



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høgskole i logistikk

2. Ligninger og ulikheter

Øving 1: Oppgaver

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 02

- Utlevering:
 - Mandag 17. aug. kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - senest kl. 12:00 mandag 14. sep.
 - dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- **FORarbeid:**
 - Se videoene for uke 1 og uke 2
 - Les kompendiet.
 - Les gjennom øvingoppgave 1
- **ETTERarbeid:**
 - Gå gjennom løsning 1 som legges ut fredag 11. sep. kl. 12:00.

Problem 2.1 — Algebraisk uttrykk

Et algebraisk uttrykk er et uttrykk bygd opp av:

1. *Konstanter*, dvs. heltall $\overbrace{\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots}^{\mathbb{Z}}$
2. *Parametre*, ofte symbolisert ved $a, b, c \dots$
3. *Variabler*, ofte symbolisert ved $x, y, z \dots$

og de *algebraiske operasjonene*:

+ addisjon,

– subtraksjon,

· multiplikasjon,

/ divisjon,

^ potenser,

√ kvadratrøtter.

- a) Nedenfor ser du et algebraisk uttrykk.

Marker hva som er variabler, eksponenter, koeffisienter, ledd, operatorer, konstantledd og parametre.

$$5z^7 + cxy - 19a \tag{2.1}$$

Når vi skal vise at to formler er like, starter vi gjerne med en av formlene og bruker et visst antall steg på å komme til den andre formelen. Hvert steg i utledningen må bruke en allerede kjent formel.

b) **Utled** eller *vis at*: ¹

$$7(3 + 2x) + 2(5x - 4) - (2x^2)^3 = -8x^6 + 24x + 13 \quad (2.2)$$

Skriv hva slags lov som brukes når du går fra ett steg til neste.

■

¹Legg merke til at leddet med størst eksponent flyttes lengst til venstre. Det er vanlig praksis.

Problem 2.2 — Ligninger og geometri

Det viktigste budskapet fra teorien ved denne øvingen er at **geometriske objekter** kan beskrives som **løsningsmengden av ligninger**.

Vi har f.eks. lært i kompendiet at punktene (x, y) som oppfyller ligningen

$$y = 2x - 1 \quad (2.3)$$

er en *linje* i planet med stigningstall **2** og som krysser y-aksen i punktet $(0, -1)$, se figur 2.12.

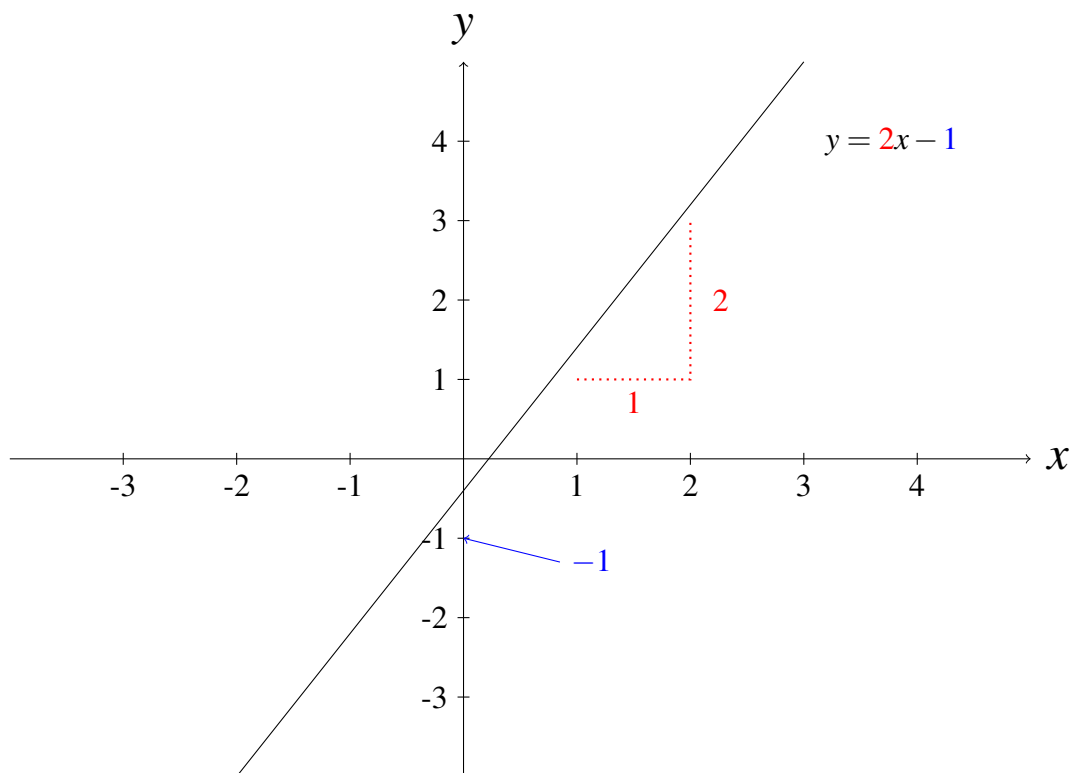


Figure 2.1: Punktene som oppfyller $y = 2x - 1$ er en linje.

Vi har også lært at punktene (x, y) som oppfyller ligningen

$$y = 2x^2 - 1 \quad (2.4)$$

er en *parabel* som krysser y -aksen i punktet $(0, -1)$ og x -aksen i punktene $(-\sqrt{0.5}, 0)$ og $(\sqrt{0.5}, 0)$, se figur 2.2.

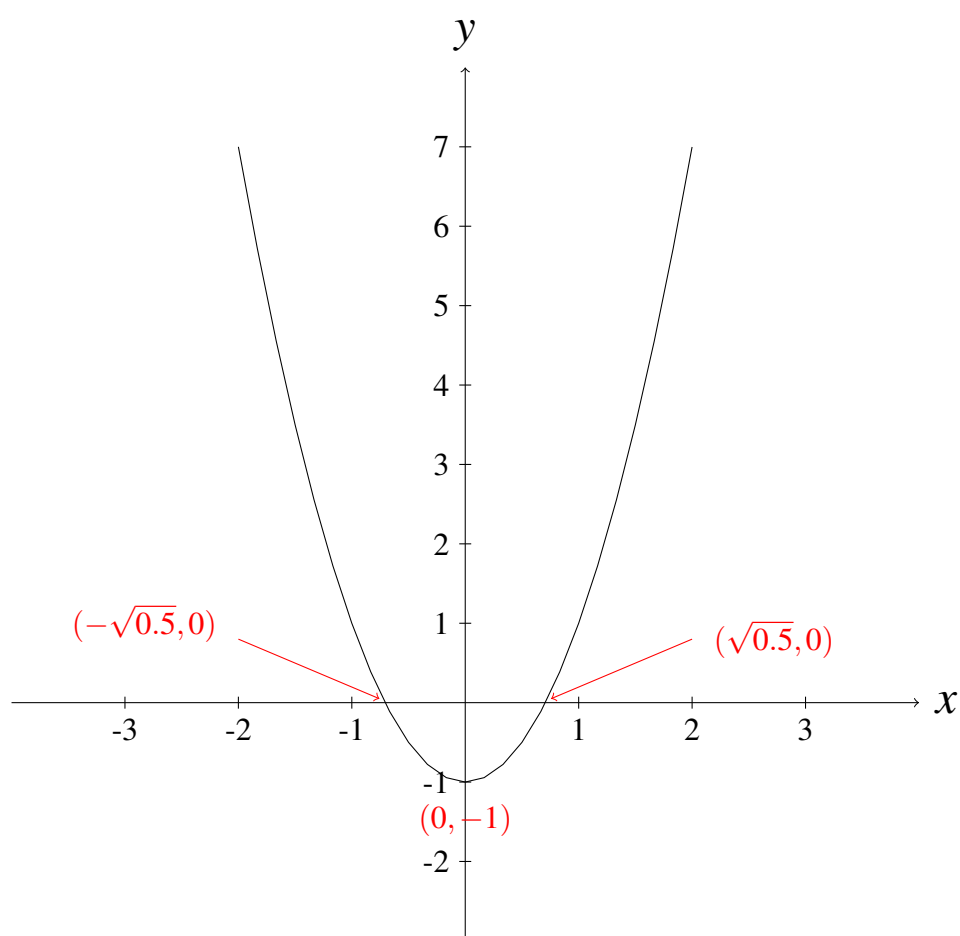


Figure 2.2: Punktene som oppfyller $y = 2x^2 - 1$ er en parabel.

Vi skal nå finne ligningen hvis løsningsmengde gir en **ellipse** i planet.

- a) Skriv opp ligningen hvis løsningsmengde gir en ellipse med senter i origo hvor den minste avstanden fra senteret til ellipsen er **1** (**lille halvakse**) og den lengste avstanden er **3** (**store halvakse**) hhv.

