left(\frac{3}{2} \frac{p_x}{p_y} x \right) = m \quad (80)$$

⁴Med “innsetningsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

$$p_x x \frac{5}{2} = m \quad (81)$$

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{5} \frac{m}{p_x}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (82)$$

Setter lign.(82) inn i (78):

$$\underline{\underline{y}} \stackrel{\text{lign. (78)}}{=} \frac{3}{2} \frac{p_x}{p_y} \textcolor{red}{x} \quad (83)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\cancel{p_x} \textcolor{red}{2} \textcolor{red}{m}}{\cancel{p_y} \textcolor{red}{5} \cancel{p_x}} = \underline{\underline{\frac{3}{5} \frac{m}{p_y}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (84)$$

c) Numeriske verdier:

$$\underline{\underline{x}} \stackrel{\text{lign. (82)}}{=} \frac{2}{5} \frac{m}{p_x} = \frac{2}{5} \frac{6000 \text{ NOK}}{75 \text{ NOK}} = \underline{\underline{32}} \quad (85)$$

$$\underline{\underline{y}} \stackrel{\text{lign. (84)}}{=} \frac{3}{5} \frac{m}{p_y} = \frac{3}{5} \frac{6000 \text{ NOK}}{150 \text{ NOK}} = \underline{\underline{24}} \quad (86)$$

d) Tolking:

Med nyttefunksjonen $U(x, y) = 4x^{0.4}y^{0.6}$ så er det **størst nytte** ved å kjøpe:

$$\underline{\underline{x = 32 \text{ kinobilletter}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{y = 24 \text{ teaterbilletter}}}$$

i året.

- e) Beløp som brukes på kinobilletter per år:

$$\underline{\underline{p_x \cdot x}} = 75 \cdot 32 \text{ NOK} = \underline{\underline{2\,400 \text{ NOK}}} \quad (87)$$

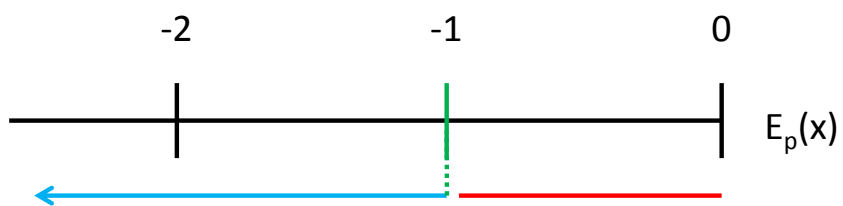
- f) Beløp som brukes på teaterbilletter per år:

$$\underline{\underline{p_y \cdot y}} = 150 \cdot 24 \text{ NOK} = \underline{\underline{3\,600 \text{ NOK}}} \quad (88)$$

■

Vedlegg A

(Husk å skrive studentnummer på vedlegget.)



Elastisk:

Etterspørselen er følsom for prisendring.

Nøytralelastisk:

Etterspørselen har samme følsomhet som prisen.

Uelastisk:

Etterspørselen er lite følsom for prisendring.

Hovedeksamen 2013

LØSNING: Eksamen 18. des. 2013

“MAT100 Matematikk”, høst 2013

Oppgave 1: (algebra / faktorisering / brøk)

a) Setter inn ligningene i generalbudsjettlikningen:

$$\underline{R} = C + I + G + X \quad (1)$$

$$= \underline{C_0 + c(R - T) + I + G + X_0 - bR} \quad (2)$$

Flytt alle R -ledd over på venstre side:

$$R - cR + bR = C_0 - cT + I + G + X_0 \quad (3)$$

$$R(1 - c + b) = C_0 - cT + I + G + X_0 \quad \bigg| \cdot \frac{1}{1 - c + b} \quad (4)$$

$$R = \frac{C_0 + X_0 - cT + I + G}{1 - c + b} \quad (5)$$

Med definisjonen

$$m \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{1 - c + b}, \quad (6)$$

kan denne ligningen skrive

$$\underline{\underline{R = m \cdot (C_0 + X_0 - cT + I + G)}} \quad (7)$$

- b) i) c øker $\Rightarrow$ m øker
 ii) b øker $\Rightarrow$ m minker

- c) Man kan ikke dele på 0. Ut fra lign.(6) ser vi da at:

$$\underline{\underline{1 - c + b \neq 0}} \quad (8)$$

- d) Setter inn ligningene i *generalbudsjettlikningen*:

$$\underline{R} = C + I + G + X \quad (9)$$

$$= 100 + 0.25(R - 200) + 150 + 0.25R - 800r + 200 + 0 \quad (10)$$

$$= 100 + 0.25R - 50 + 150 + 0.25R - 800r + 200 \quad (11)$$

$$= \underline{\underline{0.5R - 800r + 400}} \quad (12)$$

Nå løser vi ligningen ovenfor med hensyn på det vi ønsker, nemlig r :

$$800r = 0.5R - R + 400 \quad | \cdot \frac{1}{800} \quad (13)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{r}} = \frac{-0.5R + 400}{800} \quad (14)$$

$$= -\frac{0.5}{800}R + \frac{400}{800} \quad (15)$$

$$= \underline{\underline{-0.000625R + 0.5}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (\text{IS-kurve}) \quad (16)$$

- e) Økonomien er i likevekt når lign.(16) og LM-kurven som oppgitt i oppgaven, er like:

$$r \text{ i lign.(16)} = r \text{ i LM-kurven} \quad (\text{likevekt}) \quad (17)$$

$$-0.000625R + 0.5 = 0.000375R - 0.25 \quad (18)$$

$$-0.000625R - 0.000375R = -0.25 - 0.5 \quad (19)$$

$$-0.001R = -0.75 \quad (20)$$

$$\underline{\underline{R = 750}} \quad (21)$$

- f) Rentenivået finnes ved å sette $R = 750$ inn i en av formlene for r , enten lign.(16) eller LM-kurven som oppgitt i oppgaven. Det er samme hvilken av disse man bruker siden de er like når økonomien er i likevekt. La oss f.eks. velge LM-kurven:

$$\underline{\underline{r}} = 0.000375R - 0.25 \quad (22)$$

$$\stackrel{R=750}{=} 0.000375 \cdot 750 - 0.25 \quad (23)$$

$$= \underline{\underline{0.03125}} \quad (24)$$

Dersom vi i stedet bruker lign.(16) får vi selvfølgelig samme svar:

$$\underline{\underline{r}} \stackrel{\text{lign.(16)}}{=} -0.000625R + 0.5 \quad (25)$$

$$\stackrel{R=750}{=} -0.000625 \cdot 750 + 0.5 \quad (26)$$

$$= \underline{\underline{0.03125}} \quad (27)$$

- g)** Lign.(16) og LM-kurven er lineære ligninger, altså 1. gradsligninger, dvs. ligninger på formen $f(x) = ax + b$, hvor a og b er konstanter.
- h)** Se vedlegg A.
- i)** Av figuren på i vedlegg A ser vi at grafene skjærer hverandre for $R = 750$. Dette stemmer med **f**.
- j)** Husk at når man skal finne den %-vise endring må man dele på det man starter med, dvs. dele med $I_1 = 468$ i vårt tilfelle. Dermed:

$$\underline{\underline{\% - vis endring}} = \frac{I_2 - I_1}{I_1} = \frac{543 - 468}{468} \cdot 100 \% \approx \underline{\underline{16.03\%}} \quad (28)$$

som altså er en **økning** siden tallet i lign.(28) er **positivt**.

Test:¹

For å teste at svaret vårt i lign.(28) er riktig så kan vi gjøre følgende test: Legg til 16.03% på startinvesteringen $I_1 = 468$. Da ender vi opp med:

$$\underline{I_1 \cdot (1 + 16.03\%)} = I_1 \cdot 1.1603 \approx \underline{543} \quad (29)$$

som stemmer med oppgaven, $I_2 = 543$. ■

¹Dette behøver du ikke å skrive inn i eksamenbesvarelsen. Men det kan være lurt å sjekke svaret ditt på kladd.

Oppgave 2: (derivasjon / algebra / tolkning / forståelse av ligninger)

a) Alle størrelsene H , D og S er positive. Dermed:

- i) Q øker $\Rightarrow \underline{\underline{HQ/2 \text{ øker}}}$
- ii) Q øker $\Rightarrow \underline{\underline{DS/Q \text{ minker}}}$

b) **Optimum** av total kostnad $TC(Q)$ inntreffer når **stigningstallet = 0**:

$$\text{stigningstallet til } TC(Q) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{dTC(Q)}{dQ} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} Q + \frac{DS}{Q} \right) = 0 \quad (32)$$

$$\frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} Q + DS Q^{-1} \right) = 0 \quad (33)$$

$$\frac{H}{2} + DS (-1) Q^{-1-1} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{H}{2} - \frac{DS}{Q^2} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{H}{2} = \frac{DS}{Q^2} \quad | \cdot Q \quad (36)$$

$$\underline{\underline{\frac{H}{2} Q = \frac{DS}{Q}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (37)$$

med andre ord: kostnaden optimeres når **lager**kostnaden = **ordre**kostnaden.

- c) Den førstederiverte av $TC(Q)$ fant vi i oppgave b, lign.(35):

$$\frac{dTC(Q)}{dQ} = \frac{H}{2} - \frac{DS}{Q^2} . \quad (38)$$

Den 2. deriverte finner vi ved å derivere en gang til:

$$\underline{\underline{\frac{d^2TC(Q)}{dQ^2}}} = \frac{d}{dQ} \left(\frac{dTC(Q)}{dQ} \right) \quad (39)$$

$$= \frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} - \frac{DS}{Q^2} \right) \quad (40)$$

$$= \frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} - DSQ^{-2} \right) \quad (41)$$

$$= 0 - DS(-2)Q^{-2-1} \quad (42)$$

$$= 2DSQ^{-3} = \underline{\underline{\frac{2DS}{Q^3}}} \quad (43)$$

Siden D , S og Q alle er positive størrelser så er også $\frac{d^2TC(Q)}{dQ^2} > 0$, dvs. $Q = EOQ$ representerer et minimum for $TC(Q)$.

- d) Ut fra lign.(37) kan vi løse ut Q alene:

$$\frac{Q}{2} H = \frac{D}{Q} S \quad | \cdot Q \quad (44)$$

$$\frac{Q^2}{2} H = D S \quad | \cdot \frac{2}{H} \quad (45)$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{H} \quad (46)$$

$$\underline{\underline{EOQ}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} , \quad \text{q.e.d.} \quad (47)$$

hvor notasjonen EOQ er introdusert for optimal Q .

e) Tolkning av lign.(47):

$$\underline{\underline{EOQ}} = \underline{\underline{\text{den ordrestørrelsen (av f.eks. råvarer) som må bestilles for å minimere lager- og bestillingskostnaden}}} \quad (48)$$

f) Den totale kostnaden i minimum, dvs. $TC_{\text{min}} = TC(\text{EOQ})$, er:

$$\underline{\underline{TC_{\text{min}}}} = TC(\text{EOQ}) \quad (49)$$

$$= \frac{\text{EOQ}}{2} H + \frac{D}{\text{EOQ}} S \quad (50)$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2DS}{H}}}{2} H + \frac{D}{\sqrt{\frac{2DS}{H}}} S \quad (51)$$

$$= \sqrt{\frac{DSH}{2}} + \sqrt{\frac{DSH}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2DSH}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (52)$$

g) Tolkning av lign.(47):

$$\underline{\underline{TC_{\text{min}}}} = \underline{\underline{\text{den minste lager- og bestillingskostnaden man kan oppnå per periode under de gitte betingelsene}}} \quad (53)$$

h) Den totale kostnaden $TC(Q)$ med en ordrestørrelse på $Q = 100$:

$$\underline{\underline{TC(100)}} = \left. \frac{H}{2}Q + \frac{DS}{Q} \right|_{Q=100} \quad (54)$$

$$= \left(\frac{150}{2} \cdot 100 + \frac{100 \cdot 1850}{100} \right) \text{NOK} \quad (55)$$

$$= \underline{\underline{9\,350 \text{ NOK}}} \quad (56)$$

- i) Fra oppgave **d** vet vi at den ordrestørrelsen som minimerer total kostnad $TC(Q)$ er gitt ved EOQ-formelen, dvs. lign.(47):

$$\underline{\underline{EOQ}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \quad (57)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \frac{\text{dekk}}{\text{måned}} \cdot 1850 \text{ NOK}}{150 \frac{\text{NOK}}{\text{dekk måned}}}} = \underline{\underline{50 \text{ dekk}}} \quad (58)$$

Fra oppgave **f** vet vi da den minste utgiten er gitt ved lign.(52):

$$\underline{\underline{TC_{\min}}} = \sqrt{2DSH} \quad (59)$$

$$= \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 1850 \cdot 150 \text{ NOK}} = \underline{\underline{7450 \text{ NOK}}} \quad (60)$$

■

Tilleggskommentar:

$TC_{\min} = 7450 \text{ NOK}$ fra oppgave **i** er mindre enn $TC(100) = 9350 \text{ NOK}$ fra oppgave **h**, slik som det skal.

Oppgave 3: (diskret vs kontinuerlig rente)

a) Tar utgangspunkt i **renteformelen**² og løser med hensyn på ***n*** alene:

$$K_n = K_0 (1+r)^n \quad \left| \cdot \frac{1}{K_0} \right. \quad (61)$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \quad (62)$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \quad \text{ta } \ln \text{ (eller log) på hver side av ligningen} \quad (63)$$

$$\ln \left(\frac{K_n}{K_0} \right) = \ln(1+r)^n \quad \text{bruker regneregel: } \ln x^n = n \ln x \quad (64)$$

$$\ln \left(\frac{K_n}{K_0} \right) = n \cdot \ln(1+r) \quad \left| \cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \right. \quad (65)$$

$$\frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)} = n \quad (66)$$

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (67)$$

b) Bruker lign.(67) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{n} \stackrel{\text{lign. (67)}}{=} \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)} \quad (68)$$

$$= \frac{\ln(\frac{15\,000 \text{ NOK}}{10\,000 \text{ NOK}})}{\ln(1+0.03)} \stackrel{\text{kalkis}}{=} \underline{13.7} \quad (69)$$

Med tilbudet fra DnB tar det 13.7 år å spare til 15 000 NOK.

²Se formelsamling.

- c) Tar utgangspunkt i den kontinuerlige renteformelen³ og løser med hensyn på t alene:

$$K_t = K_0 e^{rt} \quad \left| \cdot \frac{1}{K_0} \right. \quad (70)$$

$$\frac{K_t}{K_0} = e^{rt} \quad \text{ta } \ln \text{ på hver side av ligningen} \quad (71)$$

$$\ln \left(\frac{K_t}{K_0} \right) = \ln e^{rt} \quad \text{bruker regneregel: } \ln x^n = n \ln x \quad (72)$$

$$\ln \left(\frac{K_t}{K_0} \right) = r \cdot t \quad \left| \cdot \frac{1}{r} \right. \quad (73)$$

$$\frac{\ln \left(\frac{K_t}{K_0} \right)}{r} = t \quad (74)$$

$$\underline{\underline{t = \frac{\ln \left(\frac{K_t}{K_0} \right)}{r}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (75)$$

- d) Bruker lign.(75) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{t} \stackrel{\text{lign. (67)}}{=} \frac{\ln \left(\frac{K_t}{K_0} \right)}{r} \quad (76)$$

$$= \frac{\ln \left(\frac{15\,000 \text{ NOK}}{10\,000 \text{ NOK}} \right)}{0.028} \stackrel{\text{kalkis}}{=} \underline{\underline{14.5}} \quad (77)$$

Med tilbudet fra Sparebanken Møre tar det 14.5 år å spare til 15 000 NOK.

- e) Det tar kortest tid å spare til 15 000 NOK med tilbudet fra DnB.
DnB har det beste tilbudet

³Se formelsamling.

Oppgave 4: (annuitetslån vs serielån)

a) Terminbeløpet for **ann**uitetslånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{K}} = K_0 \cdot \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (78)$$

$$= 1\,200\,000 \cdot \frac{0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{20}}} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{96\,291 \text{ NOK}}} \quad (79)$$

b) Renten for **ann**uitetslånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = K_0 \cdot \left[\frac{n \cdot r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right] \quad (80)$$

$$= 1\,200\,000 \cdot \left[\frac{20 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{20}}} - 1 \right] \text{ NOK} \approx \underline{\underline{725\,822 \text{ NOK}}} \quad (81)$$

- c) Avdragene for et serielån er konstante:

$$\underline{\underline{\text{avdrag}}} = \frac{K_0}{n} = \frac{1\,200\,000}{20} \text{ NOK} = \underline{\underline{60\,000 \text{ NOK}}} \quad (82)$$

- d) Renten for **seriel**lånet er: (se formelsamling)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{serie}}}} = K_0 \cdot r \frac{n+1}{2} = 1\,200\,000 \cdot 0.05 \cdot \frac{20+1}{2} \text{ NOK} = \underline{\underline{630\,000 \text{ NOK}}} \quad (83)$$

■

Oppgave 5: (Lagrange multiplikatorer)

a) Lagrange-multiplikatorer kan brukes til bestemmelse av ekstremalverdier av en funksjon med flere variabler når disse må oppfylle en eller flere bibetingelser.

b) Dersom en funksjon

$$z = f(x, y) \quad , \quad (84)$$

skal optimaliseres (max eller min) under bibetingelsen

$$g(x, y) = c \quad , \quad (85)$$

hvor $c =$ konstant, så kan dette optimeringsproblemet løses ved å finne x og y bestemt av ligningssystemet

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (86)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (87)$$

$$g(x, y) = c \quad (88)$$

hvor Lagrange-funksjonen $F(x, y)$ er definert ved: ($\lambda =$ Lagrange multiplikatoren)

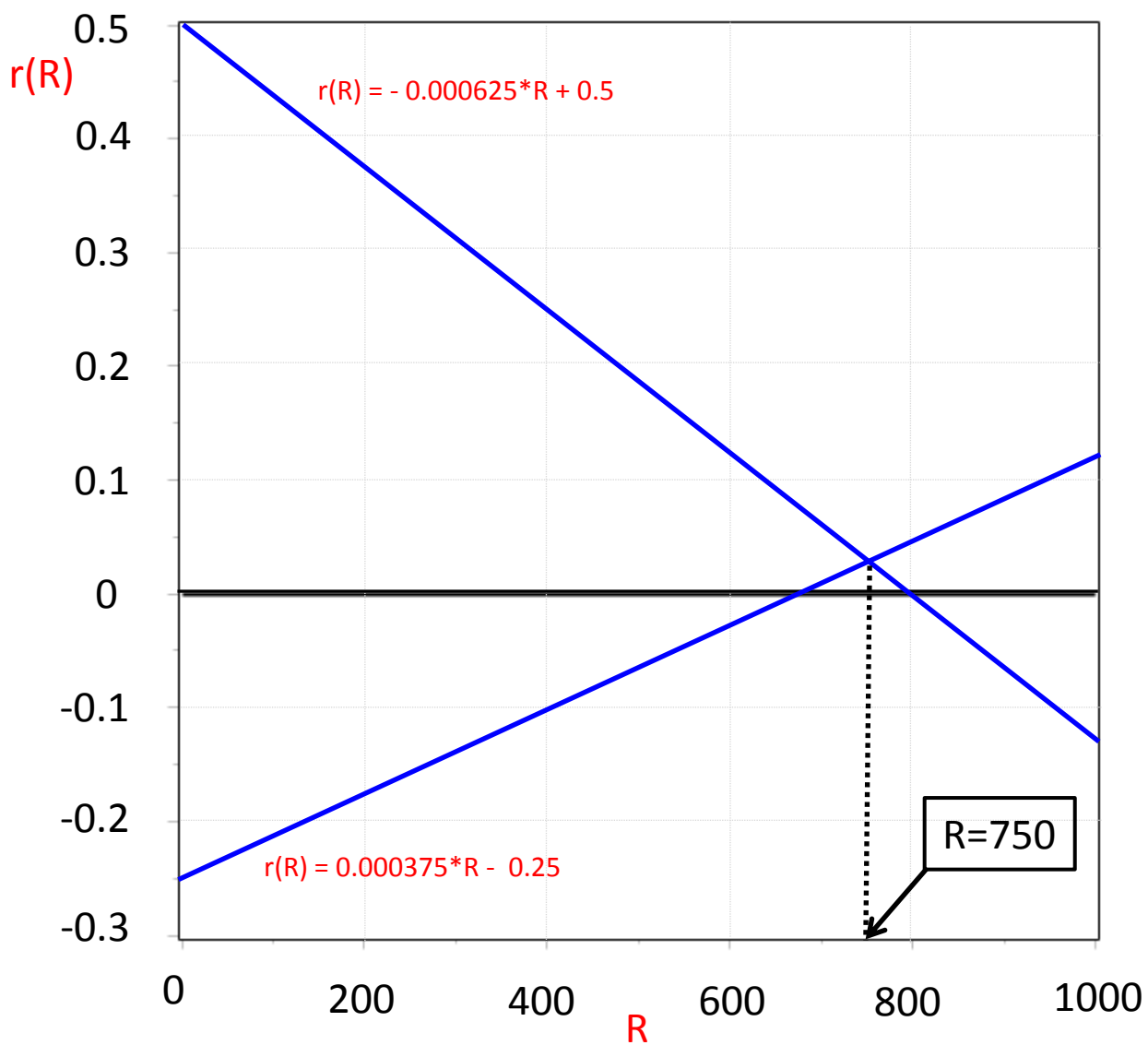
$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - c] \quad . \quad (89)$$

■

Vedlegg A

R	0	500	1000
$r(R) = -0.000625 \cdot R + 0.5$	0.5	0.1875	-0.125

R	0	500	1000
$r(R) = 0.000375 \cdot R - 0.25$	-0.25	-0.0625	0.125



Kontinuasjonseksamen 2013

LØSNING: Eksamen 3. juni 2014

“MAT100 Matematikk”, konteeksamen, 2014

Oppgave 1: (logistikkøkonomi)

a) Grensekostnad:

$$\underline{\underline{K'(x)}} = (x^2 + 50x + 425)' = \underline{\underline{2x + 50}} \quad (1)$$

b) i) Grensekostnaden for å produsere 50 millioner oljefat, dvs. finn $K'(50)$.

$$\underline{\underline{K'(50)}} = 2 \cdot 50 + 50 = \underline{\underline{150}} \quad (2)$$

ii) Tolkning:

$K'(50) = 150$ betyr at dersom man utvinner 50 millioner oljefat og ønsker å utvinne en million oljefat ekstra så har dette en merkostnad på 150 millioner dollar.

c) Fortjenesten $F(x) = I(x) - K(x)$ er gitt ved:

$$\underline{\underline{F(x)}} = I(x) - K(x) \quad (3)$$

$$= 100x - (x^2 + 50x + 425) = \underline{\underline{-x^2 + 50x - 425}} \quad (4)$$

- d) i) Antall oljefat som må utvinnes fra feltet for å **maksimere** profitten:

$$F'(x) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx}(-2x + 50) = 0 \quad (7)$$

$$-2x + 50 = 0 \quad (8)$$

$$x = 25 \quad (9)$$

For å maksimere fortjenesten må Shell utvinne 25 millioner oljefat.

- ii) Siden

$$F''(x) = -2 \quad (10)$$

så er $F(x)$ konkav og vi har ett enkelt stasjonært punkt i $x = 25$ som representerer et maksimum.

- iii) Maksimal fortjeneste:

$$\underline{F(25)} = -25^2 + 50 \cdot 25 - 425 = \underline{200} \quad (11)$$

Shell sin maksimale fortjeneste er 200 millioner dollar.

- e) %-vis øking:

$$\underline{\underline{\% - \text{vis øking}}} = \frac{F_{110} - F_{100}}{F_{100}} = \frac{475 - 200}{200} \cdot 100 \% = \underline{\underline{137.5 \%}} \quad (12)$$

PS:

En *økning* kan være mer enn 100 %.



Oppgave 2: (finansmatematikk)

- a) For et serielån: avdragene er konstante.
For et annuitetslån: terminbeløpene er konstante.

- b) Etter $n = 5$ år har prisen på boliger doblet seg, dvs. gått fra K til $2K$ på 5 år.
Dette er en situasjon som beskrives av renteformelen: (Se side 79 i formelsamlingen.)

$$2K = (1+r)^n K \quad (13)$$

$$2 = (1+r)^n \quad (14)$$

Vi kjenner $n = 5$ år, og skal finne r . Må løse med hensyn på r alene:

$$2^{\frac{1}{n}} = (1+r)^{n \cdot \frac{1}{n}} \quad (15)$$

$$2^{\frac{1}{n}} = (1+r)^1 \quad (16)$$

$$2^{\frac{1}{n}} = 1+r \quad (17)$$

som gir:

$$\underline{r} = 2^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (18)$$

$$= 2^{\frac{1}{5}} - 1 = \underline{0.1487} \quad (19)$$

Prisveksten er 14.87 % per år dersom boligprisene doubles i løpet av 5 år.

- c) i) Terminbeløpet K ved annuitetslån er: (Se side 84 i formelsamlingen.)

$$\underline{K} = K_0 \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad (20)$$

$$= 900\,000 \cdot \frac{0.05 \cdot (1+0.05)^{20}}{(1+0.05)^{20} - 1} \text{ NOK} = \underline{\underline{72\,218.33 \text{ NOK}}} \quad (21)$$

- ii) Det totale rentebeløpet R_n^{ann} som må betales i lånets løpetid ved annuitetslån:
(Se formel for R_n^{ann} på side 85 i formelsamlingen.)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = K_0 \cdot \left[\frac{n \cdot r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right] \quad (22)$$

$$= 900\,000 \cdot \left[\frac{20 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{20}}} - 1 \right] \text{ NOK} = \underline{\underline{544\,366.6 \text{ NOK}}} \quad (23)$$

Siden vi kjenner terminbeløpet K , antall år n og lånets størrelse K_0 så kan vi alternativt finne R_n^{ann} slik:

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = n \cdot K - K_0 \quad (24)$$

$$= (20 \cdot 72\,218.33 - 900\,000) \text{ NOK} = \underline{\underline{544\,366.6 \text{ NOK}}} \quad (25)$$

(På eksamen er det nok å bare løse oppgaven på èn av måtene.)

- d) Dersom lånet skal tilbakebetales som et serielån, derimot, så blir den totale renten:
(Se formel for R_n^{serie} på side 78 i formelsamlingen.)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{serie}}}} = K_0 \cdot r \frac{n+1}{2} \quad (26)$$

$$= 900\,000 \cdot 0.05 \frac{20+1}{2} \text{ NOK} = \underline{\underline{472\,500 \text{ NOK}}} \quad (27)$$

- e) Ved annuitetslån betaler man lite i avdrag i starten. Og tilsvarende mye renter.
For et serielån, derimot, betaler man faste “store” avdrag hele tiden.
Dermed blir renten tilsvarende mindre. Altså:

$$R_n^{\text{ann}} > R_n^{\text{serie}} \quad (28)$$

■

Oppgave 3: (logistikk og økonomi)

a) Gjør om ulikheten til likhet i budsjettlikningen og løser med hensyn på y alene:

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = m \quad (29)$$

$$p_y \cdot y = m - p_x \cdot x \quad \Big| \cdot \frac{1}{p_y} \quad (30)$$

$$\underline{\underline{y = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (31)$$

b) i) Linjen i lign.(31) skjærer y -aksen når $x = 0$:

$$y = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot \overbrace{x}^{=0} \quad (32)$$

$$y = \frac{m}{p_x} - \frac{p_x}{p_y} \cdot 0 \quad (33)$$

$$\underline{\underline{y = \frac{m}{p_y}}} \quad (34)$$

ii) Linjen i lign.(31) skjærer x -aksen når $y = 0$:

$$\overbrace{y}^{=0} = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x \quad (35)$$

$$0 = \frac{m}{\cancel{p_y}} - \frac{p_x}{\cancel{p_y}} \cdot x \quad \Big| \cdot \cancel{p_y} \quad (36)$$

$$0 = m - p_x \cdot x \quad (37)$$

$$p_x \cdot x = m \quad | \cdot \frac{1}{p_x} \quad (38)$$

$$\underline{\underline{x = \frac{m}{p_x}}} \quad (39)$$

iii) Stigningstallet til den lineære lign.(31)

$$y = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x \quad (40)$$

er *koeffisienten* foran x -variabelen, dvs.:

$$\underline{\underline{\text{stigningstall} = - \frac{p_x}{p_y}}} \quad (41)$$

c) Setter tallene som oppgitt for parametrene inn i budsjettligningen:

$$\underline{\underline{y}} = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot x \quad (42)$$

$$= \frac{35\,000}{15} - \frac{1250}{15} \quad (43)$$

$$= \underline{\underline{2333.33 - 83.33 \cdot x}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (44)$$

- d) Løser med hensyn på y alene for gitt nytte $U(x, y) = U_0$ i nyttefunksjonen:

$$\overbrace{U(x, y)}^{=U_0} = c x y^5 \quad (45)$$

$$c x y^5 = U_0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{c x} \quad (46)$$

$$y^5 = \frac{U_0}{c x} \quad (47)$$

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{U_0}{c x} \right)^{\frac{1}{5}}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (48)$$

- e) Se vedlegg A.

- f) Ved avlesning fra figuren ser vi at: (se vedlegg A)

$$\underline{\underline{x_0 \approx 4.6 \frac{\text{timer}}{\text{mnd}}}}, \quad \underline{\underline{y_0 \approx 1950 \frac{\text{liter}}{\text{mnd}}}} \quad (49)$$

Den optimale kombinasjonen av diesel og vedlikehold som gir maksimal nytte er altså $x_0 \approx 4.6$ timer vedlikehold i gjennomsnitt per måned og $y_0 \approx 1950$ liter diesel per måned.

Kommentar:

Siden dette er en avlesning fra en figur så er det en del usikkerhet forbundet med en slik avlesning.

Derfor: bare man er “noenlunde” i nærheten av lign.(49) så godtas det.

■

Oppgave 4: (økonomi)

a) Ønsker å selge $x(p) = 80$ aviser:

$$x(p) = c e^{-0.1p} \quad (50)$$

$$\frac{x(p)}{c} = e^{-0.1p} \quad (51)$$

$$\ln\left(\frac{x(p)}{c}\right) = -0.1p \quad (52)$$

$$-10 \cdot \ln\left(\frac{x(p)}{c}\right) = p \quad (53)$$

Til slutt kan vi sette inn tallene som oppgitt:

$$\underline{p} = -10 \cdot \ln\left(\frac{80}{800}\right) = \underline{23.03 \text{ NOK}} \quad (54)$$

Avisgutten selger 80 aviser dersom prisen på avisen er 23 NOK.

b) Priselastisiteten $E_p(x)$:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = \frac{d x(\textcolor{red}{p})}{d \textcolor{red}{p}} \cdot \frac{\textcolor{red}{p}}{x(\textcolor{red}{p})} \quad (55)$$

$$= \frac{d}{dp} \left(\textcolor{blue}{c} \cdot e^{-0.1p} \right) \cdot \frac{p}{\textcolor{blue}{c} \cdot e^{-0.1p}} \quad (56)$$

$$\stackrel{u=-0.1p}{=} \frac{d}{du} \left(\textcolor{blue}{c} \cdot e^u \right) \frac{du}{dp} \cdot \frac{p}{\textcolor{blue}{c} \cdot e^{-0.1p}} \quad (57)$$

$$= \left(\cancel{c} \cdot \cancel{e^u} \right) (-0.1) \cdot \frac{p}{\cancel{c} \cdot \cancel{e^{-0.1p}}} \quad (58)$$

$$= \underline{\underline{-0.1 \cdot p}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (59)$$

I utregningen ovenfor er kjerneregelen brukt.

c) Tolking:

Dersom prisen på aviser øker med 1 % så vil etterspørselen minke med $0.1 \cdot 25 \% = 2.5 \%$.

(Altså “reduksjonsfaktoren” er 2.5.)

d) Siden

$$E_{\textcolor{red}{p}}(x) = \frac{\textcolor{blue}{\%}\text{-vis endring i etterspørsel}}{\textcolor{blue}{\%}\text{-vis endring i \textcolor{red}{pris}}} \quad (60)$$

så kan vi løse denne ligningen med hensyn på **telleren**,
dvs. løser med hensyn på “ $\textcolor{blue}{\%}\text{-vis}$ endring i etterspørselen”:

$$\underline{\underline{\textcolor{blue}{\%}\text{-vis endring i etterspørsel}}} = \underbrace{E_p(t)}_{= -0.1 \cdot p} \cdot \underbrace{\textcolor{blue}{\%}\text{-vis endring i \textcolor{red}{inntekt}}}_{= 5 \%} \quad (61)$$

$$= -0.1 \cdot 25 \cdot 5 \% \quad (62)$$

$$= -2.5 \cdot 5 \% \quad (63)$$

$$= \underline{\underline{-12.5 \%}} \quad (64)$$

■

Oppgave 5: (Lagrange multiplikatorer)

- a) Metoden med Lagrange multiplikatorer kan brukes til bestemmelse av ekstremalverdier av en funksjon med flere variabler når disse må oppfylle en eller flere bibetingelser.

- b) Dersom en funksjon

$$z = f(x, y) , \quad (65)$$

skal optimaliseres (max eller min) under bibetingelsen

$$g(x, y) = c , \quad (66)$$

hvor $c =$ konstant, så kan dette optimeringsproblemet løses ved å finne x og y bestemt av ligningssystemet

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (68)$$

$$g(x, y) = c \quad (69)$$

hvor Lagrange-funksjonen $F(x, y)$ er definert ved:

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - c] , \quad (70)$$

og hvor $\lambda =$ Lagrange multiplikatoren.

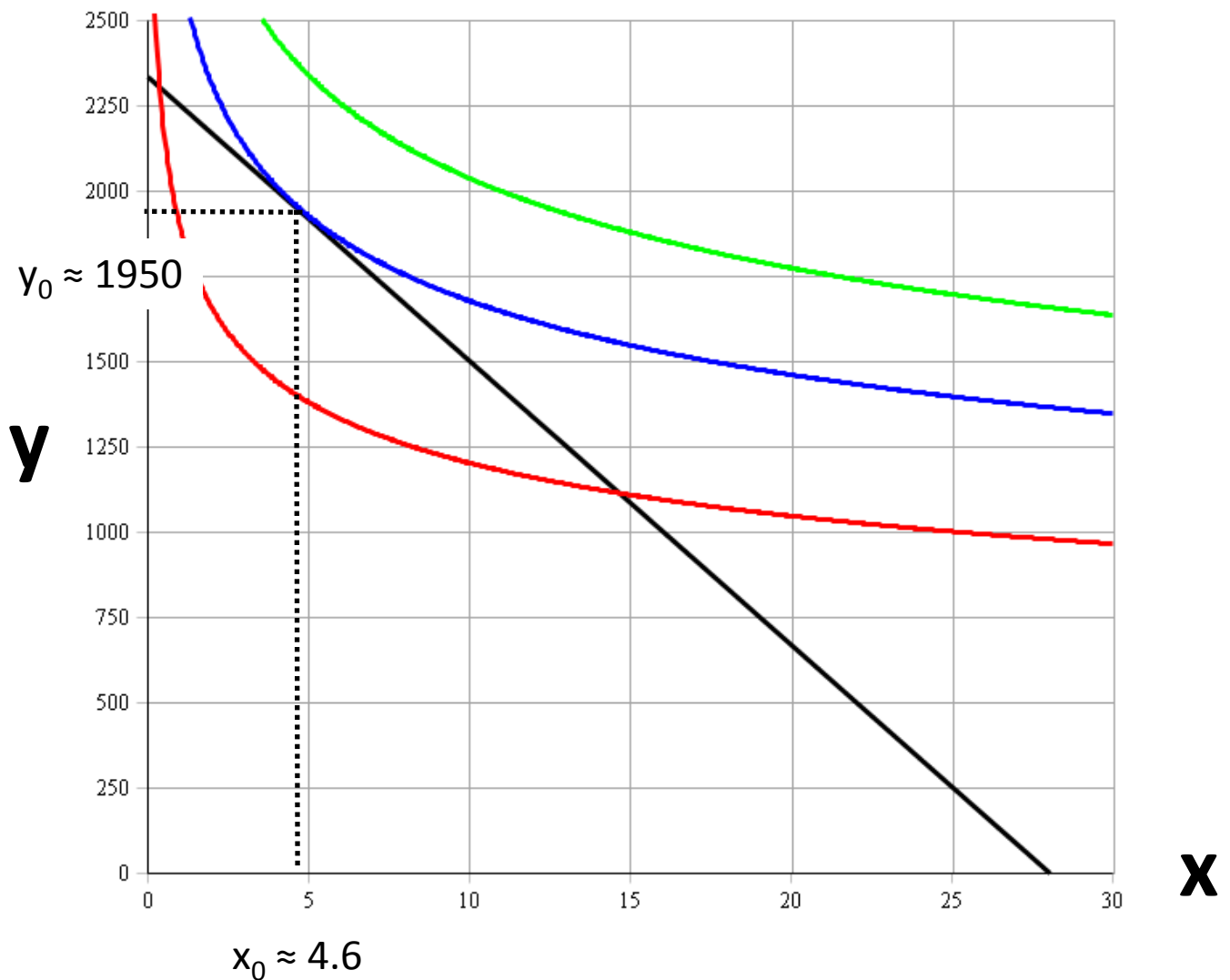
- c) Se vedlegg B.



