



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høgskole i logistikk

2. Ligninger og ulikheter

Øving 1: Løsning

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 02

- Utlevering:
 - Mandag 17. aug. kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - senest kl. 12:00 mandag 14. sep.
 - dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- FORarbeid:
 - Se videoene for uke 1 og uke 2
 - Les kompendiet.
 - Les gjennom øvingoppgave 1
- ETTERarbeid:
 - Gå gjennom løsning 1 som legges ut fredag 11. sep. kl. 12:00.

Problem 2.1 — Algebraisk uttrykk

Et algebraisk uttrykk er et uttrykk bygd opp av:

1. *Konstanter*, dvs. heltall $\overbrace{\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots}^{\mathbb{Z}}$
2. *Parametre*, ofte symbolisert ved $a, b, c \dots$
3. *Variabler*, ofte symbolisert ved $x, y, z \dots$

og de *algebraiske operasjonene*:

+ addisjon,

– subtraksjon,

· multiplikasjon,

/ divisjon,

^ potenser,

√ kvadratrøtter.

- a) Nedenfor ser du et algebraisk uttrykk.

Marker hva som er variabler, eksponenter, koeffisienter, ledd, operatorer, konstantledd og parametre.

$$5z^7 + cxy - 19a \tag{2.1}$$

Løsning:

Algebra har en egen terminologi for å beskrive delene av et algebraisk uttrykk:

$$\underbrace{5}_{\substack{2 \\ \downarrow}} \underbrace{z^7}_{\substack{1 \\ \downarrow}} + \underbrace{c}_{\substack{6,2 \\ \downarrow}} \underbrace{xy}_{\substack{3 \\ \downarrow}} - \underbrace{19a}_{\substack{6 \\ \downarrow}} \\ \substack{3 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 5}$$

x, y - variabler

1 - eksponent

2 - koeffisient

3 - ledd

4 - operator

5 - konstantledd

6 - parameter

Legg merke til at en parameter også kan være en koeffisient. ¹

¹En koeffisient er konstanten som står foran en variabel.

Når vi skal vise at to formler er like, starter vi gjerne med en av formlene og bruker et visst antall steg på å komme til den andre formelen. Hvert steg i utledningen må bruke en allerede kjent formel.

b) **Utled** eller *vis at*: ²

$$7(3 + 2x) + 2(5x - 4) - (2x^2)^3 = -8x^6 + 24x + 13 \quad (2.2)$$

Skriv hva slags lov som brukes når du går fra ett steg til neste.

Løsning:

$$7(3 + 2x) + 2(5x - 4) - (2x^2)^3$$

$$= 7 \cdot 3 + 7 \cdot 2x + 2 \cdot 5x - 2 \cdot 4 - 2^3 x^{2 \cdot 3} \quad (\text{dist. lov}) \quad (2.3)$$

$$= 13 + 24x - 8x^{2 \cdot 3} \quad (\text{pot. av pot.}) \quad (2.4)$$

$$= 24x + 13 - 8x^6 \quad (\text{komm. lov}) \quad (2.5)$$

$$= 24x - 8x^6 + 13 \quad (\text{komm. lov}) \quad (2.6)$$

$$= -8x^6 + 24x + 13 \quad (\text{komm. lov}) \quad (2.7)$$

■

²Legg merke til at leddet med størst eksponent flyttes lengst til venstre. Det er vanlig praksis.

Problem 2.2 — Ligninger og geometri

Det viktigste budskapet fra teorien ved denne øvingen er at **geometriske objekter** kan beskrives som **løsningsmengden av ligninger**.

Vi har f.eks. lært i kompendiet at punktene (x, y) som oppfyller ligningen

$$y = 2x - 1 \quad (2.8)$$

er en *linje* i planet med stigningstall **2** og som krysser y-aksen i punktet $(0, -1)$, se figur 2.20.

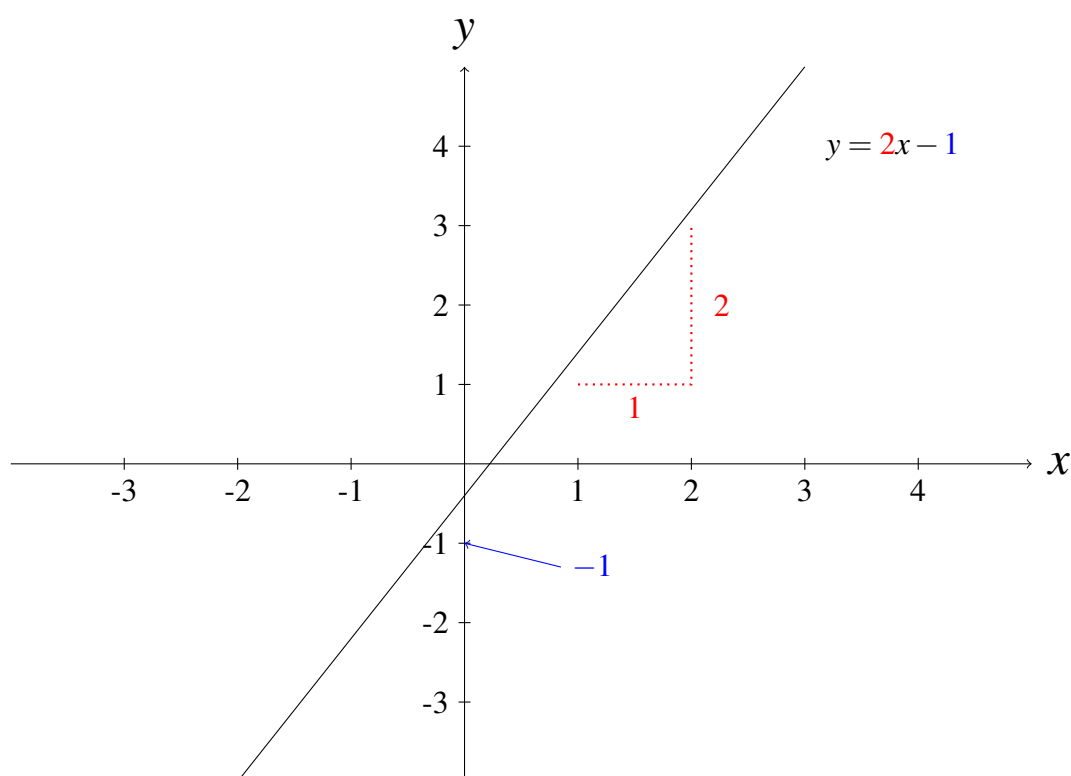


Figure 2.1: Punktene som oppfyller $y = 2x - 1$ er en linje.

Vi har også lært at punktene (x, y) som oppfyller ligningen

$$y = 2x^2 - 1 \quad (2.9)$$

er en *parabel* som krysser y-aksen i punktet $(0, -1)$ og x-aksen i punktene $(-\sqrt{0.5}, 0)$ og $(\sqrt{0.5}, 0)$, se figur 2.2.

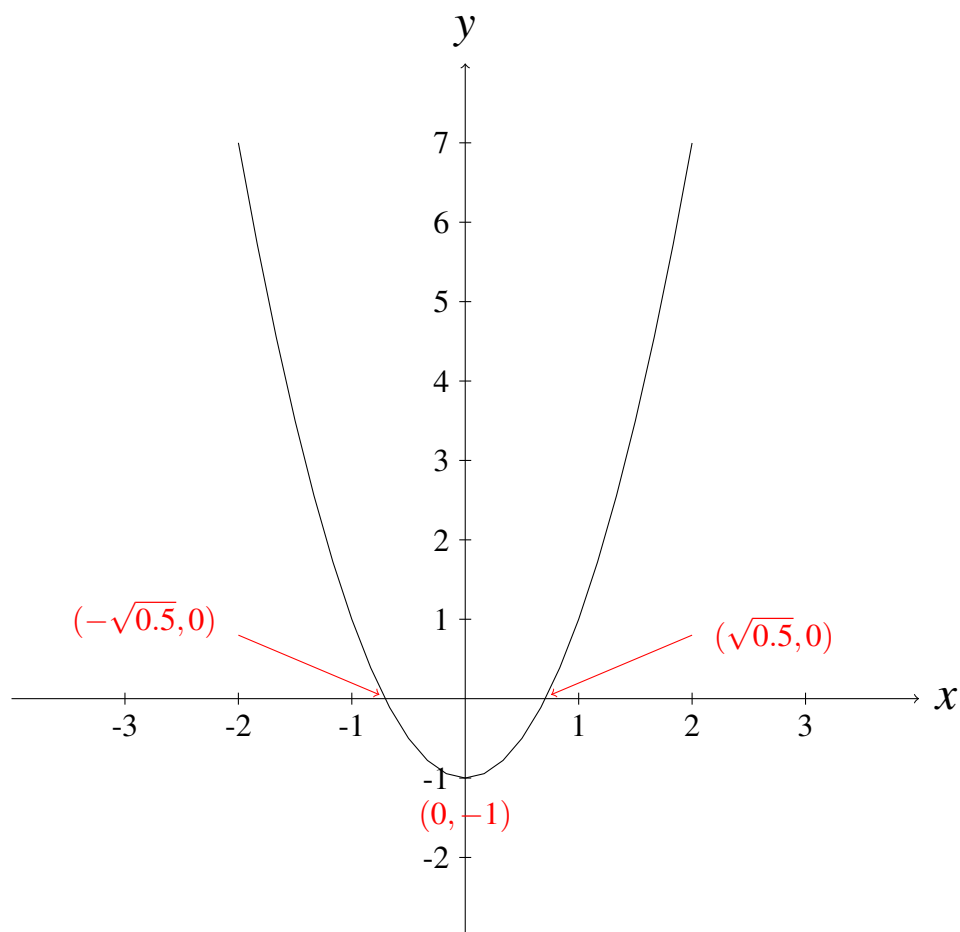


Figure 2.2: Punktene som oppfyller $y = 2x^2 - 1$ er en parabel.

Vi skal nå finne ligningen hvis løsningsmengde gir en **ellipse** i planet.

- a) Skriv opp ligningen hvis løsningsmengde gir en ellipse med senter i origo hvor den minste avstanden fra senteret til ellipsen er **1** (lille halvakse) og den lengste avstanden er **3** (store halvakse) hhv.

Se figur 2.3. ³

Skriv svaret på enklest mulig form (uten brøk) og samle alle ledd på venstre side, dvs. skriv ligningen på formen

$$A(x, y) = 0 \tag{2.10}$$

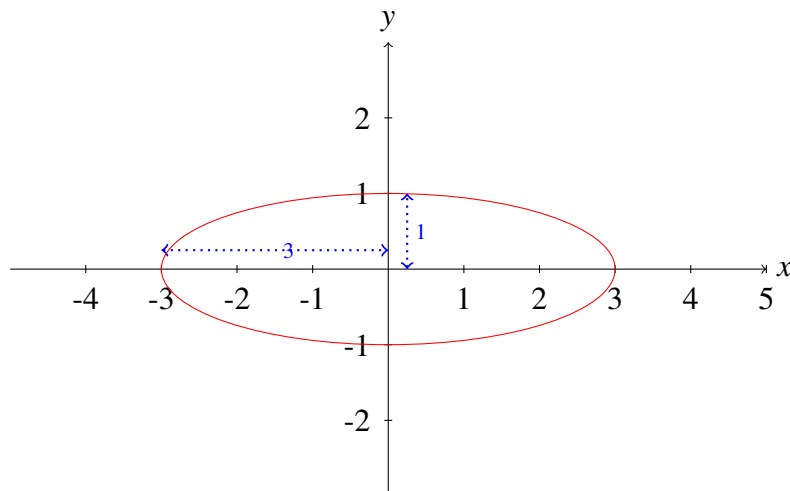


Figure 2.3: Ellipse med senter i origo.