Se figur 2.3.²

Skriv svaret på enklest mulig form (uten brøk) og samle alle ledd på venstre side, dvs. skriv ligningen på formen

$$A(x, y) = 0 \quad (2.5)$$

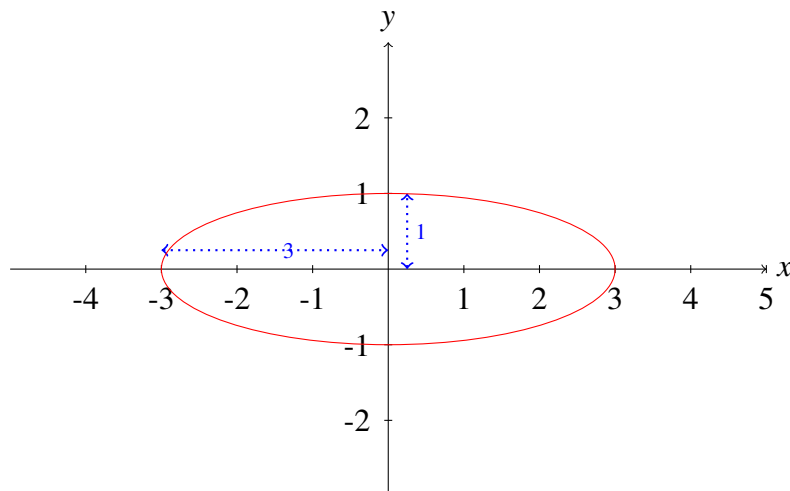


Figure 2.3: Ellipse med senter i origo.

²Søk gjerne på internett for å finne svaret. Poenget i oppgaven er ikke å kunne ligningen for en ellipse, men å innse at en ellipse kan beskrives ved hjelp av en ligning.

Translasjon av objekter

Å **translatere** eller **forskyve** en geometrisk figur burde ikke ha stor konsekvens for ligningen som beskriver figuren. Tross alt er formen den samme.

I stedet for å translatere *figuren* kan vi like godt translatere hele *koordinatsystemet*. I det translaterte koordinatsystemet, må ligningene da være på akkurat samme form som ligningene vi hadde i utgangspunktet.

Eksempel:

Anta at vi har linjen

$$y = -x \tag{2.6}$$

i et (x,y) -koordinatsystem, som vist i figur 2.4 .

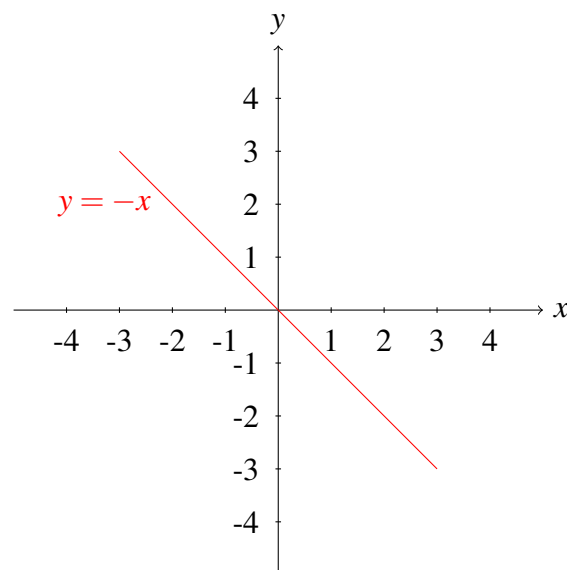


Figure 2.4: Linjen $y = -x$ i et (x,y) -koordinatsystem.

Anta vi ønsker å translater koordinatsystemet slik at det nye origo ligger i punktet $(2, 1)$.

La de translaterte koordinatene være gitt ved x' og y' , som vist i figur 2.5.

Dersom vi står i et punkt (x', y') i det nye koordinatsystemet og vil tilbake til det gamle, må vi gå to steg til venstre og ett steg ned, dvs. sammenhengen mellom de nye og gamle koordinatene gitt ved

$$x' = x - 2 \quad (\text{to steg til venstre}) \quad (2.7)$$

$$y' = y - 1 \quad (\text{ett steg ned}) \quad (2.8)$$

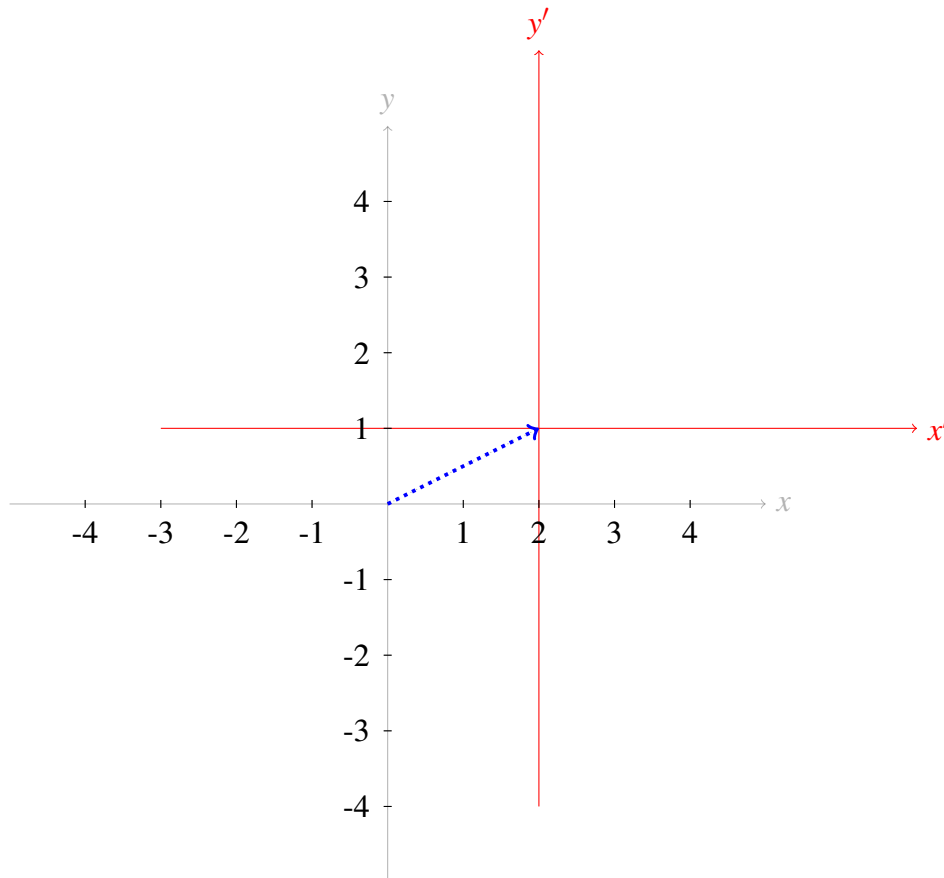


Figure 2.5: Translatert (x', y') -koordinatsystem.

I figur 2.6 har vi tegnet inn den translaterte linjen.

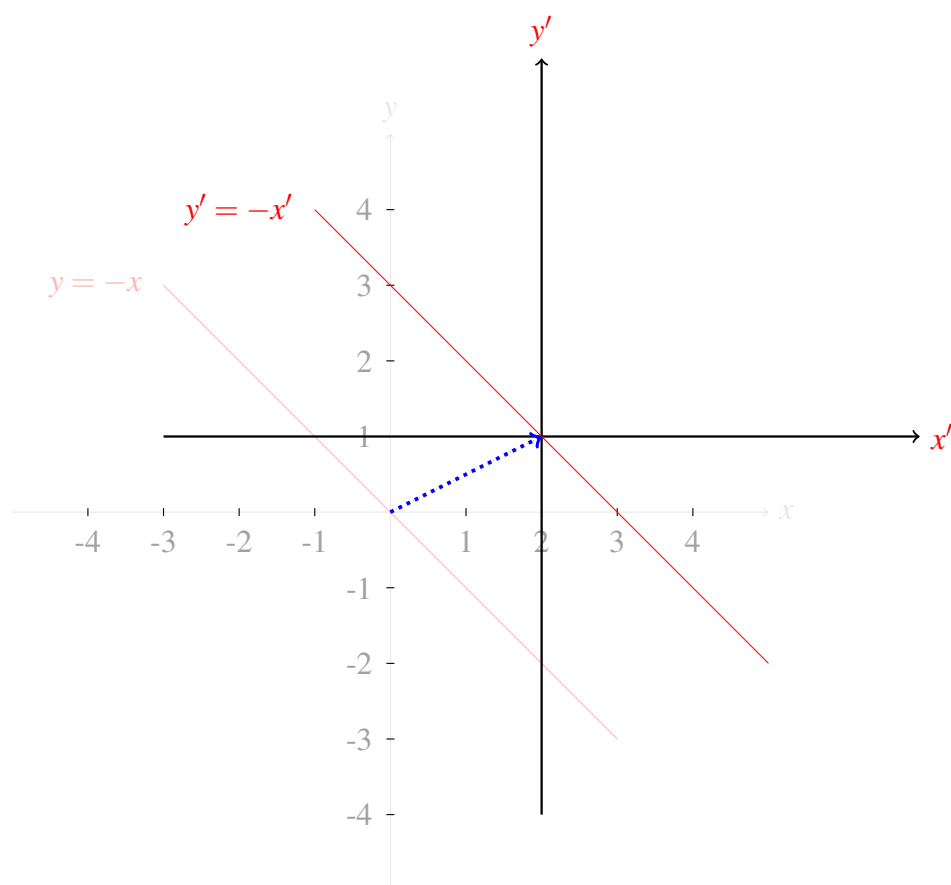


Figure 2.6: Den translaterte linjen $y' = -x'$.