Vedlegg A: Student nummer: _____

Verditabell:

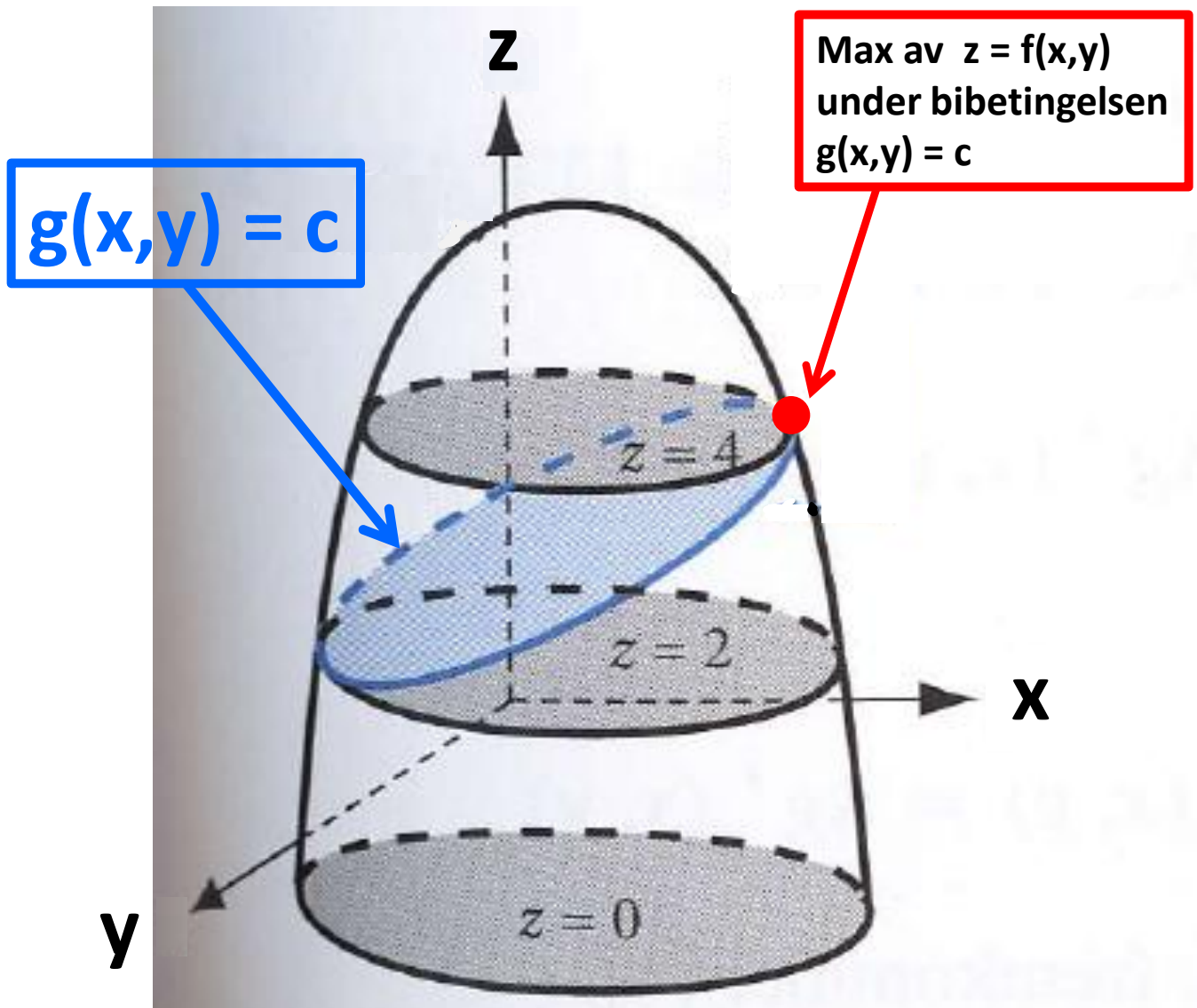
x	0	10	15	25
y	2333.33	1500	1083.33	250



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Vedlegg B:

Student nummer: _____



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Hovedeksamen 2014

LØSNING: Eksamen 18. des. 2014

“MAT100 Matematikk”, høst 2014

Oppgave 1: (logistikk og økonomi)

- a) Fra lign.(1) i oppgavesettet ser vi at prisen på varmeovn av type 1 er 1200 NOK.
Og 1750 NOK for type 2.

Fra den nederste ligningen i lign.(2) i oppgavesettet ser vi at det brukes en time på å pakke hver av de to typene varmeovner.

- b) Gjør om ulikhetene til likheter:

$$3X_1 + 3X_2 = 75 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (1)$$

$$4X_1 + 8X_2 = 160 \quad (\text{montering}) \quad (2)$$

$$X_1 + X_2 = 30 \quad (\text{pakking}) \quad (3)$$

Flytter over X_1 på andre siden:

$$3X_2 = 75 - 3X_1 \quad \left| \cdot \frac{1}{3} \right. \quad (4)$$

$$8X_2 = 160 - 4X_1 \quad \left| \cdot \frac{1}{8} \right. \quad (5)$$

$$X_2 = 30 - X_1 \quad (6)$$

Løser ut X_2 alene:

$$X_2(X_1) = 25 - X_1 \quad (7)$$

$$X_2(X_1) = 20 - \frac{1}{2}X_1 \quad (8)$$

$$\underline{\underline{X_2(X_1) = 30 - X_1}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (9)$$

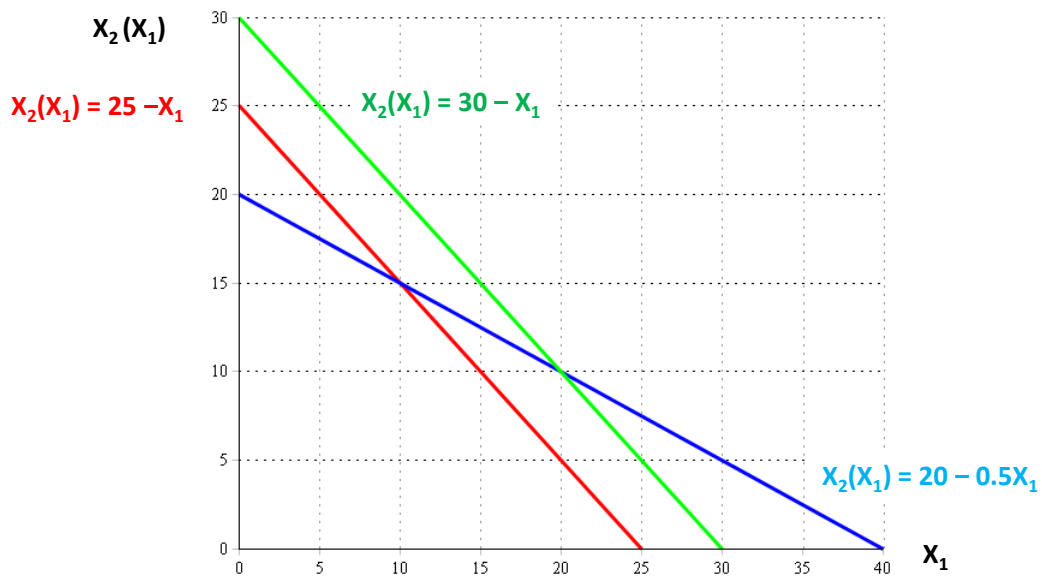
c) Verditabell: ¹

x_1	0	10	20	25
$x_2(x_1)$	25	15	5	0

x_1	0	10	20	40
$x_2(x_1)$	20	15	10	0

x_1	0	10	20	30
$x_2(x_1)$	30	20	10	0

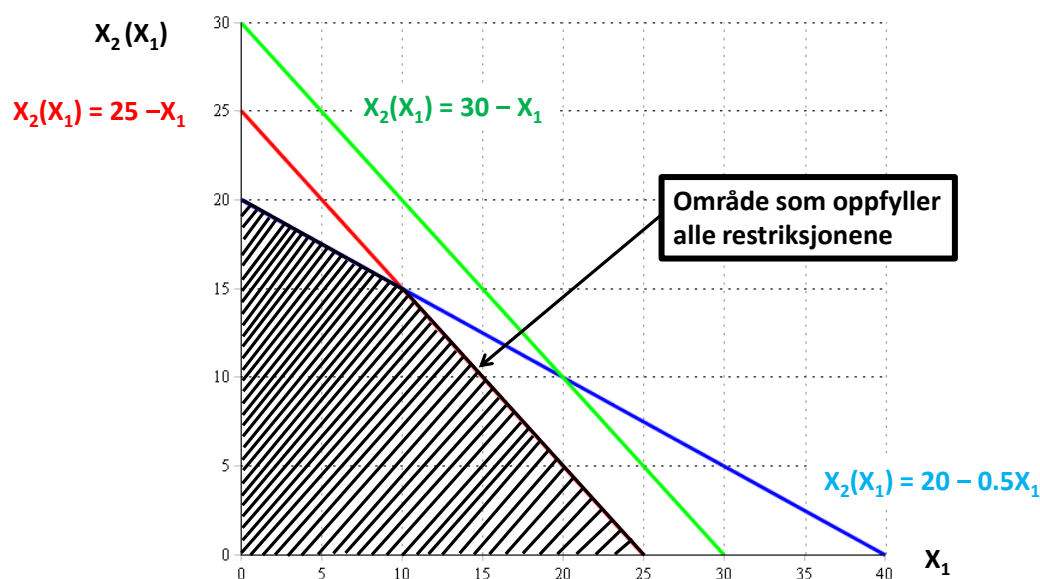
Figur 1: Verditabeller.



Figur 2: Plott av de lineære lign.(7), (8) og (9).

¹Strengt tatt behøver man ikke mer enn 2 punkter i en verditabell for å bestemme en rette linje. Men av “sikkerhetsmessige” grunner er det svært lurt å ta flere enn to punkt, f.eks. 4 punkter slik som i verditabellene ovenfor.

- d) Området i figuren som oppfyller alle restriksjonene:

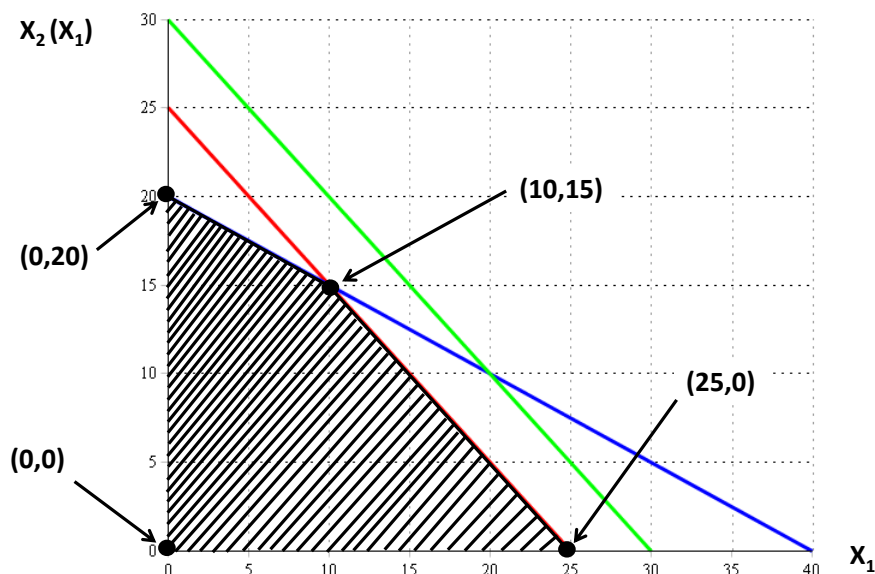


Figur 3: Området som oppfyller alle ulikhetene.

- e) Den grønne linjen i figur (3) beskriver sammenhengen mellom X_1 og X_2 når det gjelder pakking. Denne grønne linjen ligger i sin helhet *utenfor* det skraverte området. Derfor vil ikke pakking for være en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av X_1 og X_2 .²

²Med **mulige** kombinasjoner av X_1 og X_2 menes da alle mulige kombinasjoner innen det **skraverte** området.

f) i) Indikerer alle “hjørneløsninger”:



Figur 4: Hjørneløsninger.

ii) Inntekten $I(X_1, X_2)$ ved hjørnepunktene: ³

$$\underline{\underline{I(0,0)}} = (1200 \cdot 0 + 1750 \cdot 0) \text{ NOK} = \underline{\underline{0 \text{ NOK}}} \quad (10)$$

$$\underline{\underline{I(0,20)}} = (1200 \cdot 0 + 1750 \cdot 20) \text{ NOK} = \underline{\underline{35\,000 \text{ NOK}}} \quad (11)$$

$$\underline{\underline{I(10,15)}} = (1200 \cdot 10 + 1750 \cdot 15) \text{ NOK} = \underline{\underline{38\,250 \text{ NOK}}} \quad (12)$$

$$\underline{\underline{I(25,0)}} = (1200 \cdot 25 + 1750 \cdot 0) \text{ NOK} = \underline{\underline{30\,000 \text{ NOK}}} \quad (13)$$

iii) **Maksimal** inntekt $I(X_1, X_2)$ når $\underline{\underline{X_1 = 10}}$ og $\underline{\underline{X_2 = 15}}$: $\underline{\underline{I(10,15) = 38\,250 \text{ NOK}}}$

PS: Legg merke til at selv om det er fire hjørneløsninger så er det kun en av dem som gir maksimal inntekt $I(X_1, X_2)$.

■

³Hjørnepunktet $(X_1, X_2) = (10, 15)$ er ikke så enkelt å finne eksakt når man bare leser av figuren. Derfor godtas svar som er i nærheten. MEN: siden den blå og den grønne linjen skjærer hverandre i denne hjørneløsningen så kan man også regne seg frem til dette svaret analytisk. Da finner man svaret eksakt. Det samme gjelder hjørnepunktene $(X_1, X_2) = (0, 20)$ og $(X_1, X_2) = (25, 0)$. En slik utregning kreves ikke på eksamen.

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

- a) Rekken $a_i = u1.02^i$ er på formen $a_{i+1} = ka_i$, hvor k = en konstant. ⁴
Derfor er det en geometrisk rekke.

- b) Summen av en geometrisk rekke er: ⁵

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (14)$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.02$ og $a_1 = 1.02u$. Dette setter vi inn i lign.(14):

$$\underline{\underline{S_n}} \stackrel{\text{lign.(14)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (15)$$

$$= 1.02 u \frac{1.02^n - 1}{1.02 - 1} = \frac{1.02}{1.02 - 1} u (1.02^n - 1) \quad (16)$$

$$= \underline{\underline{51u(1.02^n - 1)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (17)$$

- c) Siden vi antar at man ikke finner mer olje så man tære på reservene. Altså:

$$R = S_n \quad (18)$$

Vi bruker svaret fra oppgave b, dvs. lign.(17), og løser med hensyn på “ n ” alene:

$$R = 51u(1.02^n - 1) \quad \left| \cdot \frac{1}{51u} \right. \quad (19)$$

$$\frac{R}{51u} = 1.02^n - 1 \quad (20)$$

$$\frac{R}{51u} + 1 = 1.02^n \quad (21)$$

⁴At verdien på denne konstanten er $k = 1.02$ er ikke viktig i denne deloppgaven.

⁵Se formelsamlingen dersom du ikke husker formelen i hodet.

For å “jekke ned” eksponenten “ n ” så tar vi “ln” på begge sider av ligningen:

$$\ln \left(\frac{R}{51u} + 1 \right) = \ln 1.02^n \quad (22)$$

$$\ln \left(\frac{R}{51u} + 1 \right) = n \ln 1.02 \quad (23)$$

hvor vi har brukt regnereglen $\ln a^n = n \ln a$.

Dermed: ved å dele på “ln 1.02” på begge sider at lign.(23) så får vi:

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\ln \left(\frac{R}{51u} + 1 \right)}{\ln 1.02}, \quad \text{q.e.d.} \quad (24)$$

- d)** For å finne ut hvor lang tid det tar det før man bruker opp oljereservene R så bruker vi bare resultatet fra oppgave **c**, dvs. lign.(24):

$$\underline{n} \stackrel{\text{lign. (24)}}{=} \frac{\ln \left(\frac{R}{51u} + 1 \right)}{\ln 1.02} \quad (25)$$

$$= \frac{\ln \left(\frac{1.33 \cdot 10^{12}}{51 \cdot 31.2 \cdot 10^9} + 1 \right)}{\ln 1.02} \approx \underline{\underline{30.7}} \quad (26)$$

Det tar 30.7 år før oljereservene er brukt opp.

■

Oppgave 3: (finansmatematikk)

a) Formel S_n^{ann} :

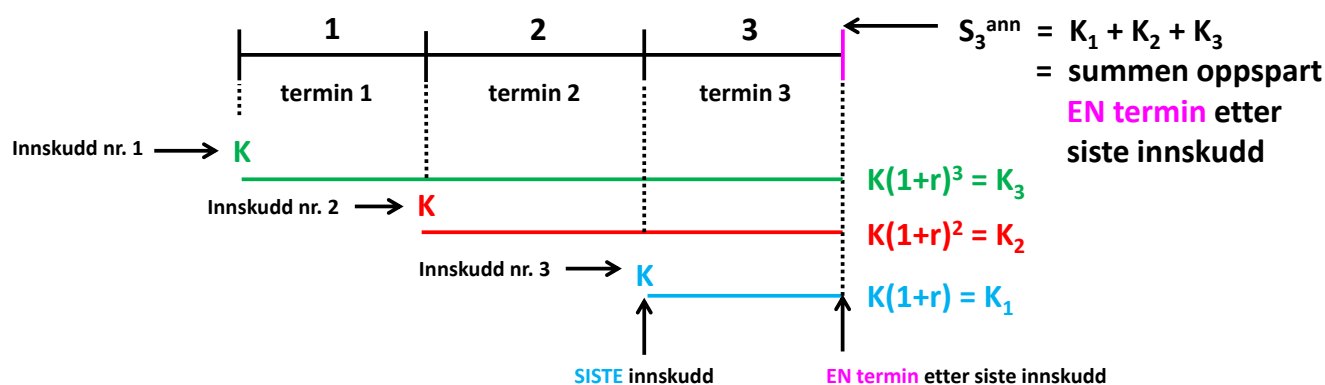
Formelen S_n^{ann} beskriver summen av oppspart kapital når man setter av samme kapitalen K ved begynnelsen av hver termin i n antall terminer.
Summen S_n^{ann} er da oppspart beløp en termin etter siste termin n .

Formel K_0 :

K_0 beskriver den nåverdien man må ha dersom man skal ta ut/betale tilbake samme beløp K i n terminer fremover.

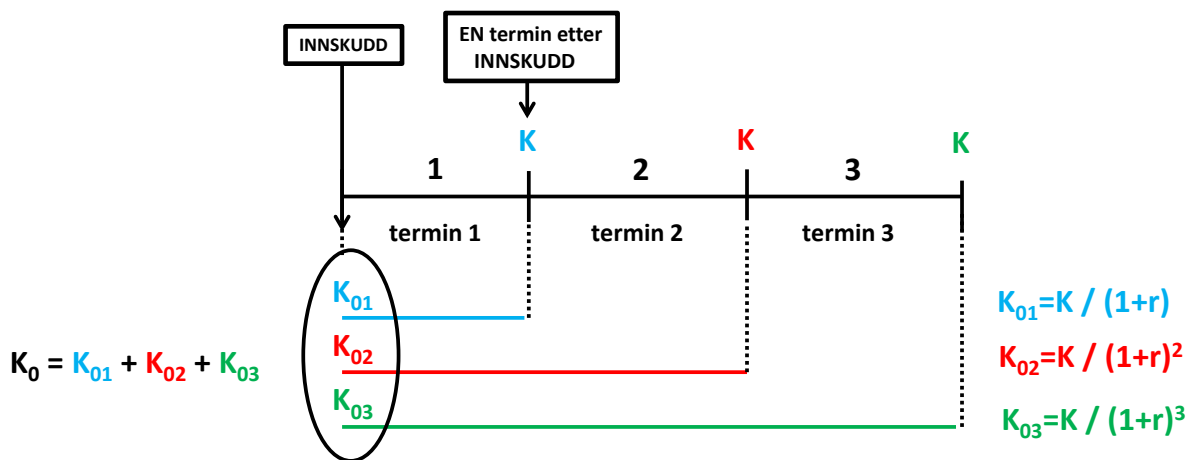
Begge formlene gjelder kun dersom renten r er konstant over alle n terminene.
I tillegg må selvsagt også renten være positiv $r > 0$, dvs. man kan ikke ha $r = 0$.

b) **Enkel figur** som illustrerer tidslinjen som beskrives av formelen S_3^{ann} :



Figur 5: Formelen S_3^{ann} .

- c) **Enkel figur** som illustrerer tidslinjen som beskrives formelen K_0 for tilfellet med $n = 3$ terminer:



Figur 6: Formelen K_0 .

- d) Denne oppgaven dreier seg om oppsparingsannuitet. Siden man skal finne oppspart beløp like etter at siste beløp er satt inn i banken så kan vi ikke bruke formelen som oppgitt i oppgaven. Vi må bruke formelen for $S_n^{\text{ann, u}}$ som vi finner i formelsamlingen:

$$\underline{S_n^{\text{ann, u}}} = K \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (27)$$

$$= 20\,000 \cdot \frac{(1+0.05)^{30} - 1}{0.05} \text{ NOK} \approx \underline{1\,328\,777 \text{ NOK}} \quad (28)$$

Ved oppsparing i 30 år og en rente på $r = 5\%$ blir oppspart beløp rett etter siste innbetaling 1 328 777 NOK.

- e) Siden beløpet vi fant i oppgave d skal utbetales i faste beløp så er altså innskuddet/nåverdien:

$$K_0 = 1\,328\,777 \text{ NOK} \quad (29)$$

Oppgaven spør om hvor mye Anne kan ta ut i året fra hun er 70 år til hun er 90 år, dvs. $n = 20$. Oppgaven spør altså etter terminbeløpet K .

Formelen for terminbeløpet K finner man i formelsamlingen:

$$\underline{K} = K_0 \cdot \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (30)$$

$$= 1\,328\,777 \cdot \frac{0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{20}}} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{106\,625 \text{ NOK}}} \quad (31)$$

Anne kan ta ut $K = 106\,625 \text{ NOK}$ hvert år fra hun er 70 år til hun blir 90 år.

- f) Dersom Anne skal ta ut et fast beløp til evig tid så kan hun kun leve på renten. Hun kan ikke tære på innskuddet $K_0 = 1\,328\,777 \text{ NOK}$. Renten er:

$$\underline{K} = K_0 \cdot r \quad (32)$$

$$= 1\,328\,777 \cdot 0.05 \text{ NOK} \approx \underline{\underline{66\,439 \text{ NOK}}} \quad (33)$$

Anne kan ta ut $K = 66\,439 \text{ NOK}$ hvert år til evig tid.



Oppgave 4: (Lagrange multiplikator)

- a) Dette er et minimeringsproblem under en **bibetingelse**. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Bibetingelsen er:

$$g(x, y) = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} = 360 \quad (34)$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{F(x, y) = u(x, y) - \lambda [g(x, y) - c]} \quad (35)$$

hvor $c = 360$ og $u(x, y) = 320x + 360y$. De **stasjonære punktene** til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (320x + 360y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}) = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (320x + 360y) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (4\sqrt{x} + 6\sqrt{y}) = 0 \quad (39)$$

$$320 - \lambda \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad (40)$$

$$360 - \lambda \frac{3}{\sqrt{y}} = 0 \quad (41)$$

$$160\sqrt{x} = \lambda \quad (42)$$

$$120\sqrt{y} = \lambda \quad (43)$$

De to ligningene i lign.(42) og (43) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsettingsmetoden”⁶. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(42) og (43):

$$\lambda = \lambda \quad (44)$$

$$160\sqrt{x} = 120\sqrt{y} \quad (45)$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{x} = \sqrt{y} \quad (46)$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(46) inn i bibetingelsen:

$$4\sqrt{x} + 6\sqrt{y} = 360 \quad (47)$$

$$4\sqrt{x} + 6\frac{4}{3}\sqrt{x} = 360 \quad (48)$$

$$12\sqrt{x} = 360 \quad (49)$$

$$\underline{x = 900} \quad (50)$$

som gir, f.eks. via lign.(46), $\underline{y} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 x = \left(\frac{4}{3}\right)^2 900 = \underline{1600}$.

Minimum for utgiften $u(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (900, 1600)$.

For å minimere utgiften $u_{\min}$ bør Glamox bruke:

$$\underline{\underline{x = 900}} \quad \text{antall timer i produksjonen av “lux light” ved fabrikken i USA} \quad (51)$$

$$\underline{\underline{y = 1600}} \quad \text{antall timer i produksjon av “lux light” ved fabrikken i Molde} \quad (52)$$

når de skal produsere 360 “lux light” lamper.

⁶Med “innsettingsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

b) I oppgave **a** fant vi at $x = 900$ og $y = 1600$ vil minimere utgiften. Derfor:

$$\underline{u_{\min}} = u(900, 1600) \tag{53}$$

$$= (320 \cdot 900 + 360 \cdot 1600) \text{ NOK} = \underline{864\,000 \text{ NOK}} \tag{54}$$

Den minimale utgiften til Glamox er 864 000 NOK.

■

Kontinuasjonseksamen 2014

LØSNING: Eksamen 5. juni 2015

“MAT100 Matematikk”, konteeksamen, 2015

Oppgave 1: (teori)

a) Se vedlegg A.

b) Se vedlegg B.



Oppgave 2: (økonomi)

a) Grensekostnad:

$$\underline{\underline{K'(x)}} = (x^2 + 200x + 250\,000)' = \underline{\underline{2x + 200}} \quad (1)$$

b) i) Grensekostnaden for å produsere 150 telt, dvs. finn $K'(150)$.

$$\underline{\underline{K'(150)}} = 2 \cdot 150 + 200 = \underline{\underline{500}} \quad (2)$$

ii) Tolkning:

$K'(150) = 500$ betyr at dersom man produserer og selger 150 telt og ønsker å produsere ett ekstra telt så har dette en merkostnad på 500 NOK.

c) Siden

$$\underline{\underline{K'(x)}} = 2x + 200 \geq 0 \quad (3)$$

for $0 \leq x \leq 800$ så er $K(x)$ voksende.

d) Med inntektsfunksjonen:

$$\underline{\underline{I(x)}} = x \cdot p(x) = x(3200 - 4x) = \underline{\underline{-4x^2 + 3200x}} \quad (4)$$

så er fortjenesten $F(x) = I(x) - K(x)$ er gitt ved:

$$\underline{\underline{F(x)}} = I(x) - K(x) \quad (5)$$

$$= -4x^2 + 3200x - (x^2 + 200x + 250\,000) = \underline{\underline{-5x^2 + 3000x - 250\,000}} \quad (6)$$

- e) For å finne de verdiene av x slik at $F(x) > 0$ så må vi første faktorisere $F(x)$. Deretter setter vi opp et fortegnsskjema. Ut fra fortegnsskjemaet finner vi det oppgaven spør om.

For å faktorisere en andregradsligningen $F(x)$, dvs. lign.(6), så må vi første finne nullpunktene til $F(x)$. Bruker ABC-formelen:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (7)$$

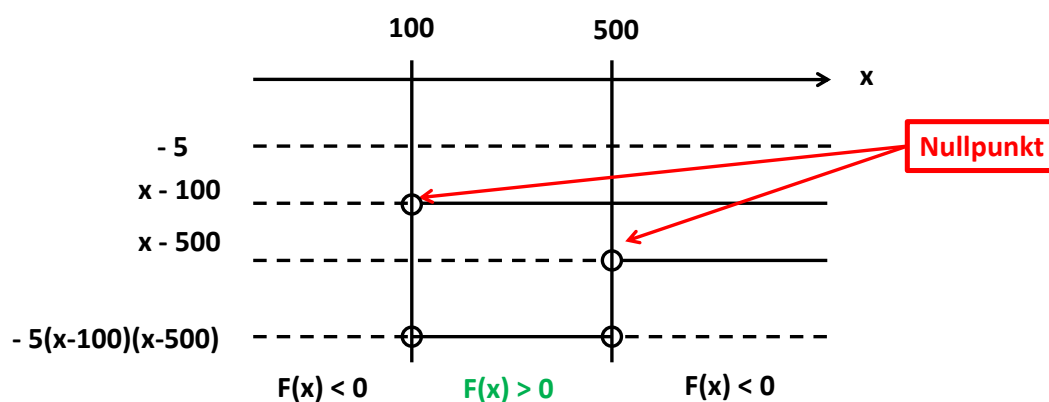
$$x_1 = \frac{-3000 + \sqrt{3000^2 - 4(-5)(-250\,000)}}{2(-5)} \quad , \quad x_2 = \frac{-3000 - \sqrt{3000^2 - 4(-5)(-250\,000)}}{2(-5)}$$

$$\underline{x_1 = 100} \quad , \quad \underline{x_2 = 500} \quad (8)$$

Når vi nå har nullpunktene så kan vi faktorisere $F(x)$:

$$\underline{F(x)} = a(x - x_1)(x - x_2) = \underline{-5(x - 100)(x - 500)} \quad (9)$$

Fortegnsskjema: ¹



Figur 1: Fortegnsskjema for lign.(9).

Ut fra fortegnsskjema ser vi at Rofi går med overskudd, dvs. $F(x) > 0$, når:

$$\underline{\underline{100 < x < 500}} \quad (10)$$

¹Også kalt drøftingsskjema.

- f) i) Antall telt som må produseres og selges for å **maksimere** fortjenesten:

$$F'(x) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} \left(-5x^2 + 3000x - 250\,000 \right) = 0 \quad (13)$$

$$-10x + 3000 = 0 \quad (14)$$

$$x = 300 \quad (15)$$

For å maksimere fortjenesten må Rofi produsere og selge 300 telt.

- ii) Siden

$$F''(x) = -10 < 0 \quad (16)$$

så er $F(x)$ konkav og vi har ett enkelt stasjonært punkt i $x = 300$ som representerer et maksimum.

- iii) Maksimal fortjeneste:

$$\underline{F(300)} = \left(-5 \cdot 300^2 + 3000 \cdot 300 - 250\,000 \right) \text{ NOK} = \underline{200\,000 \text{ NOK}} \quad (17)$$

Rofi sin maksimale fortjeneste er 200 000 NOK.

g) Enhetskostnaden $TEK(x)$ er:

$$\underline{TEK(x)} = \frac{K(x)}{x} \quad (18)$$

$$= \frac{x^2 + 200x + 250\,000}{x} = \underline{x + 200 + \frac{250\,000}{x}} \quad (19)$$

Deriverer:

$$\underline{TEK'(x)} = \frac{d}{dx} \left(x + 200 + \frac{250\,000}{x} \right) = \underline{1 - \frac{250\,000}{x^2}} \quad (20)$$

Minste enhetskostnad finner man når den deriverte er null:

$$TEK'(x) = 0 \quad (21)$$

som gir:

$$\underline{x} = \sqrt{250\,000} = \underline{500} \quad (22)$$

Tilhørende enhetskostnad:

$$\underline{TEK(500)} = \left(500 + 200 + \frac{250\,000}{500} \right) \text{ NOK} = \underline{1200 \text{ NOK}} \quad (23)$$

Siden

$$\underline{TEK''(x)} = \frac{d^2}{dx^2} \left(x + 200 + \frac{250\,000}{x} \right) = \frac{2 \cdot 250\,000}{x^3} \geq 0 \quad (24)$$

for $0 \leq x \leq 800$ så er $TEK(x)$ konveks, og $x = 500$ er et globalt minimum.

Altså:

Minimum enhetskostnad inntreffer når Rofi produserer og selger $x = 500$ telt.
Enhetskostnaden er da $TEK(500) = 1200 \text{ NOK}$.

- h)** Maksimal profitt: $F(300) = 200\,000$ NOK.
 Minimal enhetskostand: $TEK(500) = 1200$ NOK.

Ved sammenligning ser vi at maksimal fortjeneste og minimal enhetskostnad ikke inntreffer for samme verdi for x .

- i)** %-vis endring: ($x_0 = 675$ og $x_1 = 540$)

$$\underline{\underline{\% - vis endring}} = \frac{p(540) - p(675)}{p(675)} \cdot 100 \% \quad (25)$$

$$= \frac{3200 - 4x_1 - (3200 - 4x_0)}{3200 - 4x_0} \cdot 100 \% \quad (26)$$

$$= \frac{4(x_0 - x_1)}{3200 - 4x_0} \cdot 100 \% = \frac{4 \cdot (675 - 540)}{3200 - 4 \cdot 675} \cdot 100 \% = \underline{\underline{108 \%}} \quad (27)$$

PS:

- 1) Endringen er altså positiv, dvs. prisen øker.
- 2) En *endring* kan være mer enn 100 % slik som i dette tilfellet.



Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

a) Renteformelen:²

$$\underline{K_5} = K_0(1 + r_{inn})^5 = 100\,000(1 + 0.25)^5 \text{ euro} = \underline{305\,176 \text{ euro}} \quad (28)$$

Etter 5 år har kapitalen vokst til $K_5 = 305\,176 \text{ euro}$.

b) Uttrykket for nåverdien finner man på side 55 i formelsamlingen fra 2014. I oppgaven står det at det er inflasjonen reduserer bankinnskuddet. Derfor er det $r_{inf} = 0.50$ som inngår i formelen for nåverdi for vårt tilfelle. Med notasjonen $K_{0,b}$ blir derfor vår formel for nåverdi:

$$K_{0,b} = \frac{K_n}{(1 + r_{inf})^n} \quad (29)$$

Med $K_5 = 305\,176 \text{ euro}$ fra lign.(28) får vi:

$$\underline{K_{0,b}} = \frac{K_5}{(1 + r_{inf})^5} = \frac{305\,176}{(1 + 0.50)^5} \text{ euro} = \underline{40\,189 \text{ euro}} \quad (30)$$

Dersom vi setter $K_0 = 100\,000 \text{ euro}$ i banken i 5 år så vil inflasjonen være så stor at nåverdien av $K_5 = 306\,176 \text{ euro}$ er $K_{0,b} = 40\,189 \text{ euro}$.

c) Ved å sette $K_0 = 100\,000 \text{ euro}$ i banken i 5 år så vil inflasjonen gjøre at verdien av kapitalen K_5 har redusert seg til nåverdien $K_{0,b} = 40\,189 \text{ euro}$, altså mer enn halvert: $100\,000 \text{ euro} \rightarrow 40\,189 \text{ euro}$

Med andre ord: man taper på å sette pengene i banken.³

²Se f.eks. side 54 i formelsamlingen fra 2014.

³At man taper penger på å sette penger i banken kan man innse umiddelbart siden inflasjonen $r_{inf} = 0.50$ er større enn innskuddsrenten $r_{inn} = 0.25$.

d) Saldoen etter n år er oppgitt i oppgaven:

$$S_n = K_0 \cdot k^n - B \underbrace{\left(1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}\right)}_{\text{geometrisk rekke}} \quad (31)$$

Summen i lign.(31) kan skrives:

$$S_n = K_0 \cdot k^n - B \sum_{i=0}^{n-1} k^i \quad (32)$$

I denne rekken starter summasjonsindeksen på $i = 0$ og slutter på $i = n - 1$.

Altså totalt n ledd.

Summen av den **geometriske rekken** i formelsamlingen fra 2014 starter derimot på $i = 1$ og slutter på $i = n$. Men fortsatt n ledd, dvs. samme antall ledd.

Om summasjonsindeksen starter på 0 eller 1 spiller ingen rolle så lenge vi har med samme antall ledd. Dermed kan vi bruke formelen i lign. (5.11) i formelsamlingen fra 2014 direkte og får: ⁴

$$\underline{\underline{S_n = K_0 \cdot k^n - B \frac{k^n - 1}{k - 1}}} \quad (38)$$

hvor $k \equiv 1 + r_{inn}$.

⁴Man kan velge om man bare vil si det med ord, som i hovedteksten ovenfor, eller om man vil regne på det: I lign.(5.10) i formelsamlingen fra 2014 står det:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (33)$$

I formelsamlingen står det også at en geometrisk rekke er definert ved:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = k \quad (34)$$

Dette innsatt i lign.(33) gir

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (35)$$

$$= a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^{n-1} \quad (36)$$

$$= a_1 (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}) = a_1 \sum_{i=0}^{n-1} k^i \quad (37)$$

Men denne ligningen er akkurat det oppgaven spør om, se lign.(32). Derfor kan vi bare bruke formelen i formelsamlingen direkte. Og man får lign.(38).

- e) Saldoen er brukt opp etter når $S_n = 0$. Fra lign.(38) har vi da:

$$0 = K_0 \cdot k^n - B \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (39)$$

Løser med hensyn på B alene:

$$B = \frac{K_0 \cdot k^n}{\frac{k^n - 1}{k - 1}} \quad (40)$$

Siden $k \equiv 1 + r_{inn} = 1 + 0.25 = 1.25$ så får vi etter $n = 5$ år:

$$\underline{B} = \frac{100\,000 \cdot 1.25^5}{\frac{1.25^5 - 1}{1.25 - 1}} \text{ euro} = \underline{37\,185 \text{ euro}} \quad (41)$$

Dersom du skal bruke opp saldoen S_n etter 5 år så kan du ta ut beløpet $B = 37\,185$ euro hvert år.

- f) Den årlige renten man betaler på et lån med størrelse x dersom renten er r , er $x \cdot r$.
Det årlige beløpet $B = 37\,185$ skal brukes til å betale disse årlige rentene. Dermed:

$$x \cdot r = B \quad (42)$$

Løser med hensyn på x :

$$\underline{x} = \frac{B}{r} = \frac{37\,185}{0.30} \text{ euro} = \underline{123\,950 \text{ euro}} \quad (43)$$

Du kan ta opp $x = 123\,950$ euro i lån i banken dersom du bruker det årlige beløpet B til å holde rentene "i sjakk".

- g) Kapitalen $K_{n,e}$ du sitter igjen med er verdien av eiendommen V_n minus lånets størrelse x . Etter $n = 5$ år har vi da:

$$\underline{K_{5,e}} = V_5 - x \quad (44)$$

$$= x \cdot (1 + r_{inf})^5 - x \quad (45)$$

$$= x \cdot ((1 + r_{inf})^5 - 1) \quad (46)$$

$$= 123\,950 \cdot ((1 + 0.50)^5 - 1) \text{ euro} = \underline{817\,295 \text{ euro}} \quad (47)$$

Kapitalen du sitter igjen med etter 5 år er $\underline{K_{5,e} = 817\,295 \text{ euro}}$ dersom du investerer i eiendom.

- h) Uttrykket for nåverdien finner man på side 55 i formelsamlingen fra 2014:

$$K_{0,e} = \frac{K_{5,e}}{(1 + r_{inf})^5} \quad (48)$$

Det er altså inflasjonen $r_{inf} = 0.50$ som bestemmer nåverdien for kapitalen som er bundet opp i eiendom.

Setter inn tallene:

$$\underline{K_{0,e}} = \frac{K_{5,e}}{(1 + r_{inf})^5} = \frac{817\,295}{(1 + 0.50)^5} \text{ euro} = \underline{107\,627 \text{ euro}} \quad (49)$$

Dersom vi setter $K_0 = 100\,000$ euro i banken og tar ut et fast beløp $B = 37\,185$ euro i året fra dette innskuddet for å betjene et lån på $x = 123\,950$ euro som du investerer i eiendom så vil nåverdien av kapitalen være $\underline{K_{0,e} = 107\,627 \text{ euro}}$ etter 5 år.