³Søk gjerne på internett for å finne svaret. Poenget i oppgaven er ikke å kunne ligningen for en ellipse, men å innse at en ellipse kan beskrives ved hjelp av en ligning.

Løsning:

Søker på internett og finner at ligningen for en ellipse hvor store halvakse er $a = 3$ og lille halvakse er $b = 1$ er gitt ved:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.11)$$

Skriver lign.(2.11) på formen $A(x, y) = 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Big/ a = 1 \text{ og } b = 3 \quad (2.12)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \quad (2.13)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \quad \Big/ \cdot 9 \quad (2.14)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 9y^2 = 9 \quad \Big/ -9 \quad (2.15)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 9y^2 - 9 = 0 \quad (2.16)$$

Translasjon av objekter

Å **translatere** eller **forskyve** en geometrisk figur burde ikke ha stor konsekvens for ligningen som beskriver figuren. Tross alt er formen den samme.

I stedet for å translatere *figuren* kan vi like godt translatere hele *koordinatsystemet*.

I det translaterte koordinatsystemet, må ligningene da være på akkurat samme form som ligningene vi hadde i utgangspunktet.

Eksempel:

Anta at vi har linjen

$$y = -x \tag{2.17}$$

i et (x,y) -koordinatsystem, som vist i figur 2.4 .

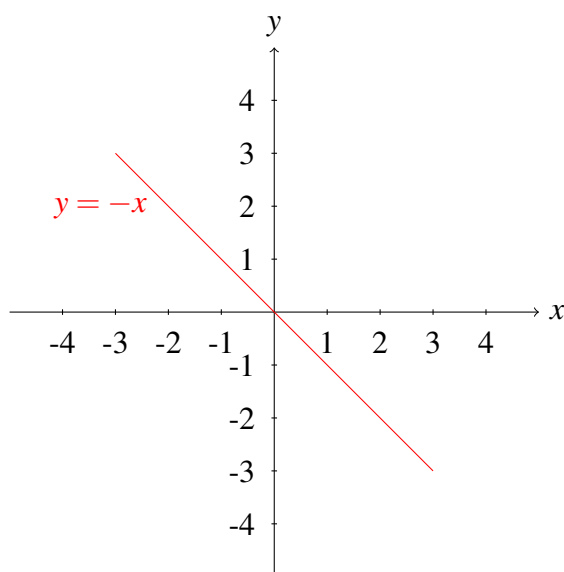


Figure 2.4: Linjen $y = -x$ i et (x,y) -koordinatsystem.

Anta vi ønsker å translater koordinatsystemet slik at det nye origo ligger i punktet $(2, 1)$.

La de translaterte koordinatene være gitt ved x' og y' , som vist i figur 2.5.

Dersom vi står i et punkt (x', y') i det nye koordinatsystemet og vil tilbake til det gamle, må vi gå to steg til venstre og ett steg ned, dvs. sammenhengen mellom de nye og gamle koordinatene gitt ved

$$x' = x - 2 \quad (\text{to steg til venstre}) \quad (2.18)$$

$$y' = y - 1 \quad (\text{ett steg ned}) \quad (2.19)$$

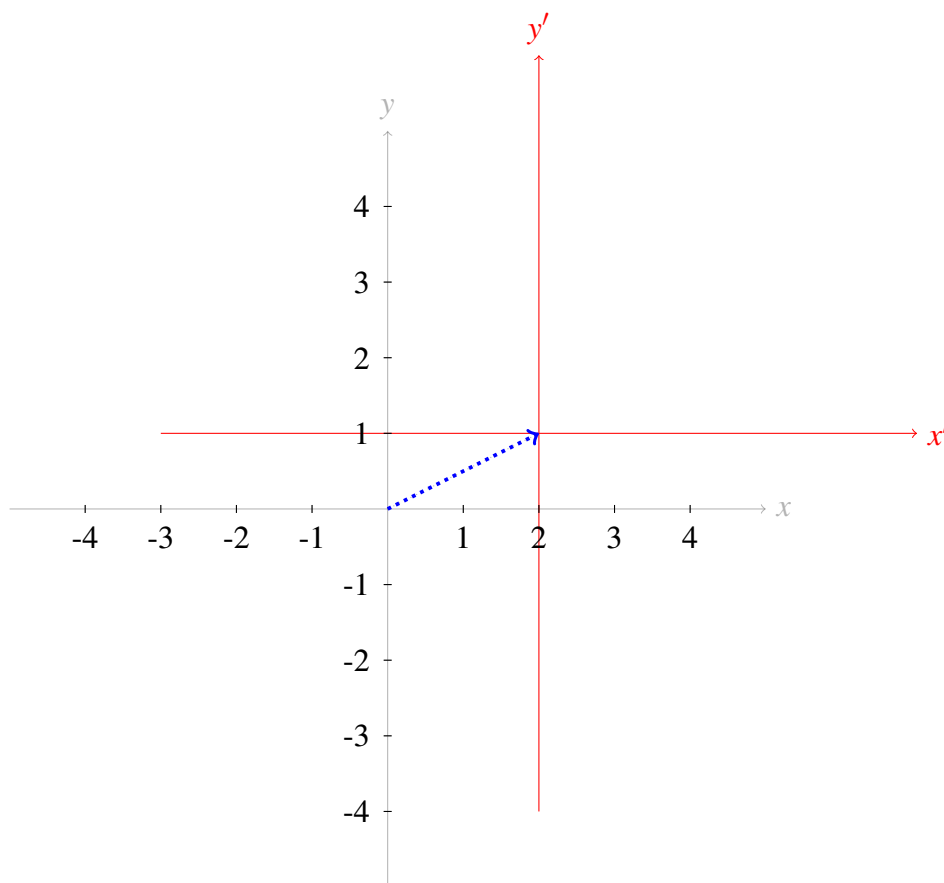


Figure 2.5: Translatert (x', y') -koordinatsystem.

I figur 2.6 har vi tegnet inn den translaterte linjen.

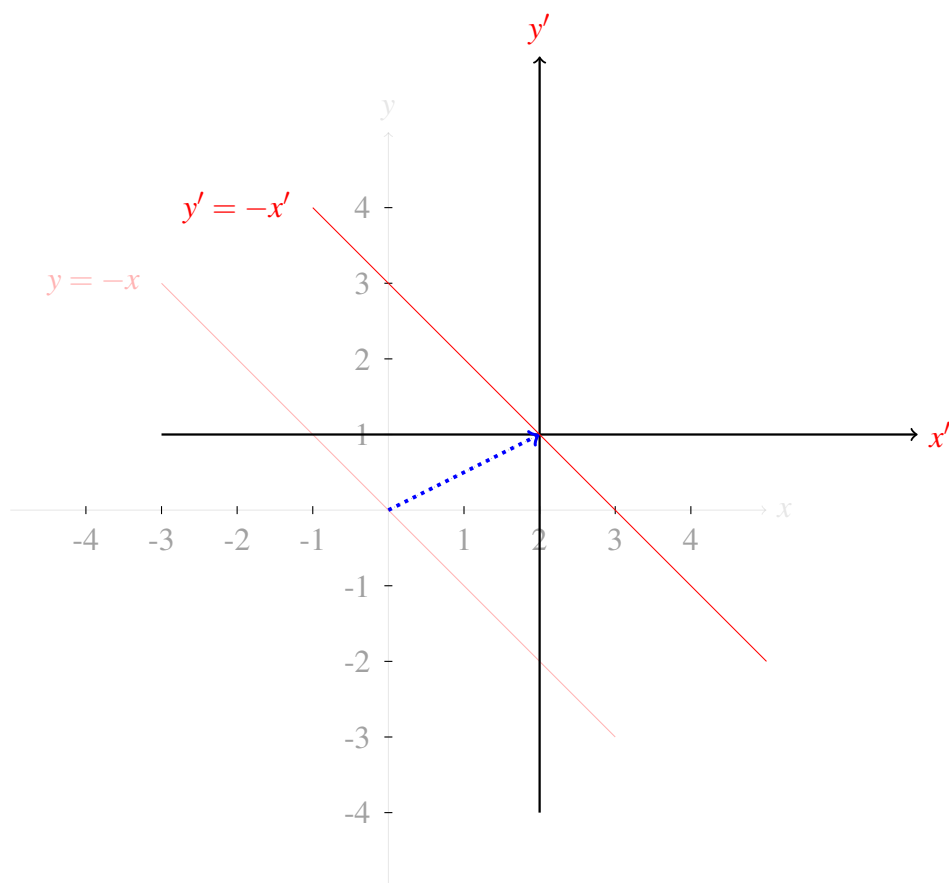


Figure 2.6: Den translaterte linjen $y' = -x'$.

Legg merke til at ligningen for linjen er uendret i det nye koordinatsystemet, dvs. $y' = -x'$. Vi kan nå bruke lign.(2.18) og (2.19) for å substituere tilbake til (x,y) -koordinatene:

$$y' = -x' \tag{2.20}$$

$\Updownarrow$

$$y - 1 = -(x - 2) \tag{2.21}$$

$\Updownarrow$

$$y = -x + 3 \tag{2.22}$$

som er ligningen for den translaterte linjen i (x,y) -koordinatsystemet.

- b) Anta vi translaterer (forskyver) ellipsen fra oppgave a) slik at senteret nå er i punktet $(1, 1)$, se figur 2.7.

Finn ligningen som beskriver ellipsen ved å translaterer hele koordinatsystemet slik at det nye origo ligger i punktet $(1, 1)$.

Skriv svaret på enklest mulig form (uten brøk) og samle alle ledd på venstre side, dvs. skriv ligningen på formen

$$A(x, y) = 0 \tag{2.23}$$

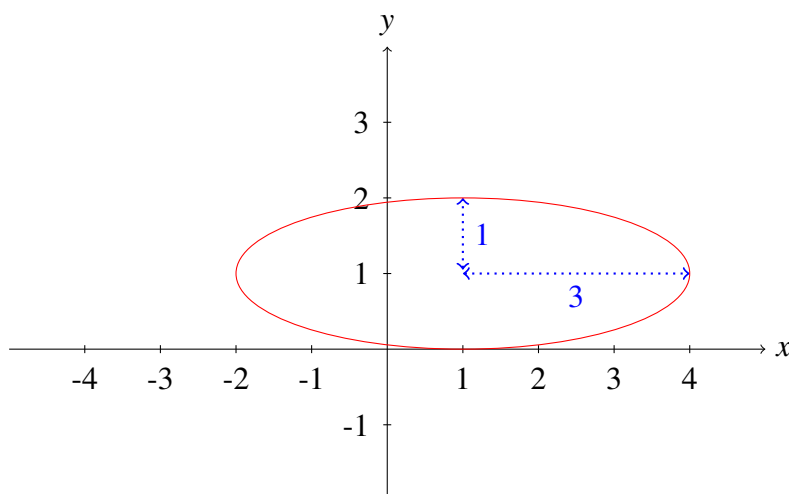


Figure 2.7: Ellipsen fra oppgave a) translateret.