Legg merke til at ligningen for linjen er uendret i det nye koordinatsystemet, dvs. $y' = -x'$. Vi kan nå bruke lign.(2.7) og (2.8) for å substituere tilbake til (x, y) -koordinatene:

$$y' = -x' \quad (2.9)$$

$\Updownarrow$

$$y - 1 = -(x - 2) \quad (2.10)$$

$\Updownarrow$

$$y = -x + 3 \quad (2.11)$$

som er ligningen for den translaterte linjen i (x, y) -koordinatsystemet.

- b)** Anta vi translaterer (forskyver) ellipsen fra oppgave **a)** slik at senteret nå er i punktet $(1, 1)$, se figur 2.7.

Finn ligningen som beskriver ellipsen ved å translaterer hele koordinatsystemet slik at det nye origo ligger i punktet $(1, 1)$.

Skriv svaret på enklest mulig form (uten brøk) og samle alle ledd på venstre side, dvs. skriv ligningen på formen

$$A(x, y) = 0 \tag{2.12}$$

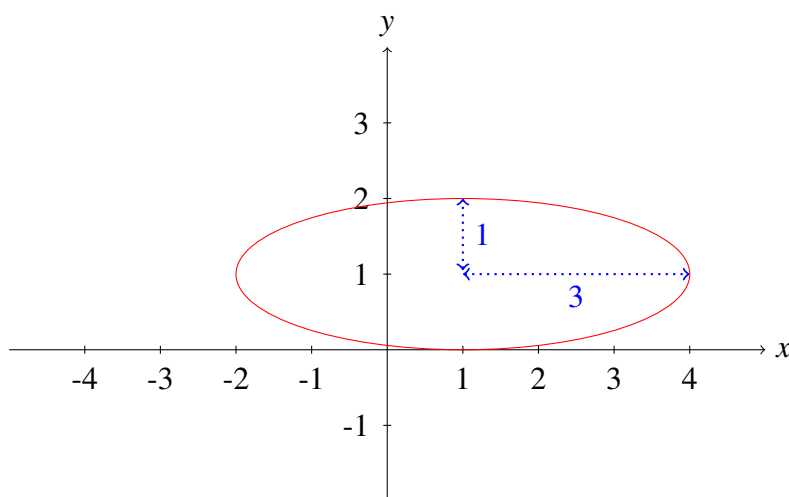


Figure 2.7: Ellipsen fra oppgave **a)** translateret.

Rotasjon av objekter

Å **rotere** en geometrisk figur burde *heller* ikke ha stor konsekvens for ligningen som beskriver figuren. Tross alt er *formen* den samme.

I stedet for å rottere **figuren** kan vi like godt rotere hele **koordinatsystemet**.

I det roterte koordinatsystemet, må ligningene da være på akkurat samme form som ligningene vi hadde i utgangspunktet.

Eksempel:

Anta at vi har som før linjen $y = -x$ i et (x, y) -koordinatsystem, som vist i figur 2.8 .

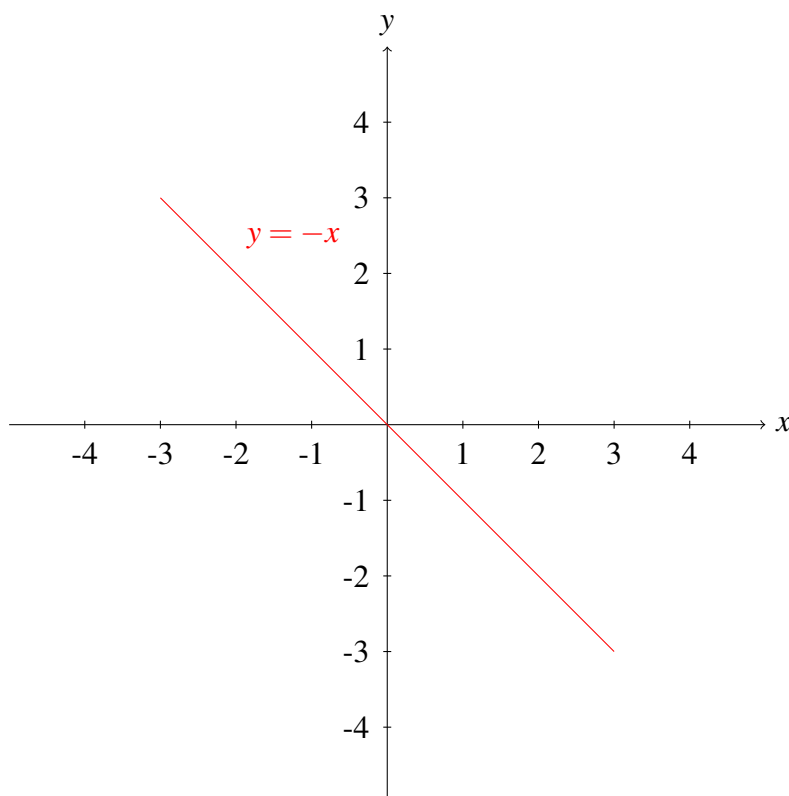


Figure 2.8: Linjen $y = -x$ i et (x, y) -koordinatsystem.

Anta vi ønsker å rotere koordinatsystemet 60 grader mot klokka med senter i origo.

La de roterte koordinatene være gitt ved x' og y' , som vist i figur 2.9.

Da er sammenhengen mellom de gamle og nye koordinatene gitt ved ³

$$x' = x \cdot \overbrace{\cos 60^\circ}^{1/2} + y \cdot \overbrace{\sin 60^\circ}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \quad (2.13)$$

$$y' = -x \cdot \overbrace{\sin 60^\circ}^{\sqrt{3}/2} + y \cdot \overbrace{\cos 60^\circ}^{1/2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y) \quad (2.14)$$

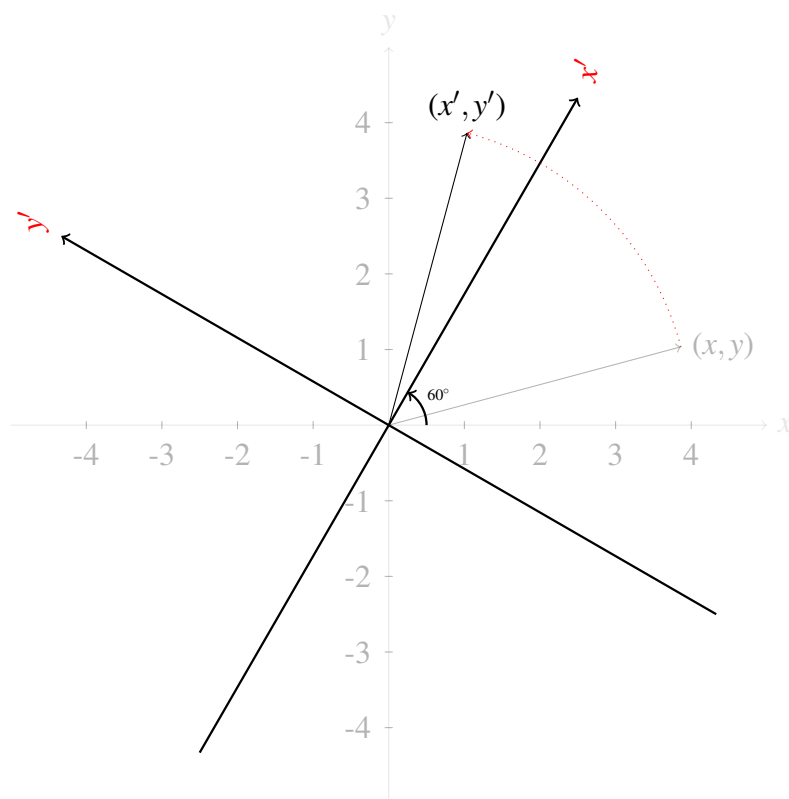


Figure 2.9: Rotert (x', y') -koordinatsystem.

³Ta disse formelene for gitt.

I figur 2.10 har vi tegnet inn den roterte linjen.