- i) Nåverdien $K_{0,b}$ ved å sette pengene i **banken**: $K_{0,b} = 40\,189$ euro
Nåverdien $K_{0,e}$ ved å investere i **eiendom**: $K_{0,e} = 107\,627$ euro

Konklusjon:

Det er mye bedre å investere i eiendom enn å la pengene passivt stå i banken.⁵



⁵Denne konklusjonen kan vi innse umiddelbart av samme grunn som nevnt i fotnoten til oppgave **3b**: Det lønner deg å investere i eiendom, som følger inflasjonen, enn å la pengene bare stå passivt i banken siden inflasjonen $r_{inf} = 0.50$ er større enn innskuddsrenten $r_{inn} = 0.25$.

Oppgave 4: (logistikk og økonomi)

- a) Dette er et minimeringsproblem under en **bibetingelse**. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Av åpenbare grunner er $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Dessuten er **bibetingelsen**:

$$g(x, y) = x + y = 500 \quad (50)$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{F(x, y) = K(x, y) - \lambda g(x, y)} \quad (51)$$

hvor $K(x, y) = x^2 + 500x + y^2 + 300y$. De stasjonære punktene til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 + 500x + y^2 + 300y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (x + y) = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 + 500x + y^2 + 300y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (x + y) = 0 \quad (55)$$

$$2x + 500 - \lambda = 0 \quad (56)$$

$$2y + 300 - \lambda = 0 \quad (57)$$

$$2x + 500 = \lambda \quad (58)$$

$$2y + 300 = \lambda \quad (59)$$

De to ligningene i lign.(58) og (59) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsettingsmetoden”⁶. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(58) og (59):

$$\lambda = \lambda \quad (60)$$

$$2x + 500 = 2y + 300 \quad (61)$$

$$x = y - 100 \quad (62)$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(62) inn i bibetingelsen:

$$\textcolor{red}{x} + y = 500 \quad (63)$$

$$\textcolor{red}{y} - 100 + y = 500 \quad (64)$$

$$2y = 600 \quad (65)$$

$$\underline{y = 300} \quad (66)$$

som gir, f.eks. via lign.(62), $\underline{x} = y - 100 = \underline{200}$.

Minimal kostand for $K(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (200, 300)$. For å minimere utgiften $K_{\min}$ bør NEAS produsere og levere:

$$\underline{\underline{x = 200}} \quad \text{antall MWh per døgn ved Reinset kraftverk} \quad (67)$$

$$\underline{\underline{y = 300}} \quad \text{antall MWh per døgn ved Ulvund kraftverk} \quad (68)$$

når de skal levere 500 MWh per døgn til Norsk Hydro på Sunndalsøra.

⁶Med “innsettingsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

b) I oppgave 4a fant vi at $x = 200$ og $y = 300$ vil minimere kostnaden $K(x, y)$. Derfor:

$$\underline{K_{\min}} = K(200, 300) \quad (69)$$

$$= (200^2 + 500 \cdot 200 + 300^2 + 300 \cdot 300) \text{ NOK} = \underline{\underline{320\,000 \text{ NOK}}} \quad (70)$$

Den minimale kostnaden for NEAS per døgn er 320 000 NOK for de to kraftverkene.

■

Vedlegg A

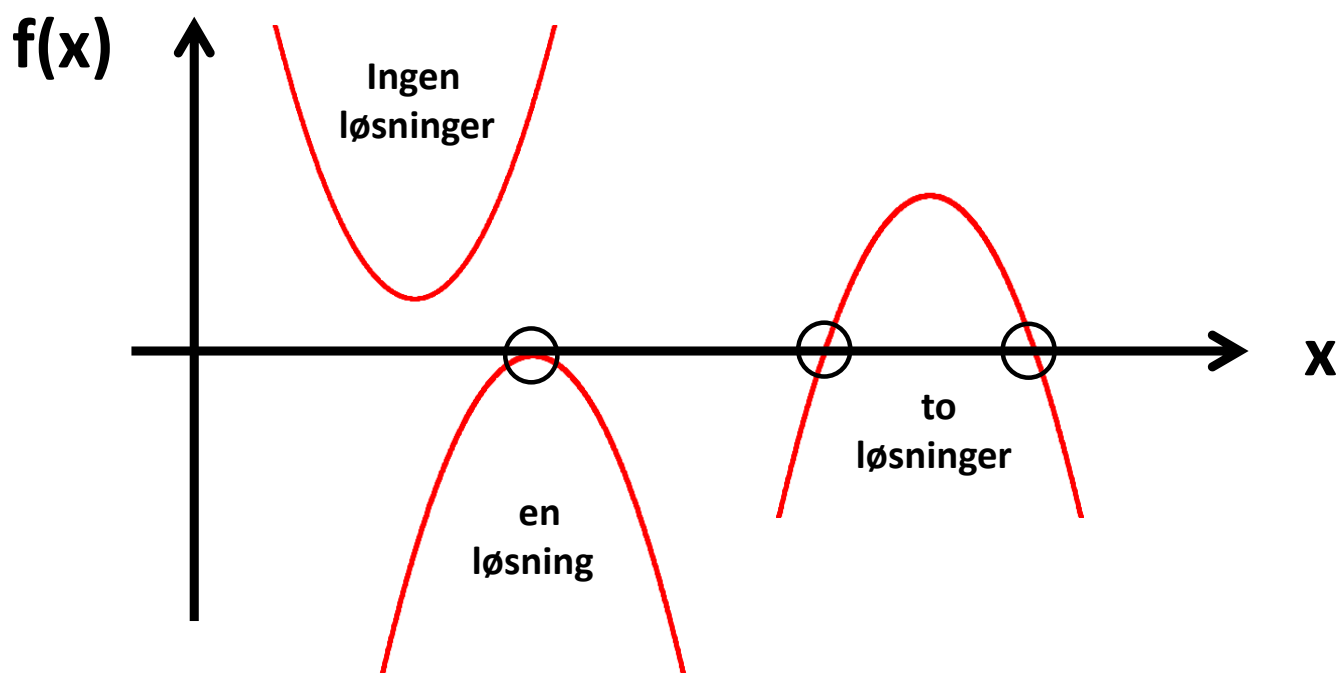
Studentnummer: _____

Diskriminant	Antall løsninger
$b^2 - 4ac > 0$	2 løsninger
$b^2 - 4ac = 0$	1 løsning
$b^2 - 4ac < 0$	ingen løsning

(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Vedlegg B

Studentnummer: _____



(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Hovedeksamen 2015

LØSNING: Eksamen 17. des. 2015

“MAT100 Matematikk”, 2015

Oppgave 1: (økonomi)

a) I optimum av $TR(x)$ er

$$\frac{dTR(x)}{dx} = 0 \quad (1)$$

som gir

$$\frac{d}{dx} \left(I(x) - K(x) \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} - \frac{dK(x)}{dx} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{dK(x)}{dx} \quad (4)$$

dvs.

$$\underline{\text{grenseinntekt}} = \underline{\text{grensekostnad}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (5)$$

b) Grensekostnad = ekstrakostnaden ved å produsere en ekstra enhet¹

¹Tilsarende gjelder også for grenseinntekt. (Men det trenger man ikke nevne på eksamen).

- c) Det **totale resultatet** $TR(x)$ for Ello er gitt ved:

$$\underline{\underline{TR(x)}} \stackrel{\text{def.}}{=} I(x) - K(x) \quad (6)$$

$$= p \cdot x - K(x) \quad (7)$$

$$= p \cdot x - \left(ax^2 + bx + c \right) \quad (8)$$

$$= p \cdot x - ax^2 - bx - c \quad (9)$$

$$= \underline{\underline{(p-b)x - ax^2 - c}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (10)$$

- d) Det totale resultatet $TR(x)$ oppnår sitt **optimum**, i dette tilfellet maksimum, når den deriverte er lik null:

$$\text{stigningstallet} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dTR(x)}{dx} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} \left((p-b)x - ax^2 - c \right) = 0 \quad (13)$$

$$(p-b) - a2x = 0 \quad (14)$$

$$(p-b) = a2x \quad (15)$$

$$\underline{\underline{x_{max} = \frac{p-b}{2a}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (16)$$

e) Den 2. deriverte av $TR(x)$:²

$$\frac{d^2 TR(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left((p-b)x - ax^2 - c \right) \quad (17)$$

$$= \frac{d}{dx} \left((p-b) - 2ax \right) \quad (18)$$

$$= \underline{\underline{-2a}} \quad (19)$$

er negativ siden $a > 0$. Dermed er $TR(x)$ konkav og betingelsen i lign.(5) representerer et maksimum og ikke et minimum av $TR(x)$.

f) Det **maksimale** totale resultatet $TR_{max} \equiv TR(x_{max})$ er:

$$\underline{\underline{TR_{max}}} = TR(x_{max}) \quad (20)$$

$$= (p-b)x_{max} - ax_{max}^2 - c \quad (21)$$

$$= (p-b) \frac{p-b}{2a} - a \left(\frac{p-b}{2a} \right)^2 - c \quad (22)$$

$$= \frac{(p-b)^2}{2a} - \frac{(p-b)^2}{4a} - c \quad (23)$$

$$= \underline{\underline{\frac{(p-b)^2}{4a}}} - c \quad (24)$$

²2. derivasjonstesten. Se formelsamlingen.

- g)** Antall liter såpe må Ello produsere per måned for å maksimere $TR(x)$:

$$\underline{\underline{x_{max}}} \stackrel{\text{ign. (16)}}{=} \frac{p - b}{2a} \quad (25)$$

$$= \frac{(22 - 10) \frac{\text{NOK}}{\text{liter}}}{2 \cdot 0.001 \frac{\text{NOK}}{\text{liter}^2}} = \underline{\underline{6\,000 \text{ liter}}} \quad (26)$$

- h)** Maksimalt resultat TR_{max} som Ello kan oppnå per måned:

$$\underline{\underline{TR_{max}}} \stackrel{\text{ign. (24)}}{=} \frac{(p - b)^2}{4a} - c \quad (27)$$

$$= \left(\frac{(22 - 10)^2}{4 \cdot 0.001} - 3\,000 \right) \text{NOK} = \underline{\underline{33\,000 \text{ NOK}}} \quad (28)$$

■

Oppgave 2: (finansmatematikk)

a) Formel S_n^{ann} :

Formelen S_n^{ann} beskriver summen av oppspart kapital når man setter av samme kapitalen K ved begynnelsen av hver termin i n antall terminer.

Summen S_n^{ann} er da oppspart beløp en termin etter siste termin n .

Formel K_0 :

K_0 beskriver den nåverdien man må ha dersom man skal ta ut/betale tilbake samme beløp K i n terminer fremover.

Begge formlene gjelder kun dersom renten r er konstant over alle n terminene. I tillegg må selvsagt også renten være positiv $r > 0$, dvs. man kan ikke ha $r = 0$.

b) Formelen for S_n^{ann} var oppgitt i oppgaven:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (29)$$

Løser med hensyn på K alene:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \left| \cdot \frac{1}{(1+r)} \right. \quad (30)$$

$$\frac{S_n^{\text{ann}}}{(1+r)} = K \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \left| \cdot r \right. \quad (31)$$

$$\frac{r S_n^{\text{ann}}}{(1+r)} = K \left[(1+r)^n - 1 \right] \quad \left| \cdot \frac{1}{(1+r)^n - 1} \right. \quad (32)$$

som gir:

$$K = \frac{r S_n^{\text{ann}}}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (33)$$

- c) Oppgaven dreier seg om **oppsparingannuitet**.

Dersom man ønsker å spare til $S_n^{\text{ann}} = 100\,000$ NOK etter 4 år, en termin etter at siste beløp er satt av, så er det bare å bruke formelen fra oppgave **2b** når man skal finne det månedelige beløpet K man må sette av:

$$\underline{K} = \frac{r S_n^{\text{ann}}}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]} \quad (34)$$

$$= \frac{0.00375 \cdot 100\,000}{(1+0.00375) \left[(1+0.00375)^{48} - 1 \right]} \text{ NOK} \quad (35)$$

$$= \underline{1898.23 \text{ NOK}} \quad (36)$$

Du må sette av $K = 1898.23$ NOK per måned for å få 100 000 NOK etter 4 år.

- d) Formelen for S_n^{ann} var oppgitt i oppgaven:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (37)$$

Løser med hensyn på n alene:

$$S_n^{\text{ann}} = K(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \left| \cdot \frac{1}{K(1+r)} \right. \quad (38)$$

$$\frac{S_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \left| \cdot r \right. \quad (39)$$

$$\frac{r S_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} = (1+r)^n - 1 \quad \text{flytter "1" på andre siden} \quad (40)$$

$$\frac{r S_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1 = (1+r)^n \quad (41)$$

Ta logaritmen $\ln$ på begge sider av forrige ligning. Da får man:

$$\ln(1+r)^n = \ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right) \quad (42)$$

$$n \cdot \ln(1+r) = \ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right) \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \quad (43)$$

som gir:

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (44)$$

- e) Også denne oppgaven dreier seg om **oppsparingannuitet**.
Vi finne hvor mange måneder vi må sette av beløpet fra oppgave **2c**, dvs.

$$K = 1898.23 \text{ NOK} \quad (45)$$

for å oppnå samme totale oppsparte beløp, $S_n^{\text{ann}} = 100\,000$ NOK, en måned etter at siste beløp er satt av, når renten har økt til:

$$r = \frac{0.06}{12} = 0.005 \quad (46)$$

Antall måneder vi må spare:

$$\underline{n} = \frac{\ln\left(\frac{rS_n^{\text{ann}}}{K(1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)} \quad (47)$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{0.005 \cdot 100\,000}{1898.23(1+0.005)} + 1\right)}{\ln(1+0.005)} = 46.7 \approx \underline{47} \quad (48)$$

Det tar altså $n = 47$ måneder, dvs. kun en måned kortere tid dersom renten økes til 6% i året.

■

Oppgave 3: (priselastisitet og logistikk)

a) Se vedlegg A.

b) At $E_p(x) > 0$ betyr at en prisøkning vil gi en økning av etterspørsel.³

c) Priselastisiteten $E_p(x)$:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = \frac{d x(p)}{d p} \cdot \frac{p}{x(p)} \quad (49)$$

$$= \frac{d}{dp} \left(c - p^2 \right) \cdot \frac{p}{c - p^2} \quad (50)$$

$$= \left(-2p \right) \cdot \frac{p}{c - p^2} \quad (51)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2p^2}{300 - p^2}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (52)$$

d) Når prisen er $p = 5$ så er tilhørende priselastisitet:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = -\frac{2p^2}{300 - p^2} \quad (53)$$

$$= -\frac{2 \cdot 5^2}{300 - 5^2} = -\frac{2}{11} = \underline{\underline{-0.18}} \quad (54)$$

³Det er svært sjelden at et marked har denne typen dynamikk. For noen luksusvarer kan det mulignes være slik. (Men dette trenger man ikke nevne på eksamen).

e) Tolking:

Dersom prisen p på containertransport øker med 1 % så vil etterspørselen minke med 0.18 %.
(Altså “reduksjonsfaktoren” er 0.18.)

f) Siden

$$E_p(x) = \frac{\text{\%vis endring i etterspørsel}}{\text{\%vis endring i pris}} \quad (55)$$

så ser vi at:

$$\underline{\underline{\text{\%vis endring i etterspørsel}}} = \underbrace{E_p(t)}_{= -0.18} \cdot \underbrace{\text{\%vis endring i inntekt}}_{= 5 \%} \quad (56)$$

$$= -0.18 \cdot 5 \% \quad (57)$$

$$= \underline{\underline{-0.9 \%}} \quad (58)$$

g) Priselastisiteten er nøytralelastisk når:

$$E_p(x) = -1 \quad (59)$$

Priselastisiteten $E_p(x)$ er gitt ved lign.(52).
Dermed kan vi løse med hensyn på p alene:

$$-\frac{2p^2}{300 - p^2} = -1 \quad (60)$$

$$\frac{2p^2}{300 - p^2} = 1 \quad \Bigg| \cdot (300 - p^2) \quad (61)$$

$$2p^2 = 300 - p^2 \quad (62)$$

$$3p^2 = 300 \quad (63)$$

$$p^2 = 100 \quad (64)$$

som gir

$$\underline{p = 10} \quad (65)$$

siden prisen ikke kan være negativ.

Priselastisiteten er nøytralelastisk, dvs. $E_p(x) = -1$, dersom prisen er 10 000 NOK per container for transport mellom Norge og USA.

■

Oppgave 4: (logistikk og lagerkostnader)

- a) Dette er et minimeringsproblem under en **bibetingelse**. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Av åpenbare grunner er $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$. Dessuten er **bibetingelsen**:

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 100 \quad (66)$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{F(x_1, x_2) = C(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2)} \quad (67)$$

hvor $C(x_1, x_2) = x_1^2 + 400x_1 + x_2^2 + 300x_2$. De stasjonære punktene til $F(x_1, x_2)$ er:

$$\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\partial C(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial C(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \quad (69)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^2 + 400x_1 + x_2^2 + 300x_2 \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 + x_2 \right) = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_1^2 + 400x_1 + x_2^2 + 300x_2 \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_1 + x_2 \right) = 0 \quad (71)$$

$$2x_1 + 400 - \lambda = 0 \quad (72)$$

$$2x_2 + 300 - \lambda = 0 \quad (73)$$

$$2x_1 + 400 = \lambda \quad (74)$$

$$2x_2 + 300 = \lambda \quad (75)$$

De to ligningene i lign.(74) og (75) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsettingsmetoden”⁴ og eliminere λ via lign.(74) og (75):

$$\lambda = \lambda \quad (76)$$

$$2x_1 + 400 = 2x_2 + 300 \quad (77)$$

$$2x_1 = 2x_2 - 100 \quad (78)$$

$$x_1 = x_2 - 50 \quad (79)$$

Deretter setter lign.(79) inn i bibetingelsen:

$$\textcolor{red}{x}_1 + x_2 = 100 \quad (80)$$

$$\textcolor{red}{x}_2 - \textcolor{red}{50} + x_2 = 100 \quad (81)$$

$$2x_2 = 150 \quad (82)$$

$$\underline{x_2 = 75} \quad (83)$$

som gir, f.eks. via lign.(79), $\underline{x_1} = x_2 - 50 = 75 - 50 = \underline{25}$.

Minimal lagerkostand for $C(x_1, x_2)$ inntreffer altså for $(x_1, x_2) = (25, 75)$.
For å minimere lagerutgiften $C_{\min}$ bør Hustadmarmor:

$$\underline{\underline{x_1 = 25}} \quad \textbf{tusen} \text{ tonn av type 1 slurry i tanken} \quad (84)$$

$$\underline{\underline{x_2 = 75}} \quad \textbf{tusen} \text{ tonn av type 2 slurry i tanken} \quad (85)$$

⁴Med “innsettingsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

- b) I oppgave 4a fant vi at $x_1 = 25$ og $x_2 = 75$ vil minimere kostnaden $C(x_1, x_2)$.
Derfor:

$$\underline{C_{\min}} = C(25, 75) \tag{86}$$

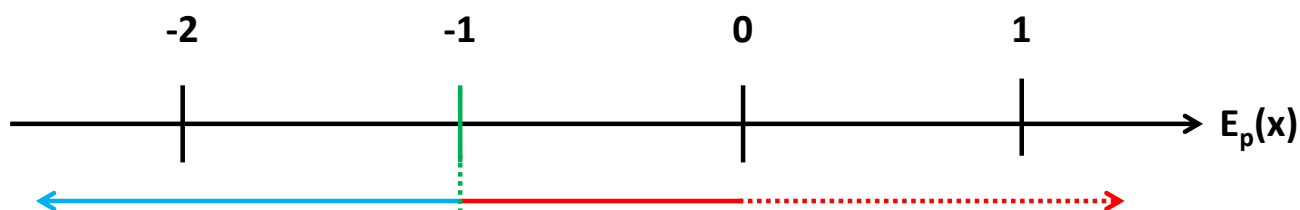
$$= \left(25^2 + 400 \cdot 25 + 75^2 + 300 \cdot 75 \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{38\,750 \text{ NOK}}} \tag{87}$$

Den minimale lagerkostnaden per uke for Hustadmarmor er 38 750 NOK.

■

Vedlegg:

Kandidatnummer: _____



Elastisk:

Etterspørselen er følsom for prisendring.

Nøytralelastisk:

Etterspørselen har samme følsomhet som prisen.

Uelastisk:

Etterspørselen er lite følsom for prisendring.

(Dette vedlegget skal legges ved i din besvarelse).

Kontinuasjonseksamen 2015

LØSNING: Eksamen 10. juni 2016

“MAT100 Matematikk”, konteeksamen

Oppgave 1: (økonomi)

a) Deriverer enhetskostnaden $TEK(x)$: (husk: $\frac{1}{x} = x^{-1}$)

$$\frac{d \textcolor{red}{TEK}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\textcolor{red}{K}(x)}{\textcolor{red}{x}} \right) \quad (1)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(K(x) x^{-1} \right) \quad (2)$$

$$= \frac{dK(x)}{dx} x^{-1} + K(x) \frac{d}{dx} \left(x^{-1} \right) \quad (3)$$

$$= \frac{dK(x)}{dx} x^{-1} - K(x) \frac{d}{dx} x^{-2} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{dK(x)}{dx} - \overbrace{\frac{K(x)}{x}}^{= \textcolor{blue}{TEK}(x)} \right) \quad (5)$$

Med $x > 0$ ser vi da at betingelsen ¹

$$\frac{d \textcolor{blue}{TEK}(x)}{dx} = 0 \quad (7)$$

er ekvivalent med (det samme som)

$$\underline{\underline{\frac{dTK(x)}{dx} = TEK(x)}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (8)$$

¹Husk at:

$$\text{minimum enhetskostnad } TEK_{min} \Rightarrow \text{stigningstallet} = 0 \quad \text{dvs.} \quad \frac{dTEK}{dx} = 0 \quad (6)$$

b) Med inntektsfunksjonen:

$$\underline{\underline{I(x)}} = x \cdot p(x) = x(18 - 0.006x) = \underline{\underline{18x - 0.006x^2}} \quad (9)$$

så er fortjenesten $F(x) = I(x) - K(x)$ er gitt ved:

$$\underline{\underline{F(x)}} = I(x) - K(x) \quad (10)$$

$$= 18x - 0.006x^2 - (0.004x^2 + 4x + 4500) \quad (11)$$

$$= \underline{\underline{-0.01x^2 + 14x - 4500}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (12)$$

- c) For å finne de verdiene av x slik at $F(x) > 0$ så må vi første faktorisere $F(x)$. Deretter setter vi opp et fortegnsskjema. Ut fra fortegnsskjemaet finner vi det oppgaven spør om.

For å faktorisere en andregradsligningen $F(x)$, dvs. lign.(12), så må vi første finne nullpunktene til $F(x)$. Bruker ABC-formelen: ($a = -0.01$, $b = 14$, $c = -4500$)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (13)$$

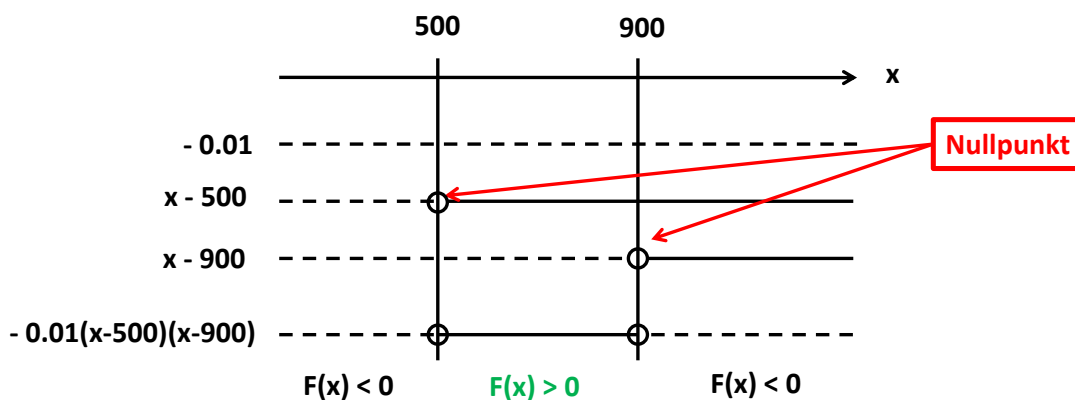
$$x_1 = \frac{-14 + \sqrt{14^2 - 4(-0.01)(-4500)}}{2(-0.01)} \quad , \quad x_2 = \frac{-14 - \sqrt{14^2 - 4(-0.01)(-4500)}}{2(-0.01)}$$

$$\underline{x_1 = 500} \quad , \quad \underline{x_2 = 900} \quad (14)$$

Når vi nå har nullpunktene så kan vi faktorisere $F(x)$:

$$\underline{F(x)} = a(x - x_1)(x - x_2) = \underline{-0.01(x - 500)(x - 900)} \quad (15)$$

Fortegnsskjema: ²



Figur 1: Fortegnsskjema for lign.(15).

Ut fra fortegnsskjema ser vi at Glamox går med overskudd, dvs. $F(x) > 0$, når:

$$\underline{\underline{500 < x < 900}} \quad (16)$$

²Også kalt drøftingsskjema.

d) Enhetskostnaden $TEK(x)$ er:

$$\underline{TEK(x)} = \frac{K(x)}{x} \quad (17)$$

$$= \frac{0.004x^2 + 4x + 4500}{x} = \underline{0.004x + 4 + \frac{4500}{\textcolor{red}{x}}} \quad (18)$$

i) Deriverer: (husk: $\frac{1}{\textcolor{red}{x}} = \textcolor{red}{x}^{-1}$)

$$\underline{TEK'(x)} = \frac{d}{dx} \left(0.004x + 4 + 4500\textcolor{red}{x}^{-1} \right) = \underline{0.004 - \frac{4500}{x^2}} \quad (19)$$

Minste enhetskostnad finner man når den deriverte er null:

$$TEK'(x) = 0 \quad (20)$$

$$0.004 - \frac{4500}{x^2} = 0 \quad (21)$$

som gir:

$$\underline{x} = \sqrt{\frac{4500}{0.04}} \approx \underline{1061} \quad (22)$$

Minste enhetskostnad inntreffer når det produseres og selges 1061 lamper.

ii) Siden

$$\underline{TEK''(x)} = \frac{d^2}{dx^2} \left(0.004x + 4 + \frac{4500}{x} \right) = \frac{2 \cdot 4500}{x^3} \geq 0 \quad (23)$$

for $x > 0$ så er $TEK(x)$ konveks, og $x = 1061$ er et globalt *minimum*,
jfr. 2. derivasjonstesten.

iii) Tilhørende enhetskostnad:

$$\underline{TEK(1061)} = 0.004 \cdot 1061 + 4 + \frac{4500}{1061} = \underline{12.49} \quad (24)$$

Minste enhetskostnad er 1249 NOK.

(Siden alle priser og kostnader er i antall 100 NOK).

e) Grensekostnad:

$$\underline{\underline{\frac{dK(x)}{dx}}} = \frac{d}{dx} (0.004x^2 + 4x + 4500) = \underline{\underline{0.008x + 4}} \quad (25)$$

f) Skjæringspunkt:

$$\boxed{\frac{dK(x)}{dx} = TEK(x)} \quad (26)$$

$$0.008x + 4 = \frac{0.004x^2 + 4x + 4500}{x} \quad (27)$$

$$0.008x + 4 = 0.004x + 4 + \frac{4500}{x} \quad (28)$$

$$0.004x = \frac{4500}{x} \quad (29)$$

Multipliserer med x på begge sider for å løse med hensyn på x alene:

$$0.004x = \frac{4500}{x} \quad \Bigg| \cdot x \quad (30)$$

$$0.004x^2 = 4500 \quad (31)$$

$$x = \sqrt{\frac{4500}{0.004}} \quad (32)$$

$$\underline{x = 1061} \quad (33)$$

siden vi må ha $x > 0$.

Tilhørende y -verdi: ³

$$\underline{y} = \frac{dK(1061)}{dx} \quad (34)$$

$$= 0.008 \cdot 1061 + 4 = \underline{12.49} \quad (35)$$

Skjæringspunktet mellom $y = \frac{dK(x)}{dx}$ og $TEK(x)$ er $\underline{(x, y) = (1061, 12.49)}$

g) Sammenligner svaret fra oppgave **1d** med svaret fra oppgave **1f**:

- Ja, vi får samme svar i oppgave **1d** og **1f**.
- Med det blotte øye ser vi at skjæringspunktet mellom kurvene er det samme som minimumpunktet til $TEK(x)$, akkurat som lign. (5) sier.

■

³Siden $x = 1061$ er skjæringspunktet mellom $\frac{dK(x)}{dx}$ og $TEK(x)$ så er $\frac{dK(1061)}{dx} = TEK(1061)$. Derfor kan vi velge om vi setter $x = 1061$ inn i $K'(x)$ eller $TEK(x)$ når vi skal finne tilhørende y -koordinat.

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

a) Verdens totale oljeforbruk i år 2027:

$$\underline{\underline{a_7}} = f 1.04^7 \quad (36)$$

$$= 30 \cdot 10^9 \cdot 1.04^7 \text{ fat olje} = \underline{\underline{39.5 \cdot 10^9 \text{ fat olje}}} \quad (37)$$

b) Rekken $a_i = f 1.04^i$ er på formen $a_{i+1} = k a_i$, hvor k = en konstant.⁴
Derfor er det en geometrisk rekke.

c) Summen av en geometrisk rekke er:⁵

$$S_n^{\text{forbruk}} = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (38)$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.04$ og $a_1 = f 1.04$. Dette setter vi inn i lign.(38):

$$\underline{\underline{S_n}} \stackrel{\text{lign. (38)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (39)$$

$$= f \cdot 1.04 \frac{1.04^n - 1}{1.04 - 1} = \frac{1.04}{1.04 - 1} f (1.04^n - 1) \quad (40)$$

$$= \underline{\underline{26 f (1.04^n - 1)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (41)$$

⁴ $k = 1.04$ i vårt tilfelle.

⁵Se formelsamlingen dersom du ikke husker formelen i hodet.

- d) Formelen i oppgave 2c viser verdens totale oljeforbruk n år etter år 2020. Derfor kan vi bruke nettopp denne formelen med $n = 10$ for å finne verdens totale oljeforbruk i perioden fra og med 2021 og til med 2030: ⁶

$$\underline{\underline{S_n}} = 26f(1.04^n - 1) \quad (42)$$

$$= 26 \cdot 30 \cdot 10^9 (1.04^{10} - 1) \text{ fat olje} = \underline{\underline{374.59 \cdot 10^9 \text{ fat olje}}} \quad (43)$$

- e) Siden vi antar at man ikke finner mer olje så må man tære på reservene. Altså:

$$R = S_n \quad (44)$$

Vi bruker svaret fra oppgave 2c, dvs. lign.(41), og løser med hensyn på “ n ” alene:

$$R = 26f(1.04^n - 1) \quad \left| \cdot \frac{1}{26f} \right. \quad (45)$$

$$\frac{R}{26f} = 1.04^n - 1 \quad (46)$$

$$\frac{R}{26f} + 1 = 1.04^n \quad (47)$$

For å “jekke ned” eksponenten “ n ” så tar vi “ln” på begge sider av ligningen:

$$\ln\left(\frac{R}{26f} + 1\right) = \ln 1.04^n \quad (48)$$

$$\ln\left(\frac{R}{26f} + 1\right) = n \ln 1.04 \quad (49)$$

hvor vi har brukt regnereglen $\ln a^n = n \ln a$.

Dermed: ved å dele på “ln 1.04” på begge sider at lign.(49) så får vi:

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\ln\left(\frac{R}{26f} + 1\right)}{\ln 1.04}, \quad \text{q.e.d.} \quad (50)$$

⁶Man kan også skrive svaret på formen: $S_n = 3.75 \cdot 10^{11}$ fat olje.

- f) For å finne ut hvor lang tid det tar det før man bruker opp oljereservene R så bruker vi bare resultatet fra oppgave **2e**, dvs. lign.(50):

$$\underline{n} \stackrel{\text{lign. (50)}}{=} \frac{\ln \left(\frac{R}{26f} + 1 \right)}{\ln 1.04} \quad (51)$$

$$= \frac{\ln \left(\frac{1.5 \cdot 10^{12}}{26 \cdot 30 \cdot 10^9} + 1 \right)}{\ln 1.04} \approx \underline{27.3} \quad (52)$$

Oljereservene vil bli brukt opp i år 2048.

■

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

a) Formelen for nåverdien K_0 er oppgitt i oppgaven:

$$K_0 = K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad (53)$$

Løser med hensyn på K alene:

$$K_0 = K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad \Bigg| \cdot r \quad (54)$$

$$K_0 r = K \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right) \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (55)$$

som gir

$$\underline{\underline{K = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (56)$$

b) Formelen for nåverdien K_0 er oppgitt i oppgaven:

$$K_0 = K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad (57)$$

Løser med hensyn på n alene:

$$K_0 = K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad \Bigg| \cdot \frac{r}{K} \quad (58)$$

$$\frac{K_0 r}{K} = 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \quad (59)$$

$$\frac{1}{(1+r)^n} = 1 - \frac{K_0 r}{K} \quad (60)$$

Multipliserer med $(1+r)^n$ på begge sider:

$$\frac{1}{(1+r)^n} = 1 - \frac{K_0 r}{K} \quad \Bigg| \cdot (1+r)^n \quad (61)$$

$$1 = (1+r)^n \left(1 - \frac{K_0 r}{K}\right) \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{1 - \frac{K_0 r}{K}} \quad (62)$$

$$\frac{1}{1 - \frac{K_0 r}{K}} = (1+r)^n \quad (63)$$

Ta logaritmen $\ln$ på begge sider av siste ligning. Da får man: (“*jekke ned*” regel)

$$\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{K_0 r}{K}}\right) = \ln(1+r)^{\textcolor{red}{n}} \quad (64)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{K_0 r}{K}}\right) = \textcolor{red}{n} \ln(1+r) \quad (65)$$

Deler på $\ln(1+r)$ i siste ligning og får:

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{K_0 r}{K}}\right)}{\ln(1+r)}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (66)$$

- c) Denne oppgaven dreier seg om oppsparingsannuitet.

Siden man skal finne oppspart beløp like etter at siste beløp er satt inn i banken så kan vi ikke bruke formelen som oppgitt i oppgaven: ⁷

$$\underline{S_n^{\text{ann, u}}} = K \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (67)$$

$$= 15\,000 \cdot \frac{(1+0.05)^{30} - 1}{0.05} \text{ NOK} \approx \underline{996\,583 \text{ NOK}} \quad (68)$$

Ved oppsparing i 30 år og en rente på $r = 5\%$ blir oppspart beløp rett etter siste innbetaling 996 583 NOK.

- d) Siden beløpet vi fant i oppgave **3c** skal utbetales i faste beløp så er altså innskuddet/nåverdien:

$$K_0 = 996\,583 \text{ NOK} \quad (69)$$

Oppgaven spør etter hvor mye Ola kan ta ut i året dersom han bestemmer seg for å bruke opp pensjonen $K_0 = 996\,583 \text{ NOK}$ over en periode på $n = 10$ år.

Oppgaven spør altså etter terminbeløpet K .

Formelen for terminbeløpet K fant vi i **3a**: ⁸

$$\underline{K} = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (70)$$

$$= \frac{996\,583 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{10}}} \text{ NOK} \approx \underline{129\,062 \text{ NOK}} \quad (71)$$

Ola kan ta ut $K = 129\,062 \text{ NOK}$ hvert år i 10 år.

⁷Vi finner også formelen for $S_n^{\text{ann, u}}$ i formelsamlingen.

⁸Denne formelen for K finner vi også i formelsamlingen.

- e) Vi skal finne antall år som beløpet

$$S_n^{\text{ann, u}} = 996\,583 \text{ NOK} \quad (72)$$

varer dersom Ola ønsker å ta ut $K = 60\,000$ NOK hvert år.

Det viktige steget i denne oppgaven er å innse at dette antall år n er gitt av formelen fra oppgave 3b, dvs. lign.(66):

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{K_0 r}{K}}\right)}{\ln(1 + r)} \quad (73)$$

Dermed blir oppgaven “bare” å sette inn tall:

$$\underline{n} = \frac{\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{996\,583 \cdot 0.05}{60\,000}}\right)}{\ln(1 + 0.05)} = \underline{36.4} \quad (74)$$

Dette betyr at man kan oppnå 36 fulle utbetalinger på 60 000 NOK.

- f) Dersom Ola skal få en årlig rente på 55 000 NOK som pensjonist så er det oppsparte beløpet $S_n^{\text{ann, u}}$ bestemt av ligningen
 $55\,000 = S_n^{\text{ann, u}} \cdot r$, dvs.:

$$\underline{S_n^{\text{ann, u}}} = \frac{55\,000}{0.05} \text{ NOK} = \underline{1\,100\,100 \text{ NOK}} \quad (75)$$

Oppgaven er nå å finne den kapitalen K som Ola må sette av årlig fra og med år 2016 til og med år 2045, dvs. $n = 30$, slik at oppspart beløp blir $S_n^{\text{ann, u}} = 1\,100\,100$ NOK.

Løser ligningen

$$S_n^{\text{ann, u}} = K \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (76)$$

med hensyn på K alene:

$$\underline{K} = \frac{r S_n^{\text{ann, u}}}{(1+r)^n - 1} \quad (77)$$

$$= \frac{0.05 \cdot 1\,100\,100}{(1+0.05)^{30} - 1} \text{ NOK} = \underline{16\,557 \text{ NOK}} \quad (78)$$

Ola må sette av $K = 16\,557 \text{ NOK}$ årlig mellom 2016 og 2045 dersom renten av pensjonen skal gi ham 55 000 NOK i året.

■

Oppgave 4: (økonomi)

a) Nytten for $x = 60$ og $y = 25$:

$$\underline{\underline{U(60, 25)}} = 2 \ln(60) + 15 \ln(25) = \underline{\underline{56.47}} \quad (79)$$

b) Med $x = 60$ og $y = 25$:

$$\underline{\underline{p_x x + p_y y}} = (15 \cdot 60 + 250 \cdot 25) \text{ NOK/måned} = \underline{\underline{7\,150 \text{ NOK/måned}}} \quad (80)$$

som er mindre enn den samlede konsumutgiften per måned, $m = 8500$ NOK/måned.
Derfor er $x = 60$ og $y = 25$ innenfor budsjettet.

c) Dette er et maksimeringsproblem under en **bibetingelse**. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikatorer.