Løsning:

Vi translaterer (x, y) -koordinatsystemet til (x', y') -koordinatsystemet slik at origo nå er i punktet $(1, 1)$, se figur 2.8. Sammenhengen mellom de nye og gamle koordinatene er da gitt ved:

$$x' = x - 1 \tag{2.24}$$

(ett steg til venstre)

$$y' = y - 1 \tag{2.25}$$

(ett steg ned)

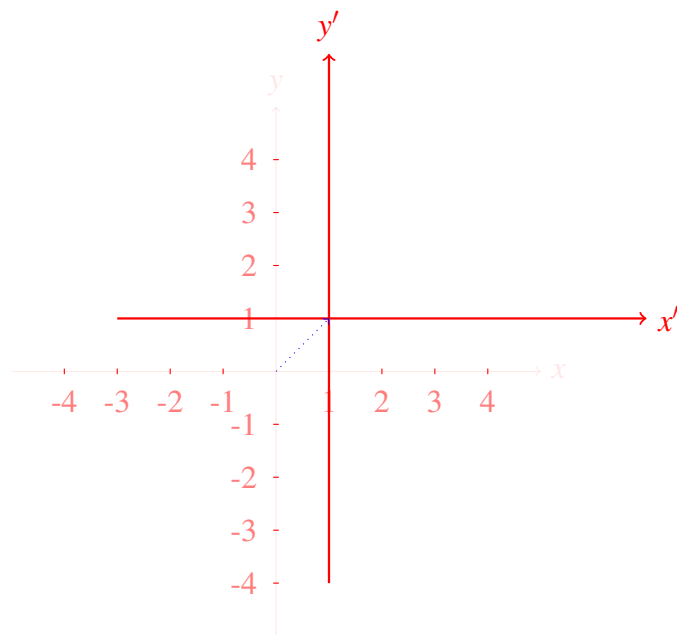


Figure 2.8: Translatert (x', y') -koordinatsystem.

Fra oppgave [a](#)) vet vi at ellipsen med senter i $(0,0)$ er gitt ved:

$$x^2 + 9y^2 = 9 \quad (2.26)$$

Ligningen er uendret for den translaterte ellipsen, gitt i (x', y') -koordinatene:

$$x'^2 + 9y'^2 = 9 \quad (2.27)$$

Vi kan nå bruke lign.(2.24) og (2.25) for å substituere tilbake til (x, y) -koordinatene:

$$x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0 \quad / \quad x' = x - 1 \text{ og } y' = y - 1 \quad (2.28)$$

$$\Downarrow$$

$$(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2 - 9 = 0 \quad \text{2. kvadratsetning} \quad (2.29)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 = 0 \quad \text{distributive lov} \quad (2.30)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + 9y^2 - 18y + 9 - 9 = 0 \quad \text{samle lik ledd} \quad (2.31)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - 2x + 9y^2 - 18y + 1 = 0 \quad (2.32)$$

som er ligningen for den translaterte linjen i (x, y) -koordinatsystemet.

Rotasjon av objekter

Å **rotere** en geometrisk figur burde *heller* ikke ha stor konsekvens for ligningen som beskriver figuren. Tross alt er *formen* den samme.

I stedet for å rottere **figuren** kan vi like godt rotere hele **koordinatsystemet**.

I det roterte koordinatsystemet, må ligningene da være på akkurat samme form som ligningene vi hadde i utgangspunktet.

Eksempel:

Anta at vi har som før linjen $y = -x$ i et (x, y) -koordinatsystem, som vist i figur 2.9 .

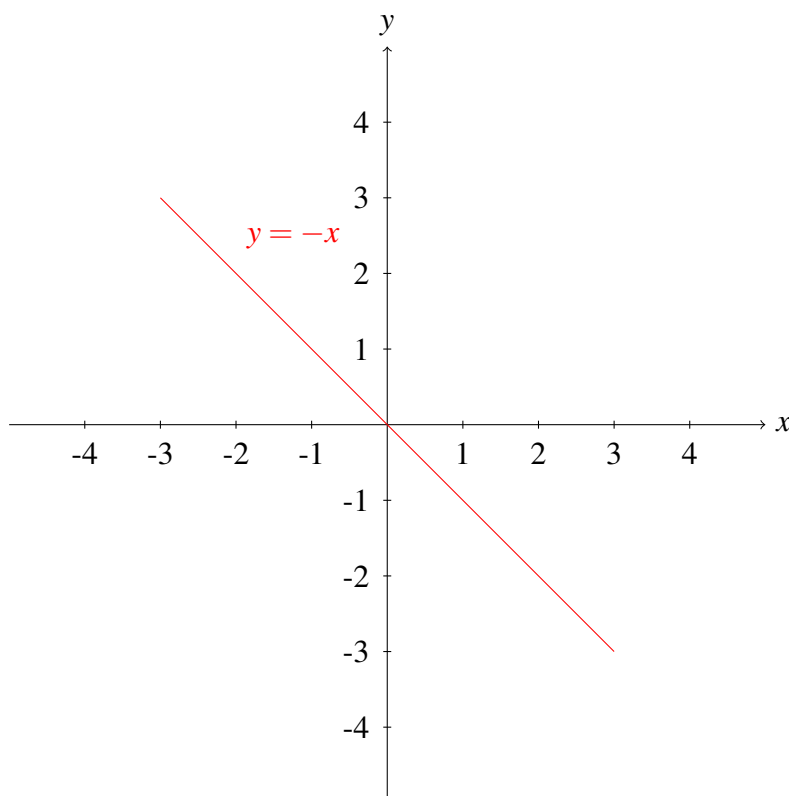


Figure 2.9: Linjen $y = -x$ i et (x, y) -koordinatsystem.

Anta vi ønsker å rotere koordinatsystemet 60 grader mot klokka med senter i origo.

La de roterte koordinatene være gitt ved x' og y' , som vist i figur 2.10.

Da er sammenhengen mellom de gamle og nye koordinatene gitt ved ⁴

$$x' = x \cdot \overbrace{\cos 60^\circ}^{1/2} + y \cdot \overbrace{\sin 60^\circ}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \quad (2.33)$$

$$y' = -x \cdot \overbrace{\sin 60^\circ}^{\sqrt{3}/2} + y \cdot \overbrace{\cos 60^\circ}^{1/2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y) \quad (2.34)$$

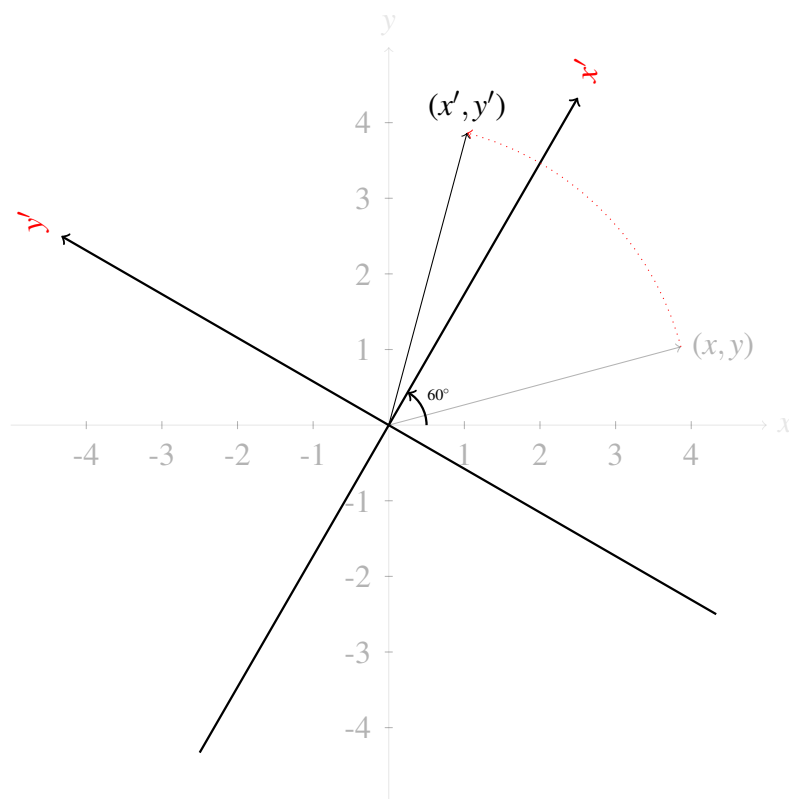


Figure 2.10: Rotert (x', y') -koordinatsystem.

⁴Ta disse formlene for gitt.

I figur 2.11 har vi tegnet inn den roterte linjen.

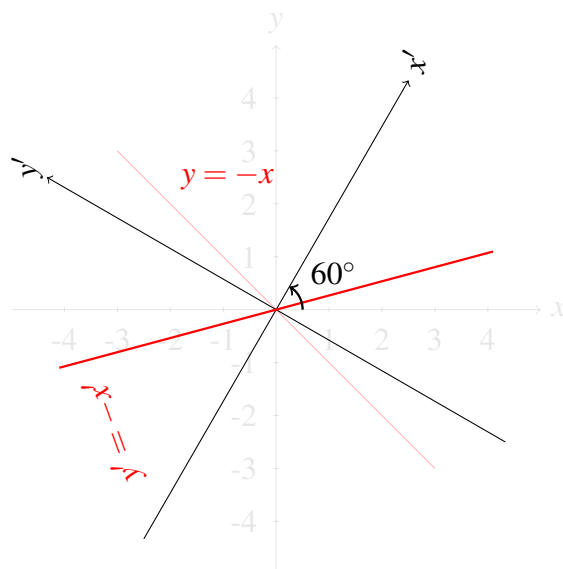


Figure 2.11: Den roterte linjen $y' = -x'$.

Legg merke til at ligningen for linjen er uendret i det nye koordinatsystemet, dvs. $y' = -x'$. Vi kan nå bruke lign.(2.33) og (2.34) for å substituere tilbake til (x, y) -koordinatene:

$$y' = -x' \quad (2.35)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y) = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \quad / \cdot 2 \quad (2.36)$$

$$\Downarrow$$

$$-\sqrt{3}x + y = -x - \sqrt{3}y \quad / +x \text{ og } -y \quad (2.37)$$

$$\Downarrow$$

$$-\sqrt{3}x + x = -\sqrt{3}y - y \quad / \text{ slå sammen like ledd} \quad (2.38)$$

$$\Downarrow$$

$$-(\sqrt{3} - 1)x = -(\sqrt{3} + 1)y \quad / \cdot \frac{-1}{\sqrt{3} + 1} \quad (2.39)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}x = y \quad (2.40)$$

som er ligningen for den translaterte linjen i (x, y) -koordinatsystemet.

- c) Anta at vi nå roterer den translaterte ellipsen fra oppgave b) 30° mot klokka, se figur 2.12.

Finn ligningen som beskriver ellipsen.^{5 6}

Skriv svaret på enklest mulig form (uten brøk) og samle alle ledd på venstre side, dvs. skriv ligningen på formen

$$A(x, y) = 0 \quad (2.43)$$

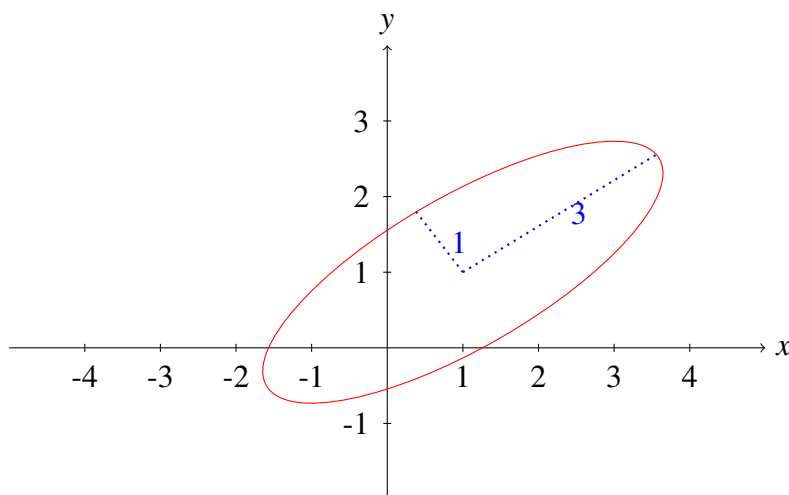


Figure 2.12: En ellipse med senter i punktet $(1, 1)$.

⁵Mye god trening på algebra her!