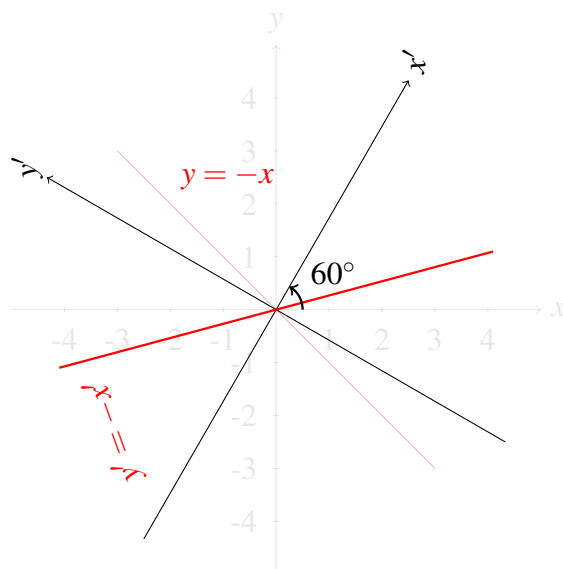


Figure 2.10: Den roterte linjen $y' = -x'$.

Legg merke til at ligningen for linjen er uendret i det nye koordinatsystemet, dvs. $y' = -x'$. Vi kan nå bruke lign.(2.13) og (2.14) for å substituere tilbake til (x,y) -koordinatene:

$$y' = -x' \quad (2.15)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y) = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \quad / \cdot 2 \quad (2.16)$$

$$\Downarrow$$

$$-\sqrt{3}x + y = -x - \sqrt{3}y \quad / +x \text{ og } -y \quad (2.17)$$

$$\Downarrow$$

$$-\sqrt{3}x + x = -\sqrt{3}y - y \quad / \text{ slå sammen like ledd} \quad (2.18)$$

$$\Downarrow$$

$$-(\sqrt{3} - 1)x = -(\sqrt{3} + 1)y \quad / \cdot \frac{-1}{\sqrt{3} + 1} \quad (2.19)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}x = y \quad (2.20)$$

som er ligningen for den translaterte linjen i (x,y) -koordinatsystemet.

- c) Anta at vi nå roterer den translaterte ellipsen fra oppgave b) 30° mot klokka, se figur 2.11.

Finn ligningen som beskriver ellipsen.^{4 5}

Skriv svaret på enklest mulig form (uten brøk) og samle alle ledd på venstre side, dvs. skriv ligningen på formen

$$A(x,y) = 0 \quad (2.23)$$

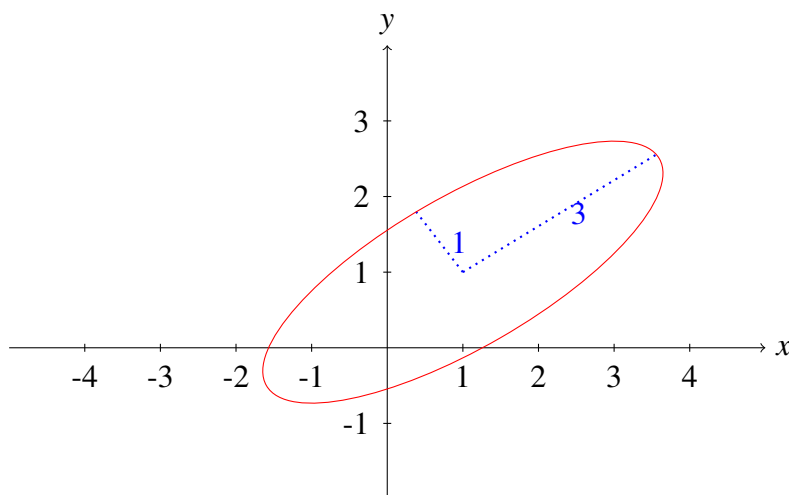


Figure 2.11: En ellipse med senter i punktet (1,1).

■

⁴Mye god trening på algebra her!

⁵Husk at vi står nå i punktet (1, 1) fra oppgave b). Vi har dermed allerede brukt (x', y') -koordinatene, så når vi roterer dette koordinatsystemet, får vi et nytt koordinatsystem. La de roterte koordinatene være gitt ved (x'', y'') . Bruk at sammenhengen mellom (x', y') -koordinatene og de roterte (x'', y'') -koordinatene er gitt ved

$$x'' = x' \cdot \overbrace{\cos 30^\circ}^{\sqrt{3}/2} + y' \cdot \overbrace{\sin 30^\circ}^{1/2} = \frac{1}{2} (\sqrt{3}x' + y') \quad (2.21)$$

$$y'' = -x' \cdot \overbrace{\sin 30^\circ}^{1/2} + y' \cdot \overbrace{\cos 30^\circ}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} (-x' + \sqrt{3}y') \quad (2.22)$$

når man roterer koordinatsystemet 30° mot klokka.

Problem 2.3 — Algebraiske ligninger og løsningsmengden $\mathcal{L}$

Med oppfinnelsen av koordinatsystemet kunne man begynne å beskrive geometriske figurer ved hjelp av algebraiske ligninger, eller rettere sagt ved løsningsmengden av algebraiske ligninger.

La oss se på ligningen:

$$y = 2x^2 - 8 \tag{2.24}$$

- a)** Skriv ned løsningsmengden $\mathcal{L}$ av lign.(2.24). ⁶
- b)** Løsningsmengden $\mathcal{L}$ fra oppgave **a)** av den algebraiske ligningen i lign.(2.24) består av mengden alle punkter (x, y) som tilfredstiller ligningen.

Skriv ned 5 valgfrie punkter (x, y) som er en del av $\mathcal{L}$ fra oppgave **a)**.

- c)** Den geometriske tolkningen av punktene som utgjør løsningsmengden $\mathcal{L}$ er en graf som kalles en parabel.

Bruk GeoGebra ([geogebra.org/classic](https://www.geogebra.org/classic)) og plott grafen til lign.(2.24). ⁷

⁶Her er det ingen regning. Dere skal kun skrive ned det formelle svaret.

⁷Det er OK å bare tegne av fra GeoGebra og rett inn på arket. Dere trenger ikke skrive ut fra PC.

- d) Les av fra grafen i oppgave b) og finn de punktene (x, y) hvor parabelen skjærer x -aksen.

Disse punktene kalles **nullpunkter**.⁸

- e) Skjæringspunktet til parabelen med x -aksen fra oppgave d), har en algebraisk oversettelse i form av en ligning.

Løs denne ligningen.

La oss i tillegg se på **linjen**

$$y = 2x - 8 \tag{2.25}$$

- f) Bruk igjen GeoGebra og plott linjen i lign.(2.25) sammen med parabelen i lign.(2.24).

Les fra grafen og finn de **skjæringspunktene** (x, y) mellom parabelen og linjen.

- g) Skjæringspunktet til parabelen linjen har en algebraisk oversettelse.

Finn koordinatene til skjæringspunktene ved regning.

■

⁸I denne oppgaven skal du ikke gjøre noen utregninger.

Problem 2.4 — Klassifisering av algebraiske ligninger

En algebraisk ligning og den tilhørende løsningsmengden $\mathcal{L}$ er så fundamentale begreper at vi definerer disse begrepene generelt.

Definisjon 2.0.1 — Algebraisk ligning

En algebraisk ligning er en ligning på formen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.26)$$

hvor $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er to algebraiske uttrykk av n variabler $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Definisjon 2.0.2 — Løsningsmengden $\mathcal{L}$

Løsningsmengden $\mathcal{L}$ av den algebraiske ligningen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.27)$$

er definert som mengden

$$\mathcal{L} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \}. \quad (2.28)$$

dvs. mengden av alle punktene $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ som oppfyller lign.(2.27).

- a) Skriv ned løsningsmengdene til de algebraiske ligningene nedenfor. ⁹

$$i) \quad x = 4 \qquad (2.29)$$

$$ii) \quad x^2 = 36 \qquad (2.30)$$

$$iii) \quad y = 2x - 3 \qquad (2.31)$$

$$iv) \quad x^5 = 34 \qquad (2.32)$$

$$v) \quad y = 4x^2 + 2x - 7 \qquad (2.33)$$

■

⁹Altså her skal man kun skrive ned svaret. Ingen utregninger behøves.

Problem 2.5 — Klassifisering

Vi klassifiserer en algebraisk ligning

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.34)$$

etter to **nøkkelstørrelser**:

1. antall *variabler* (dimensjonen),
2. *graden* (høyeste potens x^k).

- a)** Hvor mange variabler har ligningen nedenfor?
Og hva er graden?

$$i) \quad 5x^2 - 3 = 0 \quad (2.35)$$

$$ii) \quad 2x + 3.32 = z \quad (2.36)$$

$$iii) \quad 0 = az^2 + bz + c \quad (a, b, c \text{ er konstanter}) \quad (2.37)$$

$$iv) \quad y^3 + 5z^7 = 2x + 1 \quad (2.38)$$

■

Problem 2.6 — Løsningsmetodikk: Transformasjoner

Hovedideen bak det å transformere en ligning til en nye ligning, er at den nye ligningen er på en **enklere** form enn den vi startet med.

Definisjon 2.0.3 — Transformasjon

Anta vi har en algebraisk ligning

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.39)$$

med tilhørende løsningsmengde $\mathcal{L}$.