Av åpenbare grunner er $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Dessuten er **bibetingelsen**:

$$g(x, y) = 15x + 250y = 8500 \quad (81)$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$F(x, y) = U(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (82)$

dvs.

$$F(x, y) = 2 \ln(x) + 15 \ln(y) - \lambda (15x + 250y) \quad (83)$$

De stasjonære punktene til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (84)$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (85)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \ln(x) + 15 \ln(y) \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (15x + 250y) = 0 \quad (86)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(2 \ln(x) + 15 \ln(y) \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (15x + 250y) = 0 \quad (87)$$

$$\frac{2}{x} - 15\lambda = 0 \quad (88)$$

$$\frac{15}{y} - 250\lambda = 0 \quad (89)$$

$$\frac{2}{15x} - \lambda = 0 \quad (90)$$

$$\frac{15}{250y} - \lambda = 0 \quad (91)$$

De to ligningene i lign.(89) og (91) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsettingsmetoden”⁹. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(89) og (91):

$$\lambda = \lambda \quad (92)$$

$$\frac{2}{15x} = \frac{15}{250y} \quad (93)$$

⁹Med “innsettingsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

og størrelsen λ er eliminert. Lign.(93) kan vi snu på hodet: ¹⁰

$$\frac{15x}{2} = \frac{250y}{15} \quad (94)$$

$$\underline{x = \frac{20}{9}y} \quad (95)$$

Innsatt i budsjettligningen i lign.(81):

$$15x + 250y = 8500 \quad (96)$$

$$15\left(\frac{20}{9}y\right) + 250y = 8500 \quad (97)$$

$$283.33y = 8500 \quad (98)$$

$$\underline{y = 30} \quad (99)$$

Til slutt setter vi dette svare inn i lign.(95)

$$\underline{x = \frac{20}{9}30 = 66.67} \quad (100)$$

For å maksimere nytten $U(x, y)$ må studenten kjøpe

$$\underline{\underline{x = 66.67}} \quad \text{liter bensin per måned} \quad (101)$$

og leie en hybel som er

$$\underline{\underline{y = 30}} \quad \text{antall kvadratmeter stor hybel} \quad (102)$$

■

¹⁰Ligningen $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ kan man snu på hodet $\frac{8}{3} = \frac{24}{9}$.

d) Med $x = 66.67$ og $y = 30$:

$$\underline{p_x x + p_y y} = (15 \cdot 66.67 + 250 \cdot 30) \text{ NOK/måned} = \underline{8500 \text{ NOK/måned}} \quad (103)$$

altså hele budsjettet brukes.

■

Hovedeksamen 2016

LØSNING: Eksamen 19. des. 2016

“MAT100 Matematikk”, 2016

Oppgave 1: (økonomi, logistikk og LP optimalisering)

- a) Fra lign.(1) i oppgavesettet ser vi at det tar 3 timer å produsere komponentene til en stol av type 1.
Og 2 timer for type 2.

Fra den midterste ligningen i lign.(2) i oppgavesettet ser vi at det tar 1 time å montere en stol av type 1.
Og 2 timer å montere en stol av type 2.

- b) Gjør om ulikhetene til likheter:

$$3x + 2y = 24 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (1)$$

$$x + 2y = 16 \quad (\text{montering}) \quad (2)$$

$$x + y = 9 \quad (\text{pakking}) \quad (3)$$

Flytter over x på andre siden:

$$2y = 24 - 3x \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \right. \quad (4)$$

$$2y = 16 - x \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \right. \quad (5)$$

$$y = 9 - x \quad (6)$$

Løser ut y alene:

$$y(x) = 12 - \frac{3}{2}x \quad (7)$$

$$y(x) = 8 - \frac{1}{2}x \quad (8)$$

$$\underline{\underline{y(x) = 9 - x}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (9)$$

c) Verditabell: ¹

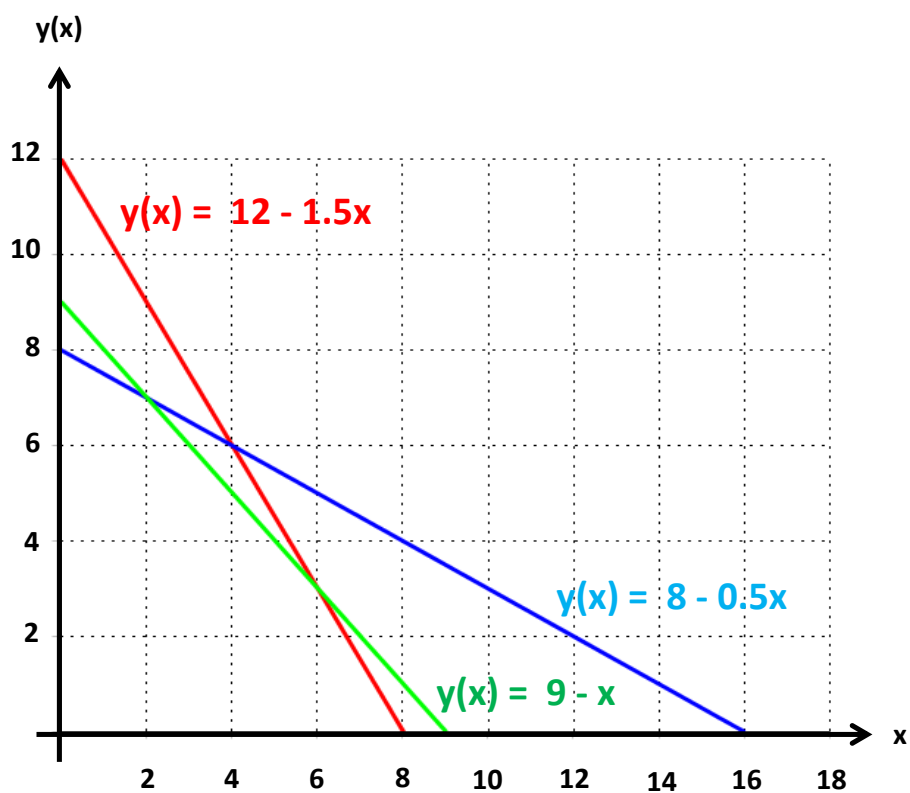
x	0	2	4	8
y(x)	12	9	6	0

x	0	6	12	16
y(x)	8	5	2	0

x	0	4	6	9
y(x)	9	5	3	0

Figur 1: Verditabeller.

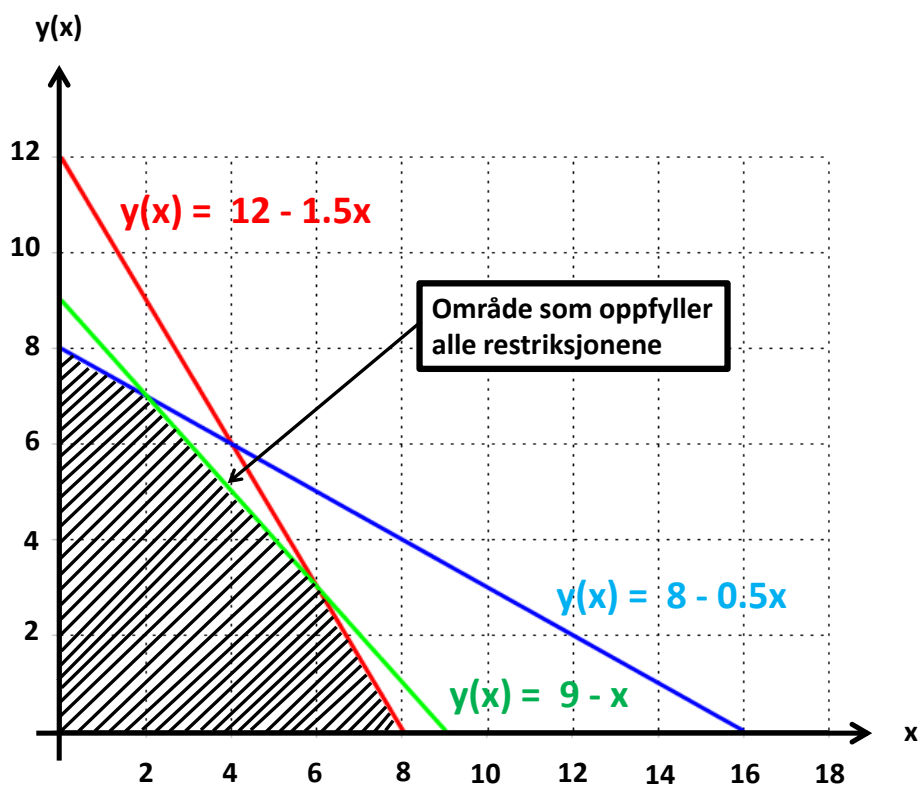
Plott:



Figur 2: Plott av de lineære lign.(7), (8) og (9).

¹Strengt tatt behøver man ikke mer enn 2 punkter i en verditabell for å bestemme en rett linje. Men av "sikkerhetsmessige" grunner er det svært lurt å ta flere enn to punkt, f.eks. 4 punkter slik som i verditabellene ovenfor.

- d) Området i figuren som oppfyller alle restriksjonene:



Figur 3: Området som oppfyller alle ulikhetene.

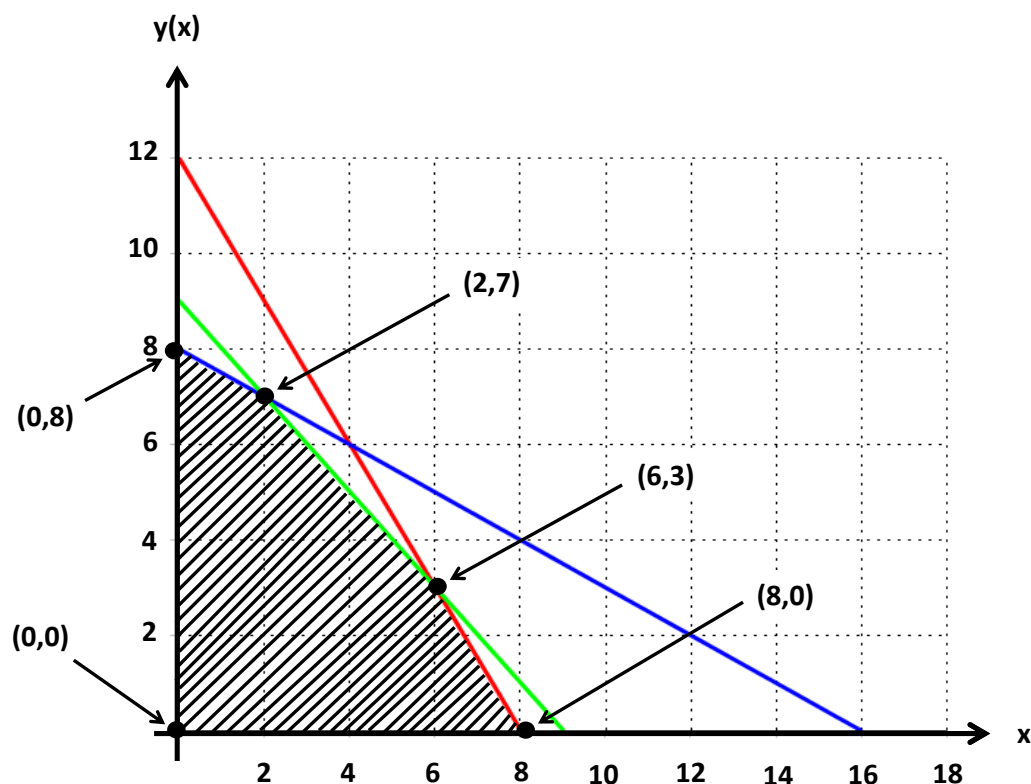
- e) Alle tre linjene beskrevet at ressursrestriksjonene i lign.(7), (8) og (9) grenser mot det skraverte området, se figur 3.

Derfor:

Alle tre ressursene er en begrenset ressurs for noen mulige kombinasjoner x og y .²

²Med **mulige** kombinasjoner av x og y menes da alle mulige kombinasjoner innen det **skraverte** området.

f) i) Indikerer alle “hjørneløsninger”:



Figur 4: Hjørneløsninger.

ii) Fortjenesten $F(x, y)$ ved hjørnepunktene: ³

$$\underline{\underline{F(0,0)}} = (4000 \cdot 0 + 3000 \cdot 0) \text{ NOK} = \underline{\underline{0 \text{ NOK}}} \quad (10)$$

$$\underline{\underline{F(0,8)}} = (4000 \cdot 0 + 3000 \cdot 8) \text{ NOK} = \underline{\underline{24\,000 \text{ NOK}}} \quad (11)$$

$$\underline{\underline{F(2,7)}} = (4000 \cdot 2 + 3000 \cdot 7) \text{ NOK} = \underline{\underline{29\,000 \text{ NOK}}} \quad (12)$$

$$\underline{\underline{F(6,3)}} = (4000 \cdot 6 + 3000 \cdot 3) \text{ NOK} = \underline{\underline{33\,000 \text{ NOK}}} \quad (13)$$

$$\underline{\underline{F(8,0)}} = (4000 \cdot 8 + 3000 \cdot 0) \text{ NOK} = \underline{\underline{32\,000 \text{ NOK}}} \quad (14)$$

³Hjørnepunktene er ikke alltid enkelt å finne eksakt eksakt når man bare leser av figuren. Derfor godtas svar som er i nærheten.

iii) **Maksimal** fortjeneste $F(x, y)$ når $x = 6$ og $y = 3$: $F(6, 3) = 33\,000$ NOK

PS: Legg merke til at selv om det er frem hjørneløsninger så er det kun en av dem som gir maksimal fortjeneste $F(x, y)$ i dette tilfellet.



PS:

Ta gjerne en titt på følgende animasjon av LP optimaliseringen i denne oppgaven:

Linear Programming: Slope of the Objective Function.

Oppgave 2: (finansmatematikk)

a) Dette er et annuitetslån.

Første terminbeløp betales inn ett år etter låneopptak.

Terminbeløpet er derfor gitt ved formelen i formelsamlingen:

$$\underline{K} = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (15)$$

$$= \frac{210\,000 \cdot 0.065}{1 - \frac{1}{(1+0.065)^{15}}} \text{ NOK} = \underline{\underline{22\,334 \text{ NOK}}} \quad (16)$$

Det årlige terminbeløpet er 22 334 NOK.

b) Det første året må Per betalte rente av hele beløpet K_0 .

Rente som Per må betale det første året blir dermed:

$$\underline{\underline{\text{rente første året}}} = K_0 \cdot r = 210\,000 \cdot 0.065 \text{ NOK} = \underline{\underline{13\,650 \text{ NOK}}} \quad (17)$$

c) Siden

$$\overbrace{\text{terminbeløp}}^{\text{oppg. 2a}} = \text{avdrag} + \overbrace{\text{rente}}^{\text{oppg. 2b}} \quad (18)$$

for det første året, så blir avdraget:

$$\underline{\underline{\text{avdrag}}} = \overbrace{\text{terminbeløp}}^{\text{oppg. 2a}} - \overbrace{\text{rente}}^{\text{oppg. 2b}} \quad (19)$$

$$= (22\,334 - 13\,650) \text{ NOK} = \underline{\underline{8\,684 \text{ NOK}}} \quad (20)$$

- d) For å finne ut hvor mye lån Per kan ta opp så må vi finne hva slags nåverdi K_0 som terminbeløpet $K = 25\,000$ NOK i $n = 15$ år tilsvarer, Fra formelsamlingen finner vi da:

$$\underline{K_0} = K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad (21)$$

$$= 25\,000 \frac{1 - \frac{1}{(1+0.09)^{15}}}{0.09} \text{ NOK} = \underline{\underline{201\,517 \text{ NOK}}} \quad (22)$$

Med alternativ **A** kan Per ta opp et lån på 201 517 NOK.

- e) Når man bruker formelen

$$K_0 = K_{0,1} + K_{0,2} + K_{0,3} + \dots + K_{0,14} + K_{0,15} \quad (23)$$

og formlene for $K_{0,1}$, $K_{0,2}$ osv. fra figuren i oppgaven så får vi:

$$K_0 = \frac{K}{(1+r)^4} + \frac{K}{(1+r)^5} + \frac{K}{(1+r)^6} + \dots + \frac{K}{(1+r)^{18}} + \frac{K}{(1+r)^{19}} \quad (24)$$

Men $\frac{K}{(1+r)^4}$ er en felles faktor for alle disse leddene. Derfor kan vi skrive:

$$\underline{\underline{K_0 = \frac{K}{(1+r)^4} \left(\overbrace{1 + \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{14}} + \frac{1}{(1+r)^{15}}}^{\text{geometrisk rekke}} \right)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (25)$$

- f) Uttrykket i parentesen er ei **geometrisk rekke** med kvotient $k = \frac{1}{1+r}$ og $a_1 = 1$.
Dermed:

$$\underline{\underline{K_0}} = \frac{K}{(1+r)^4} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (26)$$

$$= \underline{\underline{\frac{K}{(1+r)^4} \frac{\frac{1}{(1+r)^{15}} - 1}{\frac{1}{1+r} - 1}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (27)$$

g) Bruker lign.(27) og setter inn tallene $K = 29\,000$ NOK og $r = 0.09$ for alternativ **B**:

$$\underline{K_0} = \frac{K}{(1+r)^4} \frac{\frac{1}{(1+r)^{15}} - 1}{\frac{1}{1+r} - 1} \quad (28)$$

$$= \frac{29\,000}{(1+0.09)^4} \frac{\frac{1}{(1+0.09)^{15}} - 1}{\frac{1}{1+0.09} - 1} \text{ NOK} = \underline{\underline{180\,506 \text{ NOK}}} \quad (29)$$

Med alternativ **B** kan Per ta opp $K_0 = 180\,506$ NOK.

■

Oppgave 3: (priselastisitet og logistikk)

a) Priselastisiteten $E_p(x)$:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = \frac{d x(p)}{d p} \cdot \frac{p}{x(p)} \quad (30)$$

$$= \frac{d}{dp} \left(50 - 2p \right) \cdot \frac{p}{50 - 2p} \quad (31)$$

$$= \left(-2 \right) \cdot \frac{p}{50 - 2p} \quad (32)$$

$$= \frac{-2p \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)}{\left(50 - 2p \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)} \quad (33)$$

$$= \frac{p}{\underline{\underline{p - 25}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (34)$$

b) Man kan aldri dele på 0.

Derfor er ikke $p = 25$ en del av definisjonsmengden til $E_p(x) = \frac{p}{p-25}$.

- c) At priselastisiteten er **nøytralelastisk** betyr at $E_p(x) = -1$. Dermed:

$$E_p(x) = -1 \quad (35)$$

$$\frac{p}{p-25} = -1 \quad (36)$$

$$p = -(p-25) \quad (37)$$

$$p = -p + 25 \quad (38)$$

$$2p = 25 \quad (39)$$

$$\underline{p = 12.5} \quad (40)$$

Priselastisiteten blir nøytralelastisk, dvs. -1 , dersom CMG Group setter prisen per container til $12.5 \cdot 1000 \text{ NOK}$ 12 500 NOK.

- d) Priselasititeten er elastisk (prisfølsom) dersom

$$E_p(x) < -1 \quad (41)$$

Setter så inn uttrykket for $E_p(x)$ fra lign.(34):

$$\underline{\frac{p}{p-25} < -1} \quad (42)$$

Siden definisjonsmengden til $E_p(x)$ er $0 \leq p < 25$ så er leddet $p-25$ alltid negativt. Ved å mutiplisere med $p-25$ på begge sider av ulikheten må vi da SNU ulikhetstegnet:

$$p > -1 \cdot (p-25) \quad (43)$$

$$2p > 25 \quad (44)$$

$$\underline{p > 12.5} \quad (45)$$

Ulikheten i (45) sammen med definisjonsmengden til $E_p(x)$ gir da at priselastisiteten er **elastisk** når:

$$\underline{\underline{12.5 < p < 25}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (46)$$

e) Priselastisiteten dersom prisen er $p = 13.64$:

$$\underline{\underline{E_p(x)}} = \left. \frac{p}{p - 25} \right|_{p=13.64} \quad (47)$$

$$= \frac{13.64}{13.64 - 25} = \underline{\underline{-1.2}} \quad (48)$$

f) Siden

$$E_p(x) = \frac{\text{\%vis endring i etterspørsel}}{\text{\%vis endring i pris}} \quad (49)$$

så ser vi at: ⁴

$$\underline{\underline{\text{\%vis endring i etterspørsel}}} = \underbrace{E_p(x)}_{= -1.2} \cdot \underbrace{\text{\%vis endring i inntekt}}_{= 2.8 \%} \quad (50)$$

$$= -1.2 \cdot 2.8 \% \quad (51)$$

$$= \underline{\underline{-3.36 \%}} \quad (52)$$

■

⁴I oppgaveteksten står det: “*Bruk svaret fra oppgave 3e...*” . Det betyr at vi antar at $E_p(x) = -1.2$ er konstant selv om prisen øker med 2.8 %. Det forventes ikke at dette kommenteres i en eksamensbesvarelse.

Oppgave 4: (økonomi , optimalisering , Lagrange multiplikator)

a) Fortjenesten $F(x)$ ved å selge x antall dumpere til det **norske** markedet er:

$$\underline{\underline{F(x)}} = p_x x - K(x) \quad (53)$$

$$= (312 - 2x)x - (2x^2 + 72x + 720) \quad (54)$$

$$= 312x - 2x^2 - 2x^2 - 72x - 720 \quad (55)$$

$$= \underline{\underline{-4x^2 + 240x - 720}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (56)$$

b) Fortjenesten $F(x)$ oppnår sitt **optimum**, i dette tilfellet maksimum (jfr. oppgave **4c**) når den deriverte er lik null:

$$\text{stigningstallet} = 0 \quad (57)$$

$$\frac{d \textcolor{red}{F(x)}}{dx} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\textcolor{red}{-4x^2 + 240x - 720} \right) = 0 \quad (59)$$

$$-8x + 240 = 0 \quad (60)$$

$$x = \frac{240}{8} \quad (61)$$

$$\underline{\underline{x = 30}} \quad (62)$$

Doosan må produsere $x = 30$ dumpere i halvåret for det norske markedet for å maksimere fortjenesten.

- c) Den 2. deriverte av fortjenesten $F(x)$ er:

$$\underline{F''(x)} = \left(-4x^2 + 240x - 720 \right)'' \quad (63)$$

$$= \left(-8x + 240 \right)' \quad (64)$$

$$= \underline{-8} \quad (\text{negativ}) \quad (65)$$

Altså $F''(x) < 0$ er negativ.

Ifølge 2. derivasjonstesten tilsvarer derfor $x = 30$ et maksimum av fortjenesten $F(x)$.

- d) Maksimale fortjenesten $F(x)$:

$$\underline{F_{max}} = F(x = 30) \quad (66)$$

$$= \left(-4x^2 + 240x - 720 \right) \Big|_{x=30} \quad (67)$$

$$= \left(-4 \cdot 30^2 + 240 \cdot 30 - 720 \right) \quad (68)$$

$$= \underline{2880} \quad (69)$$

Den største fortjenesten til Doosan per halvår er: $2880 \cdot 1000 \text{ NOK} = \underline{\underline{2.88 \text{ mill. NOK}}}$.

- e) Prisen p_x :

$$\underline{p_x} = 312 - 2x \Big|_{x=30} \quad (70)$$

$$= 312 - 2 \cdot 30 = \underline{252} \quad (71)$$

Doosan må sette prisen på sine dumpere til $252 \cdot 1000 \text{ NOK} = \underline{\underline{252\,000 \text{ NOK}}}$ for å maksimere fortjenesten sin.

f) Lagrange-funksjonen for optimaliseringsproblemet:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{L(x,y)}} &= F(x,y) - \lambda \left(g(x,y) - 36 \right) \\ &= \underline{\underline{-4x^2 - 4xy - 6y^2 + 240x + 360y - 720 - \lambda(x + y - 36)}}\end{aligned}\quad (72)$$

g) De stasjonære punktene til $F(x,y)$ er:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial \textcolor{red}{x}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x,y)}{\partial \textcolor{blue}{y}} = 0 \quad (73)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial \textcolor{red}{x}} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial \textcolor{red}{x}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial \textcolor{blue}{y}} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial \textcolor{blue}{y}} = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial}{\partial \textcolor{red}{x}} \left(-4\textcolor{red}{x}^2 - 4\textcolor{red}{x}y - 6y^2 + 240\textcolor{red}{x} + 360y - 720 \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial \textcolor{red}{x}} \left(\textcolor{red}{x} + y - 36 \right) = 0 \quad (75)$$

$$\frac{\partial}{\partial \textcolor{blue}{y}} \left(-4x^2 - 4x\textcolor{blue}{y} - 6\textcolor{blue}{y}^2 + 240x + 360\textcolor{blue}{y} - 720 \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial \textcolor{blue}{y}} \left(x + \textcolor{blue}{y} - 36 \right) = 0 \quad (76)$$

$$\underline{\underline{-8x - 4y + 240 - \lambda = 0}} \quad (77)$$

$$\underline{\underline{-4x - 12y + 360 - \lambda = 0}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (78)$$

h) Vi skal nå løse ligningssettet. Fra lign.(77) og (78) får vi:

$$-8x - 4y + 240 = \lambda \quad (79)$$

$$-4x - 12y + 360 = \lambda \quad (80)$$

De to ligningene i lign.(79) og (80) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsetningsmetoden”⁵. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(79) og (80):

$$\lambda = \lambda \quad (81)$$

$$-8x - 4y + 240 = -4x - 12y + 360 \quad (82)$$

$$-4y + 12y = -4x + 8x + 360 - 240 \quad (83)$$

$$8y = 4x + 120 \quad (84)$$

$$\underline{y = \frac{x}{2} + 15} \quad (85)$$

og størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(85) inn i bibetingelsen:

$$x + y = 36 \quad (86)$$

$$x + \left(\frac{x}{2} + 15\right) = 36 \quad (87)$$

$$\frac{3x}{2} = 36 - 15 \quad (88)$$

$$\underline{x = 14} \quad (89)$$

som gir, f.eks. via lign.(85), $\underline{y} = \frac{14}{2} + 15 = \underline{22}$.

⁵Med “innsetningsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

Maksimum for $F(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (14, 22)$. For å maksimere fortjenesten F_{maks} bør Doosan produsere:

$$\underline{\underline{x = 14}} \quad \text{dumpere for det norske markedet} \quad (90)$$

$$\underline{\underline{y = 22}} \quad \text{dumpere for det amerikanske markedet} \quad (91)$$

per halvår.

- i) Oppgaven består i å finne x og y .
Da må vi først finne ϵ .

Den nye fortjenesten til Doosan er oppgitt i oppgaven:

$$F\left(x^* + \frac{2}{3}\epsilon, y^* + \frac{1}{3}\epsilon\right) = F(x^*, y^*) + \overbrace{40\epsilon - \frac{10}{3}\epsilon^2}^{= 120} \quad (92)$$

Dersom fortjenesten skal øke med 120 000 NOK så betyr det at de to siste leddene i lign.(92) må være 120.

For å finne ϵ så må vi derfor løse 2. gradsligningen

$$40\epsilon - \frac{10}{3}\epsilon^2 = 120 \quad (93)$$

som gir

$$\epsilon = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4\left(-\frac{10}{3}\right)(-120)}}{2\left(-\frac{10}{3}\right)} \quad (94)$$

$$\underline{\epsilon = 6} \quad (95)$$

Dersom Doosan skal øke fortjenesten med 120 000 NOK så må $\epsilon = 6$.

Fra lign.(92) ser vi at de nye uttrykkene for x og y er

$$x = x^* + \frac{2}{3}\epsilon \quad (96)$$

$$y = x^* + \frac{1}{3}\epsilon \quad (97)$$

Fra oppgave 4h fant vi at $x^* = 14$ og $y^* = 22$. Med $\epsilon = 6$ får vi da:

$$\underline{x} = 14 + \frac{2}{3} \cdot 6 = \underline{18} \quad (98)$$

$$\underline{y} = 22 + \frac{1}{3} \cdot 6 = \underline{24} \quad (99)$$

Doosan må produsere og selge $x = 18$ dumpere til det norske markedet
og $y = 24$ dumpere til det amerikanske markedet for å øke fortjenesten med 120 000 NOK.

■

Vedlegg

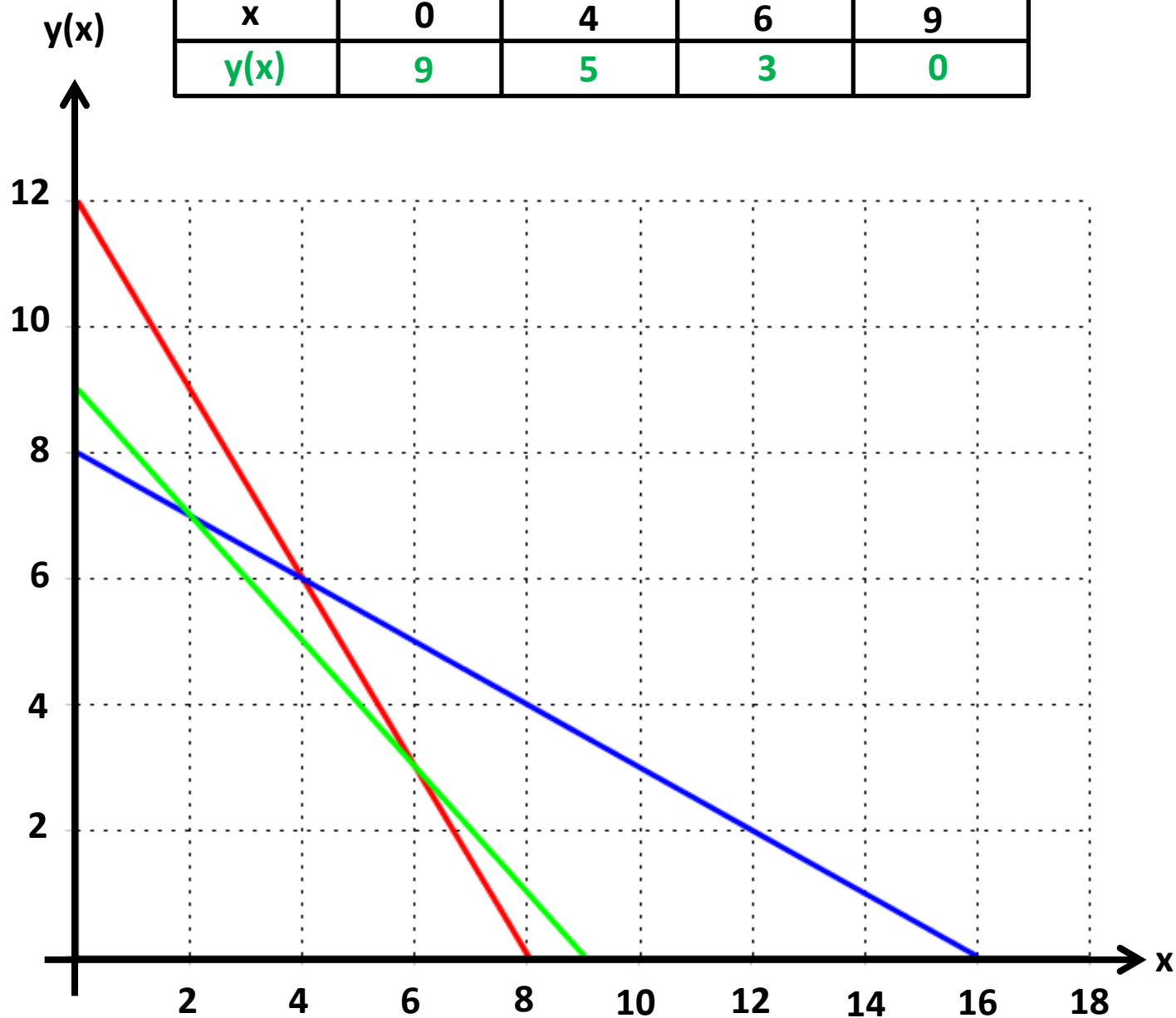
Kandidatnummer: _____

(skriv inn ditt skandidatnummer her)

x	0	2	4	8
y(x)	12	9	6	0

x	0	6	12	16
y(x)	8	5	2	0

x	0	4	6	9
y(x)	9	5	3	0



Kontinuasjonseksamen 2016

LØSNING: Eksamen 6. juni 2017

“MAT100 Matematikk”, konteeksamen

- a) Fra ligningene om kapasitetsbegrensningene i oppgavesettet ser vi at en varmeovn har volumet 10 dm^3 og vekten 6 kg .

- b) Kapasitetsbegrensningen – begrensert volum – for CMG Group er

$$10x_1 + 20x_2 \leq 20\,000 \quad (1)$$

Flytter over $10x_1$ på andre siden:

$$20x_2 \leq 20\,000 - 10x_1 \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{20} \quad (2)$$

deler på 20 på begge sider. Det gir:

$$\underline{x_2 \leq 1000 - 0.5x_1} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (3)$$

- c) Etterspørslene

$$x_1 + y_1 = 800 \quad (4)$$

$$x_2 + y_2 = 900 \quad (5)$$

kan løses med hensyn på y_1 og y_2 alene

$$y_1 = 800 - x_1 \quad (6)$$

$$y_2 = 900 - x_2 \quad (7)$$

Til slutt setter vi disse ligningene – lign.(6) og (7) – inn i kapasitetsbegrensningen for [Hapag-Lloyd](#):

$$6y_1 + 6y_2 \leq 3\,000 \quad (8)$$

$$6(800 - x_1) + 6(900 - x_2) \leq 3\,000 \quad (9)$$

$$4\,800 - 6x_1 + 5\,400 - 6x_2 \leq 3\,000 \quad (10)$$

$$10\,200 - 6x_1 \leq 6x_2 \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{6} \quad (11)$$

som gir

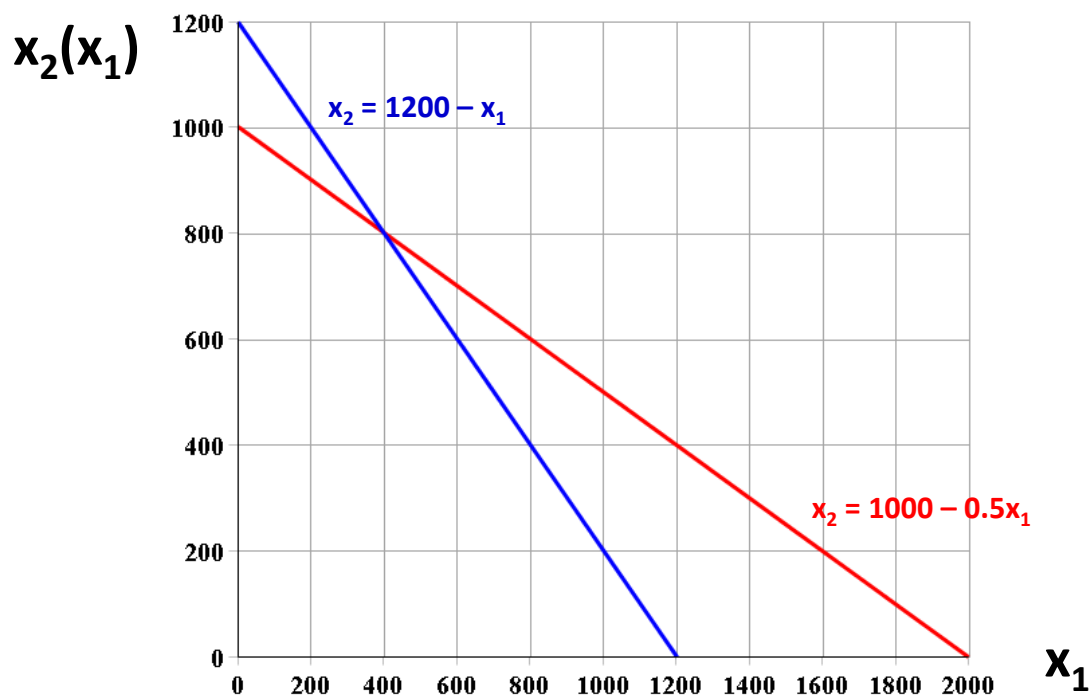
$$\underline{\underline{x_2 \geq 1200 - x_1}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (12)$$

d) Verditabell: ¹

x_1	0	600	1400	2000
$x_2(x_1)$	1000	700	300	0

x_1	0	400	800	1200
$x_2(x_1)$	1200	800	400	0

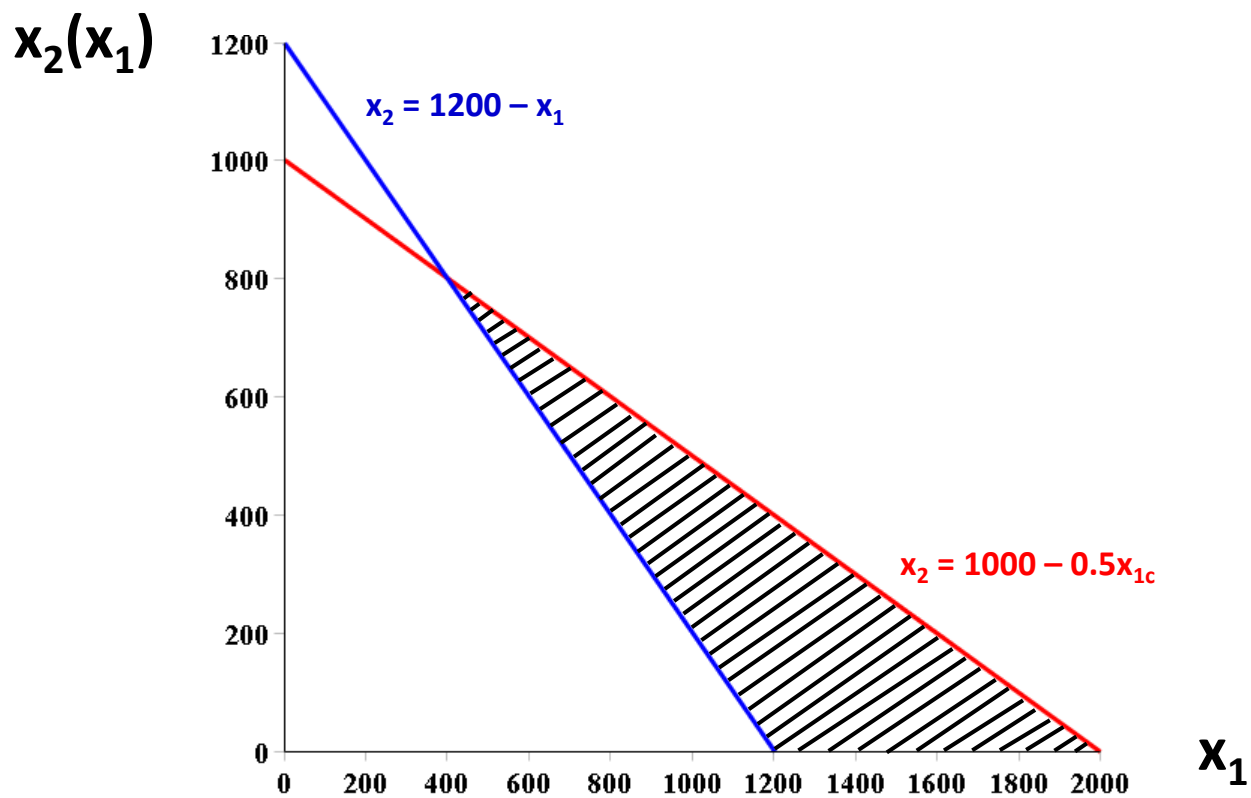
Figur 1: Verditabeller.