⁶Husk at vi står nå i punktet $(1, 1)$ fra oppgave b). Vi har dermed allerede brukt (x', y') -koordinatene, så når vi roterer dette koordinatsystemet, får vi et nytt koordinatsystem. La de roterte koordinatene være gitt ved (x'', y'') . Bruk at sammenhengen mellom (x', y') -koordinatene og de roterte (x'', y'') -koordinatene er gitt ved

$$x'' = x' \cdot \overbrace{\cos 30^\circ}^{\sqrt{3}/2} + y' \cdot \overbrace{\sin 30^\circ}^{1/2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y') \quad (2.41)$$

$$y'' = -x' \cdot \overbrace{\sin 30^\circ}^{1/2} + y' \cdot \overbrace{\cos 30^\circ}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}(-x' + \sqrt{3}y') \quad (2.42)$$

når man roterer koordinatsystemet 30° mot klokka.

Løsning:

Oppgitt i fotnoten: ⁷

$$x'' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y') \quad (\text{rotert } 30^\circ \text{ mot klokka}) \quad (2.44)$$

$$y'' = \frac{1}{2}(-x' + \sqrt{3}y') \quad (\text{rotert } 30^\circ \text{ mot klokka}) \quad (2.45)$$

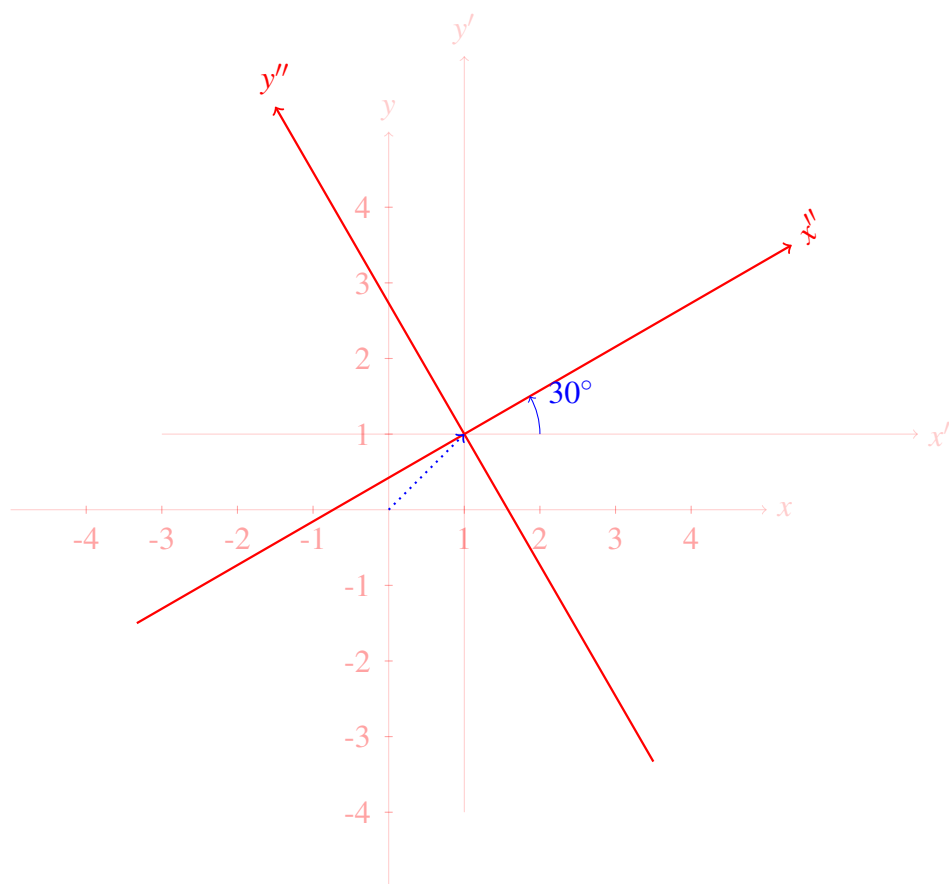


Figure 2.13: Rotert (x'', y'') -koordinatsystem.

⁷Vi roterer (x', y') -koordinatsystemet til (x'', y'') -koordinatsystemet 30° mot klokka, se figur 2.13. Sammenhengen mellom de nye og gamle koordinatene er da som oppgitt i fotnoten i oppgaven.

Ligningen er uendret for den translaterte og roterte ellipsen, gitt i (x'', y'') -koordinatene:

$$x''^2 + 9y''^2 = 9 \quad (2.46)$$

Bruker lign.(2.44) og (2.45):

$$x''^2 + 9y''^2 - 9 = 0 \quad (2.47)$$

$\Updownarrow$

$$\overbrace{\frac{1}{4}(\sqrt{3}x' + y')^2}^{\text{sideregning(1)}} + \overbrace{\frac{9}{4}(-x' + \sqrt{3}y')^2}^{\text{sideregning(2)}} - 9 = 0 \quad (2.48)$$

hvor (sideregninger)

$$(1) \quad \frac{1}{4}(\sqrt{3}x' + y')^2 = \frac{1}{4}(3x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + y'^2)$$

$$(2) \quad \frac{9}{4}(-x' + \sqrt{3}y')^2 = \frac{9}{4}(x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2)$$

Innsatt:

$$\frac{1}{4}(\sqrt{3}x' + y')^2 + \frac{9}{4}(-x' + \sqrt{3}y')^2 - 9 = 0 \quad (2.49)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{1}{4}(3x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + y'^2) + \frac{9}{4}(x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2) - 9 = 0 \quad / \cdot 4$$

$\Updownarrow$

$$3x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + y'^2 + 9(x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2) - 36 = 0 \quad (2.50)$$

$\Updownarrow$

$$3x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + y'^2 + 9x'^2 - 18\sqrt{3}x'y' + 27y'^2 - 36 = 0 \quad (2.51)$$

Samler like ledd:

$$12x'^2 - 16\sqrt{3}x'y' + 28y'^2 - 36 = 0 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{4} \quad (2.52)$$

$$\Updownarrow$$

$$3x'^2 - 4\sqrt{3}x'y' + 7y'^2 - 9 = 0 \quad (2.53)$$

Neste steg er å transformere lign.(2.53) til (x, y) -koordinater.

Sammenhengen mellom (x', y') -koordinatene og (x, y) -koordinatene er som før gitt ved

$$x' = x - 1 \quad (\text{ett steg til venstre}) \quad (2.54)$$

$$y' = y - 1 \quad (\text{ett steg ned}) \quad (2.55)$$

Vi kan transformere lign.(2.53) til (x, y) -koordinatene ved hjelp av lign.(2.54) og (2.55):

$$3x'^2 - 4\sqrt{3}x'y' + 7y'^2 - 9 = 0 \quad (2.56)$$

$$\Updownarrow$$

$$3(x-1)^2 - 4\sqrt{3}(x-1)(y-1) + 7(y-1)^2 - 9 = 0 \quad (2.57)$$

$$\Updownarrow$$

$$3(x^2 - 2x + 1^2) - 4\sqrt{3}(xy - x - y + 1^2) + 7(y^2 - 2y + 1^2) - 9 = 0 \quad (2.58)$$

Vi samler like ledd i lign.(2.58):

$$3x^2 - 4\sqrt{3}xy + 7y^2 + (4\sqrt{3} - 6)x + (4\sqrt{3} - 14)y + 1 - 4\sqrt{3} = 0 \quad (2.59)$$

Dette er ligningen for den translaterte og roterte ellipsen i (x, y) -koordinatsystemet.

■

Problem 2.3 — Algebraiske ligninger og løsningsmengden $\mathcal{L}$

Med oppfinnelsen av koordinatsystemet kunne man begynne å beskrive geometriske figurer ved hjelp av algebraiske ligninger, eller rettere sagt ved løsningsmengden av algebraiske ligninger.

La oss se på ligningen:

$$y = 2x^2 - 8 \tag{2.60}$$

- a)** Skriv ned løsningsmengden $\mathcal{L}$ av lign.(2.60).⁸

Løsning:

Løsningsmengde $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \{ (x, y) \mid y = 2x^2 - 8 \} \tag{2.61}$$

- b)** Løsningsmengden $\mathcal{L}$ fra oppgave **a)** av den algebraiske ligningen i lign.(2.60) består av mengden alle punkter (x, y) som tilfredstiller ligningen.

Skriv ned 5 valgfrie punkter (x, y) som er en del av $\mathcal{L}$ fra oppgave **a)**.

Løsning:

$\mathcal{L}$ er mengden av alle punkter som oppfyller ligningen $y = 2x^2 - 8$.

⁸Her er det ingen regning. Dere skal kun skrive ned det formelle svaret.

Algebraisk ligning: $y = 2x^2 - 8$

x	y	(x,y)
-4	$2 \cdot (-4)^2 - 8 = 24$	$(-4,24)$
-2	$2 \cdot (-2)^2 - 8 = 0$	$(-2,0)$
0	$2 \cdot 0^2 - 8 = -8$	$(0,-8)$
2	$2 \cdot 2^2 - 8 = 0$	$(2,0)$
4	$2 \cdot 4^2 - 8 = 24$	$(4,24)$

Table 2.1: 5 punkter på $y = 2x^2 - 8$.

- c) Den geometriske tolkningen av punktene som utgjør løsningsmengden $\mathcal{L}$ er en graf som kalles en parabel.

Bruk GeoGebra ([geogebra.org/classic](https://www.geogebra.org/classic)) og plott grafen til lign.(2.60). ⁹

Løsning:

Bruker Geogebra-linken og plotter:

⁹Det er OK å bare tegne av fra GeoGebra og rett inn på arket. Dere trenger ikke skrive ut fra PC.

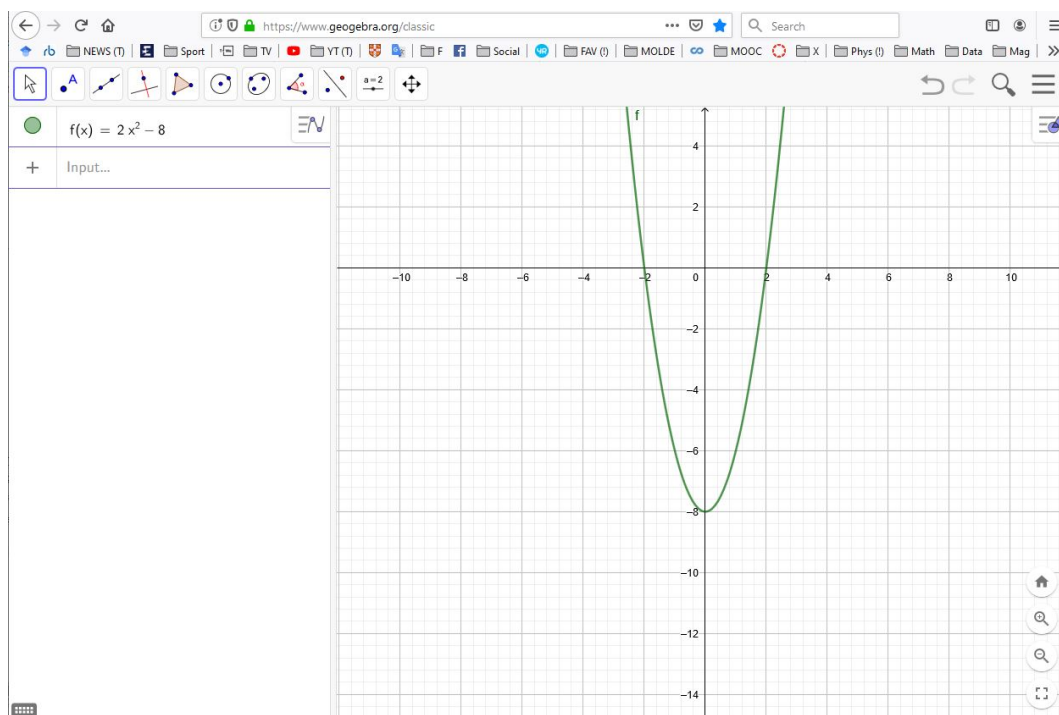


Figure 2.14: Parabelen $y = 2x^2 - 8$ plottet i GeoGebra.