En **transformasjon** T av lign.(2.39), er en matematisk operasjon som transformerer de algebraiske uttrykkene A og B til to nye algebraiske uttrykk A' og B' slik at den nye ligningen

$$A'(x_1, x_2, \dots, x_n) = B'(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.40)$$

har samme løsningsmengden $\mathcal{L}$ som den opprinnelige ligningen.

a) Løs ligningen

$$4x^2 - 100 = 0 \quad (2.41)$$

ved å bruke de riktige transformasjonene.

Si eksplisitt hva slags transformasjon du gjør i hvert steg.

Dersom den ukjente finnes inni en kvadratroten, kaller vi ligningen irrasjonal.
 For å bli kvitt kvadratroten må vi kvadrere ligningen:

$$\underbrace{a=b}_{1 \text{ løsning}} \Rightarrow \underbrace{a^2=b^2}_{2 \text{ løsninger}} \quad (2.42)$$

$$a=b \quad a=b \text{ eller } a=-b \quad (2.43)$$

Vi ser at det kan være flere sanne verdier av ligningen $a^2 = b^2$ enn utgangspunktet.
2 løsninger 1 løsning

Derfor må vi teste om de 2 løsningene også oppfyller utgangspunktet.

b) Løs ligningen

$$\sqrt{x-1} = 3-x \quad (2.44)$$

ved å bruke de riktige transformasjonene.

Si eksplisitt hva slags transformasjon du gjør i hvert steg.

Må du teste at løsningene du finner også oppfyller utgangspunktet,
 dvs. også oppfyller lign.(2.44)? I så fall, utfør testen. ¹⁰

■

¹⁰I denne oppgaven kan du bruke at løsningen av 2. gradsligningen $x^2 - 7x + 10 = 0$ er $x=2$ eller $x=5$.
 (Kan løses via ABC-formelen som vi skal lære om senere i kurset).

Problem 2.7 — Lineære ligninger med to variabler**Definisjon 2.0.4 — Lineære ligninger med 2 variabler**

En linær ligning med to variabler er definert ved

$$y = ax + b \tag{2.45}$$

hvor $a \neq 0$ og $a, b \in \mathbb{R}$.

Anta at vi følgende ligninger:

$$y = -2x + 6 \tag{2.46}$$

$$y = 3x - 4 \tag{2.47}$$

- a)** Hva slags geometrisk tolkning har 1. gradsligningen i lign.(2.46)?

Hva er stigningstallet til grafen beskrevet av lign.(2.46)?

I hvilket punkt skjærer grafen beskrevet av lign.(2.46) y -aksen?

- b)** Finn skjæringspunktet til linjene **grafisk**.

Bruk gjerne GeoGebra når du plotter. ([geogebra.org/classic](https://www.geogebra.org/classic)) ¹¹

- c)** Finn skjæringspunktet til linjene ved **regning**.

- d)** Finn nullpunktet til lign.(2.46), dvs. skjæringen med x -aksen.

- e)** Hvor mange skjæringer med x -aksen kan en linje maksimalt ha?

- f)** Kan en linje ha ingen skjæring med x -aksen?

¹¹Det er OK å bare tegne av fra GeoGebra og rett inn på arket. Dere trenger ikke skrive ut fra PC.

■

Problem 2.8 — Lineære ligningssystem

Dersom vi har flere lineære ligninger som skal løses samtidig, har vi et *lineært ligningssystem*.

Definisjon 2.0.5 — Lineært ligningssystem med 2 variabler

Et lineært ligningssystem med 2 variabler består av n ligninger som må løses samtidig.

$$a_1y + b_1x = c_1 \quad (2.48)$$

$$a_2y + b_2x = c_2 \quad (2.49)$$

$$\vdots$$

$$a_ny + b_nx = c_n \quad (2.50)$$

hvor $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ og $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

a) Løs ligningssystemet:

$$7x + 5y = 11 \quad (2.51)$$

$$3x + 3y = 8 \quad (2.52)$$

Tegn først opp linjene i et koordinatsystem. Bruk gjerne GeoGebra. Løs til slutt ligningssystemet algebraisk. ¹²

b) Anta vi legger til ligningen $y = x$ i ligningssystemet fra oppgave **a**). Da får vi et ligningssystem med to variable og 3 ligninger:

$$\begin{aligned} 7x + 5y &= 11 \\ 3x + 3y &= 8 \\ y &= x \end{aligned} \quad (2.53)$$

Bruk f.eks. GeoGebra og plott ligningssystemet ovenfor. Konkluder ut fra figuren om ligningssystemet har en løsning eller ikke.

■

¹²Grunnen til at vi ber dere tegne en figur er blant annet at dere skal få en geometrisk innsikt i betydningen av ligningene og betydningen av skjæring mellom to linjer.

Problem 2.9 — ABC-formelen - finner nullpunktene

ABC-formelen er en sentral formel i faget. **ABC-formelen finner nullpunktene til en 2. gradsligning.**

Vi skal i denne gruppeoppgaven forstå hvordan ABC-formelen kan utledes.

I kompendiet har vi følgende setning:

Setning 2.0.1 — ABC-formelen

Løsningen av en 2. gradsligning med en variabel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.54)$$

er gitt ved den såkalte ABC-formelen

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2.55)$$

dvs. løsningsmengden er gitt ved

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \quad (2.56)$$

Men hvor kommer formlene i lign.(2.55) fra?

Hva er logikken bak dem?

Svaret er mer sammensatt enn man skulle tro.

La oss ta en **historisk** reise for å forstå dybden i dette spørsmålet.

Det skulle ta menneskeheten 1037 år fra den første kjente løsningen av en 2. gradsligning til den formen vi kjenner idag gitt ved lign.(2.55).

400BC: (babylonerne)

Babylonerne løste ikke ligninger, men de løste praktiske problemer som egentlig var en skjult 2. gradsligning.

Problemet de løste var å bestemme sidene x og y i et rektangel dersom arealet A og halve omkretsen O_h var gitt, se figur 2.12.

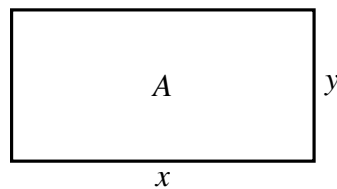


Figure 2.12: Arealet A og halve omkretsen O_h var gitt, finn sidene.

Ligningene for arealet og halve omkretsen var da gitt ved ligningene

$$x + y = O_h \quad \text{halve omkretsen} \quad (2.57)$$

$$xy = A \quad \text{arealet} \quad (2.58)$$

a) Hvilke **variabler** har dette problemet?

Hvilke **parametre** har dette problemet?

Begrunn svarene kort.

- b)** Vis, ved å bruke lign.(2.58) for å substituere for y inn lign.(2.57), at variabelen x oppfyller ligningen:

$$x^2 + A = O_h x \quad (2.59)$$

Vil y oppfylle samme type ligning?
Begrunn svaret kort.

Babylonerne skrev opp en **oppskrift** for å finne løsningen på lign.(2.59):

1. *Ta halve av omkretsen O_h .*
2. *Kvadrer resultatet.*
3. *Trekk fra arealet A .*
4. *Finn den (positive) kvadratroten.* ¹³
5. *Adder resultatet fra steg 1. og steg 4. for å finne x .*

- c)** Bruk babylonernes oppskrift og skriv opp løsningen for lign.(2.59).
- d)** Bruk ABC -formelen til å regne ut den positive løsningen av lign.(2.59), og skriv om løsningen slik at den blir lik løsningen som babylonerne beskrev.

¹³Dette gjorde de ved hjelp av en tabell av kvadrat. I tillegg hadde de ikke begrep om *negative* tall, så de regnet ut kun den ene løsningen som sikret et positivt svar.

1637 AC: (René Descartes)

René Descartes var oppfinneren av *koordinatsystemet*. Ved hjelp av koordinatsystemet og enkle geometriske betraktninger kunne han finne den generelle *ABC*-formelen som vi kjenner idag.

Vi skal her prøve å gjenskape denne moderne utledningen av *ABC*-formelen. Vi starter med å se på et konkret eksempel.

Eksempel:

Anta vi ønsker å løse ligningen:

$$0 = 2x^2 + 4x - 6 \quad (2.60)$$

René ville først ha tegnet opp grafen til ligningen

$$y = 2x^2 + 4x - 6 \quad (2.61)$$

i et (x,y) -koordinatsystem, se figur 2.13. Da er løsningen gitt ved skjæringspunktene til x -aksen.