Figur 2: Plott av $x_2 = 1000 - 0.5x_1$ og $x_2 = 1200 - x_1$.

¹Strengt tatt behøver man ikke mer enn 2 punkter i en verditabell for å bestemme en rette linje. Men av “sikkerhetsmessige” grunner er det svært lurt å ta flere enn to punkt, f.eks. 4 punkter slik som i verditabellene ovenfor.

- e) Området i figuren som oppfyller alle kapasitetsbegrensningene:



Figur 3: Området som oppfyller alle ulikhetene.

f) Transportkostnaden C forbundet med transporten av varene til USA er:

$$C = 70x_1 + 90x_2 + 20y_1 + 60y_2 \quad (13)$$

Etterspørslene

$$x_1 + y_1 = 800 \quad (\text{lys}) \quad (14)$$

$$x_2 + y_2 = 900 \quad (\text{varmeovner}) \quad (15)$$

gir

$$y_1 = 800 - x_1 \quad (16)$$

$$y_2 = 900 - x_2 \quad (17)$$

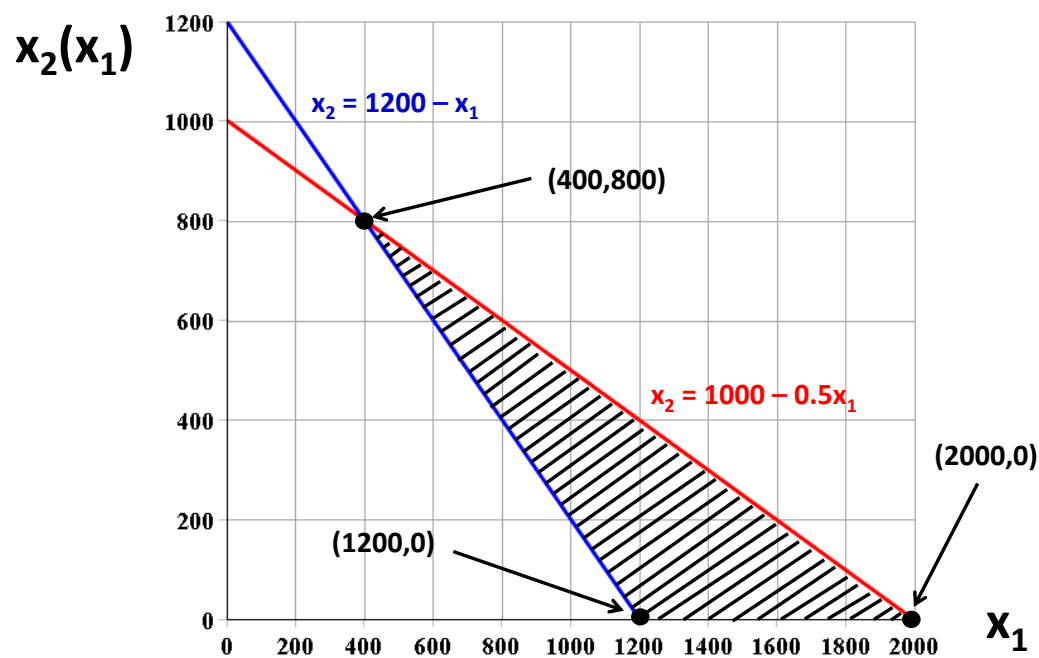
Setter lign.(16) og (17) inn i lign.(13):

$$\underline{\underline{C}} = 70x_1 + 90x_2 + 20y_1 + 60y_2 \quad (18)$$

$$= 70x_1 + 90x_2 + 20(800 - x_1) + 60(900 - x_2) \quad (19)$$

$$= \underline{\underline{50x_1 + 30x_2 + 70\,000}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (20)$$

g) i) Indikerer alle “hjørneløsninger”:



Figur 4: Hjørneløsninger.

ii) Transportkostnad $C(x_1, x_2)$ ved hjørnepunktene:

$$\underline{\underline{C(400, 800)}} = \left(50 \cdot 400 + 30 \cdot 800 + 70\,000 \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{114\,000 \text{ NOK}}} \quad (21)$$

$$\underline{\underline{C(1200, 0)}} = \left(50 \cdot 1200 + 30 \cdot 0 + 70\,000 \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{130\,000 \text{ NOK}}} \quad (22)$$

$$\underline{\underline{C(2000, 0)}} = \left(50 \cdot 2000 + 30 \cdot 0 + 70\,000 \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{170\,000 \text{ NOK}}} \quad (23)$$

iii) **Minimal** transportkostnad når: $\overbrace{x_1 = 400 \text{ varmeovner} \text{ og } x_2 = 800 \text{ lysarmatur}}^{\text{CMG Group}}$

Transportkostnaden er da: $\underline{\underline{C(400, 800) = 114\,000 \text{ NOK}}}$

h) Fra lign.(16) og (17) får vi at:

$$\underline{y_1} = 800 - x_1 = 800 - 400 = \underline{400} \quad (24)$$

$$\underline{y_2} = 900 - x_2 = 900 - 800 = \underline{100} \quad (25)$$

Altså **Hapag-Lloyd** må transportere $\overbrace{\underline{y_1 = 400} \text{ varmeovner}}^{\text{Hapag-Lloyd}}$ og $\underline{y_2 = 100} \text{ lysarmatur}$ dersom transportkostnadene ska minimaliseres.

■

Oppgave 2: (petroleumslogistikk)

a) Etterspørselen av gass være 15 år etter oppstart er:

$$\underline{\underline{d_{15}}} = d_1 1.05^{15-1} \quad (26)$$

$$= 25 \cdot 10^9 \cdot 1.05^{14} \text{ m}^3 = \underline{\underline{49.5 \cdot 10^9 \text{ m}^3}} \quad (27)$$

b) Rekken $d_i = d_1 1.05^i$ er på formen $d_{i+1} = k d_i$, hvor $k =$ en konstant.²
Derfor er det en geometrisk rekke.

c) Summen av en geometrisk rekke er:³

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (28)$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.05$ og $a_1 = p_1$. Dette setter vi inn i lign.(28):

$$\underline{\underline{S_n}} \stackrel{\text{lign. (28)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (29)$$

$$= d_1 \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1} = \frac{1}{1.05 - 1} d_1 (1.05^n - 1) \quad (30)$$

$$= \underline{\underline{20 d_1 (1.05^n - 1)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (31)$$

² $k = 1.05$ i vårt tilfelle.

³Se formelsamlingen dersom du ikke husker formelen i hodet.

- d) Formelen i oppgave **2c** viser den totale etterspørslen av gass etter n år. Derfor kan vi bruke nettopp denne formelen med $n = 15$:⁴

$$\underline{\underline{S_{15}}} = 20 d_1 (1.05^{15} - 1) \quad (32)$$

$$= 20 \cdot 25 \cdot 10^9 (1.05^{15} - 1) \text{ m}^3 = \underline{\underline{539.5 \cdot 10^9 \text{ m}^3}} \quad (33)$$

- e) Ormen Lange-feltet er tømt når all forekomst er pumpet ut, dvs.:

$$F = S_n \quad (34)$$

Vi bruker svaret fra oppgave **2c**, dvs. lign.(31), og løser med hensyn på “ n ” alene:

$$F = 20 d_1 (1.05^n - 1) \quad \left| \cdot \frac{1}{20 d_1} \right. \quad (35)$$

$$\frac{F}{20 d_1} = 1.05^n - 1 \quad (36)$$

$$\frac{F}{20 d_1} + 1 = 1.05^n \quad (37)$$

For å “jekke ned” eksponenten “ n ” så tar vi “ln” på begge sider av ligningen:

$$\ln \left(\frac{F}{20 d_1} + 1 \right) = \ln 1.05^n \quad (38)$$

$$\ln \left(\frac{F}{20 d_1} + 1 \right) = n \ln 1.05 \quad (39)$$

hvor vi har brukt regnereglen $\ln a^n = n \ln a$.

Dermed: ved å dele på “ln 1.05” på begge sider at lign.(39) så får vi:

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\ln \left(\frac{F}{20 d_1} + 1 \right)}{\ln 1.05}, \quad \text{q.e.d.} \quad (40)$$

⁴Man kan også skrive svaret på formen: $S_n = 5.39 \cdot 10^{11} \text{ m}^3$.

- f) For å finne ut hvor lang tid det tar det før man bruker opp oljereservene R så bruker vi bare resultatet fra oppgave **2e**, dvs. lign.(40):

$$\underline{n} \stackrel{\text{lign. (40)}}{=} \frac{\ln \left(\frac{F}{20 p_1} + 1 \right)}{\ln 1.05} \quad (41)$$

$$= \frac{\ln \left(\frac{1200 \cdot 10^9}{20 \cdot 25 \cdot 10^9} + 1 \right)}{\ln 1.05} \approx \underline{25.1} \quad (42)$$

Det tar 25.1 år for de påviste forekomstene er tømt.

■

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

- a) Oppsparing etter $n = 0$ antall terminer: ⁵

$$\underline{\underline{S_n^{\text{ann, u}}}} = K \frac{\overbrace{(1+r)^0}^{=1} - 1}{r} = \underline{\underline{0}} \quad (43)$$

- b) Denne oppgaven dreier seg om oppsparingsannuitet.

Siden man skal finne oppspart beløp like etter at siste beløp er satt inn i banken så kan vi ikke bruke formelen som oppgitt i oppgaven: ⁶

$$\underline{\underline{S_n^{\text{ann, u}}}} = K \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (44)$$

$$= 10\,000 \cdot \frac{(1+0.0265)^{10} - 1}{0.0265} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{112\,808 \text{ NOK}}} \quad (45)$$

Ved oppsparing i 10 år og en rente på $r = 2.65 \%$ blir oppspart beløp rett etter siste innbetaling 112 808 NOK.

- c) Man får rente på pengene som til enhver tid er i banken.
Derfor vil utbetalingene etter sparing være lengere enn 10 år.

⁵Ekstrakommentar som du ikke behøver å ha med på eksamen:

Dette svaret er som det må være: etter 0 terminer man ikke spart opp noen kapital.

⁶Vi finner også formelen for $S_n^{\text{ann, u}}$ i formelsamlingen.

- d) Formelen for nåverdien $S_n^{\text{ann}, \text{u}}$ er oppgitt i oppgaven:

$$S_n^{\text{ann}, \text{u}} = K \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (46)$$

Løser med hensyn på K alene:

$$S_n^{\text{ann}, \text{u}} = K \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \Bigg| \cdot r \quad (47)$$

$$r S_n^{\text{ann}, \text{u}} = K \left((1+r)^n - 1 \right) \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{(1+r)^n - 1} \quad (48)$$

som gir

$$\underline{\underline{K = \frac{r S_n^{\text{ann}, \text{u}}}{(1+r)^n - 1}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (49)$$

- e) Dersom $S_n^{\text{ann}, \text{u}}$ skal gi en rente på 8 000 NOK per år så er

$$r S_n^{\text{ann}, \text{u}} = 8\,000 \text{ NOK} \quad (50)$$

dvs.

$$\underline{\underline{S_n^{\text{ann}, \text{u}} = \frac{8\,000 \text{ NOK}}{r} = \frac{8\,000}{0.0265} \text{ NOK} = \underline{\underline{301\,887 \text{ NOK}}}}} \quad (51)$$

- f) Vi bruker resultatet fra oppgave **3e** og finner kapitalen K vi må du sette av i året de $n = 10$ årene du sparer:

$$\underline{K} = \frac{r S_n^{\text{ann, u}}}{(1+r)^n - 1} \quad (52)$$

$$= \frac{0.0265 \cdot 301\,887}{(1 + 0.0265)^{10} - 1} \text{ NOK} = \underline{\underline{26\,261 \text{ NOK}}} \quad (53)$$

Du må sette av $K = 26\,261 \text{ NOK}$ årlig de 10 årene du sparer dersom du ønsker å få utbetalt en rente på 8 000 NOK per år etter oppsparingsperioden.



Oppgave 4: (økonomi og logistikk)

- a) Dette er et minimeringsproblem under en **bibetingelse**. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Av åpenbare grunner er $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Dessuten er **bibetingelsen**:

$$g(x, y) = x + y = 500 \quad (54)$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{L(x, y) = K(x, y) - \lambda g(x, y)} \quad (55)$$

hvor $K(x, y) = x^2 + 500x + y^2 + 300y$. De stasjonære punktene til $L(x, y)$ er:

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (56)$$

$$\frac{\partial K(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (57)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 + 500x + y^2 + 300y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (x + y) = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 + 500x + y^2 + 300y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (x + y) = 0 \quad (59)$$

$$2x + 500 - \lambda = 0 \quad (60)$$

$$2y + 300 - \lambda = 0 \quad (61)$$

$$2x + 500 = \lambda \quad (62)$$

$$2y + 300 = \lambda \quad (63)$$

De to ligningene i lign.(62) og (63) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsettingsmetoden”⁷. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(62) og (63):

$$\lambda = \lambda \quad (64)$$

$$2x + 500 = 2y + 300 \quad (65)$$

$$x = y - 100 \quad (66)$$

og den uinteressante størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(66) inn i bibetingelsen:

$$\textcolor{red}{x} + y = 500 \quad (67)$$

$$\textcolor{red}{y} - 100 + y = 500 \quad (68)$$

$$2y = 600 \quad (69)$$

$$\underline{y = 300} \quad (70)$$

som gir, f.eks. via lign.(66), $\underline{x = y - 100 = 200}$.

Minimal kostand for $K(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (200, 300)$. For å minimere utgiften $K_{\min}$ bør NEAS produsere og levere:

$$\underline{\underline{x^* = 200}} \quad \text{antall } MWh \text{ per døgn ved Reinset kraftverk} \quad (71)$$

$$\underline{\underline{y^* = 300}} \quad \text{antall } MWh \text{ per døgn ved Ulvund kraftverk} \quad (72)$$

når de skal levere 500 MWh per døgn til Norsk Hydro på Sunndalsøra.

⁷Med “innsettingsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

- b) I oppgave 4a fant vi at $x = 200$ og $y = 300$ vil minimere kostnaden $K(x, y)$. Derfor:

$$\underline{K_{\min}} = K(x^*, y^*) \quad (73)$$

$$= K(200, 300) \quad (74)$$

$$= (200^2 + 500 \cdot 200 + 300^2 + 300 \cdot 300) \text{ NOK} = \underline{\underline{320\,000 \text{ NOK}}} \quad (75)$$

Den minimale kostnaden for NEAS per døgn er 320 000 NOK for de to kraftverkene.

- c) Økonomiavdelingen til NEAS sier at ekstraavgiftene kan være opptil 55 000 NOK. Derfor: ekstra per døgn:

$$3000\epsilon - \frac{25}{2}\epsilon^2 = 55\,000 \quad (76)$$

For å finne ϵ så må vi derfor løse 2. gradsligningen

$$-\epsilon^2 \frac{25}{2} + 3000\epsilon - 55\,000 = 0 \quad (77)$$

som gir

$$\epsilon = \frac{-3000 \pm \sqrt{3000^2 - 4\left(-\frac{25}{2}\right)(-55\,000)}}{2\left(-\frac{25}{2}\right)} \quad (78)$$

$$\underline{\epsilon = 20} \quad \text{eller} \quad \underline{\epsilon = 220} \quad (79)$$

Siden $0 \leq \epsilon \leq 120$ så må vi ha $\epsilon = 20$.

Den nye fordelingen av antall MWh mellom krafverkene blir da:

$$\underline{\underline{x_{ny}^*}} = x^* + \frac{10}{4}\epsilon = \left(200 + \frac{10}{4}20\right) MWh = \underline{\underline{250 MWh}} \quad (80)$$

$$\underline{\underline{y_{ny}^*}} = y^* - \frac{10}{4}\epsilon = \left(300 - \frac{10}{4}20\right) MWh = \underline{\underline{250 MWh}} \quad (81)$$

- d) Fra lign.(80) og (81) ser vi at x_{ny}^* og y_{ny}^* er like.
 Det er rimelig fordi – med $\epsilon = 20$ – så er leddene i kostnadfunksjonen like:

$$\underline{K_{ny}(x, y)} = x^2 + 500x + y^2 + \overbrace{(300 + 10\epsilon)}^{= 500} y \quad (82)$$

$$= \overbrace{x^2 + 500x}^{\text{ledd 1}} + \overbrace{y^2 + 500y}^{\text{ledd 2}} \quad (83)$$

hvor altså ledd 1 og ledd 2 er like.

■

Hovedeksamen 2017

LØSNING: Eksamen 21. des. 2017

“MAT100 Matematikk”

a) Alle størrelsene H , D og S er positive. Dermed:

- i) Q øker $\Rightarrow$ $HQ/2$ øker
- ii) Q øker $\Rightarrow$ DS/Q minker

b) Perioden t_0 er definert ved nullpunktet:

$$i(t_0) = 0 \quad (1)$$

Siden $i(t) = Q^* - Dt$ så får vi:

$$Q^* - Dt = 0 \quad (2)$$

$$Q^* = Dt \quad (3)$$

$$\frac{Q^*}{D} = \frac{Dt}{D} \quad (4)$$

som gir

$$\underline{\underline{t_0 = \frac{Q^*}{D}}} \quad (5)$$

- c) Bruker den oppgitt EOQ -formelen og setter inn tallene:

$$\underline{Q^*} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \quad (6)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 230\,000 \cdot 1\,250\,000}{5\,000}} \text{ tonn} = \underline{10\,724 \text{ tonn}} \quad (7)$$

dvs. det må produseres $Q^* = 10\,724$ tonn aluminium i hver produksjonsserie

- d) Bruker formelen $t_0 = Q^*/D$ fra oppgave 1b og setter inn tall: ¹

$$\underline{t_0} = \frac{Q^*}{D} \quad (8)$$

$$= \frac{10\,724 \text{ tonn}}{230\,000 \frac{\text{tonn}}{\text{år}}} = \underline{0.0466 \text{ år}} \quad (9)$$

som skal oppgis i antall dager:

$$\underline{t_0} = 0.0466 \cdot 365 \text{ dager} = \underline{17 \text{ dager}} \quad (10)$$

altså det tar 17 dager fra lageret er fullt til lageret er tomt.

■

¹Man må ikke ha med benevning i mellomregningene i denne oppgaven slik som i lign.(9). Grunnen til at det likevel er tatt med i dette løsningsforslaget er bare for å vise at benevningen stemmer.

Oppgave 2: (logistikk og økonomi - utvidet EOQ -formel)

a) **Optimum** av kostnadsfunksjonen $K(Q)$ inntreffer når **stigningstallet = 0**:

$$\text{stigningstallet til } K(Q) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) Q + \frac{DS}{Q} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) Q + DS Q^{-1} \right) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) + DS (-1) Q^{-1-1} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) - \frac{DS}{Q^2} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) = \frac{DS}{Q^2} \quad \left| \cdot Q^2 \right. \quad (17)$$

$$Q^2 \frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) = DS \quad \left| \cdot \frac{1}{\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right)} \right. \quad (18)$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right)} \quad \text{“oppe-nede metoden”} \quad (19)$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{H \left(1 - \frac{D}{P} \right)} \quad (20)$$

Tar kvadratroten på begge sider av lign.(20) og får:

$$\underline{\underline{Q = \sqrt{\frac{2DS}{H \left(1 - \frac{D}{P} \right)}}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (21)$$

b) Den 1. deriverte av $K(Q)$ fant vi i oppgave **2a**, se lign.(16):

$$\underline{\underline{\frac{dK(Q)}{dQ}}} = \frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) Q + DSQ^{-1} \right) = \underline{\underline{\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) - DSQ^{-2}}} \quad (22)$$

Den 2. deriverte finner vi ved å derivere en gang til:

$$\underline{\underline{\frac{d^2K(Q)}{dQ^2}}} = \frac{d}{dQ} \left(\frac{dK(Q)}{dQ} \right) \quad (23)$$

$$= \frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) - DSQ^{-2} \right) \quad (24)$$

$$= 0 - DS(-2)Q^{-2-1} \quad (25)$$

$$= 2DSQ^{-3} = \underline{\underline{\frac{2DS}{Q^3}}} \quad (26)$$

Siden D , S og Q alle er positive størrelser så er også $\underline{\underline{\frac{d^2K(Q)}{dQ^2}}} > 0$,
dvs. Q^* representerer et minimum for $K(Q)$.

c) Tiden t_1 er bestemt av skjæringspunktet mellom $i_{\text{g}}(t)$ og $i_{\text{r}}(t)$:

$$i_{\text{g}}(t_1) = i_{\text{r}}(t_1) \quad (27)$$

Uttrykkene for $i_{\text{g}}(t)$ og $i_{\text{r}}(t)$ er oppgitt i oppgaven.
Vi setter inn:

$$(P - D)t_1 = \tilde{Q}^* - Dt_1 \quad (28)$$

$$Pt_1 - \cancel{Dt_1} = \tilde{Q}^* - \cancel{Dt_1} \quad (29)$$

$$Pt_1 = \tilde{Q}^* \quad (30)$$

som gir

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{\tilde{Q}^*}{P}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (31)$$

- d)** Fra figuren i oppgaveteksten ser vi at: (også oppgitt i fotnoten i oppgaven)

$$t_2 = \tilde{t}_0 - t_1 \quad (32)$$

Tiden t_1 fant vi i oppgave **2c**. Vi må finne $\tilde{t}_0$.

Tiden $\tilde{t}_0$ er nullpunktet for $i_{\text{r}}(t)$, dvs.:

$$i_{\text{r}}(\tilde{t}_0) = 0 \quad (33)$$

$$\tilde{Q}^* - D\tilde{t}_0 = 0 \quad (34)$$

$$\tilde{Q}^* = D\tilde{t}_0 \quad (35)$$

som gir

$$\underline{\underline{\tilde{t}_0 = \frac{\tilde{Q}^*}{D}}} \quad (36)$$

Setter lign.(36) og (31) inn i $t_2 = \tilde{t}_0 - t_1$:

$$\underline{\underline{t_2}} = \tilde{t}_0 - t_1 \quad (37)$$

$$= \frac{\tilde{Q}^*}{D} - \frac{\tilde{Q}^*}{P} \quad (38)$$

$$= \underline{\underline{\tilde{Q}^* \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P} \right)}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (39)$$

hvor vi har faktorisert i den siste ligningen.

- e) Siden P og D er oppgitt i år så er også t_2 i antall år:

$$\underline{t_2} = \tilde{Q}^* \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P} \right) \quad (40)$$

$$= 14\,593 \left(\frac{1}{230\,000} - \frac{1}{500\,000} \right) \text{ år} = \underline{\underline{0.0343 \text{ år}}} \quad (41)$$

Oppgitt i antall dager: ²

$$\underline{\underline{t_2}} = 0.0343 \cancel{\text{år}} \cdot 365 \frac{\text{dager}}{\cancel{\text{år}}} = \underline{\underline{12.5 \text{ dager}}} \quad (42)$$

■

²Man behøver ikke ha med benevning i mellomregningen. Kun i sluttvaret. Grunnen til at jeg likevel har med benevning i mellomregningen her i løsningsforslaget er bare for å illustrere at benevningen stemmer.

Oppgave 3: (logistikk og økonomi – følsomhetsanalyse)

- a) Forholdet $K(Q_{\text{real}}^*)/K(\tilde{Q}^*)$ overstiger ikke 1.05 når

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \leq 1.05 \quad (43)$$

Vi får:

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \leq 1.05 \quad \Bigg| \cdot 2 \quad (44)$$

$$z + \frac{1}{z} \leq 2.1 \quad \Bigg| \cdot z \quad (45)$$

$$z^2 + 1 \leq 2.1z \quad (46)$$

som gir:

$$\underline{\underline{z^2 - 2.1z + 1 \leq 0}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (47)$$

- b) Dersom vi skal faktorisere en 2. gradsligning så må vi finne nullpunktene. De finnes ved å bruke ABC -formelen. I vårt tilfelle, se lign.(47), er:

$$a = 1 \quad , \quad b = -2.1 \quad , \quad c = 1 \quad (48)$$

Dermed:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} \quad (49)$$

$$z_1 = \frac{-(-2.1) - \sqrt{(-2.1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \quad , \quad z_2 = \frac{-(-2.1) + \sqrt{(-2.1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \quad (50)$$

$$z_1 = \frac{2.1 - \sqrt{0.41}}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{2.1 + \sqrt{0.41}}{2} \quad (51)$$

$$\underline{z_1 = 0.73} \quad , \quad \underline{z_2 = 1.37} \quad (52)$$

Når vi kjenner nullpunktene så kan vi også faktorisere $z^2 - 2.1z + 1 \leq 0$:

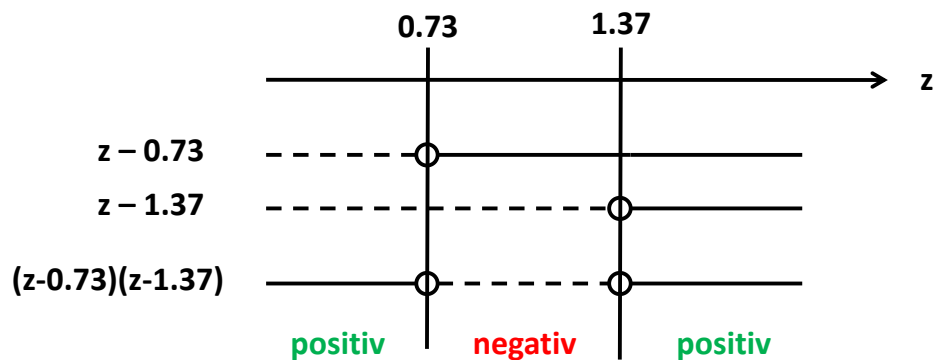
$$z^2 - 2.1z + 1 \leq 0 \quad (53)$$

$$a(z - z_1)(z - z_2) \leq 0 \quad (54)$$

$$\underline{\underline{(z - 0.73)(z - 1.37) \leq 0}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (55)$$

hvor $a = 1$ i vårt tilfelle.

- c) Fortegnsskjema for $(z - 0.73)(z - 1.37)$:



Figur 1: Fortegnsskjema for $(z - 0.73)(z - 1.37)$.

Ut fra fortegnsskjemaet ser vi at $z^2 - 2.1z + 1 \leq 0$, dvs. **negativ**, når:

$$\underline{\underline{0.73 \leq z \leq 1.37}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (56)$$

- d) At det virkelige optimale kvantumet Q_{real}^* er 20 % større enn $\tilde{Q}^*$ betyr:

$$z = 1.2 \quad (57)$$

Denne z -verdien **ligger innenfor** intervallet i lign.(56), dvs. oppfyller $0.73 \leq z \leq 1.37$, og oppfyller dermed også ulikheten

$$\frac{K(Q_{\text{real}}^*)}{K(\tilde{Q}^*)} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \leq 1.05 \quad (58)$$

Derfor vil Norsk Hydro bomme med mindre enn 5 % på lager- og oppstartskostnadene $K(Q)$ dersom de bruker Q_{real}^* istedet for $\tilde{Q}^*$.

■

Oppgave 4: (økonomi)

a) Strømforbruket i år 2022 er:

$$\underline{a_{12}} = \textcolor{red}{b} 1.02^{12} \quad (59)$$

$$= \textcolor{red}{5} \cdot 10^9 \cdot 1.02^{12} \text{ kWh} = \underline{6.34 \cdot 10^9 \text{ kWh}} \quad (60)$$

Strømforbruk i 2022 er $\underline{a_{12} = 6.34 \text{ milliarder kWh}}$.

b) Rekken $a_i = b1.02^i$ er på formen $\textcolor{red}{a}_{i+1} = \textcolor{red}{k}a_i$, hvor k = en konstant ($k = 1.02$ i vårt tilfelle). Derfor er det en geometrisk rekke.

c) Summen av en geometrisk rekke er:³

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (61)$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.02$ og $a_1 = \textcolor{blue}{b} 1.02$. Dette setter vi inn i lign.(61):

$$\underline{\underline{S_n^{\text{forbruk}}}} \stackrel{\text{lign. (61)}}{=} \textcolor{blue}{a}_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (62)$$

$$= \textcolor{blue}{b} 1.02 \frac{1.02^n - 1}{1.02 - 1} = \frac{\textcolor{red}{1.02}}{\textcolor{red}{1.02} - 1} b (1.02^n - 1) \quad (63)$$

$$= \underline{\underline{\textcolor{red}{51} b (1.02^n - 1)}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (64)$$

³Se formelsamlingen dersom du ikke husker formelen i hodet.

- d) Formelen i oppgave 4c viser det totale strømforbruket etter n år. Derfor kan vi bruke nettopp denne formelen med $n = 10$:

$$\underline{S_{10}^{\text{forbruk}}} = 51 \cdot b (1.02^{10} - 1) \quad (65)$$

$$= 51 \cdot 5 \cdot 10^9 (1.02^{10} - 1) \text{ kWh} = \underline{5.58 \cdot 10^{10} \text{ kWh}} \quad (66)$$

Norsk Hydro sitt samlede strømforbruk er $\underline{S_{10}^{\text{forbruk}}} = 55.8 \text{ milliarder kWh.}$

- e) Renten R_n^{serie} som Norsk Hydro må betale med en nedbetalingstid på $n = 20$ år er:

$$\underline{R_{20}^{\text{serie}}} = K_0 r \frac{n+1}{2} \quad (67)$$

$$= 250 \cdot 10^6 \cdot 0.028 \frac{20+1}{2} \text{ NOK} = \underline{7.35 \cdot 10^7 \text{ NOK}} \quad (68)$$

Renten som Norsk Hydro må betale er $\underline{R_{20}^{\text{serie}}} = 73.5 \text{ millioner NOK.}$

- f) Norsk Hydro har spart inn investeringskostnadene K_0 og rentekostnaden R_{20}^{serie} som et resultat av reduserte strømkostnader ΔK_n når:

$$\Delta K_n = R_{20}^{\text{serie}} + K_0 \quad (69)$$

Setter inn uttrykkene for ΔK_n og S_n^{forbruk} på venste side:

$$0.1 p S_n^{\text{forbruk}} = K_0 + R_{20}^{\text{serie}} \quad (70)$$

$$0.1 p 51 b (1.02^n - 1) = K_0 + R_{20}^{\text{serie}} \quad \left| \cdot \frac{1}{0.1 p 51 b} \right. \quad (71)$$

$$1.02^n - 1 = \frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{0.1 p 51 b} \quad (72)$$

$$1.02^n = \frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1 \quad (73)$$

siden $0.1 \cdot 51 = 5.1$.

For å “jekke ned” eksponenten “ n ” så tar vi “ $\ln$ ” på begge sider av ligningen:

$$\ln(1.02^n) = \ln\left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1\right) \quad (74)$$

$$n \ln 1.02 = \ln\left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1\right) \quad (75)$$

hvor vi har brukt regnereglen $\ln a^n = n \ln a$.

Dermed: ved å dele på “ $\ln 1.02$ ” på begge sider at lign.(75) så får vi:

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln\left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1\right)}{\ln 1.02}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (76)$$

■

Kontinuasjonseksamen 2017

LØSNING: Eksamen 8. juni 2018

“MAT100 Matematikk”, konteeksamen

a) Regner ut:

i) $-5^2 = -5 \cdot 5 = \underline{\underline{-25}}$ (altså negativ verdi)

ii) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = \underline{\underline{25}}$ (altså positiv verdi)

b) Regn ut: (med litt mellomregning)

$$\frac{(4 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{-3})}{(6 \cdot 10^{-6})} = \frac{4 \cdot 3}{6} \cdot 10^{5-3+6} = \underline{\underline{2 \cdot 10^8}} \quad (1)$$

c) Regn ut:

$$\frac{2x-5}{x-1} = 1 \quad \Bigg| \cdot (x-1) \quad (2)$$

$$2x-5 = 1 \cdot (x-1) \quad (3)$$

$$2x-x = -1+5 \quad (4)$$

$$\underline{\underline{x=4}} \quad (5)$$

d) Regn ut: (med litt mellomregning)

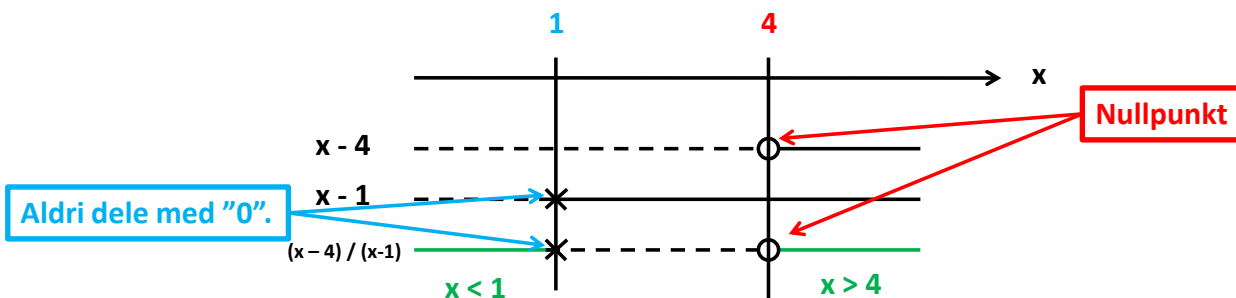
$$\frac{2x-5}{x-1} > 1 \quad (\text{Kan ikke multiplisere med "x-1" siden fortegnet er ukjent}) \quad (6)$$

$$\frac{2x-5}{x-1} - 1 > 0 \quad (\text{Samle alle ledd på samme side}) \quad (7)$$

$$\frac{2x-5}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} > 0 \quad (\text{Fellesnevner}) \quad (8)$$

$$\underline{\frac{x-4}{x-1} > 0} \quad (9)$$

Denne ulikheten løses med et fortegnsskjema/(drøftingsskjema):



Figur 1: Fortegnsskjema for ulikhet i lign.(9).

og løsningen er ¹

$$\underline{\underline{x < 1 \quad \text{eller} \quad x > 4}} \quad (10)$$

¹Altså: det er uendelig mange løsninger av ulikheten, mens tilsvarende ligning hadde kun **en** løsning, se lign.(5).

e) Deriverer:

$$\underline{\underline{f'(x)}} = (x^2 + 2)' = \underline{\underline{2x}} \quad (11)$$

f) Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{d f(x)}{dx} \quad (12)$$

$$= \frac{d}{dx} \underbrace{\left(\overbrace{(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}}^{=u} \right)}_{=g(u)} \quad (13)$$

$$= \frac{d g(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (14)$$

$$= g'(u) \cdot u' \quad (15)$$

$$= (u^{\frac{1}{2}})' \cdot (x^2 + 2)' \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}} 2x \quad (18)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad (19)$$

g) Skriver om via “kjelleromskrivningen”:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f'(x)}} = 1 + (-1)x^{-2} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{x^2}}} \quad (20)$$

h) Den deriverte av $TC(Q)$:

$$\underline{\underline{TC(Q)}} = D \cdot C + \frac{Q}{2}H + \frac{D}{Q}S = \underline{\underline{D \cdot C + \frac{H}{2}Q + D \cdot SQ^{-1}}} \quad (21)$$

og deriverer deretter med henyn på Q :

$$\underline{\underline{TC'(Q)}} = \frac{H}{2} + D \cdot S(-1)Q^{-2} = \underline{\underline{\frac{H}{2} - \frac{D \cdot S}{Q^2}}} \quad (22)$$

i) %-vis endring fra $P_{\text{start}} = 2\,000$ NOK til $P_{\text{slutt}} = 2\,200$ NOK:

$$\underline{\underline{\% \text{-vis endring}}} = \frac{P_{\text{slutt}} - P_{\text{start}}}{P_{\text{start}}} \cdot 100 \% = \frac{2\,200 - 2\,000}{2\,000} \cdot 100 \% = \underline{\underline{10 \%}} \quad (23)$$

altså en økning siden endringen er positiv.

■

Oppgave 2: (logistikk)

- a) Etterspørselen er oppgitt til å være $d(t) = Dt$ og produksjonen er oppgitt til å være $q(t) = \alpha t$. Vi setter dette inn i balanseligningen:

$$\underline{\underline{i(t)}} = \textcolor{red}{q(t)} - \textcolor{blue}{d(t)} + i_0 \quad (24)$$

$$= \textcolor{red}{\alpha t} - \textcolor{blue}{Dt} + i_0 = \underline{\underline{(\alpha - D)t + i_0}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (25)$$

- b) Tanken er tom når:

$\textcolor{red}{i(t_{\text{tom}})} = 0 \quad (26)$

Altså vi må finne nullpunktet til $i(t)$.

Men fra oppgave **2a** har vi at: $i(t) = (\alpha - D)t + i_0$.