- d) Les av fra grafen i oppgave b) og finn de punktene (x, y) hvor parabelen skjærer x -aksen.

Disse punktene kalles **nullpunkter**.¹⁰

Løsning:

Ren avlesning fra figur 2.14. Det er **to** nullpunkter:

$$(x, y) = (-2, 0) \quad \text{og} \quad (x, y) = (2, 0) \quad (2.62)$$

¹⁰I denne oppgaven skal du ikke gjøre noen utregninger.

- e) Skjæringspunktet til parabelen med x -aksen fra oppgave d), har en algebraisk oversettelse i form av en ligning.

Løs denne ligningen.

Løsning:

Skjæringspunktet med x -aksene bestemmes av $y = 0$ i lign.(2.60):

$$y = 0 \quad (2.63)$$

$\Downarrow$

$$0 = 2x^2 - 8 \quad \quad \quad / + 8 \quad (2.64)$$

$\Downarrow$

$$2x^2 = 8 \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad (2.65)$$

$\Downarrow$

$$x^2 = 4 \quad (2.66)$$

som betyr at

$$x = -2 \quad \text{og} \quad x = 2 \quad (2.67)$$

er de mulige løsningene.

La oss i tillegg se på **linjen**

$$y = 2x - 8 \quad (2.68)$$

- f) Bruk igjen GeoGebra og plott linjen i lign.(2.68) sammen med parabelen i lign.(2.60).

Les fra grafen og finn de **skjæringspunktene** (x, y) mellom parabelen og linjen.

Løsning:

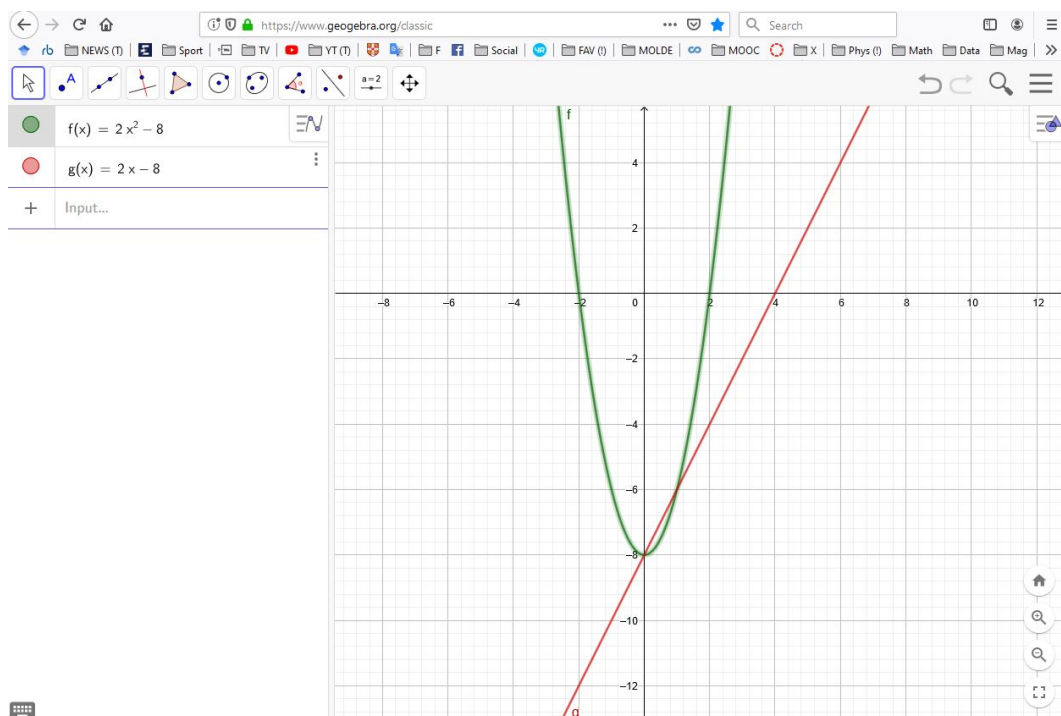


Figure 2.15: Parabelen $y = 2x^2 - 8$ plottet sammen med den rette linjen $y = 2x - 8$ i GeoGebra.

Ren avlesning fra figur 2.15. Det er **to** skjæringspunkter:

$$(x, y) = (0, -8) \text{ og } (x, y) = (1, -6) \quad (2.69)$$

- g)** Skjæringspunktet til parabelen linjen har en algebraisk oversettelse.

Finn koordinatene til skjæringspunktene ved regning.

Løsning:

I et punkt (x, y) hvor linjen $y = 2x - 8$ og parabelen $y = 2x^2 - 8$ skjærer, må *begge* ligningene være oppfylt *samtidig*. Punktet (x, y) må derfor oppfylle *ligningssystemet*

$$y = 2x - 8 \quad (2.70)$$

$$y = 2x^2 - 8 \quad (2.71)$$

For å løse ligningssystemet, finner vi x først ved å trekke lign.(2.70) fra lign.(2.71):

$$y - y = 2x^2 - 8 - (2x - 8) \quad (2.72)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = 2x^2 - 8 - 2x + 8 \quad (2.73)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = 2x^2 - 2x, \quad (2.74)$$

Lign.(2.74) kan skrives:

$$0 = 2x(x - 1), \quad (2.75)$$

som betyr at $x = 0$ eller $x = 1$ er de mulige løsningene. ¹¹

De tilsvarende mulige y -koordinatene finnes ved å sette inn for x i lign.(2.70) (eller lign.(2.71)):

$$x = 0 : \quad y = 2 \cdot 0 - 8 = -8 \quad (2.76)$$

$$x = 1 : \quad y = 2 \cdot 1 - 8 = -6 \quad (2.77)$$

som gir de mulige skjæringspunktene $(0, -8)$ og $(1, -6)$.

■

¹¹Denne måten å løse ligninger på kalles *faktorisering*, som vi skal lære med om senere i kurset.

Problem 2.4 — Klassifisering av algebraiske ligninger

En algebraisk ligning og den tilhørende løsningsmengden $\mathcal{L}$ er så fundamentale begreper at vi definerer disse begrepene generelt.

Definisjon 2.0.1 — Algebraisk ligning

En algebraisk ligning er en ligning på formen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.78)$$

hvor $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er to algebraiske uttrykk av n variabler $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Definisjon 2.0.2 — Løsningsmengden $\mathcal{L}$

Løsningsmengden $\mathcal{L}$ av den algebraiske ligningen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.79)$$

er definert som mengden

$$\mathcal{L} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \}. \quad (2.80)$$

dvs. mengden av alle punktene $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ som oppfyller lign.(2.79).

- a) Skriv ned løsningsmengdene til de algebraiske ligningene nedenfor. ¹²

$$i) \quad x = 4 \quad (2.81)$$

$$ii) \quad x^2 = 36 \quad (2.82)$$

$$iii) \quad y = 2x - 3 \quad (2.83)$$

$$iv) \quad x^5 = 34 \quad (2.84)$$

$$v) \quad y = 4x^2 + 2x - 7 \quad (2.85)$$

Løsning:

$$i) \quad \mathcal{L} = \{ x \mid x = 4 \} = \{ 4 \} \quad (2.86)$$

$$ii) \quad \mathcal{L} = \{ x \mid x^2 = 36 \} = \{ -6, 6 \} \quad (2.87)$$

$$iii) \quad \mathcal{L} = \{ (x, y) \mid y = 2x - 3 \} \quad (2.88)$$

$$iv) \quad \mathcal{L} = \{ x \mid x^5 = 34 \} = \{ \sqrt[5]{34} \} \quad (2.89)$$

$$v) \quad \mathcal{L} = \{ (x, y) \mid y = 4x^2 + 2x - 7 \} \quad (2.90)$$

■

¹²Altså her skal man kun skrive ned svaret. Ingen utregninger behøves.

Problem 2.5 — Klassifisering

Vi klassifiserer en algebraisk ligning

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.91)$$

etter to **nøkkelstørrelser**:

1. antall *variabler* (dimensjonen),
2. *graden* (høyeste potens x^k).

- a)** Hvor mange variabler har ligningen nedenfor?
Og hva er graden?

$$i) \quad 5x^2 - 3 = 0 \quad (2.92)$$

$$ii) \quad 2x + 3.32 = z \quad (2.93)$$

$$iii) \quad 0 = az^2 + bz + c \quad (a, b, c \text{ er konstanter}) \quad (2.94)$$

$$iv) \quad y^3 + 5z^7 = 2x + 1 \quad (2.95)$$

Løsning:

- i)* Én variabel, og høyeste potens er 2, dvs. 2. gradsligning. (2.96)
- ii)* To variabler, og høyeste potens er 1, dvs. 1. gradsligning. (2.97)
- iii)* Én variabel, og høyeste potens er 2, dvs. 2. gradsligning. (2.98)
- iv)* Tre variabler, og høyeste potens er 7, dvs. 7. gradsligning. (2.99)

■

Problem 2.6 — Løsningsmetodikk: Transformasjoner

Hovedideen bak det å transformere en ligning til en nye ligning, er at den nye ligningen er på en **enklere** form enn den vi startet med.

Definisjon 2.0.3 — Transformasjon

Anta vi har en algebraisk ligning

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.100)$$

med tilhørende løsningsmengde $\mathcal{L}$.

En **transformasjon** T av lign.(2.100), er en matematisk operasjon som transformerer de algebraiske uttrykkene A og B til to nye algebraiske uttrykk A' og B' slik at den nye ligningen

$$A'(x_1, x_2, \dots, x_n) = B'(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.101)$$

har samme løsningsmengden $\mathcal{L}$ som den opprinnelige ligningen.

a) Løs ligningen

$$4x^2 - 100 = 0 \quad (2.102)$$

ved å bruke de riktige transformasjonene.

Si eksplisitt hva slags transformasjon du gjør i hvert steg.

Løsning:

Transformerer:

$$4x^2 - 100 = 0 \quad \quad \quad / + 100 \quad \quad \quad (2.103)$$

$$\Updownarrow$$

$$4x^2 = 100 \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{4} \quad \quad \quad (2.104)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = 25 \quad \quad \quad \text{ta } \sqrt{\quad} \text{ på begge sider} \quad \quad \quad (2.105)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 5 \text{ eller } x = -5 \quad \quad \quad (2.106)$$

Alle ligningene lign.(2.103)-(2.106) har samme løsningsmengde,¹³
men legg merke til at lign.(2.106) er på en *enklere* form enn lign.(2.103),

Lign.(2.106) sier *eksplisitt* at løsningen er $x = -5$ eller $x = 5$.

¹³Det indikeres ved $\Updownarrow$ for hver transformasjon.

Dersom den ukjente finnes inni en kvadratroten, kaller vi ligningen irrasjonal.
 For å bli kvitt kvadratroten må vi kvadrere ligningen:

$$\underbrace{a=b}_{1 \text{ løsning}} \Rightarrow \underbrace{a^2=b^2}_{2 \text{ løsninger}} \quad (2.107)$$

$$a=b \quad a=b \text{ eller } a=-b \quad (2.108)$$

Vi ser at det kan være flere sanne verdier av ligningen $a^2 = b^2$ enn utgangspunktet.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2 \text{ løsninger}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{1 \text{ løsning}}$

Derfor må vi teste om de 2 løsningene også oppfyller utgangspunktet.

b) Løs ligningen

$$\sqrt{x-1} = 3-x \quad (2.109)$$

ved å bruke de riktige transformasjonene.

Si eksplisitt hva slags transformasjon du gjør i hvert steg.