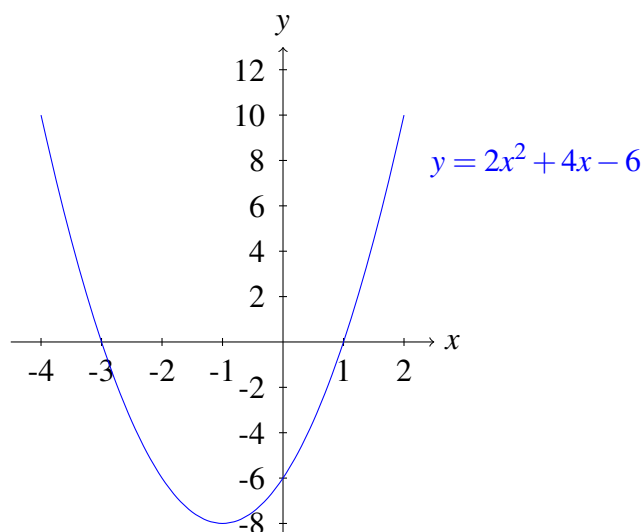


Figure 2.13: Grafen til $y = 2x^2 + 4x - 6$.

Ideen til Rene Descartes var nå enkel:

1. *Translater koordinatsystemet horisontalt til et nytt (x', y') -koordinatsystem slik at grafen blir symmetrisk rundt den nye y' -aksen.*
2. *Finn et uttrykk for grafen i de nye koordinatene og finn nullpunktene i det nye koordinatsystemet.*
3. *Oversett løsningen til de opprinnelige (x, y) -koordinatene.*

Steg 1:

Translasjon lærte vi om i oppgave 2.2. Figur 2.14 viser det translaterte koordinatsystemet:

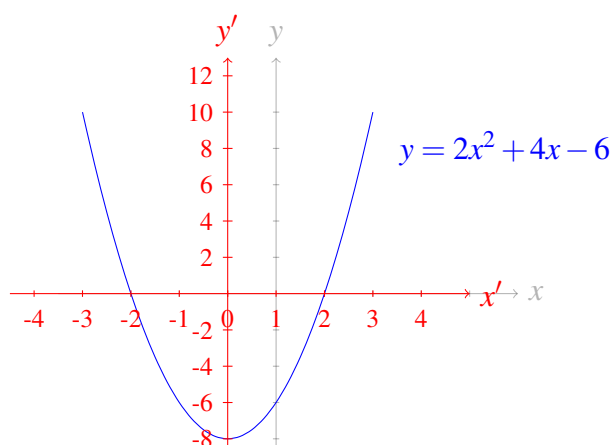


Figure 2.14: Grafen til $y = 2x^2 + 4x - 6$.

Sammenhengen mellom de opprinnelige (x, y) -koordinatene og de nye (x', y') -koordinatene er da gitt ved

$$x = x' - 1 \tag{2.62}$$

$$y = y' \tag{2.63}$$

- e) Gjennomfør 2. steg i Descartes' oppskrift som sier at "*finn et uttrykk for grafen i de nye koordinatene*", dvs. vis at ligningen for grafen er gitt ved

$$y' = 2x'^2 - 8 \quad (2.64)$$

uttrykt i (x', y') -koordinatene.

- f) Finn nullpunktene til grafen for lign.(2.64) ved å sette $y' = 0$.

- g) Gjennomfør Descartes' 3. steg og oversett løsningen til de opprinnelige (x, y) -koordinatene.

- h) Bruk Descartes' metode på den generelle 2. gradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a > 0 \quad (2.65)$$

og utled dermed ABC -formelen. ¹⁴

Dere trenger ikke å tegne opp noen figurer.

■

¹⁴Hint: Sammenhengen mellom de translaterte (x', y') -koordinatene og de opprinnelige (x, y) -koordinatene er gitt ved

$$x = x' - \frac{b}{2a} \quad (2.66)$$

$$y = y' \quad (2.67)$$

Problem 2.10 — ABC-formelen

En kvadratisk ligning med én variabel er definert ved:

Definisjon 2.0.6 En kvadratisk ligning med 1 variabel er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2.68)$$

hvor $a \neq 0$, b og c er reelle parametre og x er den ukjente variabelen.

Å løse denne ligningen, dvs. finne nullpunktene til 2. gradsligningen, finnes via ABC-formelen:

Setning 2.0.2 — ABC-formelen

Løsningen av en 2. gradsligning med en variabel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.69)$$

er gitt ved den såkalte ABC-formelen

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2.70)$$

dvs. løsningsmengden

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \quad (2.71)$$

Fra ABC-formelen kan vi klassifisere hvor mange løsninger lign.(2.68) har ved å se på *fortegnet* på den såkalte *diskriminanten*

$$b^2 - 4ac \quad (2.72)$$

Setning 2.0.3 En kvadratisk ligning

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.73)$$

har 3 mulige situasjoner for løsningsmengden avhengig av fortegnet på diskriminanten i ABC-formelen:

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{to løsninger} \quad (2.74)$$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{èn løsning} \quad (2.75)$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ingen løsning.} \quad (2.76)$$

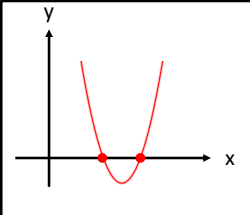
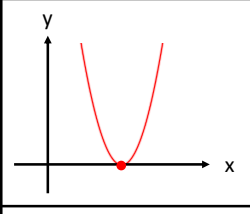
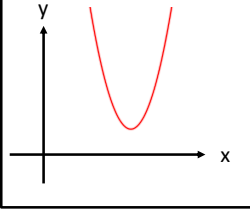
	$b^2 - 4ac > 0$	To løsninger	$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$b^2 - 4ac = 0$	En løsning	$c = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$
	$b^2 - 4ac < 0$	Ingen løsninger	Ingen løsninger siden kvadratroten <i>ikke</i> er definert for <i>negative</i> tall (komplekse tall ikke pensum)

Figure 2.15: Antall løsninger fra ABC-formelen.

a) Hvorfor har lign.(2.70) fått navnet ABC-formelen?

b) Regn ut diskriminanten $b^2 - 4ac$ og finn eventuelle løsninger til ligningen:

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 \quad (2.77)$$

c) Regn ut diskriminanten $b^2 - 4ac$ og finn eventuelle løsninger til ligningen:

$$2x^2 + 4x - 2 = 0 \quad (2.78)$$

d) Regn ut diskriminanten $b^2 - 4ac$ og finn eventuelle løsninger til ligningen:

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \quad (2.79)$$

■

Problem 2.11 — Fundamentalsetningen for aritmetikk

Et heltall $n > 1$ kan enten dekomponeres i mindre naturlige tall (primtall) ¹⁵ eller så er tallet et primtall som ikke kan faktorerises ytterligere:

Setning 2.0.4 — Fundamentalsetningen for aritmetikk

Ethvert naturlig tall $n > 1$ kan skrives som et entydig **produkt av primtall** p_i

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_m^{a_m} \quad (2.81)$$

hvor $i \leq m$ og $a_i \in \mathbb{N}$.

a) Faktorerisér følgende naturlige tall dersom de ikke allerede er faktorerisert.

$$i) \quad 1 \quad (2.82)$$

$$ii) \quad 2 \quad (2.83)$$

$$iii) \quad 3 \quad (2.84)$$

$$iv) \quad 4 \quad (2.85)$$

$$v) \quad 5 \quad (2.86)$$

$$vi) \quad 6 \quad (2.87)$$

¹⁵Et primtall er et naturlig tall $n \geq 1$, som bare er delelig med seg selv og 1. De første 10 primtallene er:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \quad (2.80)$$

b) Faktoriser følgende naturlige tall dersom de ikke allerede er faktorisert.

$$i) \quad 9 \qquad (2.88)$$

$$ii) \quad 34 \qquad (2.89)$$

$$iii) \quad 108 \qquad (2.90)$$

$$iv) \quad 258 \qquad (2.91)$$

$$v) \quad 11 \qquad (2.92)$$

$$vi) \quad 1024 \qquad (2.93)$$

■

Problem 2.12 — Fundamentalsetningen for algebra

Faktorisering av polynomer gjøres ved hjelp av nullpunktene.

Setning 2.0.5 — Fundamentalsetningen for algebra

Polynomet

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.94)$$

kan faktoriseres på formen

$$y = a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_{n-1})(x - c_n) \quad (2.95)$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_n$ er nullpunktene (mulig komplekse) til polynomet.

a) Finn faktoriseringen til polynomene: ¹⁶

$$i) \quad y = x^2 + 13x \quad (2.96)$$

$$ii) \quad y = 2z^3 - 16z^2 \quad (2.97)$$

$$iii) \quad y = -x + 2x^2 - x^3 \quad (2.98)$$

$$iv) \quad y = xa + 5x \quad (2.99)$$

$$v) \quad y = x^2 + 4x + 4 \quad (2.100)$$

$$vi) \quad y = 4x^2 + 20x + 25 \quad (2.101)$$

¹⁶Husk, a, b, c osv. er parametre, mens x, y og z er variabler.

b) Finn faktoriseringen til polynomene:

$$i) \quad y = ax - 2x \quad (2.102)$$

$$ii) \quad y = 2a^2z + 4az^2 \quad (2.103)$$

$$iii) \quad y = x^2 + 2xd + d^2 \quad (2.104)$$

$$iv) \quad y = x^2 - 2xe + e^2 \quad (2.105)$$

$$v) \quad y = x^2 - a^2 \quad (2.106)$$

$$vi) \quad y = 2x^4c^4 - 32 \quad (2.107)$$

c) Finn faktoriseringen til følgende algebraiske uttrykket:

$$i) \quad y = -32 + 2x^2 \quad (2.108)$$

$$ii) \quad y = -7 + x^2 - 6x \quad (2.109)$$

$$iii) \quad y = -1 + x^2 \quad (2.110)$$

$$iv) \quad y = 2z^2 - 6z + 4 \quad (2.111)$$

$$v) \quad y = 5 + 15x \quad (2.112)$$

$$vi) \quad y = z^2 - 2b^2 \quad (2.113)$$

■

Problem 2.13 — Polynomer og faktorisering

Denne kombinerer både *ABC*-formelen, polynomer og faktorisering.