Dermed kan vi løse med hensyn på t_0 alene:

$$(\alpha - D)t_{\text{tom}} + i_0 = 0 \quad (27)$$

$$(\alpha - D)t_{\text{tom}} = -i_0 \quad (28)$$

$$\underline{\underline{t_{\text{tom}} = -\frac{i_0}{\alpha - D}}} \quad (29)$$

Helt til slutt setter vi inn tall:

$$\underline{\underline{t_{\text{tom}}}} = -\frac{i_0}{\alpha - D} \quad (30)$$

$$= -\frac{10\,000}{2 - 3.5} \text{ timer} = \underline{\underline{6\,666.7 \text{ timer}}} \quad (31)$$

Etter $6\,666.7 / (\underbrace{24 \cdot 7 \cdot 4}_{\text{\# timer i mnd.}}) \approx \underline{\underline{9.9 \text{ måneder}}}$ så er tanken tomt.

c) Tanken er full når:

$$\boxed{i(t_{\text{full}}) = i_{\text{max}} \quad (32)}$$

Altså vi må finne t alene:

$$i(t_{\text{full}}) = i_{\text{max}} \quad (33)$$

$$(\alpha - D)t_{\text{full}} + i_0 = i_{\text{max}} \quad (34)$$

$$(\alpha - D)t_{\text{full}} = i_{\text{max}} - i_0 \quad (35)$$

$$\underline{t_{\text{full}} = \frac{i_{\text{max}} - i_0}{\alpha - D}} \quad (36)$$

Helt til slutt setter vi inn tall:

$$\underline{t_{\text{full}}} = \frac{i_{\text{max}} - i_0}{\alpha - D} \quad (37)$$

$$= \frac{20\,000 - 10\,000}{4 - 3.5} \text{ timer} = \underline{20\,000 \text{ timer}} \quad (38)$$

Etter $20\,000 / (\underbrace{24 \cdot 7 \cdot 52}_{\text{\# antall timer i året}}) \approx \underline{\underline{2.3 \text{ år så er tanken full.}}}$ ²

²Selv om det tar hele 2.3 år før tanken er full så vil antall tonn slurry på lager i tanken i gjennomsnitt være altfor høyt. Det vil forårsake høye lagerkostnader.

d) Argumentasjon: (med ord)

For å unngå et tanken blir tom eller at tanken blir full så bør Hustadmarmor justere produksjonshastigheten α slik at den akkurat tilsvarer etterspørselen:

$$\underline{\underline{\alpha}} = D = 3.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}} \quad (39)$$

Via oppgitt lign.: (med matematikk)

Fra lign.(25) ser vi at:

$$i(t) = \underbrace{(\alpha - D)}_{= 0} t + i_0 = i_0 = 10\,000 \text{ tonn} \quad (40)$$

dersom $\alpha = D$ så er stigningstallet null, og tanken blir verken tom eller full.

- e) Vi skal finne produksjonshastigheten α som må til for at nivået i tanken skal øke fra $i_0 = 10\,000$ tonn til $i_s = 12\,000$ tonn slurry i løpet av $t = 1000$ timer.

$$\boxed{i(t) = i_0 + i_s} \quad (41)$$

Fra oppgave **2a** har vi at $i(t) = (\alpha - D)t + i_0$. Dermed:

$$(\alpha - D)t + i_0 = i_s \quad (42)$$

Løser med hensyn på α alene:

$$(\alpha - D)t = i_s - i_0 \quad (43)$$

$$(\alpha - D)t = i_s - i_0 \quad (44)$$

$$\alpha - D = \frac{i_s - i_0}{t} \quad (45)$$

$$\underline{\alpha = \frac{i_s - i_0}{t} + D} \quad (46)$$

Helt til slutt setter vi inn tall:

$$\underline{\alpha} = \frac{i_s - i_0}{t} + D \quad (47)$$

$$= \left(\frac{2\,000}{1000} + 3.5 \right) \frac{\text{tonn}}{\text{time}} = \underline{\underline{5.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}}} \quad (48)$$

■

Oppgave 3: (økonomi og finansmatematikk)

- a) Dette er et annuitetslån.

Terminbeløpet K er da gitt ved formelen som oppgitt i oppgaven:

$$\underline{\underline{K}} = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (49)$$

$$= \frac{400\,000 \cdot 0.03}{1 - \frac{1}{(1+0.03)^{15}}} \text{ NOK/år} = \underline{\underline{33\,506 \text{ NOK/år}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (50)$$

- b) Bruker formelen som oppgitt.

Men vi må bruke K_1 istedet for K og K_{01} istedet for K_0 .

Dermed:

$$K_1 = \frac{K_{01} r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (51)$$

Løser med hensyn på K_{01} alene:

$$K_1 = \frac{K_{01} r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad \Bigg| \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) \quad (52)$$

$$K_1 \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) = K_{01} r \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{r} \quad (53)$$

$$K_{01} = \frac{K_1}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) \quad (54)$$

Til slutt setter vi inn tall: ³

$$\underline{\underline{K_{01}}} = \frac{K_1}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{n_1}} \right) \quad (55)$$

$$= \frac{16\,753}{0.03} \left(1 - \frac{1}{(1+0.03)^6} \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{90\,756 \text{ NOK}}} \quad (56)$$

c) Nåverdien K_{02} av lånet i år 2020 er:

$$\underline{\underline{K_{02}}} = K_0 - K_{01} \quad (57)$$

$$= (400\,000 - 90\,756) \text{ NOK} = \underline{\underline{309\,244 \text{ NOK}}} \quad (58)$$

Når man skal regne ut nåverdien av dette beløpet et annet år enn 2020 så må man bruke renteformelen:

$$\underline{\underline{X_{02}}} = K_{02} (1+r)^{n_1} \quad (59)$$

$$= 309\,244 (1+0.03)^6 \text{ NOK} = \underline{\underline{369\,254 \text{ NOK}}} \quad (60)$$

³Formelen i lign.(55) står i formelsmlingen. Dersom man bruker formelsamlingen istedet så slipper man å gjøre algebraen på forrige side. Begge tilnærmelser gir full score.

- d) Dette er et annuitetslån.
Terminbeløpet K_2 er da gitt ved en formel i formelsamlingen med nåverdien X_{02} fra oppgave **2c** og $n_2 = 9$:

$$\underline{\underline{K_2}} = \frac{X_{02} r}{1 - \frac{1}{(1+r)^{n_2}}} \quad (61)$$

$$= \frac{369\,254 \cdot 0.03}{1 - \frac{1}{(1+0.03)^9}} \text{ NOK/år} = \underline{\underline{47\,424 \text{ NOK/år}}} \quad (62)$$



Oppgave 4: (økonomi)

a) Nytten for $x = 60$ og $y = 25$:

$$\underline{\underline{U(60, 25)}} = 2 \ln(60) + 15 \ln(25) = \underline{\underline{56.47}} \quad (63)$$

b) Med $x = 60$ og $y = 25$:

$$\underline{\underline{p_x x + p_y y}} = (15 \cdot 60 + 250 \cdot 25) \text{ NOK/måned} = \underline{\underline{7\,150 \text{ NOK/måned}}} \quad (64)$$

som er mindre enn den samlede konsumutgiften per måned, $m = 8500$ NOK/måned.
Derfor er $x = 60$ og $y = 25$ innenfor budsjettet.

c) Dette er et maksimeringsproblem under en **bibetingelse**. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikatorer.

Av åpenbare grunner er $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Dessuten er **bibetingelsen**:

$$g(x, y) = 15x + 250y = 8500 \quad (65)$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$F(x, y) = U(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (66)$

dvs.

$$F(x, y) = 2 \ln(x) + 15 \ln(y) - \lambda (15x + 250y) \quad (67)$$

De stasjonære punktene til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (69)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \ln(x) + 15 \ln(y) \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (15x + 250y) = 0 \quad (70)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(2 \ln(x) + 15 \ln(y) \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (15x + 250y) = 0 \quad (71)$$

$$\frac{2}{x} - 15\lambda = 0 \quad (72)$$

$$\frac{15}{y} - 250\lambda = 0 \quad (73)$$

$$\frac{2}{15x} - \lambda = 0 \quad (74)$$

$$\frac{15}{250y} - \lambda = 0 \quad (75)$$

De to ligningene i lign.(73) og (75) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsetningsmetoden”⁴. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(73) og (75):

$$\lambda = \lambda \quad (76)$$

$$\frac{2}{15x} = \frac{15}{250y} \quad (77)$$

⁴Med “innsetningsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

og størrelsen λ er eliminert. Lign.(77) kan vi snu på hodet: ⁵

$$\frac{15x}{2} = \frac{250y}{15} \quad (78)$$

$$\underline{x = \frac{20}{9}y} \quad (79)$$

Innsatt i budsjettligningen i lign.(65):

$$15x + 250y = 8500 \quad (80)$$

$$15\left(\frac{20}{9}y\right) + 250y = 8500 \quad (81)$$

$$283.33y = 8500 \quad (82)$$

$$\underline{y = 30} \quad (83)$$

Til slutt setter vi dette svare inn i lign.(79)

$$\underline{x = \frac{20}{9}30 = 66.67} \quad (84)$$

For å maksimere nytten $U(x, y)$ må studenten kjøpe

$$\underline{\underline{x = 66.67}} \quad \text{liter bensin per måned} \quad (85)$$

og leie en hybel som er

$$\underline{\underline{y = 30}} \quad \text{antall kvadratmeter stor hybel} \quad (86)$$

⁵Ligningen $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ kan man snu på hodet $\frac{8}{3} = \frac{24}{9}$.

d) Med $x = 66.67$ og $y = 30$:

$$\underline{p_x x + p_y y} = (15 \cdot 66.67 + 250 \cdot 30) \text{ NOK/måned} = \underline{8500 \text{ NOK/måned}} \quad (87)$$

altså hele budsjettet brukes.

■

Hovedeksamen 2018

LØSNING: Eksamen 21. des. 2017

“MAT100 Matematikk”

a) Alle størrelsene H , D og S er positive. Dermed:

- i) Q øker $\Rightarrow$ $HQ/2$ øker
- ii) Q øker $\Rightarrow$ DS/Q minker

b) Perioden t_0 er definert ved nullpunktet:

$$i(t_0) = 0 \quad (1)$$

Siden $i(t) = Q^* - Dt$ så får vi:

$$Q^* - Dt = 0 \quad (2)$$

$$Q^* = Dt \quad (3)$$

$$\frac{Q^*}{D} = \frac{Dt}{D} \quad (4)$$

som gir

$$\underline{\underline{t_0 = \frac{Q^*}{D}}} \quad (5)$$

- c) Bruker den oppgitt EOQ -formelen og setter inn tallene:

$$\underline{Q^*} = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \quad (6)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 230\,000 \cdot 1\,250\,000}{5\,000}} \text{ tonn} = \underline{10\,724 \text{ tonn}} \quad (7)$$

dvs. det må produseres $Q^* = 10\,724$ tonn aluminium i hver produksjonsserie

- d) Bruker formelen $t_0 = Q^*/D$ fra oppgave 1b og setter inn tall: ¹

$$\underline{t_0} = \frac{Q^*}{D} \quad (8)$$

$$= \frac{10\,724 \text{ tonn}}{230\,000 \frac{\text{tonn}}{\text{år}}} = \underline{0.0466 \text{ år}} \quad (9)$$

som skal oppgis i antall dager:

$$\underline{t_0} = 0.0466 \cdot 365 \text{ dager} = \underline{17 \text{ dager}} \quad (10)$$

altså det tar 17 dager fra lageret er fullt til lageret er tomt.

■

¹Man må ikke ha med benevning i mellomregningene i denne oppgaven slik som i lign.(9). Grunnen til at det likevel er tatt med i dette løsningsforslaget er bare for å vise at benevningen stemmer.

Oppgave 2: (logistikk og økonomi - utvidet EOQ -formel)

a) **Optimum** av kostnadsfunksjonen $K(Q)$ inntreffer når **stigningstallet = 0**:

$$\text{stigningstallet til } K(Q) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) Q + \frac{DS}{Q} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) Q + DS Q^{-1} \right) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) + DS (-1) Q^{-1-1} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) - \frac{DS}{Q^2} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) = \frac{DS}{Q^2} \quad \left| \cdot Q^2 \right. \quad (17)$$

$$Q^2 \frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) = DS \quad \left| \cdot \frac{1}{\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right)} \right. \quad (18)$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right)} \quad \text{“oppe-nede metoden”} \quad (19)$$

$$Q^2 = \frac{2DS}{H \left(1 - \frac{D}{P} \right)} \quad (20)$$

Tar kvadratroten på begge sider av lign.(20) og får:

$$\underline{\underline{Q = \sqrt{\frac{2DS}{H \left(1 - \frac{D}{P} \right)}}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (21)$$

b) Den 1. deriverte av $K(Q)$ fant vi i oppgave **2a**, se lign.(16):

$$\underline{\underline{\frac{dK(Q)}{dQ}}} = \frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) Q + DSQ^{-1} \right) = \underline{\underline{\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) - DSQ^{-2}}} \quad (22)$$

Den 2. deriverte finner vi ved å derivere en gang til:

$$\underline{\underline{\frac{d^2K(Q)}{dQ^2}}} = \frac{d}{dQ} \left(\frac{dK(Q)}{dQ} \right) \quad (23)$$

$$= \frac{d}{dQ} \left(\frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P} \right) - DSQ^{-2} \right) \quad (24)$$

$$= 0 - DS(-2)Q^{-2-1} \quad (25)$$

$$= 2DSQ^{-3} = \underline{\underline{\frac{2DS}{Q^3}}} \quad (26)$$

Siden D , S og Q alle er positive størrelser så er også $\underline{\underline{\frac{d^2K(Q)}{dQ^2}}} > 0$,
dvs. Q^* representerer et minimum for $K(Q)$.

c) Tiden t_1 er bestemt av skjæringspunktet mellom $i_{\text{g}}(t)$ og $i_{\text{r}}(t)$:

$$i_{\text{g}}(t_1) = i_{\text{r}}(t_1) \quad (27)$$

Uttrykkene for $i_{\text{g}}(t)$ og $i_{\text{r}}(t)$ er oppgitt i oppgaven.
Vi setter inn:

$$(P - D)t_1 = \tilde{Q}^* - Dt_1 \quad (28)$$

$$Pt_1 - \cancel{Dt_1} = \tilde{Q}^* - \cancel{Dt_1} \quad (29)$$

$$Pt_1 = \tilde{Q}^* \quad (30)$$

som gir

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{\tilde{Q}^*}{P}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (31)$$

- d)** Fra figuren i oppgaveteksten ser vi at: (også oppgitt i fotnoten i oppgaven)

$$t_2 = \tilde{t}_0 - t_1 \quad (32)$$

Tiden t_1 fant vi i oppgave **2c**. Vi må finne $\tilde{t}_0$.

Tiden $\tilde{t}_0$ er nullpunktet for $i_{\text{r}}(t)$, dvs.:

$$i_{\text{r}}(\tilde{t}_0) = 0 \quad (33)$$

$$\tilde{Q}^* - D\tilde{t}_0 = 0 \quad (34)$$

$$\tilde{Q}^* = D\tilde{t}_0 \quad (35)$$

som gir

$$\underline{\underline{\tilde{t}_0 = \frac{\tilde{Q}^*}{D}}} \quad (36)$$

Setter lign.(36) og (31) inn i $t_2 = \tilde{t}_0 - t_1$:

$$\underline{\underline{t_2}} = \tilde{t}_0 - t_1 \quad (37)$$

$$= \frac{\tilde{Q}^*}{D} - \frac{\tilde{Q}^*}{P} \quad (38)$$

$$= \underline{\underline{\tilde{Q}^* \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P} \right)}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (39)$$

hvor vi har faktorisert i den siste ligningen.

- e) Siden P og D er oppgitt i år så er også t_2 i antall år:

$$\underline{t_2} = \tilde{Q}^* \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P} \right) \quad (40)$$

$$= 14\,593 \left(\frac{1}{230\,000} - \frac{1}{500\,000} \right) \text{ år} = \underline{\underline{0.0343 \text{ år}}} \quad (41)$$

Oppgitt i antall dager: ²

$$\underline{\underline{t_2}} = 0.0343 \cancel{\text{år}} \cdot 365 \frac{\text{dager}}{\cancel{\text{år}}} = \underline{\underline{12.5 \text{ dager}}} \quad (42)$$

■

²Man behøver ikke ha med benevning i mellomregningen. Kun i sluttvaret. Grunnen til at jeg likevel har med benevning i mellomregningen her i løsningsforslaget er bare for å illustrere at benevningen stemmer.

Oppgave 3: (logistikk og økonomi – følsomhetsanalyse)

- a)** Forholdet $K(Q_{\text{real}}^*)/K(\tilde{Q}^*)$ overstiger ikke 1.05 når

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \leq 1.05 \quad (43)$$

Vi får:

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \leq 1.05 \quad \Bigg| \cdot 2 \quad (44)$$

$$z + \frac{1}{z} \leq 2.1 \quad \Bigg| \cdot z \quad (45)$$

$$z^2 + 1 \leq 2.1z \quad (46)$$

som gir:

$$\underline{\underline{z^2 - 2.1z + 1 \leq 0}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (47)$$

- b)** Dersom vi skal faktorisere en 2. gradsligning så må vi finne nullpunktene. De finnes ved å bruke *ABC*-formelen. I vårt tilfelle, se lign.(47), er:

$$a = 1 \quad , \quad b = -2.1 \quad , \quad c = 1 \quad (48)$$

Dermed:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a} \quad (49)$$

$$z_1 = \frac{-(-2.1) - \sqrt{(-2.1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \quad , \quad z_2 = \frac{-(-2.1) + \sqrt{(-2.1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \quad (50)$$

$$z_1 = \frac{2.1 - \sqrt{0.41}}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{2.1 + \sqrt{0.41}}{2} \quad (51)$$

$$\underline{z_1 = 0.73} \quad , \quad \underline{z_2 = 1.37} \quad (52)$$

Når vi kjenner nullpunktene så kan vi også faktorisere $z^2 - 2.1z + 1 \leq 0$:

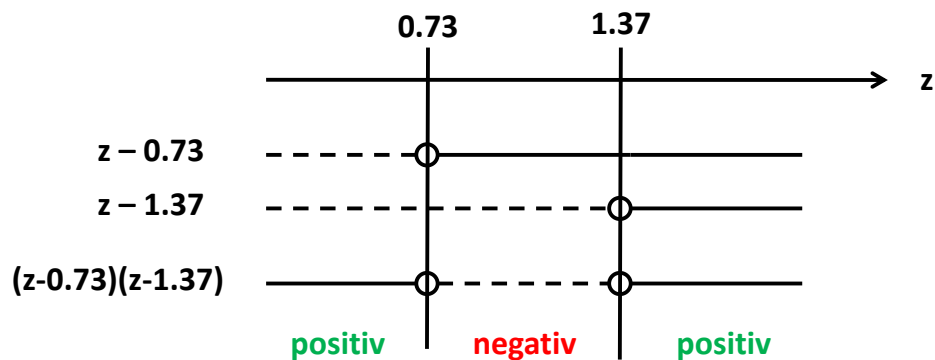
$$z^2 - 2.1z + 1 \leq 0 \quad (53)$$

$$a(z - z_1)(z - z_2) \leq 0 \quad (54)$$

$$\underline{\underline{(z - 0.73)(z - 1.37) \leq 0}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (55)$$

hvor $a = 1$ i vårt tilfelle.

- c) Fortegnsskjema for $(z - 0.73)(z - 1.37)$:



Figur 1: Fortegnsskjema for $(z - 0.73)(z - 1.37)$.

Ut fra fortegnsskjemaet ser vi at $z^2 - 2.1z + 1 \leq 0$, dvs. **negativ**, når:

$$\underline{\underline{0.73 \leq z \leq 1.37}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (56)$$

- d) At det virkelige optimale kvantumet Q_{real}^* er 20 % større enn $\tilde{Q}^*$ betyr:

$$z = 1.2 \quad (57)$$

Denne z -verdien **ligger innenfor** intervallet i lign.(56), dvs. oppfyller $0.73 \leq z \leq 1.37$, og oppfyller dermed også ulikheten

$$\frac{K(Q_{\text{real}}^*)}{K(\tilde{Q}^*)} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \leq 1.05 \quad (58)$$

Derfor vil Norsk Hydro bomme med mindre enn 5 % på lager- og oppstartskostnadene $K(Q)$ dersom de bruker Q_{real}^* istedet for $\tilde{Q}^*$.

■

Oppgave 4: (økonomi)

a) Strømforbruket i år 2022 er:

$$\underline{a_{12}} = \textcolor{red}{b} 1.02^{12} \quad (59)$$

$$= \textcolor{red}{5} \cdot 10^9 \cdot 1.02^{12} \text{ kWh} = \underline{6.34 \cdot 10^9 \text{ kWh}} \quad (60)$$

Strømforbruk i 2022 er $\underline{a_{12} = 6.34 \text{ milliarder kWh}}$.

b) Rekken $a_i = b1.02^i$ er på formen $\textcolor{red}{a}_{i+1} = \textcolor{red}{k}a_i$, hvor k = en konstant ($k = 1.02$ i vårt tilfelle). Derfor er det en geometrisk rekke.

c) Summen av en geometrisk rekke er:³

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (61)$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.02$ og $\textcolor{blue}{a}_1 = \textcolor{blue}{b} 1.02$. Dette setter vi inn i lign.(61):

$$\underline{\underline{S_n^{\text{forbruk}}}} \stackrel{\text{lign. (61)}}{=} \textcolor{blue}{a}_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (62)$$

$$= \textcolor{blue}{b} 1.02 \frac{1.02^n - 1}{1.02 - 1} = \frac{\textcolor{red}{1.02}}{\textcolor{red}{1.02} - 1} b (1.02^n - 1) \quad (63)$$

$$= \underline{\underline{\textcolor{red}{51} b (1.02^n - 1)}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (64)$$

³Se formelsamlingen dersom du ikke husker formelen i hodet.

- d) Formelen i oppgave 4c viser det totale strømforbruket etter n år. Derfor kan vi bruke nettopp denne formelen med $n = 10$:

$$\underline{S_{10}^{\text{forbruk}}} = 51 \cdot b (1.02^{10} - 1) \quad (65)$$

$$= 51 \cdot 5 \cdot 10^9 (1.02^{10} - 1) \text{ kWh} = \underline{5.58 \cdot 10^{10} \text{ kWh}} \quad (66)$$

Norsk Hydro sitt samlede strømforbruk er $\underline{S_{10}^{\text{forbruk}}} = 55.8 \text{ milliarder kWh}$.

- e) Renten R_n^{serie} som Norsk Hydro må betale med en nedbetalingstid på $n = 20$ år er:

$$\underline{R_{20}^{\text{serie}}} = K_0 r \frac{n+1}{2} \quad (67)$$

$$= 250 \cdot 10^6 \cdot 0.028 \frac{20+1}{2} \text{ NOK} = \underline{7.35 \cdot 10^7 \text{ NOK}} \quad (68)$$

Renten som Norsk Hydro må betale er $\underline{R_{20}^{\text{serie}}} = 73.5 \text{ millioner NOK}$.

- f) Norsk Hydro har spart inn investeringskostnadene K_0 og rentekostnaden R_{20}^{serie} som et resultat av reduserte strømkostnader ΔK_n når:

$$\Delta K_n = R_{20}^{\text{serie}} + K_0 \quad (69)$$

Setter inn uttrykkene for ΔK_n og S_n^{forbruk} på venste side:

$$0.1 p S_n^{\text{forbruk}} = K_0 + R_{20}^{\text{serie}} \quad (70)$$

$$0.1 p 51 b (1.02^n - 1) = K_0 + R_{20}^{\text{serie}} \quad \left| \cdot \frac{1}{0.1 p 51 b} \right. \quad (71)$$

$$1.02^n - 1 = \frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{0.1 p 51 b} \quad (72)$$

$$1.02^n = \frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1 \quad (73)$$

siden $0.1 \cdot 51 = 5.1$.

For å “jekke ned” eksponenten “ n ” så tar vi “ $\ln$ ” på begge sider av ligningen:

$$\ln(1.02^n) = \ln\left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1\right) \quad (74)$$

$$n \ln 1.02 = \ln\left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1\right) \quad (75)$$

hvor vi har brukt regnereglen $\ln a^n = n \ln a$.

Dermed: ved å dele på “ $\ln 1.02$ ” på begge sider at lign.(75) så får vi:

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln\left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1\right)}{\ln 1.02}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (76)$$

■

Kontinuasjonseksamen 2018

LØSNING: Eksamen 13. feb. 2019

“MAT100 Matematikk”

- a) Løser ut parentesene og samle like ledd: ¹

$$\underline{\underline{(5a + 2b)^2}} = (5a)^2 + 5a \cdot 2b + 2b \cdot 5a + (2b)^2 = \underline{\underline{25a^2 + 20ab + 4b^2}} \quad (1)$$

- b) Trekker sammen og forenkler mest mulig: (må finne fellesnevner)

$$\underline{\underline{\frac{x+2}{3} + \frac{1-3x}{4}}} = \frac{x+2}{3} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1-3x}{4} \cdot \frac{3}{3} \quad (2)$$

$$= \frac{(x+2)4}{3 \cdot 4} + \frac{(1-3x)3}{4 \cdot 3} = \frac{(x+2)4 + (1-3x)3}{12} \quad (3)$$

$$= \frac{4x + 8 + 3 - 9x}{12} = \underline{\underline{\frac{11 - 5x}{12}}} \quad (4)$$

- c) Forkorter brøken: (bruker konjugatsetningen)

$$\underline{\underline{\frac{2a^2 - 2b^2}{3a + 3b}}} = \frac{2(a^2 - b^2)}{3(a+b)} = \frac{2\cancel{(a+b)}(a-b)}{3\cancel{(a+b)}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}(a-b)}} \quad (5)$$

¹Bruker “pilmotoden”.

d) Standardform:

$$0,000\,000\,093 = \underline{\underline{9,3 \cdot 10^{-8}}} \quad (6)$$

e) Løser ligningen:

$$\frac{2x-5}{x-1} = 1 \quad \Big| \cdot (x-1) \quad (7)$$

$$\frac{2x-5}{\cancel{(x-1)}} \cancel{(x-1)} = 1 \cdot (x-1) \quad (8)$$

$$2x - x = -1 + 5 \quad (9)$$

$$\underline{\underline{x = 4}} \quad (10)$$

f) Løser ulikheten:

$$\frac{2x-5}{x-1} > 1 \quad (\text{Kan ikke multiplisere med "x-1" siden fortegnet er ukjent}) \quad (11)$$

$$\frac{2x-5}{x-1} - 1 > 0 \quad (\text{Samle alle ledd på samme side}) \quad (12)$$

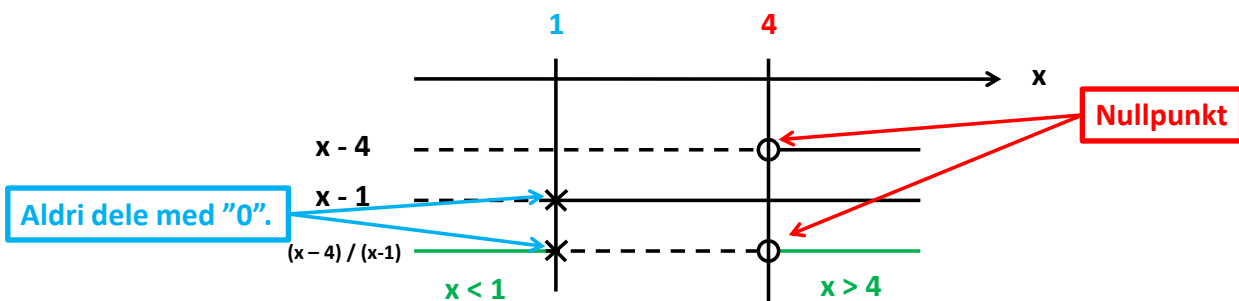
$$\frac{2x-5}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} > 0 \quad (\text{Fellesnevner}) \quad (13)$$

$$\frac{2x-5-(x-1)}{x-1} > 0 \quad (14)$$

$$\frac{2x-5-x+1}{x-1} > 0 \quad (15)$$

$$\underline{\underline{\frac{x-4}{x-1} > 0}} \quad (16)$$

Denne ulikheten løses med et fortegnsskjema/(drøftingsskjema):



Figur 1: Fortegnsskjema for lign.(16).

og løsningen er

$$\underline{\underline{x < 1 \quad \text{eller} \quad x > 4}} \quad (17)$$

■

Oppgave 2: (derivasjon)

a) Den deriverte av $f(x)$ mhp. x :

$$f(x) = \frac{2}{3x^3} = \frac{2}{3}x^{-3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{df(x)}{dx}}} = \frac{2}{3}(-3)x^{-3-1} = -\frac{2}{\underline{\underline{x^4}}} \quad (18)$$

b) Funksjon: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

Med kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 - 1$ kan vi definere den “ytre” funksjonen:

$$g(u) = u^{\frac{1}{3}} \quad (19)$$

Bruk kjerneregelen:

$$\underline{\underline{\frac{df(x)}{dx}}} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{dg(u)}{du} \frac{du}{dx} \quad (20)$$

$$= \frac{d}{du} \left(u^{\frac{1}{3}} \right) \frac{d}{dx} (x^2 - 1) \quad (21)$$

$$= \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}-1} 2x \quad (22)$$

$$= \frac{2x}{3} u^{-\frac{2}{3}} \quad (23)$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x}{3(x^2 - 1)^{2/3}}}} \quad (24)$$

c) Den deriverte av $f(x)$ mhp. x :²

$$f(x) = 7e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = 7e^x \quad (25)$$

d) Siden

$$\underline{f(x)} = \ln(7e^x) = \ln(7) + \ln(e^x) = \overbrace{\ln(7)}^{\text{konstant}} + x \quad (26)$$

så blir den deriverte:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 + 1x^{1-1} = \underline{\underline{1}} \quad (27)$$

e) Derivasjon av et produkt:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(x e^x \right) \quad (28)$$

$$= \frac{d}{dx} (x) e^x + x \frac{d}{dx} (e^x) \quad (29)$$

$$= e^x + x e^x \quad (30)$$

$$= \underline{\underline{e^x(1 + x)}} \quad (31)$$

²Husk at e^x er sin egen deriverte: $(e^x)' = e^x$.

f) Arealet er:

$$\text{areal} = \int_2^4 f(x) dx \quad (32)$$

hvor $f(x) = \frac{3}{x}$.

Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x)$ er:

$$F(x) = 3 \ln(x) + c \quad (33)$$

hvor c er en konstant.

Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(33).³

Når vi har den antideriverte $F(x)$ av funksjon $f(x)$ så kan vi regne ut integralet $\int_1^2 f(x) dx$ via *fundamentalsetningen* for integral:

$$\int_{\underline{\underline{2}}}^{\overline{\overline{4}}} f(x) dx = F(\overline{\overline{4}}) - F(\underline{\underline{2}}) \quad (34)$$

$$= 3 \ln(4) + c - \left(3 \ln(2) + c \right) \quad (35)$$

$$= 3 \left(\ln(4) - \ln(2) \right) \quad (36)$$

$$= 3 \ln \left(\frac{4}{2} \right) \quad (37)$$

$$= \underline{\underline{3 \ln(2)}} \quad (38)$$

■

³Husk at $\frac{d}{dx} \left(\ln(x) \right) = \frac{1}{x}$.

Oppgave 3: (logistikk)

- a) Etterspørselen av lampen i april 2019, dvs. d_4 , er:

$$\underline{d_4} = \textcolor{blue}{d_1} 0.6174^{4-1} \quad (39)$$

$$= \textcolor{blue}{86} \cdot 0.6174^3 = \underline{20.2 \text{ lamper}} \quad (40)$$

Det etterspørres 20 lamper i april 2019 ifølge modellen i oppgaven.

- b) Rekken $d_i = d_1 k^{i-1}$ er på formen $d_{i+1} = k d_i$, hvor $k =$ en konstant.⁴
Derfor er det en geometrisk rekke.

- c) Summen av en geometrisk rekke er: (se formelsamling)

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (41)$$

For vår rekke er kvotienten $k = 0.6174$, $a = d_1 = 86$ og $n = 8$.
Dette setter vi inn i lign.(41):

$$\underline{\underline{S_8}} \stackrel{\text{lign. (45)}}{=} \textcolor{blue}{d_1} \frac{\textcolor{red}{k}^8 - 1}{\textcolor{red}{k} - 1} \quad (42)$$

$$= \textcolor{blue}{86} \frac{0.6174^8 - 1}{0.6174 - 1} = \underline{\underline{220}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (43)$$

⁴ $k = 0.6174$ i vårt tilfelle.

- d) Dersom Glamox skal selge alle N lampene de første 8 månedene så betyr det at:

$$S_8 = N \quad (44)$$

hvor S_8 den samlede etterspørselen av den aktuelle lampen de 8 første månedene i 2019.

Denne samlede etterspørselen utgjør summen av en geometrisk rekke.

Formelen for summen av en geometrisk rekke finner vi i formelsamlingen.

Dermed:

$$S_8 = d_1 \frac{k^8 - 1}{k - 1} \quad (45)$$

Altså:

$$S_8 = N \quad (46)$$

$$d_1 \frac{k^8 - 1}{k - 1} = N \quad \left| \cdot \frac{1}{d_1} \right. \quad (47)$$

$$\frac{k^8 - 1}{k - 1} = \frac{N}{d_1} \quad \left| \cdot (k - 1) \right. \quad (48)$$

$$k^8 - 1 = \frac{N}{d_1} (k - 1) \quad (49)$$

$$k^8 - 1 = \frac{N}{d_1} k - \frac{N}{d_1} \quad (50)$$

som gir:

$$\underline{\underline{k^8 - \frac{N}{d_1} k + \frac{N}{d_1} - 1 = 0}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (51)$$

e) Oppgitt i oppgaven:

$$k = k_0 e^{-a p} \quad (52)$$

og løser med hensyn på prisen p alene:

$$k = k_0 e^{-a p} \quad \left| \cdot \frac{1}{k_0} \right. \quad (53)$$

$$\frac{k}{k_0} = e^{-a p} \quad \left| \ln \right. \quad (54)$$

$$\ln \left(\frac{k}{k_0} \right) = \ln \left(e^{-a p} \right) \quad (55)$$

$$\ln \left(\frac{k}{k_0} \right) = -a p \quad \left| \cdot \left(-\frac{1}{a} \right) \right. \quad (56)$$

$$-\frac{1}{a} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right) = p \quad (57)$$

altså

$$\underline{\underline{p = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right)}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (58)$$

- f) Med $N = 300$ og $d_1 = 86$ så vet vi, fra oppgaveteksten, at den konstante faktoren k er:

$$k = 0.74 \quad (59)$$

Dermed kan vi bruke lign.(58):

$$\underline{p} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right) \quad (60)$$

$$= -\frac{1}{0.00006496} \ln \left(\frac{0.74}{0.8} \right) \text{ NOK} = \underline{\underline{1200.15 \text{ NOK}}} \quad (61)$$

Dersom Glamox skal selge ut de 300 aktuelle lampene i løpet av de 8 første månedene i 2019 så må de sette prisen til 1200 NOK per lampe.

■

Oppgave 4: (Lagrangemetoden - smarthus)

a) Lagrangefunksjonen:

$$L(x, y, \lambda) = P(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (62)$$

hvor $g(x, y) = 0$ er bibetingelsen, som i vårt tilfelle er

$$g(x, y) = 0.75x + 0.25y - b \quad (63)$$

Dette gir:

$$\underline{\underline{L(x, y, \lambda)}} = P(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (64)$$

$$= \underline{\underline{600 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} - \lambda (0.75x + 0.25y - b)}} \quad (65)$$

- b) De kritiske punktene for $f(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = 0$ oppfyller ligningssystemet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (67)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (68)$$

hvor

$$\lambda = \text{Lagrange-multiplikatoren} \quad (69)$$

Partiellderiverte:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(600 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} - \lambda (0.75x + 0.25y - b) \right) \quad (70)$$

$$= 600 \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} y^{\frac{1}{6}} - 0.75\lambda \quad (71)$$

$$= \underline{300 x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} - 0.75\lambda} \quad (72)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(600 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} - \lambda (0.75x + 0.25y - b) \right) \quad (73)$$

$$= 600 x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{6} y^{\frac{1}{6}-1} - 0.25\lambda \quad (74)$$

$$= \underline{100 x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{6}} - 0.25\lambda} \quad (75)$$

Løser med hensyn på λ :

$$\frac{\partial L}{\partial \textcolor{red}{x}} = 0 \quad (76)$$

$$300 x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} - 0.75\lambda = 0 \quad (77)$$

$$0.75 \lambda = 300 x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} \quad (78)$$

$$\underline{\lambda = 400 x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}}} \quad (79)$$

Løser med hensyn på λ :

$$\frac{\partial L}{\partial \textcolor{blue}{y}} = 0 \quad (80)$$

$$100 x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{6}} - 0.25\lambda = 0 \quad (81)$$

$$0.25 \lambda = 100 x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{6}} \quad (82)$$

$$\underline{\lambda = 400 x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{6}}} \quad (83)$$

Eliminerer λ :

$$\lambda = \lambda \quad (84)$$

$$400x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} = 400x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{6}} \quad (85)$$

$$y^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \quad (86)$$

$$\underline{y = x} \quad (87)$$

Innsatt i bibetingelsen: (setter inn at $y = x$)

$$0.75x + 0.25y = b \quad (88)$$

$$\underbrace{0.75x + 0.25x}_{= x} = b \quad (89)$$

$$\underline{x = b} \quad (90)$$

Siden $y = x$ så er:

$$\underline{y = b} \quad (91)$$

For å maksimere effekten $P(x, y)$ så må antall watt produsert av ovnstype A være $\underline{\underline{x^* = b}}$ og antall watt produsert fra ovnstype B må være $\underline{\underline{y^* = b}}$.

c) Starter med venstre side:

$$\frac{\frac{dP(x^*, y^*)}{db}}{\frac{dP(x^*, y^*)}{db}} = \frac{dP(b, b)}{db} \quad (92)$$

$$= \frac{d}{db} \left(600 b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{6}} \right) \quad (93)$$

$$= \frac{d}{db} \left(600 b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \right) \quad (94)$$

$$= \frac{d}{db} \left(600 b^{\frac{2}{3}} \right) \quad (95)$$

$$= 600 \frac{2}{3} b^{\frac{2}{3}-1} \quad (96)$$

$$= \underline{400 b^{-\frac{1}{3}}} \quad (97)$$

Deretter må vi enten bruke lign.(79) eller lign.(83) for å beregne λ^* .
Vi velger lign.(83):

$$\underline{\lambda(b)} = 400 x^{*\frac{1}{2}} y^{*-\frac{5}{6}} \quad (98)$$

$$= 400 b^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{5}{6}} \quad (99)$$

$$= 400 b^{\frac{1}{2} - \frac{5}{6}} \quad (100)$$

$$= \underline{400 b^{-\frac{1}{3}}} \quad (101)$$

Vi ser at lign.(97) og lign.(101) er like, dermed:

$$\frac{\frac{dP(x^*, y^*)}{db}}{\frac{dP(x^*, y^*)}{db}} = \lambda(b) \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (102)$$

■

Testeksamen 2019



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

2. TESTeksamen

Løsning

“MAT100 Matematikk”, 2019

versjon 01

- (Test)eksamensdag / øvingsdag:
 - torsdag 9. des.
- Tid:
 - kl. 12:15 - 16:00
- Hjelpemidler:
 - KD (kalkulator)
 - Kompendium del 1, del 2 og del 3
 - Generell ordbord (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)

Oppgave 1 — 25%

- a) (2.5%) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(-1 + 2a)(1 + 2a) \quad (2.1)$$

Løsning:

$$(-1 + 2a)(1 + 2a) = -(1 - 2a)(1 + 2a) \stackrel{\text{konj.setn.}}{=} -(1 - (2a)^2) \quad (2.2)$$

$$= -1 + 4a^2 = 4a^2 - 1 \quad (2.3)$$

- b) (2.5%) Skriv brøken på enklest mulig form:

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \quad (2.4)$$

Løsning:

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad (2.5)$$

- c) (5%) Vis ved hjelp av ABC -formelen at løsningsmengden til ligningen

$$x^2 - 7x - 1 = 0 \quad (2.6)$$

er gitt ved:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{7 - \sqrt{53}}{2}, \frac{7 + \sqrt{53}}{2} \right\}. \quad (2.7)$$

Løsning:

Vi bruker ABC -formelen med $a = 1, b = -7$ og $c = -1$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \quad (2.8)$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \quad (2.9)$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4}}{2} \quad (2.10)$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2} \quad (2.11)$$

Løsningsmengden er dermed gitt ved

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{7 - \sqrt{53}}{2}, \frac{7 + \sqrt{53}}{2} \right\} \quad (2.12)$$

som skulle vises (q.e.d.).