Må du teste at løsningene du finner også oppfyller utgangspunktet, dvs. også oppfyller lign.(2.109)? I så fall, utfør testen. ¹⁴

¹⁴I denne oppgaven kan du bruke at løsningen av 2. gradsligningen $x^2 - 7x + 10 = 0$ er $x=2$ eller $x=5$.
 (Kan løses via ABC-formelen som vi skal lære om senere i kurset).

Løsning:

Transformerer lign.(2.109) ved å kvadrere på begge sider, dvs. $VS^2 = HS^2$.

$$\sqrt{x-1} = 3-x \quad / \quad VS^2 = HS^2 \quad (2.110)$$

$$\Downarrow$$

$$x-1 = (3-x)^2 \quad \text{2. kvadratsetning} \quad (2.111)$$

$$\Updownarrow$$

$$x-1 = 9-6x+x^2 \quad -(x-1) \quad (2.112)$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = 10-7x+x^2 \quad \text{bruker f.eks. ABC-formelen} \quad (2.113)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 2 \text{ eller } x = 5 \quad (2.114)$$

Tester om $x = 2$ også oppfyller startligningen $\underbrace{\sqrt{x-1}}_{VS} = \underbrace{3-x}_{HS}$:

$$VS = \sqrt{2-1} = 1 \quad (2.115)$$

$$HS = 3-2 = 1 \quad (2.116)$$

som stemmer, altså $x = 1$ er løsning.

Tester om $x = 5$ også oppfyller startligningen $\underbrace{\sqrt{x-1}}_{VS} = \underbrace{3-x}_{HS}$:

$$VS = \sqrt{5-1} = 2 \quad (2.117)$$

$$HS = 3-5 = -2 \quad (2.118)$$

som ikke stemmer, altså $x = 5$ er ikke løsning.

Konklusjon: kun $x = 2$ er løsning av den opprinnelige ligningen.

Problem 2.7 — Lineære ligninger med to variabler**Definisjon 2.0.4** — Lineære ligninger med 2 variabler

En linær ligning med to variabler er definert ved

$$y = ax + b \quad (2.119)$$

hvor $a \neq 0$ og $a, b \in \mathbb{R}$.

Anta at vi følgende ligninger:

$$y = -2x + 6 \quad (2.120)$$

$$y = 3x - 4 \quad (2.121)$$

- a)** Hva slags geometrisk tolkning har 1. gradsligningen i lign.(2.120)?

Hva er stigningstallet til grafen beskrevet av lign.(2.120)?

I hvilket punkt skjærer grafen beskrevet av lign.(2.120) y-aksen?

Løsning:

De punktene (x, y) i planet som løser lign.(2.120) er en linje som skjærer y-aksen i punktet $b = 6$ og med stigningstallet $a = -2$.

- b)** Finn skjæringspunktet til linjene grafisk.

Bruk gjerne GeoGebra når du plotter. ([geogebra.org/classic](https://www.geogebra.org/classic)) ¹⁵

¹⁵Det er OK å bare tegne av fra GeoGebra og rett inn på arket. Dere trenger ikke skrive ut fra PC.

Løsning:

Grafisk løsning:

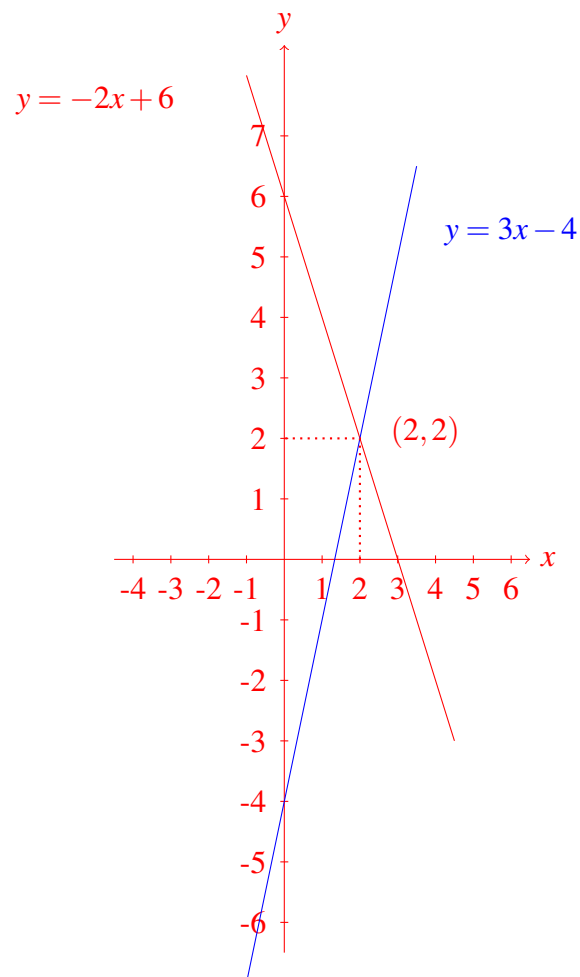


Figure 2.16: Plott av linjene $y = -2x + 6$ og $y = 3x - 4$.

Ren avlesning fra figur 2.16 finner vi skjæringspunktet:

$$(x, y) = (2, 2) \tag{2.122}$$

Vi viser også hvordan en slik figur ser ut i GeoGebra (se neste side). ¹⁶

Grafisk løsning: (GeoGebra)

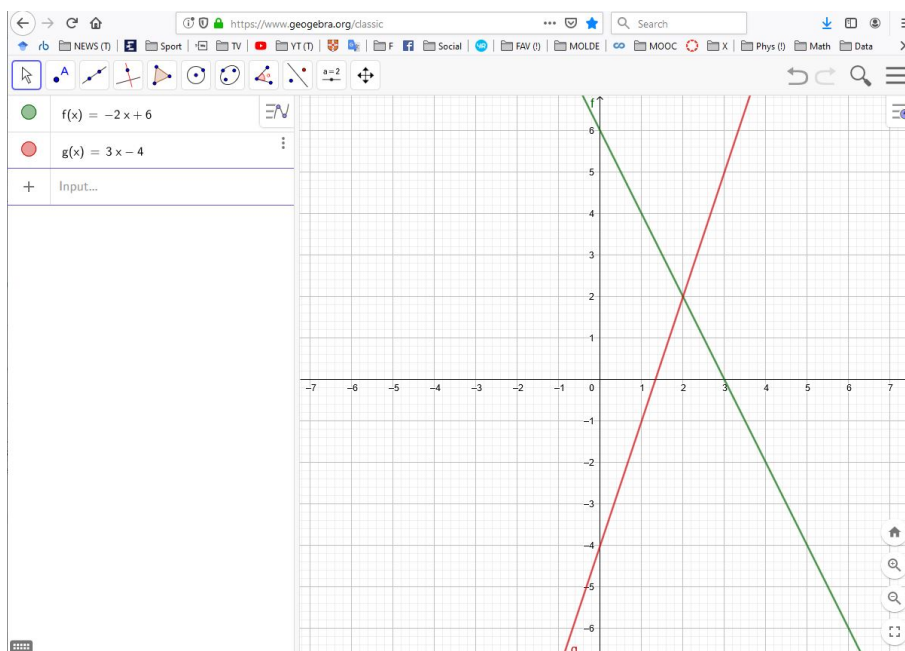


Figure 2.17: GeoGebra.

Igjen, ren avlesning fra figur 2.17 finner vi skjæringspunktet:

$$(x, y) = (2, 2) \quad (2.123)$$

¹⁶Det er selvsagt nok om du lager kun én figur. I dette løsningsforslaget lager vi både en ”vanlig” figur og en GeoGebra-figur. Dersom du plotter figuren for hånd kan det være lurt å lage en verditall, se kompendiet.

- c) Finn skjæringspunktet til linjene ved **regning**.

Løsning:

"Ved regning" betyr at vi må bruke de algebraiske ligningene for linjene

$$y = -2x + 6 \quad (2.124)$$

$$y = 3x - 4 \quad (2.125)$$

for å finne skjæringspunktet. Det essensielle her er at *begge* ligningene må være oppfylt i skjæringspunktet. Vi kan dermed sette y -ene lik hverandre:

$$y = y \quad (2.126)$$

$\Updownarrow$

$$-2x + 6 = 3x - 4 \quad \Big/ -3x \text{ og } -6 \quad (2.127)$$

$\Updownarrow$

$$-2x - 3x = -4 - 6 \quad \Big/ \text{slår sammen like ledd} \quad (2.128)$$

$\Updownarrow$

$$-5x = -10 \quad \Big/ \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \quad (2.129)$$

$\Updownarrow$

$$x = 2 \quad (2.130)$$

Dette er den x -verdien hvor linjene skjærer hverandre, se figur 2.17. For å finne den tilhørende y -koordinaten kan vi bare sette inn $x = 2$ for en av linjene. Vi har valgt linjen $y = -2x + 6$:

$$y = -2x + 6 \quad \Big/ x = 2 \quad (2.131)$$

$$= -2 \cdot 2 + 6 = 2 \quad (2.132)$$

Vi har dermed funnet skjæringspunktet $(2, 2)$ ved hjelp av regning.

- d) Finn nullpunktet til lign.(2.120), dvs. skjæringen med x -aksen.

Løsning:

Vi ser direkte fra grafen i figur 2.17 at nullpunktet til $y = -2x + 6$ er gitt ved $x = 3$. Men oppgaven ba oss om å finne dette ved **regning**. Dermed må vi bruke den algebraiske representasjonen av linjen.

Skjæring med x -aksen er bestemt ved:

$$y = 0 \quad (2.133)$$

Dermed:

$$0 = -2x + 6 \quad \quad \quad / + 2x \quad (2.134)$$

$\Updownarrow$

$$2x = 6 \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad (2.135)$$

$\Updownarrow$

$$x = 3 \quad (2.136)$$

som viser at $y = -2x + 6$ skjærer x -aksen i punktet $(x, y) = (3, 0)$.

- e) Hvor mange skjæringer med x -aksen kan en linje maksimalt ha?

Løsning:

En rett linje kan maksimalt skjære x -aksen én gang.

- f) Kan en linje ha ingen skjæring med x -aksen?

Løsning:

Ja, dersom en linje er **parallel** med x -aksen og ikke ligger akkurat på x -aksen, så har den **ingen** skjæringspunkter med x -aksen.

■

Problem 2.8 — Lineære ligningssystem

Dersom vi har flere lineære ligninger som skal løses samtidig, har vi et *lineært ligningssystem*.

Definisjon 2.0.5 — Lineært ligningssystem med 2 variabler

Et lineært ligningssystem med 2 variabler består av n ligninger som må løses samtidig.

$$a_1y + b_1x = c_1 \quad (2.137)$$

$$a_2y + b_2x = c_2 \quad (2.138)$$

$$\vdots$$

$$a_ny + b_nx = c_n \quad (2.139)$$

hvor $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ og $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

a) Løs ligningssystemet:

$$7x + 5y = 11 \quad (2.140)$$

$$3x + 3y = 8 \quad (2.141)$$

Tegn først opp linjene i et koordinatsystem. Bruk gjerne GeoGebra. Løs til slutt ligningssystemet algebraisk. ¹⁷

¹⁷Grunnen til at vi ber dere tegne en figur er blant annet at dere skal få en geometrisk innsikt i betydningen av ligningene og betydningen av skjæring mellom to linjer.

Løsning:

Vi løser ligningsystemet i 3 steg:

Steg 1: Skriv lign.(2.140) og (2.141) om på formen $y = ax + b$.

Steg 2: Tegn opp linjene i et passende koordinatsystem. Bruk gjerne GeoGebra.

Dersom linjene er parallelle, så finnes ingen løsning.

Dersom de skjærer, så er skjæringspunktet løsningen. ¹⁸

Steg 3: Sett høyresidene i ligningene for linjene fra steg 1 lik hverandre og løs med hensyn på x . Finn til slutt y .