Anta vi har gitt et 3. gradspolynom:

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2. \quad (2.114)$$

Da vet vi fra **algebraens fundamentalsetning**, se lign.(2.117), at vi kan faktorisere polynomet på høyresiden i lign.(2.114), dvs.

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 = \underbrace{(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)}_{\text{faktorisert}} \quad (2.115)$$

hvor c_1, c_2 og c_3 er nullpunktene (muligens komplekse) til polynomet.

Setning 2.0.6 — Fundamentalsetningen for algebra

Polynomet

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.116)$$

kan faktorerises på formen

$$y = a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_{n-1})(x - c_n) \quad (2.117)$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_n$ er nullpunktene (mulig komplekse) til polynomet.

a) Tegn opp polynomet

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad (2.118)$$

ved hjelp av GeoGebra ([geogebra.org/classics](https://www.geogebra.org/classics)).

Har polynomet tre *reelle* nullpunkter?
Begrunn svaret kort.

Les av nullpunktene på grafen. ¹⁷

Nå er oppgave a) ferdig.

På neste side og frem til side 43 skal vi vise hvordan man finner nullpunktene til 3. gradspolynomet i lign.(2.118) ved regning.

Når nullpunktene er funnet, kan vi også faktorisere polynomet. Det skal vi gjøre i b) på side 43.

Til slutt, i oppgave c) på side 44, skal vi se på et **annet** polynom og løse det fra start til slutt, også det ved regning. Da er det meningen at dere skal bruke samme metode som i eksemplet på neste side og frem til side 43.

¹⁷Altså, oppgaven krever ingen regning.

Anta nå at vi kjenner *ett* av nullpunktene til polynomet, f.eks. anta vi vet at

$$x = 1 \quad (2.119)$$

løser ligningen ¹⁸

$$0 = x^3 + 2x^2 - x - 2. \quad (2.120)$$

Hvordan kan vi da finne de to *andre* nullpunktene?

Det er dette som er tema i denne gruppeoppgaven.

Setning 2.0.7 Dersom 3. gradspolynomet

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0 \quad (2.121)$$

har et kjent nullpunkt $x = c$, kan vi **faktorisere** polynomet i lign.(2.121) på formen

$$y = (x - c) \overbrace{(a'x^2 + b'x + c')}^{2. \text{ gradspolynom}}, \quad a' \neq 0. \quad (2.122)$$

Kjenner vi med andre ord ett av nullpunktene, kan vi finne de to andre nullpunktene ved å løse 2. gradsligningen

$$a'x^2 + b'x + c' = 0, \quad (2.123)$$

via **ABC-formelen**.

Men hvordan finner vi parametrene a' , b' og c' i lign.(2.122)?

¹⁸Ved å sette inn $x = 1$ i lign.(2.120), kan vi raskt sjekke at $x = 1$ faktisk *er* en løsning.

Setningen vi bruker for å bestemme parametrene a' , b' og c' i lign.(2.122) er enkel, men også svært kraftigfull:

Setning 2.0.8 La:

$$y = a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad \text{og} \quad y' = b_1x^1 + b_2x^2 + \dots + b_nx^n \quad (2.124)$$

Dersom polynomene er like, dvs.:

$$y = y' \quad (2.125)$$

så er også alle **koeffisientene** like:

$$a_i = b_i \quad (2.126)$$

for alle $i = 1, \dots, n$.

Med ord:

Dersom to polynomer av **samme grad** er like, må alle **koeffisientene** være like.

La oss fortsette eksempelet vårt med denne nye informasjonen nært i minne:
Siden

$$x = 1 \quad (2.127)$$

løser ligningen

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0, \quad (2.128)$$

så har vi, via lign.(2.122):

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 = \overbrace{(x-1)(a'x^2 + b'x + c')}^{\text{lign.(2.122)}} \quad (\text{pilmetoden}) \quad (2.129)$$

$$= a'x^3 + b'x^2 + c'x - a'x^2 - b'x - c' \quad (\text{like ledd}) \quad (2.130)$$

$$= a'x^3 + (b' - a')x^2 + (c' - b')x - c' \quad (2.131)$$

Vi har dermed to 3. gradspolynomer som er like (i rødt):

$$\text{lign.(2.129)} = \text{lign.(2.131)} \quad (2.132)$$

$$\overbrace{1 \cdot x^3 + 2x^2 - 1x - 2}^{\text{lign.(2.129)}} = \overbrace{a'x^3 + (b' - a')x^2 + (c' - b')x - c'}^{\text{lign.(2.131)}} \quad (2.133)$$

Setning 2.0.8 sier da at koeffisientene må være like, se lign.(2.126).¹⁹
Lign.(2.133) gir da ligningene:

$$1 = a' \quad (2.134)$$

$$2 = b' - a' \Leftrightarrow 2 = b' - 1 \Leftrightarrow b' = 3 \quad (2.135)$$

$$-1 = c' - b' \Leftrightarrow -1 = c' - 3 \Leftrightarrow c' = 2 \quad (2.136)$$

¹⁹Husk at $x = 1 \cdot x$

Vi har dermed funnet koeffisientene:

$$a' = 1 \quad (2.137)$$

$$b' = 3 \quad (2.138)$$

$$c' = 2 \quad (2.139)$$

som innsatt i lign.(2.129) gir

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) \overbrace{(1x^2 + 3x + 2)}^{ABC\text{-formelen}} \quad (2.140)$$

- b)** Bestem de to siste nullpunktene til polynomet i lign.(2.140) ved hjelp av *ABC*-formelen, dvs. løs ligningen

$$1x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (2.141)$$

Stemmer svaret dere får med avlesningen av GeoGebra-figuren fra oppgave **a**)?

Skriv polynomet i lign.(2.140) på faktorisert form.

- c) La oss nå se på et **annet** 3. gradspolynom, nemlig:

$$y = x^3 + 2x^2 - 2x - 4 \quad (2.142)$$

Faktoriser 3. gradspolynomet i lign.(2.142) når dere får oppgitt at ett av nullpunktene er gitt ved løsningen

$$x = -2 \quad (2.143)$$

Hva er **nullpunktene** til polynomet i lign.(2.142)?

■

Problem 2.14 — Ulikheter

Alle tallmengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er utstyrt med en *ordningsrelasjon*.
En ordningsrelasjon plasserer i prinsippet alle tallene langs en *rekkefølge*.

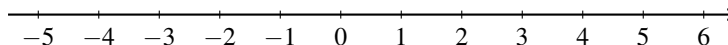


Figure 2.16: Tallene er *ordnet* langs en rett linje.

Definisjon 2.0.7 Dersom et tall b er til høyre for et annet tall a på tallinjen, sier vi at a er mindre enn b .

Matematisk skriver vi

$$a < b. \quad (2.144)$$

Figur 2.17 illustrerer lign.(2.144):

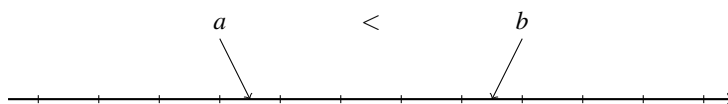


Figure 2.17: Når a er mindre enn b , dvs. $a < b$.