- d) (5%) Skriv følgende uttrykk på faktorisert form: ¹

$$(4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) \quad (2.13)$$

Løsning:

Fra fundamentalsetningen for algebra vet vi at vi kan faktorisere et polynom dersom vi vet nullpunktene.

Fra oppgave c) har vi dermed at:

$$x^2 - 7x - 1 = \left(x - \frac{7 - \sqrt{53}}{2}\right) \left(x - \frac{7 + \sqrt{53}}{2}\right) \quad (2.14)$$

som innsatt i lign.(2.13) gir:

$$(4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) = -2(x - 2)(x^2 - 7x - 1) \quad (2.15)$$

$$= -2(x - 2) \left(x - \frac{7 - \sqrt{53}}{2}\right) \left(x - \frac{7 + \sqrt{53}}{2}\right) \quad (2.16)$$

¹Bruk svaret fra oppgave c).

- e) (10%) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: ²

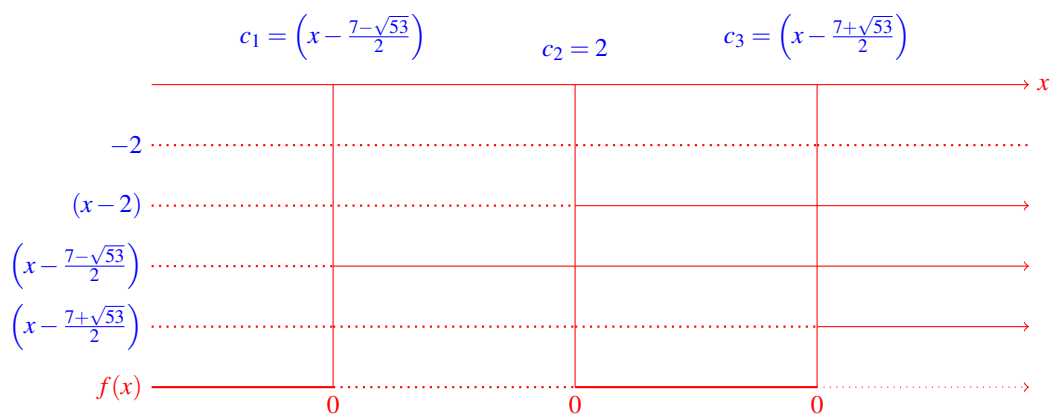
$$f(x) = (4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) \leq 0 \quad (2.17)$$

Løsning:

Fra oppgave d) fant vi faktoriseringen:

$$f(x) = (4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) = -2(x - 2) \left(x - \frac{7 - \sqrt{53}}{2} \right) \left(x - \frac{7 + \sqrt{53}}{2} \right)$$

Med nullpunktene $c_1 = \overbrace{\left(x - \frac{7 - \sqrt{53}}{2} \right)}^{\approx -0.1401}$, $c_2 = 2$ og $c_3 = \overbrace{\left(x - \frac{7 + \sqrt{53}}{2} \right)}^{\approx 7.1401}$ setter vi opp fortegnsskjemaet:



Figur 2.1: Fortegnsskjema.

Vi leser av løsningsmengden når $f(x) \leq 0$:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{7 - \sqrt{53}}{2}, 2 \right] \cup \left[\frac{7 + \sqrt{53}}{2}, \rightarrow \right) \quad (2.18)$$

²Bruk løsningen fra oppgave d)

Oppgave 2 — 25%

- a) (5%) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = e^{2x} \quad (2.19)$$

i punktet $x = 1$.

Løsning:

Deriverer ved hjelp av kjerneregelen, hvor $g(u) = e^u$ og $u(x) = 2x$:

$$f'(x) = g'(u)u' \quad (2.20)$$

$$= (e^u)'(2x)' = e^u \cdot 2 = 2e^{2x} \quad (2.21)$$

Innsatt for $x = 1$ gir oss stigningstallet i punktet $x = 1$:

$$f'(1) = 2e^{2 \cdot 1} = 2e^2. \quad (2.22)$$

b) (5%) Anta en følge er definert rekursivt ved:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= \frac{1}{2}a_{n-1} \end{aligned} \quad n \geq 2 \quad (2.23)$$

Finn en formel for a_n som kun er avhengig av n og regn ut summen S_5 .

Løsning:

Følgen er en geometrisk følge med vekstfaktor $k = \frac{1}{2}$ siden

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} \quad (2.24)$$

Dermed:

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad n \geq 1 \quad (2.25)$$

Formelen for summen av en geometrisk rekke finner vi i kompendiet:

$$S_5 = a_1 \frac{k^5 - 1}{k - 1} \quad (2.26)$$

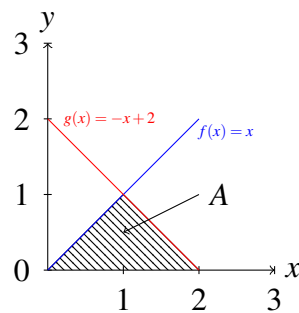
$$= 1 \cdot \frac{\frac{1}{2^5} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{32} - 1}{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} = \frac{\frac{1}{32} - \frac{32}{32}}{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{31}{32}\right) \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) = \frac{31}{16} \quad (2.27)$$

- c) (5%) Finn, ved hjelp av integrasjon, arealet A av området avgrenset av funksjonene

$$f(x) = x \quad (2.28)$$

$$g(x) = -x + 2 \quad (2.29)$$

og x -aksen, som vist i figur 2.2.



Figur 2.2: Det skraverte arelaet A .

Løsning:

Anti-deriverte:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c \quad (2.30)$$

$$G(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \tilde{c} \quad (2.31)$$

Dermed: (integralsetningens fundamentalsats)

$$A = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 g(x)dx \quad (2.32)$$

$$= \int_0^1 x dx + \int_1^2 (-x + 2)dx \quad (2.33)$$

$$= F(1) - F(0) + G(2) - G(1) \quad (2.34)$$

$$= \left(\frac{1}{2}1^2 + c \right) - \left(\frac{1}{2}0^2 + c \right) + \left(-\frac{1}{2}2^2 + 2 \cdot 2 + \tilde{c} \right) - \left(-\frac{1}{2}1^2 + 2 \cdot 1 + \tilde{c} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \cancel{2} + \cancel{4} + \frac{1}{2} - \cancel{2} \quad (2.35)$$

$$= 1 \quad (2.36)$$

- d) (5%) Vis at de partiell deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ av funksjonen

$$f(x) = \sqrt{xy + e^x} \quad (2.37)$$

er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y + e^x}{2\sqrt{xy + e^x}} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy + e^x}} \quad (2.39)$$

Løsning:

Vi må bruke kjerneregelen med

$$f(x) = f(u) = \sqrt{u} \quad \text{hvor } u = xy + e^x \quad (2.40)$$

Kjerneregelen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(y + e^x) = \frac{y + e^x}{2\sqrt{xy + e^x}} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(x + 0) = \frac{x}{2\sqrt{xy + e^x}} \quad (2.42)$$

- e) (5%) Finn retningsderivert av funksjonen f fra oppgave d) i punktet $(1, 1)$ langs retningen $a = 2$ og $b = 1$.³

Løsning:

Retningsderivert i punktet $(1, 1)$ langs retningen $a = 2$ og $b = 1$ er gitt ved:

$$a \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) + b \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2 \frac{1 + e^1}{2\sqrt{1 \cdot 1 + e^1}} + 1 \frac{1}{2\sqrt{1 \cdot 1 + e^1}} \quad (2.43)$$

$$= \frac{2 + 2e + 1}{2\sqrt{1 + e}} \quad (2.44)$$

$$= \frac{3 + 2e}{2\sqrt{1 + e}} \quad (2.45)$$

■

³Den retningsderiverte er definert i kompendiet.

Oppgave 3 — 25%

Ormen Lange-feltet er et gassfelt som ligger omtrent 140 km nordvest for Kristiansund. Gassen fra dette feltet går i rørledninger til øya Gossen utenfor Molde.

Anta at etterspørselen er 25 milliarder kubikkmeter gass det første året etter at produksjonen har startet, dvs.:⁴

$$d_1 = 25 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \quad (2.46)$$

hvor 10^9 er én milliard.

La oss i denne oppgaven anta at etterspørselen av gass øker med 5 % per år, dvs. etterspørselen for de påfølgende årene er:

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 1.05 \\ d_3 &= d_1 1.05^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ d_n &= \text{årlig ettersørsel av gass } n \text{ år etter oppstart} \end{aligned} \quad (2.47)$$

dvs. $d_n = d_1 1.05^{n-1}$.



Figur 2.3: Nyhamna på Gossen.

⁴Grunnen til at vi bruker notasjonen “ d ” er at etterspørsel er *demand* på engelsk.

- a) (2.5%) Hvor stor vil etterspørselen av gass være 15 år etter oppstart, dvs. hva er d_{15} ?

Løsning:

Etterspørselen av gass være 15 år etter oppstart er:

$$d_{15} = d_1 1.05^{15-1} \quad (2.48)$$

$$= 25 \cdot 10^9 \cdot 1.05^{14} \text{ m}^3 = 49.5 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \quad (2.49)$$

Den samlede etterspørselen S_n av gass etter n år er da:

$$S_n = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n = \sum_{i=1}^n d_i \quad (2.50)$$

- b) (2.5%) Hva slags type følge representerer d_i , hvor $i = 1, 2, \dots, n$?
Gi en *kort* begrunnelse.

Løsning:

Følgen $d_i = d_1 1.05^i$ er på formen $d_{i+1} = k d_i$, hvor $k =$ en konstant.⁵
Derfor er det en geometrisk følge.

- c) (5%) Vis at summen S_n er gitt ved:

$$S_n = 20 d_1 (1.05^n - 1) \quad (2.51)$$

⁵ $k = 1.05$ i vårt tilfelle.

Løsning:

Summen av en geometrisk følge er: ⁶

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (2.52)$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.05$ og $a_1 = p_1$.
Dette setter vi inn i lign.(2.52):

$$S_n \stackrel{\text{lign.(2.52)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (2.53)$$

$$= d_1 \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1} = \frac{1}{1.05 - 1} d_1 (1.05^n - 1) \quad (2.54)$$

$$= 20 d_1 (1.05^n - 1) \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (2.55)$$

- d) (2.5%) Hvor stor er den totale etterspørselen av gass de 15 første årene?

⁶Se formelsamlingen dersom du ikke husker formelen i hodet.

Løsning:

Formelen i oppgave 3c) viser den totale etterspørselen av gass etter n år. Derfor kan vi bruke nettopp denne formelen med $n = 15$:⁷

$$S_{15} = 20d_1(1.05^{15} - 1) \quad (2.56)$$

$$= 20 \cdot 25 \cdot 10^9 (1.05^{15} - 1) \text{ m}^3 = 539.5 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \quad (2.57)$$

⁷Man kan også skrive svaret på formen: $S_n = 5.39 \cdot 10^{11} \text{ m}^3$.

Anta at påvist forekomst for Ormen Lange-feltet er 1200 milliarder kubikkmeter naturgass, dvs.:

$$F = 1200 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \tag{2.58}$$

- e) (10%) Vis at antall år det vil ta før Ormen Lange-feltet er tømt, er gitt ved:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{F}{20d_1} + 1\right)}{\ln 1.05} \quad (2.59)$$

Løsning:

Ormen Lange-feltet er tømt når all forekomst er pumpet ut, dvs.:

$$F = S_n \quad (2.60)$$

Vi bruker svaret fra oppgave 3c), dvs. lign.(2.55), og løser med hensyn på “ n ” alene:

$$F = 20d_1(1.05^n - 1) \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{20d_1} \quad (2.61)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{F}{20d_1} = 1.05^n - 1 \quad \bigg/ + 1 \quad (2.62)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{F}{20d_1} + 1 = 1.05^n \quad \bigg/ \ln(-) \quad (2.63)$$

$\Updownarrow$

$$\ln\left(\frac{F}{20d_1} + 1\right) = \ln 1.05^n \quad \bigg/ \ln a^n = n \ln a \quad (2.64)$$

$\Updownarrow$

$$\ln\left(\frac{F}{20d_1} + 1\right) = n \ln 1.05 \quad \bigg/ : \ln 1.05 \quad (2.65)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\ln\left(\frac{F}{20d_1} + 1\right)}{\ln 1.05} = n \quad (2.66)$$

som skulle vises *q.e.d.*

- f) (2.5%) Hvor lang tid tar det før Ormen Lange-feltet er tømt?

Løsning:

For å finne ut hvor lang tid det tar det før man bruker opp oljereservene R så bruker vi bare resultatet fra oppgave 3e), dvs. lign.(2.67):

$$n \stackrel{\text{lign.(2.67)}}{=} \frac{\ln\left(\frac{F}{20p_1} + 1\right)}{\ln 1.05} \quad (2.68)$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{1200 \cdot 10^9}{20 \cdot 25 \cdot 10^9} + 1\right)}{\ln 1.05} \approx 25.1 \quad (2.69)$$

Det tar 25.1 år før de påviste forekomstene er tømt.

■

Oppgave 4 — 25%

Scandic Seilet hotell har kontaktet Høgskolen i Molde for å få hjelp til å oppnå mest mulig effektiv oppvarming av konsertsalen i Bjørnsonhuset, som er et moderne kommunalt kulturhus integrert i hotellet, se figur 2.4.

Anta at konsertsalen varmes opp av to typer varmeovner. Disse varmovnene er plassert rundt omkring i salen. Oppvarming måles i enheten *watt*, som er energioverføring per sekund, dvs. effekt. Anta at hver dag må salen ha et visst samlet effekt**behov** b , i watt, tilført fra ovnene for å opprettholde fast romtemperatur.

Ovnstypene, kall dem type A og type B, er forskjellige og er plassert på ulike posisjoner i salen. Hotellet ønsker å bestemme hvor mange watt som *totalt* skal produseres fra hver av de to ovnstypene slik at *effekten* av ovnene blir maksimal.

Følgende variabler defineres:

$$x = \text{antall watt produsert fra ovnene av type A på en gitt dag} \quad (2.70)$$

$$y = \text{antall watt produsert fra ovnene av type B på en gitt dag} \quad (2.71)$$



Figur 2.4: Scandic Seilet hotell og Bjørnsonhuset.

Noe av effekten fra varmeovnene forsvinner til omgivelsene.

For ovnene av type A er det kun 60% av den forbrukte effekten går med til å dekke det daglige oppvarmingsbehovet. Tilsvarende for type B ovner, som er en gammel type, går kun 40 % av effekten til å oppvarming.

Kravet om at b antall watt skal produseres på en gitt dag, kan dermed skrives som:

$$0.6x + 0.4y = b \quad (2.72)$$

Anta at den totale effekten $P(x, y)$ til ovnene, for valgt fordeling x og y , er estimert ved funksjonen: ⁸

$$P(x, y) = 200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} \quad (2.73)$$

- a) (2.5%) Skriv opp Lagrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(2.72). ⁹

Løsning:

Lagrangefunksjonen:

$$L(x, y, \lambda) = P(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (2.74)$$

hvor $g(x, y) = 0$ er bibetingelsen, som i vårt tilfelle er

$$g(x, y) = 0.6x + 0.4y - b \quad (2.75)$$

Dette gir:

$$L(x, y, \lambda) = P(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (2.76)$$

$$= 200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda (0.6x + 0.4y - b) \quad (2.77)$$

⁸ P står for "power", som er "effekt".

⁹Altså her kreves ingen regning.

- b) (12.5%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $P(x,y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(2.72) har følgende kritiske punkt, nemlig:

$$x^* = b, \quad y^* = b \quad (2.78)$$

som maksimerer effekten.¹⁰

Løsning:

De kritiske punktene for $f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = 0$ oppfyller ligningssystemet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2.80)$$

$$g(x,y) = 0 \quad (2.81)$$

hvor

$$\lambda = \text{Lagrange-multiplikatoren} \quad (2.82)$$

Partiellderiverte:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda (0.6x + 0.4y - b) \right) \quad (2.83)$$

$$= 200 \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} y^{\frac{1}{3}} - 0.6\lambda \quad (2.84)$$

$$= 100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 0.6\lambda \quad (2.85)$$

¹⁰Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda (0.6x + 0.4y - b) \right) \quad (2.86)$$

$$= 200x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}-1} - 0.4\lambda \quad (2.87)$$

$$= \frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 0.4\lambda \quad (2.88)$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ med hensyn på λ : (bruker at $0.6 = \frac{3}{5}$)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.89)$$

$$\Downarrow$$

$$100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 0.6\lambda = 0 \quad (2.90)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{5}\lambda = 100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} \quad (2.91)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{5}\lambda = 100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} \quad (2.92)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{500}{3}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} \quad (2.93)$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ med hensyn på λ : (bruker at $0.4 = \frac{2}{5}$)

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2.94)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 0.4\lambda = 0 \quad (2.95)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{5}\lambda = \frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} \quad (2.96)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{500}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} \quad (2.97)$$

Eliminerer λ :

$$\lambda = \lambda \quad (2.98)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\frac{500}{3}}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} = \cancel{\frac{500}{3}}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} \quad (2.99)$$

$$\Downarrow$$

$$y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \quad (2.100)$$

$$\Downarrow$$

$$y^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \quad (2.101)$$

$$\Downarrow$$

$$y = x \quad (2.102)$$

Innsatt i **bibetingelsen**: (setter inn at $y = x$)

$$0.6x + 0.4y = b \quad (2.103)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{0.6x + 0.4x}_{=x} = b \quad (2.104)$$

$$\Downarrow$$

$$x = b \quad (2.105)$$

Siden $y = x$ så er:

$$y = b \tag{2.106}$$

For å maksimere effekten $P(x, y)$ så må antall watt produsert av ovnstype A være $x^* = b$ og antall watt produsert fra ovnstype B må være $y^* = b$.

Hvor *sensitiv* er den optimale effekten $P(x^*, y^*)$ som funksjon av behovet av watt b ? Dette er et viktig spørsmål siden behovet b endrer med flere faktorer, f.eks. med temperaturen ute.

Et velkjent resultat innen Lagrange-teorien er:

$$\frac{dP(x^*, y^*)}{db} = \lambda(b) \quad (2.107)$$

hvor

$$\lambda(b) = \text{optimal Lagrange-multiplikator, en funksjon av } b \quad (2.108)$$

$$P(x^*, y^*) = \text{optimal effekt, en funksjon av } b \quad (2.109)$$

- c) (10%) Vis at lign.(2.107) stemmer i vårt tilfelle. ¹¹

¹¹Tips: Her må du blant annet bruke noen av resultatene fra mellomregningene i oppgave 4b). Dette er regnet som en A-oppgave.

Løsning:

Starter med venstre side:

$$\frac{dP(x^*, y^*)}{db} = \frac{dP(b, b)}{db} \quad (2.110)$$

$$= \frac{d}{db} \left(200 b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} \right) \quad (2.111)$$

$$= \frac{d}{db} \left(200 b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \right) \quad (2.112)$$

$$= \frac{d}{db} \left(200 b^{\frac{5}{6}} \right) \quad (2.113)$$

$$= 200 \frac{5}{6} b^{\frac{5}{6} - 1} \quad (2.114)$$

$$= \frac{500}{3} b^{-\frac{1}{6}} \quad (2.115)$$

Deretter må vi enten bruke lign.(2.93) eller lign.(2.97) for å beregne λ^* .
Vi velger lign.(2.97):

$$\lambda(b) = \frac{500}{3} x^{*\frac{1}{2}} y^{*-\frac{2}{3}} \quad (2.116)$$

$$= \frac{500}{3} b^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{2}{3}} \quad (2.117)$$

$$= \frac{500}{3} b^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} \quad (2.118)$$

$$= \frac{500}{3} b^{-\frac{1}{6}} \quad (2.119)$$

Vi ser at lign.(2.115) og lign.(2.119) er like, dermed:

$$\frac{dP(x^*, y^*)}{db} = \lambda(b) \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (2.120)$$

■

Hovedeksamen 2019

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Onsdag 18. desember 2019
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde/Bergen Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Bård-Inge Pettersen / 477 11 886
Hjelpemidler	: KD + kompendium 2019 del 1, 2 og 3 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 11 (10 + 1 vedlegg)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**
- **Hver oppgave teller 25 %**

Oppgave 1 — 25%

- a)** (2.5%) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(2x + 3y)^2 \tag{1}$$

Løsning:

Distributive lov: ("pilmetoden") ¹

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2x3y + 2x3y + (3y)^2 \tag{2}$$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2 \tag{3}$$

- b)** (2.5%) Skriv brøken på enklest mulig form:

$$\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \tag{4}$$

Løsning:

$$\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

¹Vi kunne også brukt 1. kvadratsetning.

- c) (2.5%) Regn ut uten bruk av kalkulator. Vis mellomregninger.

$$\frac{(8 \cdot 10^3)(5 \cdot 10^{-3})}{4 \cdot 10^6} \quad (6)$$

Løsning:

$$\frac{(8 \cdot 10^3)(5 \cdot 10^{-3})}{4 \cdot 10^6} = \frac{8 \cdot 5}{4} \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 10 \cdot 10^{\cancel{3} - \cancel{3} - 6} = 10^{1-6} = 10^{-5}$$

d) (7.5%) Gitt funksjonene:

$$f(x) = 3x^2 + 3x - 12 \quad , \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 4 \quad (7)$$

Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene. ²

Løsning:

Skjæringspunkt(en) til funksjonene er bestemt av $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = g(x) \quad \text{skjæring} \quad (8)$$

$$\Updownarrow$$

$$3x^2 + 3x - 12 = 2x^2 - 3x + 4 \quad \Big/ -2x^2 + 3x + 12 \quad (9)$$

$$\Updownarrow$$

$$3x^2 + 3x + 3x - 2x^2 = 4 + 12 \quad (10)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0 \quad (11)$$

ABC-formelen:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} \quad (12)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{-6 \pm 10}{2} \quad (13)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -8 \quad \vee \quad x = 2 \quad (14)$$

²Husk at skjæringspunkt(en) har både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. (x, y) .

Tilhørende funksjonsverdier er:

$$g(-8) = 2 \cdot (-8)^2 - 3 \cdot (-8) + 4 = 156 \quad (15)$$

$$g(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 6 \quad (16)$$

Skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$ er dermed:

$$(x, y) = (-8, 156) \quad \text{og} \quad (x, y) = (2, 6) \quad (17)$$

- e) (10%) Løs ulikheten ved bruk av fortegnsskjema:

$$\frac{4+6x}{x-1} \geq 4 \quad (18)$$

Løsning:

Vi multipliserer ikke med $x-1$ siden vi ikke vet om $x-1$ er positivt eller negativt.
Vi flytter heller tallet 4 over på venstre side:

$$\frac{4+6x}{x-1} \geq 4 \quad / -4 \quad (19)$$

$\Downarrow$

$$\frac{4+6x}{x-1} - 4 \geq 0 \quad (20)$$

$\Downarrow$

$$\frac{4+6x}{x-1} - 4 \frac{x-1}{x-1} \geq 0 \quad \text{fellesnevner} \quad (21)$$

$\Downarrow$

$$\frac{4+6x-4x+4}{x-1} \geq 0 \quad (22)$$

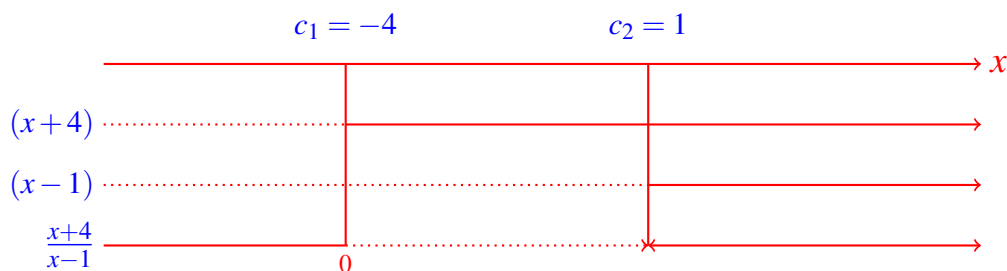
$\Downarrow$

$$\frac{2x+8}{x-1} \geq 0 \quad (23)$$

$\Downarrow$

$$\frac{2(x+4)}{x-1} \geq 0 \quad \text{faktoriserer} \quad (24)$$

Med $c_1 = -4$ og $c_2 = 1$ setter vi opp fortegnsskjemaet:



Figur 1: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra fortegnsskjemaet i figur 1:

$$-\infty < x \leq -4 \quad \vee \quad 1 < x < \infty \quad (25)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -\infty, -4] \cup \langle 1, \infty \rangle \quad (26)$$

■

Oppgave 2 — 25%

- a) (5%) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = \ln(x^2) \tag{27}$$

i punktet $x = 3$.

Løsning:

Vi kan forenkle funksjonen ved hjelp av regelen $\ln x^n = n \ln x$:³

$$f(x) = \ln(x^2) = 2 \ln x \tag{28}$$

Dermed:⁴

$$f'(x) = 2(\ln x)' = \frac{2}{x} \tag{29}$$

Innsatt for $x = 3$ gir oss stigningstallet i punktet $x = 3$:

$$f'(3) = \frac{2}{3} \tag{30}$$

³"Jেকে নেদ"-regelen.

⁴Vi vet at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, se kompendiet.

b) (5%) Anta en følge er definert rekursivt ved:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= \ln 3 \cdot a_{n-1} \end{aligned} \quad n \geq 2 \quad (31)$$

Finn en formel for a_n som kun er avhengig av n og regn ut summen S_5 .

Løsning:

Følgen er en geometrisk følge med vekstfaktor $k = \ln 3$ siden

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \ln 3 \quad (32)$$

Dermed:

$$a_n = 1 \cdot (\ln 3)^{n-1} = (\ln 3)^{n-1} \quad n \geq 1 \quad (33)$$

Formelen for summen av en geometrisk rekke finner vi i kompendiet:

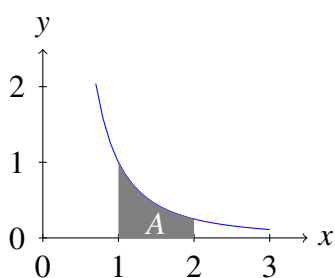
$$S_5 = a_1 \frac{k^5 - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{(\ln 3)^5 - 1}{\ln 3 - 1} = \frac{(\ln 3)^5 - 1}{\ln 3 - 1} \quad (34)$$

- c) (5%) Finn arealet A under grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (35)$$

i intervallet $[a, b] = [1, 2]$, dvs. finn:

$$A = \int_1^2 f(x) dx \quad (36)$$



Figur 2: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Løsning:

Den antideriverte av $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ er:

$$F(x) = -x^{-1} + c \quad (37)$$

hvor c er en konstant.

Dette innser vi ved å gå baklengs:

$$F'(x) = (-x^{-1} + c)' = -(-1)x^{-1-1} + 0 = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad (38)$$

Fundamentalsetningen for integral gir da:

$$A = \int_1^2 f(x) \, dx \tag{39}$$

$$= F(2) - F(1) \tag{40}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + e\right) - \left(-\frac{1}{1} + e\right) \tag{41}$$

$$= \frac{1}{2} \tag{42}$$

d) (10%) Finn løsningen til ligningen ⁵

$$6^x + 4^x = 9^x \quad (43)$$

Løsning:

$$6^x + 4^x = 9^x \quad \bigg/ : 4^x \quad (44)$$

$$\frac{6^x}{4^x} + \frac{4^x}{4^x} = \frac{9^x}{4^x} \quad \bigg/ \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad (45)$$

$$\left(\frac{6}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{9}{4}\right)^x \quad \bigg/ \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad (46)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^x \quad (47)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \quad \bigg/ (a^x)^y = a^{xy} \quad (48)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 \quad \bigg/ u = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad (49)$$

$$u + 1 = u^2 \quad (50)$$

$$0 = u^2 - u - 1 \quad (51)$$

$$u = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \quad \bigg/ (ABC\text{-formelen}) \quad (52)$$

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (53)$$

⁵Dette er regnet som en A-oppgave. Denne oppgaven er litt vanskelig. Hopp over den dersom du bruker lang tid på den.

Legg nå merke til at den ene (negative) løsningen fra *ABC*-formelen ikke er gyldig, siden u må være positiv ($u > 0$).

Vi substituerer inn $u = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ i lign.(53):

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad / \ln(-) \quad (54)$$

$$\Updownarrow$$

$$x \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad / \frac{1}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \quad (55)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \quad (= 1.186814389) \quad (56)$$

Løsningsmengden er dermed gitt ved: ⁶

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \right\} \quad (59)$$

■

⁶For de spesielt interesserte kan vi nevne at uttrykket

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (57)$$

er det velkjente "gylne snitt", så løsningen er egentlig gitt som:

$$\mathcal{L} = \{\ln \phi / \ln(3/2)\}. \quad (58)$$

Oppgave 3 — 25%

Ekornes ASA er en norsk møbelprodusent med hovedkontor i Sykkylven i Møre og Romsdal. Selskapet er mest kjent for varemerket Stressless. Stressless blir brukt på firmaets kolleksjon av regulerbare stoler, se figur 3.

La oss forenkle situasjonen for Ekornes og anta at de kun produserer to typer stressless-stoler. En standard versjon, type 1, og en luksus versjon, type 2. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

x = antall produserte stresslesser per dag av type 1

y = antall produserte stresslesser per dag av type 2

Anta at avdelingen til Ekornes som driver med produksjon av disse stolene har begrenset med ressurser. Arbeidsstyrken de rår over har 12 timer disponibelt til produksjon av komponenter per dag, 8 timer til montering per dag og kun 8 timer til pakking per dag. Disse **føringene**⁷ kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$3x + y \leq 12 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (60)$$

$$\frac{4}{3}x + y \leq 8 \quad (\text{montering}) \quad (61)$$

$$x + y \leq 8 \quad (\text{pakking}) \quad (62)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.



Figur 3: Stressless.

⁷Terminologien "restriksjoner" brukes også om "føringer" og representerer et krav som må være oppfylt.

Anta videre at fortjenesten $F(x, y)$ til Ekornes ved salg av slike stoler er gitt ved:

$$F(x, y) = 6000x + 3000y \quad (63)$$

Denne funksjonen er gitt i norske kroner (NOK).

Ekornes ønsker å **maksimere** denne fortjenesten.

- a) (2.5%) Hvor lang tid tar det å **produsere komponentene** til en stol av type 1 og type 2 hhv.? Hvor lang tid tar det å **montere** en stol av type 1 og 2 hhv.? ⁸

Løsning:

Fra lign.(60) i oppgavesettet ser vi at det tar 3 timer å produsere komponentene til en stol av type 1.

For type 2 tar det 1 time.

Fra den midterste ligningen i lign.(61) i oppgavesettet ser vi at det tar $\frac{4}{3} = 1.33333\dots$ timer å montere en stol av type 1.

Det tar 1 time å montere en stol av type 2.

⁸I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

- b) (2.5%) Føringen for pakking, dvs. lign.(62), kan fjernes fra problemet. Forklar kort hvorfor.⁹

Løsning:

Siden

$$\underbrace{\frac{4}{3}x + y \leq 8}_{\text{montering}} \Rightarrow \underbrace{x + y \leq 8}_{\text{pakking}} \quad (64)$$

så er pakke-føringene automatisk oppfylt dersom monterings-føringene er oppfylt.

Pakke-føringen er dermed overflødig og kan fjernes fra problemet.

⁹Tips: Sammenlign lign.(61) og lign.(62). Er den ene av disse ligningene overflødig?

- c) (2.5%) Gjør om ulikhetene i lign.(60) og (61) til likheter og vis at føringene kan skrives

$$y(x) = 12 - 3x \quad (65)$$

$$y(x) = 8 - \frac{4}{3}x \quad (66)$$

hvor y er en funksjon av x .

Løsning:

Gjør om ulikhetene til likheter:

$$3x + y = 12 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (67)$$

$$\frac{4}{3}x + y = 8 \quad (\text{montering}) \quad (68)$$

Flytter over x på andre siden:

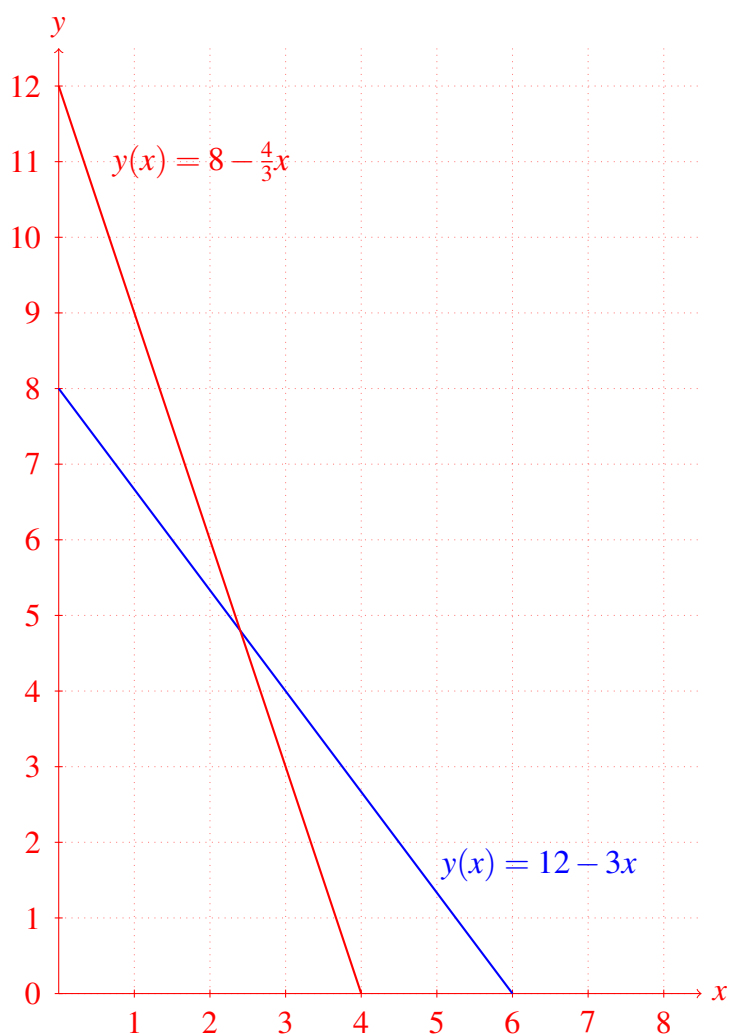
$$y = 12 - 3x \quad (69)$$

$$y = 8 - \frac{4}{3}x \quad (70)$$

- d) (7.5%) I vedlegget helt bakerst i oppgavesettet finner du et koordinatsystem. Plott lign.(65) og (66) i dette koordinatsystemet. ¹⁰

Løsning:

Plott:



Figur 4: Plott av de lineære lign.(65) og (66).

¹⁰Begrens plottingen til 1. kvadrant siden $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

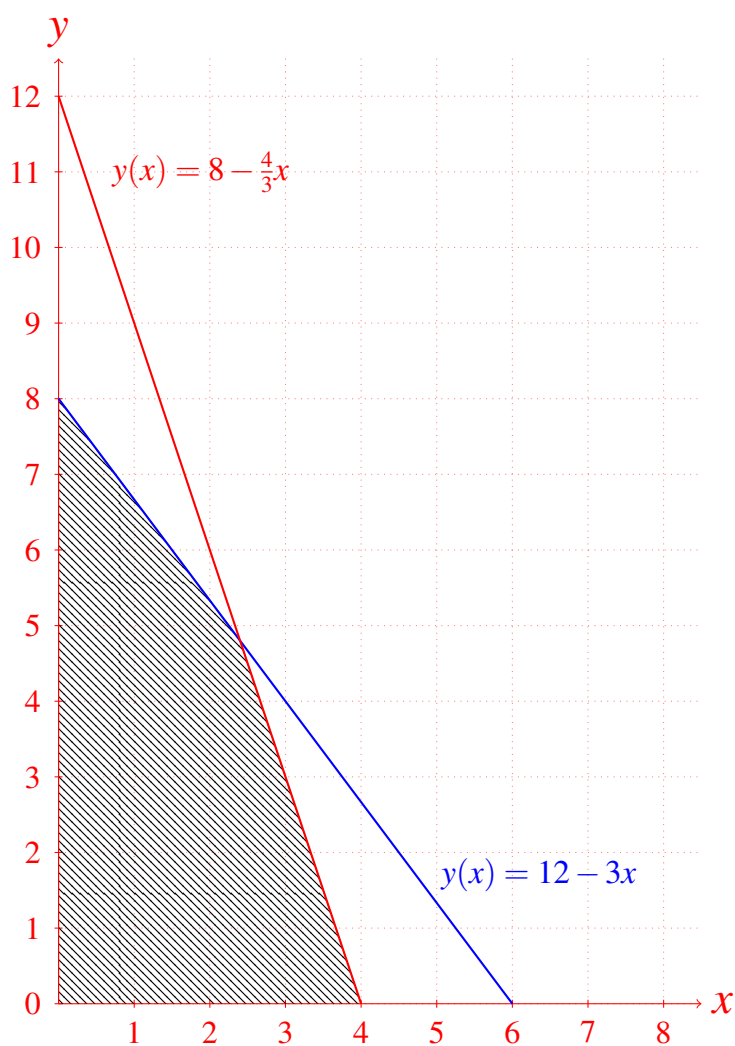
Husk at vedlegget skal legges ved i din eksamensbesvarelse.