Vi utfører disse 3 stegene:

Steg 1: Skriv ligningene på formen $y = ax + b$:

$$7x + 5y = 11 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{7}{5}x + \frac{11}{5} \quad (2.142)$$

$$3x + 3y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + \frac{8}{3} \quad (2.143)$$

Steg 2: Se figur 2.18. Linjene skjærer, så det finnes en løsning.

Linjene er ikke parallelle.

Løsningen finner vi ved regning.

¹⁸Dersom linjene er parallelle så er de det som kalles "lineært" avhengige. Det skal vi lære mer om senere. Det er mer teori bak dette enn det vi har lært så langt. En enkel og god måte å få innsikt i dette på er å lage en figur slik som vi gjør i denne oppgaven.

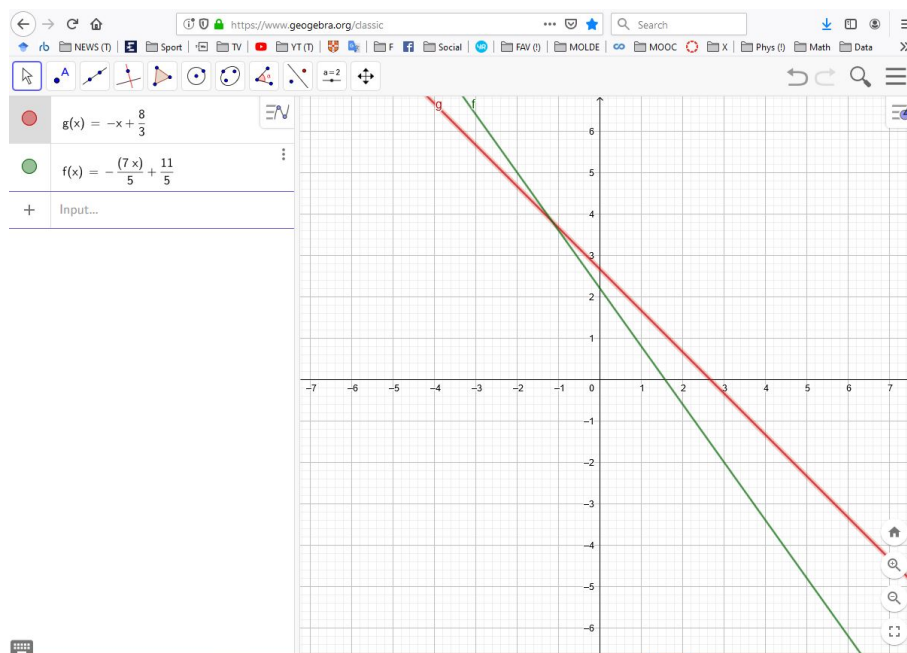


Figure 2.18: Linjene i lign.(2.142) og (2.143) skjærer hverandre.

Steg 3: Sett høyresidene i ligningene for linjene fra steg 1 lik hverandre og løs med hensyn på x .

$$y = y \quad (2.144)$$

$$-\frac{7}{5}x + \frac{11}{5} = -x + \frac{8}{3} \quad \bigg/ \cdot 5 \quad (2.145)$$

$$\Downarrow$$

$$-7x + 11 = -5x + \frac{8}{3} \cdot 5 \quad \bigg/ + 5x \quad (2.146)$$

$$\Downarrow$$

$$-7x + 5x + 11 = \frac{40}{3} \quad \bigg/ - 11 \quad (2.147)$$

$$\Downarrow$$

$$-2x = \frac{40}{3} - 11 \quad (2.148)$$

$$-2x = \frac{40}{3} - \frac{11 \cdot 3}{3} \quad (2.149)$$

$$-2x = \frac{40 - 33}{3} \quad / \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (2.150)$$

$$x = \frac{7}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (2.151)$$

$$\Downarrow$$

$$x = -\frac{7}{6} \quad (2.152)$$

Vi finner tilhørende y -verdi ved å sette inn i lign.(2.142) eller lign.(2.143): ¹⁹

$$y = -x + \frac{8}{3} \quad (2.153)$$

$$= -\left(-\frac{7}{6}\right) + \frac{8}{3} = \frac{7}{6} + \frac{8 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{7 + 16}{6} = \frac{23}{6} \quad (2.154)$$

Dermed har vi vist ved regning at løsningsmengden er punktet

$$(x, y) = \left(-\frac{7}{6}, \frac{23}{6}\right) \quad (2.155)$$

¹⁹I skjæringspunktet er x -verdien til kurvene være like. Og det samme gjelder for y -verdiene. I skjæringspunktet kan vi derfor velge om vi vil regne ut y -verdien med den ene eller andre linjen.

- b) Anta vi legger til ligningen $y = x$ i ligningssystemet fra oppgave a).
Da får vi et ligningssystem med to variable og 3 ligninger:

$$\begin{aligned} 7x + 5y &= 11 \\ 3x + 3y &= 8 \\ y &= x \end{aligned} \tag{2.156}$$

Bruk f.eks. GeoGebra og plott ligningssystemet ovenfor.
Konkluder ut fra figuren om ligningssystemet har en løsning eller ikke.

Løsning:

GeoGebra:

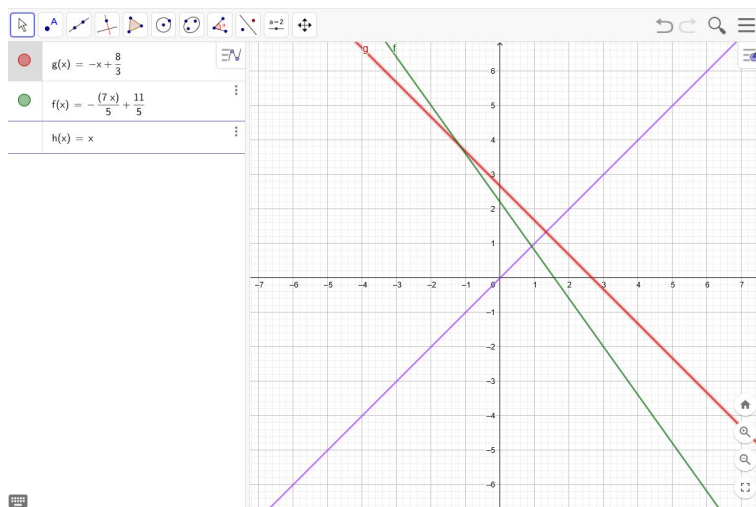


Figure 2.19: Ligningssystem i lign.(2.156).

Dersom det nye ligningssystemet skal ha en løsning, må det være et punkt hvor alle tre grafene skjærer hverandre. Av figuren ser vi at det gjør det ikke. Dermed, ingen løsning:

$$\mathcal{L} = \emptyset \tag{2.157}$$

Problem 2.9 — ABC-formelen - finner nullpunktene

ABC-formelen er en sentral formel i faget. **ABC-formelen finner nullpunktene til en 2. gradsligning.**

Vi skal i denne gruppeoppgaven forstå hvordan ABC-formelen kan utledes.

I kompendiet har vi følgende setning:

Setning 2.0.1 — ABC-formelen

Løsningen av en 2. gradsligning med en variabel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.158)$$

er gitt ved den såkalte ABC-formelen

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2.159)$$

dvs. løsningsmengden er gitt ved

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \quad (2.160)$$

Men hvor kommer formlene i lign.(2.159) fra?

Hva er logikken bak dem?

Svaret er mer sammensatt enn man skulle tro.

La oss ta en **historisk** reise for å forstå dybden i dette spørsmålet.

Det skulle ta menneskeheten 1037 år fra den første kjente løsningen av en 2. gradsligning til den formen vi kjenner idag gitt ved lign.(2.159).

400BC: (babylonerne)

Babylonerne løste ikke ligninger, men de løste praktiske problemer som egentlig var en skjult 2. gradsligning.

Problemet de løste var å bestemme sidene x og y i et rektangel dersom arealet A og halve omkretsen O_h var gitt, se figur 2.20.

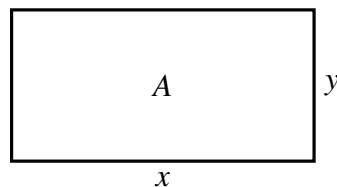


Figure 2.20: Arealet A og halve omkretsen O_h var gitt, finn sidene.

Ligningene for arealet og halve omkretsen var da gitt ved ligningene

$$x + y = O_h \quad \text{halve omkretsen} \quad (2.161)$$

$$xy = A \quad \text{arealet} \quad (2.162)$$

a) Hvilke **variabler** har dette problemet?

Hvilke **parametre** har dette problemet?

Begrunn svarene kort.

Løsning:

Variablene er sidene x og y , siden disse størrelsene var **ukjente**.

Parametrene er omkretsen O_h og arealet A , siden dette var **kjente** størrelser.

- b) Vis, ved å bruke lign.(2.162) for å substituere for y inn lign.(2.161), at variabelen x oppfyller ligningen:

$$x^2 + A = O_h x \quad (2.163)$$

Vil y oppfylle samme type ligning?
Begrunn svaret kort.

Løsning:

Vi skriver om lign.(2.162):

$$xy = A \quad (2.164)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ y = \frac{A}{x} \end{array} \quad (2.165)$$

og substituerer inn for y i lign.(2.162):

$$x + y = O_h \quad (2.166)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ x + \frac{A}{x} = O_h \end{array} \quad \begin{array}{c} / \cdot x \end{array} \quad (2.167)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ x^2 + A = O_h x \end{array} \quad (2.168)$$

som var ligningen vi skulle vise.

Siden ligningene er **symmetriske** mhp. x og y , vil også siden y oppfylle samme type ligning, dvs. y oppfyller også ligningen

$$y^2 + A = O_h y \quad (2.169)$$

Babylonerne skrev opp en **oppskrift** for å finne løsningen på lign.(2.163):

1. *Ta halve av omkretsen O_h .*
2. *Kvadrer resultatet.*
3. *Trekk fra arealet A .*
4. *Finn den (positive) kvadratroten.* ²⁰
5. *Adder resultatet fra steg 1. og steg 4. for å finne x .*

- c) Bruk babylonernes oppskrift og skriv opp løsningen for lign.(2.163).

Løsning:

Løsningen, dersom Babylonerne hadde hatt algebra, hadde vært gitt ved:

$$\text{Steg 1: } \frac{O_h}{2} \quad (2.170)$$

$$\text{Steg 2: } \left(\frac{O_h}{2}\right)^2 \quad (2.171)$$

$$\text{Steg 3: } \left(\frac{O_h}{2}\right)^2 - A \quad (2.172)$$

$$\text{Steg 4: } \sqrt{\left(\frac{O_h}{2}\right)^2 - A} \quad (2.173)$$

$$\text{Steg 5: } \frac{O_h}{2} + \sqrt{\left(\frac{O_h}{2}\right)^2 - A} \quad (2.174)$$

²⁰Dette gjorde de ved hjelp av en tabell av kvadrat. I tillegg hadde de ikke begrep om *negative* tall, så de regnet ut kun den ene løsningen som sikret et positivt svar.

Konklusjon:

Ifølge oppskriften til babylonerne så er løsningen av lign.(2.163):

$$x = \frac{O_h}{2} + \sqrt{\left(\frac{O_h}{2}\right)^2 - A} \quad (2.175)$$

- d) Bruk *ABC*-formelen til å regne ut den positive løsningen av lign.(2.163), og skriv om løsningen slik at den blir lik løsningen som babylonerne beskrev.