- a) Løs ulikheten, skriv opp løsningsmengden og tegn opp en tallinje for løsningsmengden:

$$i) \quad 4 \leq -2z \quad (2.145)$$

$$ii) \quad 5x + 4 > 3x + 12 \quad (2.146)$$

$$iii) \quad \frac{1}{3}(1 - x) \geq 2(x - 3) \quad (2.147)$$

- b) Sett opp fortegnsskjema og løs polynomulikhetene:

$$i) \quad (x + 3)(x - 1) < 0 \quad (2.148)$$

$$ii) \quad x(x + 2)(x + 4) > 0 \quad (2.149)$$

$$iii) \quad (1 - x)(x + 2) \leq 0 \quad (2.150)$$

- c) Løs polynomulikhetene:

$$i) \quad x^2 - 25 < 0 \quad (2.151)$$

$$ii) \quad x^2 - 5x + 4 \geq 0 \quad (2.152)$$

$$iii) \quad -(4x^2 - 16x + 16) \leq 0 \quad (2.153)$$

■

Problem 2.15 — Ulikheter

Polynomet

$$y = -3x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{609}{2}x^2 - 1209x + 1260 \quad (2.154)$$

har nullpunktene

$$c_1 = -12 \quad , \quad c_2 = 2 \quad , \quad c_3 = \frac{5}{2} \quad , \quad c_4 = 7 \quad (2.155)$$

a) **Løs** ulikheten,

$$y > 0 \quad (2.156)$$

b) **Løs** ulikheten,

$$y < 0 \quad (2.157)$$

■

Problem 2.16 — Ulikheter med rasjonale uttrykk

Definisjon 2.0.8 En rasjonal ulikhet er en ulikhet på formen

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad (2.158)$$

hvor $A(x)$ og $B(x)$ er polynomer av grad n og m hhv.

a) Løs ulikheten:

$$\frac{2x-7}{x+2} < 3 \quad (2.159)$$

b) For sammenligningen sin skyld, la oss nå løse lign.(2.159) med likhet istedet for ulikhet, dvs.:

$$\frac{2x-7}{x+2} = 3 \quad (2.160)$$

Hvor mange løsninger har lign.(2.160)?

Hvor mange løsninger har lign.(2.159)?

■

Problem 2.17 — Absoluttverdi

Definisjon 2.0.9 — Absoluttverdi

Absoluttverdien av et tall $a \in \mathbb{R}$ er definert som

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{ når } a \geq 0 \\ -a & , \text{ når } a < 0 \end{cases} \quad (2.161)$$

a) Regn ut absoluttverdiene:

$$i) \quad |-3.85| \quad (2.162)$$

$$ii) \quad |3.85| \quad (2.163)$$

$$iii) \quad |0| \quad (2.164)$$

$$iv) \quad |10^{-5}| \quad (2.165)$$

b) Skisser punktene (x, y) som oppfyller ligningen ²⁰

$$y = |-5x + 7| \quad (2.166)$$

c) Løs likheten

$$y = |-5x + 7| - 2x - 1 = 0 \quad (2.167)$$

■

²⁰Å skisse betyr at man ikke tegner opp nøyaktig, men kun får frem formen på grafen. Bruk kunnskapen du har om en rett linje med stigningstall og skjæringspunkt med y-aksen. Er grafen symmetrisk?

Problem 2.18 — Ulikheter på Haltenbanken

Vi skal i denne gruppeoppgaven se på en anvendelse av **polynomer**, **faktorisering** og **ulikheter** i en aktuell logistikksammenheng.

På Haltenbanken rett utenfor kysten til Nordmøre ligger flere store oljefelt. Her finner vi f.eks. oljefeltene Kristin, Åsgard, Heidrun, Norne, Njord og Draugen, se figur 2.18.

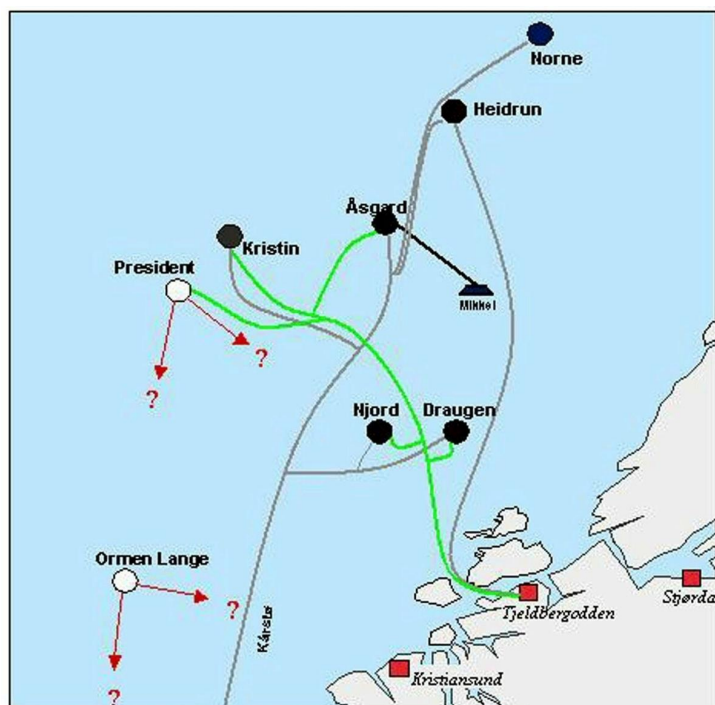


Figure 2.18: Haltenbanken.

Draugen var det første oljefeltet på Haltenbanken, se figur 2.19.

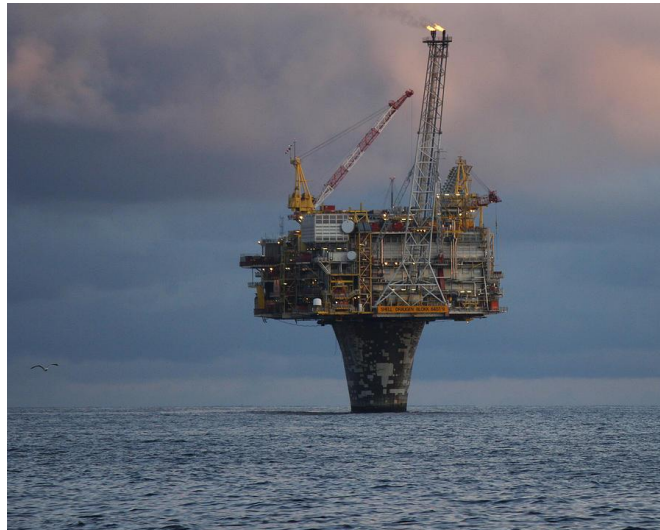


Figure 2.19: Draugen borerigg.

Oljelageret til Draugen ligger på havbunn, ca. 250m dypt vann. Når et tankskip skal hente olje, pumpes oljen fra havbunnen som vist i figur 2.20.



Figure 2.20: Tanking.

Et tankskip koster svært mye å leie/drifte pr. døgn. Dersom *bølgehøyden* er over en viss kritisk høyde c , kan ikke tankskipet pumpe inn olje. Skipet blir da liggende å vente til bølgehøyden komme under den kritiske høyden c .

Når tankskipet ligger og venter på at bølgehøyden blir lav nok, taper oljeselskapet mye penger.

Ekstreme bølgehøyder har også vært nyhetsoppslag i lokalavisen **Tidens Krav** i Kristiansund. Link finner dere [her](#).



Figure 2.21: Atlanterhavsveien utenfor Kristiansund.

For å unngå å sende tankskip til Draugen i de tidspunkt hvor bølgene er for høye, frem-skaffer oljeselskapene **prognoser** for bølgehøyden for et visst antall dager frem i tid.

Anta prognosene for bølgehøyden h for de neste 6 dagene ($0 < t < 6$) er gitt ved 6. gradspolynomet:

$$y = -0.1t^6 + 1.58t^5 - 9.075t^4 + 22.645t^3 - 21.095t^2 - 1.7785t + 14.83 \quad (2.168)$$

- a) Tegn opp polynomet i lign.(2.168) ved hjelp av GeoGebra ([geogebra.org/classics](https://www.geogebra.org/classics)).
21

- b) Anta at den kritiske bølgehøyden er gitt ved

$$c = 7 \text{ meter} \quad (2.169)$$

Tegn inn linjen

$$y = 7 \quad (2.170)$$

i samme figuren som i oppgave a) ved hjelp av GeoGebra ([geogebra.org/classics](https://www.geogebra.org/classics)).
Les av på grafen de **tidsintervallene** mellom $0 < t < 6$ hvor tankskipet kan starte pumping av olje.

²¹Dersom du ikke har tilgang til printer så trenger du kun å skrive at du har brukt GeoGebra.

Vi skal nå finne de samme intervallene ved regning.

Vi starter med å definere et nytt polynom hvor vi tar det gamle og trekker fra bølgehøyden c :

$$y = -0.1t^6 + 1.58t^5 - 9.075t^4 + 22.645t^3 - 21.095t^2 - 1.7785t - 14.83 - c \quad (2.171)$$

hvor vi antar $c = 7$ meter. ²²

- c)** Hva er nullpunktene til polynomet?
Svar uten utregninger.
Begrunn kort hvorfor.

- d)** Regn ut intervallene mellom $0 < t < 6$ hvor tankskipene kan fylle olje ved å løse ulikheten. ²³

$$-0.1t^6 + 1.58t^5 - 9.075t^4 + 22.645t^3 - 21.095t^2 - 1.7785t + 14.83 - c < 0$$

Fikk du samme svar som i oppgave **b**)?

■

²²Vi har med andre ord *trekt* den kritiske bølgehøyden fra den prognostiserte bølgehøyden (det opprinnelige polynomet).

²³Skriv opp faktorisert form av det nye polynomet i oppgave **c**) og bruk fortegnsskjema. Ikke glem koeffisienten -0.1 foran t^6 -leddet.