Husk også å skrive inn ditt kandidatnummer på vedlegget.

- e) (2.5%) Skraver det området i figuren fra oppgave d) som tilfredsstiller alle føringene.

Løsning:

Området som oppfyller alle føringene:



Figur 5: Området (skravert) som oppfyller alle ulikhetene.

Fortjenesten i lign.(63) skal **maksimeres** under føringene beskrevet av lign.(60)-(62). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.

- f) (5%) Les av alle hjørneløsninger ¹¹ fra grafen og regn ut tilhørende fortjenester $F(x,y)$.

Løsning:

De fire hjørnepunktene er: $(0,0)$, $(0,8)$, $(4,0)$ og $(\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$.
Fortjenesten $F(x,y)$ ved hjørnepunktene:

$$F(0,0) = (6000 \cdot 0 + 3000 \cdot 0) \text{ NOK} = 0 \text{ NOK} \quad (71)$$

$$F(0,8) = (6000 \cdot 0 + 3000 \cdot 8) \text{ NOK} = 24\,000 \text{ NOK} \quad (72)$$

$$F\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right) = \left(6000 \cdot \frac{12}{5} + 3000 \cdot \frac{24}{5}\right) \text{ NOK} = 28\,800 \text{ NOK} \quad (73)$$

$$F(4,0) = (6000 \cdot 4 + 3000 \cdot 0) \text{ NOK} = 24\,000 \text{ NOK} \quad (74)$$

- g) (2.5%) Hvilken kombinasjon av x og y gir *maksimal* fortjeneste $F(x,y)$?

Løsning:

Maksimal fortjeneste $F(x,y)$ når $x = \frac{12}{5}$ og $y = \frac{24}{5}$: $F\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right) = 28\,800 \text{ NOK}$
12

¹¹Dvs. les av koordinatene (x,y) for alle hjørneløsninger. Anta at krysningspunktet mellom de to føringene er gitt ved $(x,y) = (\frac{12}{5}, \frac{24}{5})$.

¹²Legg merke til at selv om det er 4 hjørneløsninger så er det kun **èn** av dem som gir maksimal fortjeneste $F(x,y)$ i dette tilfellet.

Oppgave 4 — 25%

Scandic Seilet hotell har kontaktet Høgskolen i Molde for å få hjelp til å oppnå mest mulig effektiv oppvarming av konsertsalen i Bjørnsonhuset, som er et moderne kommunalt kulturhus integrert i hotellet, se figur 6.

Anta at konsertsalen varmes opp av to typer varmeovner. Disse varmovnene er plassert rundt omkring i salen. Oppvarming måles i enheten *watt*, som er energioverføring per sekund, dvs. effekt. Anta at hver dag må salen ha et visst samlet effekt**behov** b , i watt, tilført fra ovnene for å opprettholde fast romtemperatur.

Ovnstypene, kall dem type A og type B, er forskjellige og er plassert på ulike posisjoner i salen. Hotellet ønsker å bestemme hvor mange watt som *totalt* skal produseres fra hver av de to ovnstypene slik at *effekten* av ovnene blir maksimal.

Følgende variabler defineres:

$$x = \text{antall watt produsert fra ovnene av type A på en gitt dag} \quad (75)$$

$$y = \text{antall watt produsert fra ovnene av type B på en gitt dag} \quad (76)$$



Figur 6: Scandic Seilet hotell og Bjørnsonhuset.

Noe av effekten fra varmeovnene forsvinner til omgivelsene.

For ovnene av type A er det kun 80% av den forbrukte effekten går med til å dekke det daglige oppvarmingsbehovet. Tilsvarende for type B ovner, som er en gammel type, går kun 40 % av effekten til å oppvarming.

Kravet om at b antall watt skal produseres på en gitt dag, kan dermed skrives som:

$$0.8x + 0.4y = b \quad (77)$$

Anta at den totale effekten $P(x, y)$ til ovnene, for valgt fordeling x og y , er estimert ved funksjonen: ¹³

$$P(x, y) = 200e^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{4}y^2} - 200 \quad (78)$$

- a) (2.5%) Skriv opp Lagrange-funksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(77). ¹⁴

Løsning:

Lagrange-funksjonen:

$$L(x, y, \lambda) = P(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (79)$$

hvor $g(x, y) = 0$ er bibetingelsen, som i vårt tilfelle er

$$g(x, y) = 0.8x + 0.4y - b \quad (80)$$

¹³ P står for "power", som er "effekt".

¹⁴Altså her kreves ingen regning.

Dette gir:

$$L = P(x,y) - \lambda g(x,y) \quad (81)$$

$$= 200e^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{4}y^2} - 200 - \lambda(0.8x + 0.4y - b) \quad (82)$$

b) (5%) Vis at

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 200xe^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{4}y^2} - 0.8\lambda \quad (83)$$

Løsning:

Kjerneregelen med $g(u) = e^u$ og $u = \frac{1}{2}x^2$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(200e^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{4}y^2} - 200 - \lambda(0.8x + 0.4y - b) \right) \quad (84)$$

$$= 200e^{\frac{1}{4}y^2} (e^u)' u' - 0 - 0.8\lambda \quad \Big/ (e^u)' = e^u, u' = x$$

$$= 200e^{\frac{1}{4}y^2} e^{\frac{1}{2}x^2} x - 0.8\lambda \quad (85)$$

c) (5%) Vis at

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 100y e^{\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{4}y^2} - 0.4\lambda \quad (86)$$

Løsning:

Kjerneregelen med $g(u) = e^u$ og $u = \frac{1}{4}y^2$:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(200e^{\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{4}y^2} - 200 - \lambda (0.8x + 0.4y - b) \right) \quad (87)$$

$$= 200e^{\frac{1}{2}x^2} (e^u)' u' - 0 - 0.4\lambda \quad \Big/ (e^u)' = e^u, \quad u' = \frac{1}{2}y$$

$$= 100e^{\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{4}y^2} y - 0.4\lambda \quad (88)$$

- d) (12.5%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(77) har følgende stasjonære punkter, nemlig:

$$x^* = \frac{5}{6}b \quad , \quad y^* = \frac{5}{6}b \quad (89)$$

som maksimerer effekten.^{15 16}

Løsning:

De kritiske punktene for $P(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = 0$ oppfyller ligningssystemet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \begin{array}{c} \text{oppg. 4b)} \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad 200xe^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{4}y^2} - 0.8\lambda = 0 \quad (90)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \begin{array}{c} \text{oppg. 4c)} \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad 100ye^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{4}y^2} - 0.4\lambda = 0 \quad (91)$$

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0.8x + 0.4y = b \quad (92)$$

hvor

$$\lambda = \text{Lagrange-multiplikatoren} \quad (93)$$

¹⁵Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

¹⁶Bruk det du viste i oppgave 4b) og 4c).

Løser $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ med hensyn på λ : (bruker at $0.8 = \frac{4}{5}$)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (94)$$

$$\Updownarrow$$

$$200x e^{\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{4}y^2} - 0.8\lambda = 0 \quad (95)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4}{5}\lambda = 200x e^{\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{4}y^2} \quad / \cdot \frac{5}{4} \quad (96)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = 250x e^{\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{4}y^2} \quad (97)$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ med hensyn på λ : (bruker at $0.4 = \frac{2}{5}$)

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (98)$$

$$\Updownarrow$$

$$100y e^{\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{4}y^2} - 0.4\lambda = 0 \quad (99)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{5}\lambda = 100y e^{\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{4}y^2} \quad / \cdot \frac{5}{2} \quad (100)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = 250y e^{\frac{1}{2}x^2} e^{\frac{1}{4}y^2} \quad (101)$$

Eliminerer λ :

$$\lambda = \lambda \quad (102)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{250}x\cancel{e^{\frac{1}{2}x^2}}\cancel{e^{\frac{1}{4}y^2}} = \cancel{250}y\cancel{e^{\frac{1}{2}x^2}}\cancel{e^{\frac{1}{4}y^2}} \quad (103)$$

$$\Downarrow$$

$$y = x \quad (104)$$

Innsatt i bibetingelsen: (setter inn at $y = x$)

$$0.8x + 0.4y = b \quad (105)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{0.8x + 0.4x}_{= \frac{6}{5}x} = b \quad \Bigg/ \cdot \frac{5}{6} \quad (106)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{5}{6}b \quad (107)$$

Siden $y = x$ så er:

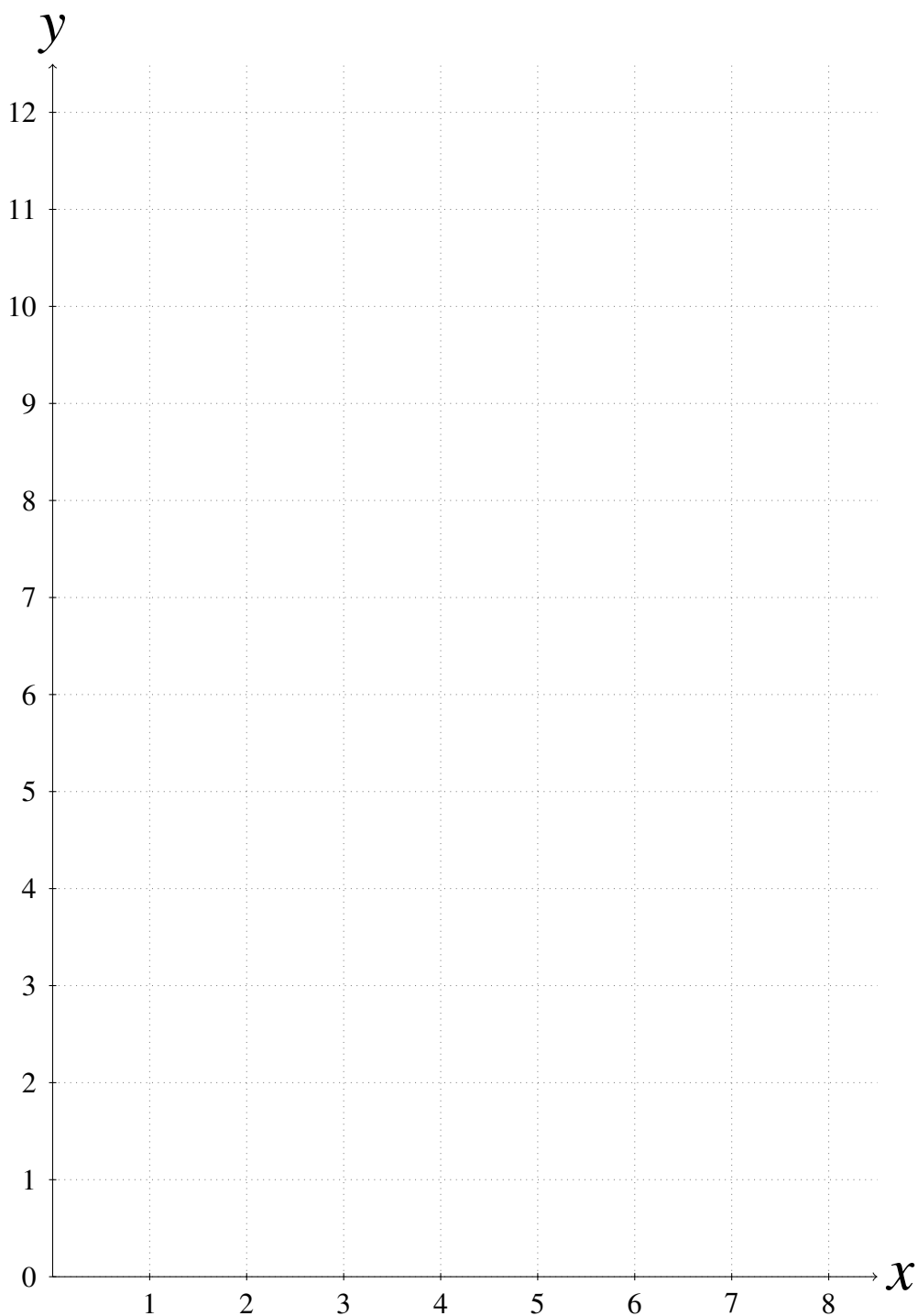
$$y = \frac{5}{6}b \quad (108)$$

For å maksimere effekten $P(x, y)$ så må antall watt produsert av ovnstype A være $x^* = 5b/6$ og antall watt produsert fra ovnstype B må være $y^* = 5b/6$.

■

VEDLEGG

Kandidatnummer: _____
(Skriv inn ditt kandidatnummer her)



Kontinuasjonseksamen 2019

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Torsdag 13. februar 2020
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Molde/Bergen Per Kristian Rekdal / 924 97 051 Kristiansund: Bård-Inge Pettersen / 477 11 886
Hjelpemidler	: KD + kompendium 2019 del 1, 2 og 3 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 11 (10 + 1 vedlegg)
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**
- **Hver oppgave teller 25 %**

Oppgave 1 — 25%

- a)** (2.5%) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(3x - 2y)^2 \tag{1}$$

Løsning:

Distributive lov: ("pilmetoden") ¹

$$(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 3x2y - 3x2y + (-2y)^2 \tag{2}$$

$$= 9x^2 - 12xy + 4y^2 \tag{3}$$

- b)** (2.5%) Skriv brøken på enklest mulig form:

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \tag{4}$$

Løsning:

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{5}{4} \tag{5}$$

¹Vi kunne også brukt 2. kvadratsetning.

- c) (2.5%) Regn ut uten bruk av kalkulator. Vis mellomregninger.

$$\frac{(16 \cdot 10^{-3})(5 \cdot 10^4)}{8 \cdot 10^{-6}} \quad (6)$$

Løsning:

$$\frac{(16 \cdot 10^{-3})(5 \cdot 10^4)}{8 \cdot 10^{-6}} = \frac{16 \cdot 5}{8} \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 \cdot 10^6 = 10 \cdot 10^{-3+4+6} = 10^{1+7} = 10^8$$

d) (7.5%) Gitt funksjonene:

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - x - 1 \quad (7)$$

Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene. ²

Løsning:

Skjæringspunkt(en) til funksjonene er bestemt av $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = g(x) \quad \text{skjæring} \quad (8)$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 + 3x + 2 = x^2 - x - 1 \quad \Big/ -x^2 + x + 1 \quad (9)$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 - x^2 + 3x + x + 2 + 1 = 0 \quad (10)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (11)$$

ABC-formelen:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \quad (12)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{2} \quad (13)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -3 \quad \vee \quad x = -1 \quad (14)$$

²Husk at skjæringspunkt(en) har både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. (x, y) .

Tilhørende funksjonsverdier er:

$$g(-3) = (-3)^2 - (-3) - 1 = 9 + 3 - 1 = 11 \quad (15)$$

$$g(-1) = (-1)^2 - (-1) - 1 = 1 + 1 - 1 = 1 \quad (16)$$

Skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$ er dermed:

$$(x, y) = (-3, 11) \quad \text{og} \quad (x, y) = (-1, 1) \quad (17)$$

- e) (10%) Løs ulikheten ved bruk av fortegnsskjema:

$$\frac{16-4x}{x-1} \leq 4x \quad (18)$$

Løsning:

Vi multipliserer **ikke** med $x-1$ siden vi ikke vet om $x-1$ er positivt eller negativt.
Vi flytter heller tallet 4 over på venstre side:

$$\frac{16-4x}{x-1} \leq 4x \quad \quad \quad / -4x \quad (19)$$

$\Downarrow$

$$\frac{16-4x}{x-1} - 4x \leq 0 \quad (20)$$

$\Downarrow$

$$\frac{16-4x}{x-1} - 4x \frac{x-1}{x-1} \leq 0 \quad \quad \quad \text{fellesnevner} \quad (21)$$

$\Downarrow$

$$\frac{16 - \cancel{4x} - 4x^2 + \cancel{4x}}{x-1} \leq 0 \quad (22)$$

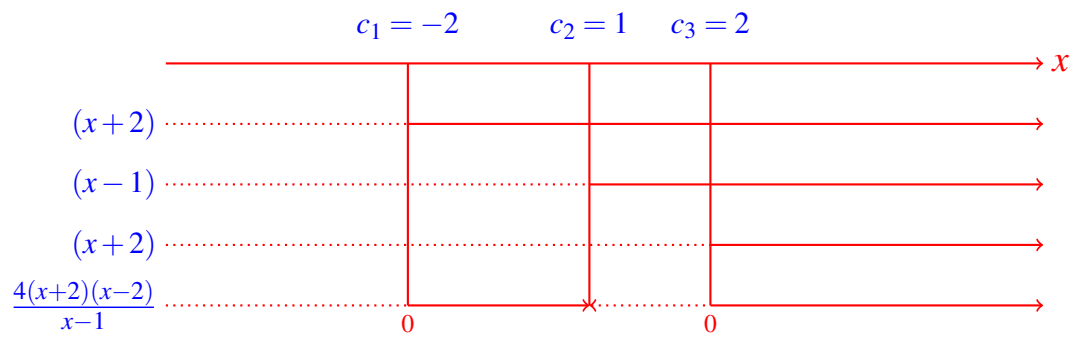
$\Downarrow$

$$-\frac{4(x^2-4)}{x-1} \leq 0 \quad \quad \quad / \cdot (-1) \quad (23)$$

$\Downarrow$

$$\frac{4(x+2)(x-2)}{x-1} \geq 0 \quad \quad \quad \text{faktoriserer} \quad (24)$$

Med $c_1 = -2$, $c_2 = 1$ og $c_3 = 2$ setter vi opp fortegnsskjemaet:



Figur 1: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra fortegnsskjemaet i figur 1:

$$-2 \leq x < 1 \quad \vee \quad 2 \leq x < \infty \quad (25)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = [-2, 1) \cup [2, \infty) \quad (26)$$

■

Oppgave 2 — 25%

- a) (5%) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad (27)$$

i punktet $x = 1$.

Løsning:

Vi kan forenkle funksjonen ved hjelp av regelen $\ln x^n = n \ln x$:³

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = -1 \cdot \ln x = -\ln x \quad (28)$$

Dermed:⁴

$$f'(x) = -(\ln x)' = -\frac{1}{x} \quad (29)$$

Innsatt for $x = 1$ gir oss stigningstallet i punktet $x = 1$:

$$f'(1) = -\frac{1}{1} = -1 \quad (30)$$

³"Jekke ned"-regelen.

⁴Vi vet at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, se kompendiet.

b) (5%) Anta en følge er definert rekursivt ved:

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_n &= 2 \cdot a_{n-1} \end{aligned} \quad n \geq 2 \quad (31)$$

Finn en formel for a_n som kun er avhengig av n og regn ut summen S_5 .

Løsning:

Følgen er en geometrisk følge med vekstfaktor $k = 2$ siden

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \quad (32)$$

Dermed: ⁵

$$a_n = a_1 k^{n-1} \quad (34)$$

$$= 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{2+n-1} = 2^{n+1} \quad n \geq 1 \quad (35)$$

Formelen for summen av en geometrisk rekke finner vi i kompendiet:

$$S_5 = a_1 \frac{k^5 - 1}{k - 1} \quad (36)$$

$$= 4 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 4 \frac{32 - 1}{1} = 4 \cdot 31 = 124 \quad (37)$$

⁵Fra kompendiet vet vi at for en geometrisk følge gjelder:

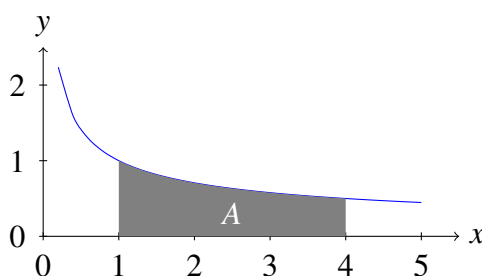
$$a_n = a_1 k^{n-1} \quad (33)$$

- c) (5%) Finn arealet A under grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (38)$$

i intervallet $[a, b] = [1, 4]$, dvs. finn:

$$A = \int_1^4 f(x) \, dx \quad (39)$$



Figur 2: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Løsning:

Den antideriverte av $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ er:

$$F(x) = 2x^{1/2} + c \quad (40)$$

hvor c er en konstant.

Dette innser vi ved å gå baklengs:

$$F'(x) = (2x^{1/2} + c)' \quad (41)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} x^{1/2-1} + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (42)$$

Fundamentalsetningen for integral gir da:

$$A = \int_1^4 f(x) \, dx \tag{43}$$

$$= F(4) - F(1) \tag{44}$$

$$= \left(2\sqrt{4} + e\right) - \left(2\sqrt{1} + e\right) \tag{45}$$

$$= 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \tag{46}$$

$$= 2 \tag{47}$$

- d) (10%) Finn løsningen til ligningen ⁶

$$4^x + 6 \cdot 4^{-x} = 5 \quad (48)$$

Løsning:

Legg først merke til at vi kan sette

$$u = 4^x. \quad (49)$$

Innsatt i lign.(48):

$$u + 6u^{-1} = 5 \quad / \cdot u \quad (50)$$

$\Updownarrow$

$$u^2 + 6 = 5u \quad / - 5u \quad (51)$$

$\Updownarrow$

$$u^2 - 5u + 6 = 0 \quad / (\text{ABC-formel}) \quad (52)$$

$\Updownarrow$

$$u = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \quad (53)$$

$\Updownarrow$

$$u = \frac{5 \pm 1}{2} \quad (54)$$

$\Updownarrow$

$$u = 2 \vee u = 3 \quad / u = 4^x \quad (55)$$

$\Updownarrow$

$$4^x = 2 \vee 4^x = 3 \quad / \ln(-) \quad (56)$$

$\Updownarrow$

$$x \ln 4 = \ln 2 \vee x \ln 4 = \ln 3 \quad (57)$$

$\Updownarrow$

$$x = \frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{\ln 2}{2 \ln 2} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{\ln 3}{\ln 4} = \frac{\ln 3}{2 \ln 2} \quad (58)$$

⁶Dette er regnet som en A-oppgave. Denne oppgaven er litt vanskelig. Hopp over den dersom du bruker lang tid på den.

Løsningsmengden er dermed gitt ved:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\ln 3}{2 \ln 2} \right\} \quad (59)$$

■

Oppgave 3 — 25%

Ekornes ASA er en norsk møbelprodusent med hovedkontor i Sykkylven i Møre og Romsdal. Selskapet er mest kjent for varemerket Stressless. Stressless blir brukt på firmaets kolleksjon av regulerbare stoler, se figur 3.

La oss forenkle situasjonen for Ekornes og anta at de kun produserer to typer stressless-stoler. En standard versjon, type 1, og en luksus versjon, type 2. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

x = antall produserte stresslesser per dag av type 1

y = antall produserte stresslesser per dag av type 2

Anta at avdelingen til Ekornes som driver med produksjon av disse stolene har begrenset med ressurser. Arbeidsstyrken de rår over har 8 timer disponibelt til produksjon av komponenter per dag, 8 timer til montering per dag og også 8 timer til pakking per dag. Disse **føringene**⁷ kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$x + 2y \leq 8 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (60)$$

$$\frac{8}{5}x + \frac{8}{5}y \leq 8 \quad (\text{montering}) \quad (61)$$

$$\frac{16}{9}x + \frac{4}{3}y \leq 8 \quad (\text{pakking}) \quad (62)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.



Figur 3: Stressless.

⁷Terminologien "restriksjoner" brukes også om "føringer" og representerer et krav som må være oppfylt.

Anta videre at fortjenesten $F(x, y)$ til Ekornes ved salg av slike stoler er gitt ved:

$$F(x, y) = 3000x + 6000y \quad (63)$$

Denne funksjonen er gitt i norske kroner (NOK).

Ekornes ønsker å **maksimere** denne fortjenesten.

- a) (2.5%) Hvor lang tid tar det å **produsere komponentene** til en stol av type 1 og type 2 hhv.? Hvor lang tid tar det å **montere** en stol av type 1 og 2 hhv.? ⁸

Løsning:

Fra lign.(60) i oppgavesettet ser vi at det tar 1 time å produsere komponentene til en stol av type 1.

For type 2 tar det 2 timer.

Fra den midterste ligningen i lign.(61) i oppgavesettet ser vi at det tar $\frac{8}{5} = 1.6$ timer å montere en stol av type 1.

Det tar også $\frac{8}{5} = 1.6$ timer å montere en stol av type 2.

⁸I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

- b) (2.5%) Gjør om ulikhetene i lign.(60) og (61) til likheter og vis at føringene kan skrives

$$y = 4 - \frac{1}{2}x \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (64)$$

$$y = 5 - x \quad (\text{montering}) \quad (65)$$

$$y = 6 - \frac{4}{3}x \quad (\text{pakking}) \quad (66)$$

hvor y er en funksjon av x .

Løsning:

Gjør om ulikhetene til likheter:

$$x + 2y = 8 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (67)$$

$$\frac{8}{5}x + \frac{8}{5}y = 8 \quad (\text{montering}) \quad (68)$$

$$\frac{16}{9}x + \frac{4}{3}y = 8 \quad (\text{pakking}) \quad (69)$$

Flytter over x på andre siden og multipliserer:

$$2y = 8 - x \quad \bigg/ \cdot \frac{5}{8} \quad (70)$$

$$\frac{8}{5}y = 8 - \frac{8}{5}x \quad \bigg/ \cdot \frac{5}{8} \quad (71)$$

$$\frac{4}{3}y = 8 - \frac{16}{9}x \quad \bigg/ \cdot \frac{3}{4} \quad (72)$$

Dermed:

$$y = 4 - \frac{1}{2}x \quad (73)$$

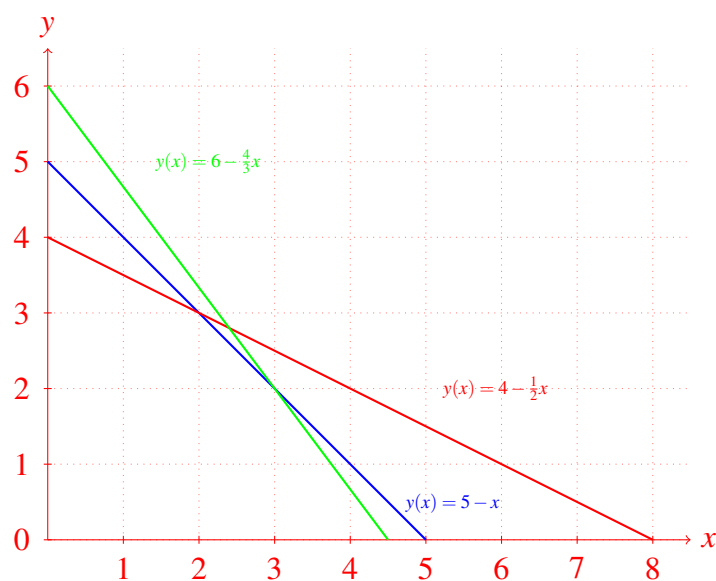
$$y = 5 - x \quad (74)$$

$$y = 6 - \frac{4}{3}x \quad (75)$$

- c) (10%) I vedlegget helt bakerst i oppgavesettet finner du et koordinatsystem. Plott lign.(64), (65) og (66) i dette koordinatsystemet.⁹

Løsning:

Plott:



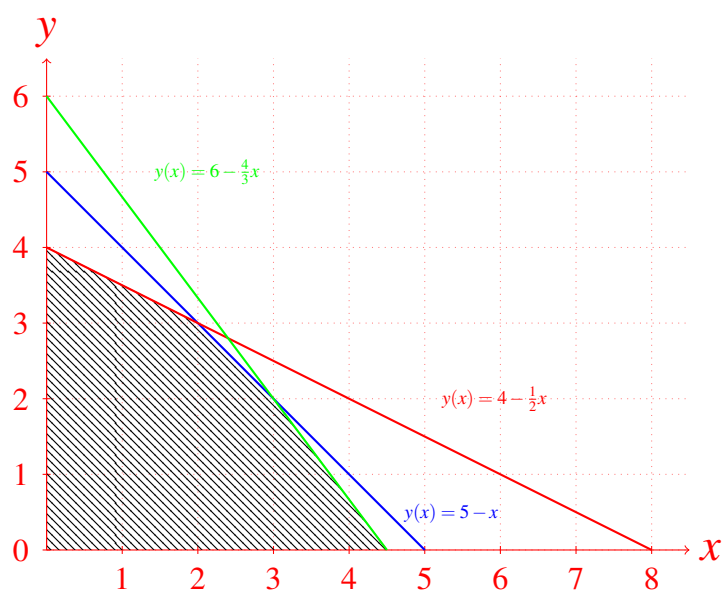
Figur 4: Plott av de lineære lign.(64) og (66).

⁹Begrens plottingen til 1. kvadrant siden $x \geq 0$ og $y \geq 0$.
Husk at vedlegget skal legges ved i din eksamensbesvarelse.
Husk også å skrive inn ditt kandidatnummer på vedlegget.

- d) (2.5%) Skriver det området i figuren fra oppgave c) som tilfredsstiller alle føringene.

Løsning:

Området som oppfyller alle føringene:



Figur 5: Området (skravert) som oppfyller alle ulikhetene.

Fortjenesten i lign.(63) skal **maksimeres** under føringene beskrevet av lign.(60)-(62). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.

- e) (5%) Les av alle hjørneløsninger ¹⁰ fra grafen og regn ut tilhørende fortjenester $F(x,y)$.

Løsning:

De fem hjørnepunktene er: $(0,0)$, $(0,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$ og $(4.5,0)$.
Fortjenesten $F(x,y)$ ved hjørnepunktene:

$$F(0,0) = (3000 \cdot 0 + 6000 \cdot 0) \text{ NOK} = 0 \text{ NOK} \quad (76)$$

$$F(0,4) = (3000 \cdot 0 + 6000 \cdot 4) \text{ NOK} = 24000 \text{ NOK} \quad (77)$$

$$F(2,3) = (3000 \cdot 2 + 6000 \cdot 3) \text{ NOK} = 24000 \text{ NOK} \quad (78)$$

$$F(3,2) = (3000 \cdot 3 + 6000 \cdot 2) \text{ NOK} = 21000 \text{ NOK} \quad (79)$$

$$F(4.5,0) = (3000 \cdot 4.5 + 6000 \cdot 0) \text{ NOK} = 13500 \text{ NOK} \quad (80)$$

- f) (2.5%) Hvilke to hjørneløsninger gir *maksimal* fortjeneste $F(x,y)$?

¹⁰Dvs. les av koordinatene (x,y) for alle hjørneløsninger.

Løsning:

Maksimal fortjeneste $F(x,y)$ fås ved hjørnene $(0,4)$ og $(2,3)$: ¹¹

$$F(0,4) = F(2,3) = 24\,000 \text{ NOK} \quad (81)$$

■

¹¹Legg merke til at det er 5 hjørneløsninger hvor kun 2 av dem som gir maksimal fortjeneste $F(x,y)$ i dette tilfellet.

Oppgave 4 — 25%

Scandic Seilet hotell har kontaktet Høgskolen i Molde for å få hjelp til å oppnå mest mulig effektiv oppvarming av konsertsalen i Bjørnsonhuset, som er et moderne kommunalt kulturhus integrert i hotellet, se figur 6.

Anta at konsertsalen varmes opp av to typer varmeovner. Disse varmovnene er plassert rundt omkring i salen. Oppvarming måles i enheten *watt*, som er energioverføring per sekund, dvs. effekt. Anta at hver dag må salen ha et visst samlet effekt**behov** b , i watt, tilført fra ovnene for å opprettholde fast romtemperatur.

Ovnstypene, kall dem type A og type B, er forskjellige og er plassert på ulike posisjoner i salen. Hotellet ønsker å bestemme hvor mange watt som *totalt* skal produseres fra hver av de to ovnstypene slik at *effekten* av ovnene blir maksimal.

Følgende variabler defineres:

$$x = \text{antall watt produsert fra ovnene av type A på en gitt dag} \quad (82)$$

$$y = \text{antall watt produsert fra ovnene av type B på en gitt dag} \quad (83)$$



Figur 6: Scandic Seilet hotell og Bjørnsonhuset.

Noe av effekten fra varmeovnene forsvinner til omgivelsene.

For ovnene av type A er det kun 80 % av den forbrukte effekten går med til å dekke det daglige oppvarmingsbehovet. Tilsvarende for type B ovner, som er en gammel type, går kun 20 % av effekten til å oppvarming.

Kravet om at b antall watt skal produseres på en gitt dag, kan dermed skrives som:

$$0.8x + 0.2y = b \quad (84)$$

Anta at den totale effekten $P(x, y)$ til ovnene, for valgt fordeling x og y , er estimert ved funksjonen: ¹²

$$P(x, y) = 200e^{\frac{1}{3}x^3}e^{\frac{1}{3}y^3} - 200 \quad (85)$$

- a) (2.5%) Skriv opp Lagrange-funksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(84). ¹³

Løsning:

Lagrange-funksjonen:

$$L(x, y, \lambda) = P(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (86)$$

hvor $g(x, y) = 0$ er bibetingelsen, som i vårt tilfelle er

$$g(x, y) = 0.8x + 0.2y - b \quad (87)$$

¹² P står for "power", som er "effekt".

¹³Altså her kreves ingen regning.

Dette gir:

$$L = P(x,y) - \lambda g(x,y) \quad (88)$$

$$= 200e^{\frac{1}{3}x^3}e^{\frac{1}{3}y^3} - 200 - \lambda(0.8x + 0.2y - b) \quad (89)$$

b) (5%) Vis at

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 200x^2 e^{\frac{1}{3}x^3}e^{\frac{1}{3}y^3} - 0.8\lambda \quad (90)$$

Løsning:

Kjerneregelen med $g(u) = e^u$ og $u = \frac{1}{3}x^3$:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(200e^{\frac{1}{3}x^3}e^{\frac{1}{3}y^3} - 200 - \lambda(0.8x + 0.2y - b) \right) \quad (91)$$

$$= 200(e^u)'u'e^{\frac{1}{3}y^3} - 0 - 0.8\lambda \quad \Big/ (e^u)' = e^u, u' = x^2$$

$$= 200e^{\frac{1}{3}x^3}x^2e^{\frac{1}{3}y^3} - 0.8\lambda \quad (92)$$

c) (5%) Vis at

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 200y^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} - 0.2\lambda \quad (93)$$

Løsning:

Kjerneregelen med $g(u) = e^u$ og $u = \frac{1}{3}y^3$:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(200e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} - 200 - \lambda (0.8x + 0.2y - b) \right) \quad (94)$$

$$= 200e^{\frac{1}{3}x^3} (e^u)' u' - 0 - 0.2\lambda \quad \Big/ (e^u)' = e^u, u' = y^2$$

$$= 200e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} y^2 - 0.2\lambda \quad (95)$$

- d) (12.5%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(84) har følgende stasjonære punkter, nemlig:

$$x^* = \frac{10}{9}b, \quad y^* = \frac{5}{9}b \quad (96)$$

som maksimerer effekten.^{14 15}

Løsning:

De kritiske punktene for $P(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = 0$ oppfyller ligningssystemet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \stackrel{\text{oppg. 4b}}{\Leftrightarrow} \quad 200x^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} - 0.8\lambda = 0 \quad (97)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \stackrel{\text{oppg. 4c}}{\Leftrightarrow} \quad 200y^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} - 0.2\lambda = 0 \quad (98)$$

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0.8x + 0.2y = b \quad (99)$$

hvor

$$\lambda = \text{Lagrange-multiplikatoren} \quad (100)$$

¹⁴Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

¹⁵Bruk det du viste i oppgave 4b) og 4c).

Løser $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ med hensyn på λ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (101)$$

$$\Updownarrow$$

$$200x^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} - 0.8\lambda = 0 \quad (102)$$

$$\Updownarrow$$

$$0.8\lambda = 200x^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} \quad / \cdot \frac{1}{0.8} \quad (103)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = 250x^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} \quad (104)$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ med hensyn på λ :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (105)$$

$$\Updownarrow$$

$$200y^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} - 0.2\lambda = 0 \quad (106)$$

$$\Updownarrow$$

$$0.2\lambda = 200y^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} \quad / \cdot \frac{1}{0.2} \quad (107)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = 1000y^2 e^{\frac{1}{3}x^3} e^{\frac{1}{3}y^3} \quad (108)$$

Eliminerer λ :

$$\lambda = \lambda \quad (109)$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{250}x^2 \cancel{e^{\frac{1}{2}x^2}} \cancel{e^{\frac{1}{4}y^2}} = 4 \cdot \cancel{250}y^2 \cancel{e^{\frac{1}{2}x^2}} \cancel{e^{\frac{1}{4}y^2}} \quad (110)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = 4y^2 \quad (111)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -2y \vee x = 2y \quad (112)$$

Siden $x \geq 0$ og $y \geq 0$, kan vi se vekk fra løsningen $x = -2y$.
Vi antar derfor at $x = 2y$.

Innsatt i **bibetingelsen**: (setter inn at $x = 2y$)

$$\frac{4}{5}x + \frac{1}{5}y = b \quad \Big/ x = 2y \quad (113)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4}{5}2y + \frac{1}{5}y = b \quad (114)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{9}{5}y = b \quad \Big/ \cdot \frac{5}{9} \quad (115)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{5}{9}b \quad (116)$$

Siden $x = 2y$ så er:

$$x = 2\frac{5}{9}b = \frac{10}{9}b \quad (117)$$

For å maksimere effekten $P(x,y)$ så må antall watt produsert av ovnstype A være $x^* = 10b/9$ og antall watt produsert fra ovnstype B må være $y^* = 5b/9$.

■

VEDLEGG

Kandidatnummer: _____
(Skriv inn ditt kandidatnummer her)