Løsning:

Vi skriver om lign.(2.163):

$$x^2 + A = O_h x \quad \quad \quad / - O_h x \quad (2.176)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ x^2 - O_h x + A = 0 \end{array} \quad (2.177)$$

Deretter identifiserer parametrene i *ABC*-formelen:

$$a = 1 \quad (2.178)$$

$$b = -O_h \quad (2.179)$$

$$c = A \quad (2.180)$$

Til slutt skriver vi opp *ABC*-formelen for den *positive* løsningen:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.181)$$

$$= \frac{-(-O_h) + \sqrt{(-O_h)^2 - 4 \cdot 1 \cdot A}}{2} \quad (2.182)$$

$$= \frac{O_h + \sqrt{O_h^2 - 4A}}{2} \quad (2.183)$$

$$= \frac{O_h}{2} + \frac{\sqrt{O_h^2 - 4A}}{\sqrt{2^2}} \quad (2.184)$$

$$= \frac{O_h}{2} + \sqrt{\frac{O_h^2}{2^2} - \frac{4}{2^2}A} \quad (2.185)$$

$$= \frac{O_h}{2} + \sqrt{\left(\frac{O_h}{2}\right)^2 - A} \quad (2.186)$$

som altså er det samme som lign.(2.175).

Konklusjon: oppskriften til babylonerne gav i dette tilfellet **samme resultat** som moderne matematikk.

1637 AC: (René Descartes)

René Descartes var oppfinneren av *koordinatsystemet*. Ved hjelp av koordinatsystemet og enkle geometriske betraktninger kunne han finne den generelle *ABC*-formelen som vi kjenner idag.

Vi skal her prøve å gjenskape denne moderne utledningen av *ABC*-formelen. Vi starter med å se på et konkret eksempel.

Eksempel:

Anta vi ønsker å løse ligningen:

$$0 = 2x^2 + 4x - 6 \quad (2.187)$$

René ville først ha tegnet opp grafen til ligningen

$$y = 2x^2 + 4x - 6 \quad (2.188)$$

i et (x,y) -koordinatsystem, se figur 2.21. Da er løsningen gitt ved skjæringspunktene til x -aksen.

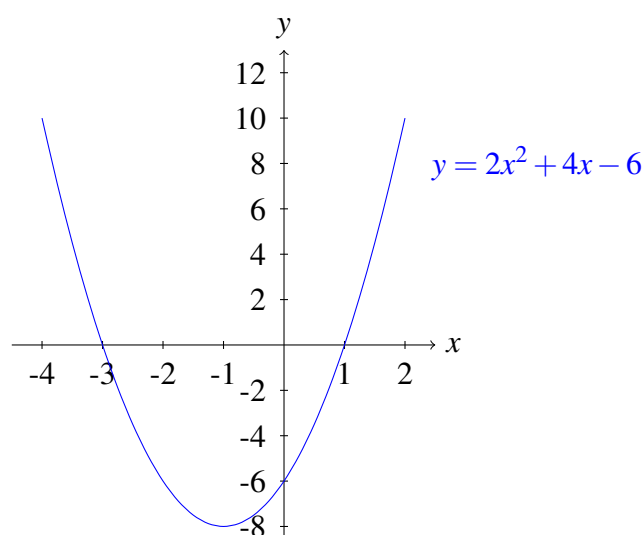


Figure 2.21: Grafen til $y = 2x^2 + 4x - 6$.

Ideen til Rene Descartes var nå enkel:

1. *Translater koordinatsystemet horisontalt til et nytt (x', y') -koordinatsystem slik at grafen blir symmetrisk rundt den nye y' -aksen.*
2. *Finn et uttrykk for grafen i de nye koordinatene og finn nullpunktene i det nye koordinatsystemet.*
3. *Oversett løsningen til de opprinnelige (x, y) -koordinatene.*

Steg 1:

Translasjon lærte vi om i oppgave 2.2. Figur 2.22 viser det translaterte koordinatsystemet:

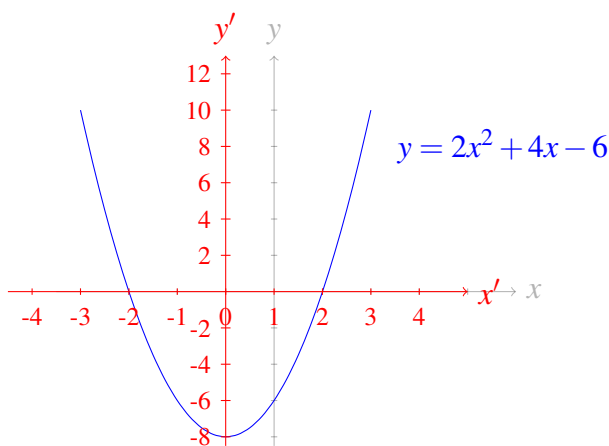


Figure 2.22: Grafen til $y = 2x^2 + 4x - 6$.

Sammenhengen mellom de opprinnelige (x, y) -koordinatene og de nye (x', y') -koordinatene er da gitt ved

$$x = x' - 1 \quad (2.189)$$

$$y = y' \quad (2.190)$$

- e) Gjennomfør 2. steg i Descartes' oppskrift som sier at “*finn et uttrykk for grafen i de nye koordinatene*”, dvs. vis at ligningen for grafen er gitt ved

$$y' = 2x'^2 - 8 \quad (2.191)$$

uttrykt i (x', y') -koordinatene.

Løsning:

Vi bruker lign.(2.189) og (2.190) til å oversette lign.(2.188) fra (x, y) -koordinatene til (x', y') -koordinatene:

$$y = 2x^2 + 4x - 6 \quad x = x' - 1 \text{ og } y = y' \quad (2.192)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 2(x' - 1)^2 + 4(x' - 1) - 6 \quad (2. \text{ kvadratsetning}) \quad (2.193)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 2(x'^2 - 2x' + (-1)^2) + 4x' - 4 - 6 \quad (\text{løs ut parentes}) \quad (2.194)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 2x'^2 - 4x' + 2 + 4x' - 4 - 6 \quad (\text{samle like ledd}) \quad (2.195)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = 2x'^2 - 8 \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (2.196)$$

- f) Finn nullpunktene til grafen for lign.(2.191) ved å sette $y' = 0$.

Løsning:

$$0 = 2x'^2 - 8 \quad \quad \quad / + 8 \quad \quad \quad (2.197)$$

$$\Updownarrow$$

$$8 = 2x'^2 \quad \quad \quad / : 2 \quad \quad \quad (2.198)$$

$$\Updownarrow$$

$$4 = x'^2 \quad \quad \quad / \sqrt{} \quad \quad \quad (2.199)$$

$$\Updownarrow$$

$$x' = -2 \vee x' = 2 \quad \quad \quad (2.200)$$

- g) Gjennomfør Descartes' 3. steg og oversett løsningen til de opprinnelige (x, y) -koordinatene.

Løsning:

$$x' = -2 \vee x' = 2 \quad \quad \quad x' = x + 1 \text{ og } y' = y \quad \quad \quad (2.201)$$

$$\Updownarrow$$

$$x + 1 = -2 \vee x + 1 = 2 \quad \quad \quad / - 1 \quad \quad \quad (2.202)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -3 \vee x = 1 \quad \quad \quad (2.203)$$

h) Bruk Descartes' metode på den generelle 2. gradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a > 0 \quad (2.204)$$

og utled dermed ABC-formelen.²¹

Dere trenger ikke å tegne opp noen figurer.

Løsning:

Vi bruker lign.(2.205) og (2.206) til å oversette lign.(2.188) fra (x, y) -koordinatene til (x', y') -koordinatene:

$$y = ax^2 + bx + c \quad x = x' - \frac{b}{2a} \text{ og } y = y' \quad (2.207)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = a\left(x' - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(x' - \frac{b}{2a}\right) + c \quad (2. \text{ kvadratsetning}) \quad (2.208)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = a\left(x'^2 - 2\frac{b}{2a}x' + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + bx' - \frac{b^2}{2a} + c \quad (\text{løs ut parentes}) \quad (2.209)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = ax'^2 - \cancel{a}\frac{b}{\cancel{a}}x' + \cancel{a}\frac{b^2}{4a^2} + bx' - \frac{b^2}{2a} + c \quad (\text{samle like ledd}) \quad (2.210)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = ax'^2 - \cancel{bx'} + \cancel{bx'} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \quad (\text{fellesnevner } 4a) \quad (2.211)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = ax'^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} \frac{2}{2} + \frac{c}{1} \frac{4a}{4a} \quad (2.212)$$

$$\Downarrow$$

$$y' = ax'^2 - \frac{b - 4ac}{4a} \quad (2.213)$$

²¹Hint: Sammenhengen mellom de translaterte (x', y') -koordinatene og de opprinnelige (x, y) -koordinatene er gitt ved

$$x = x' - \frac{b}{2a} \quad (2.205)$$

$$y = y' \quad (2.206)$$

Vi finner så nullpunktene til grafen for lign.(2.213) ved å sette $y' = 0$.

$$0 = ax'^2 - \frac{b-4ac}{4a} \quad \bigg/ + \frac{b-4ac}{4a} \quad (2.214)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{b-4ac}{4ac} = ax'^2 \quad \bigg/ \frac{1}{a} \quad (2.215)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{b-4ac}{4a^2} = x'^2 \quad \bigg/ \sqrt{-} \quad (2.216)$$

$$\Updownarrow$$

$$x' = -\sqrt{\frac{b-4ac}{4a^2}} \vee x' = \sqrt{\frac{b-4ac}{4a^2}} \quad (2.217)$$

$$\Updownarrow$$

$$x' = -\frac{\sqrt{b-4ac}}{2a} \vee x' = \frac{\sqrt{b-4ac}}{2a} \quad (2.218)$$

Vi gjennomfører så Descartes' 3. steg og oversetter løsningen til de opprinnelige (x,y) -koordinatene.

$$x' = -\frac{\sqrt{b-4ac}}{2a} \vee x' = \frac{\sqrt{b-4ac}}{2a} \quad x' = x + \frac{b}{2a} \quad (2.219)$$

$$\Updownarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b-4ac}}{2a} \vee x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b-4ac}}{2a} \quad \bigg/ -\frac{b}{2a} \quad (2.220)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b-4ac}}{2a} \vee x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b-4ac}}{2a} \quad \text{lik fell.nev.} \quad (2.221)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{b-4ac}}{2a} \quad (2.222)$$

Dette er den velkjente *ABC*-formelen.

■

Problem 2.10 — ABC-formelen

En kvadratisk ligning med én variabel er definert ved:

Definisjon 2.0.6 En kvadratisk ligning med 1 variabel er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2.223)$$

hvor $a \neq 0$, b og c er reelle parametre og x er den ukjente variabelen.

Å løse denne ligningen, dvs. finne nullpunktene til 2. gradsligningen, finnes via *ABC*-formelen:

Setning 2.0.2 — ABC-formelen

Løsningen av en 2. gradsligning med en variabel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.224)$$

er gitt ved den såkalte ABC-formelen

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2.225)$$

dvs. løsningsmengden

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \quad (2.226)$$

Fra ABC-formelen kan vi klassifisere hvor mange løsninger lign.(2.223) har ved å se på *fortegnet* på den såkalte *diskriminanten*

$$b^2 - 4ac \quad (2.227)$$

Setning 2.0.3 En kvadratisk ligning

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.228)$$

har 3 mulige situasjoner for løsningsmengden avhengig av fortegnet på diskriminanten i ABC-formelen:

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{to løsninger} \quad (2.229)$$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{èn løsning} \quad (2.230)$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ingen løsning.} \quad (2.231)$$

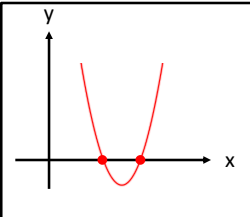
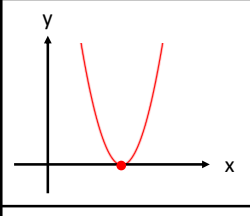
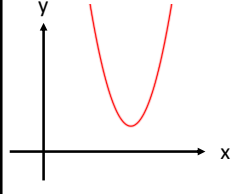
	$b^2 - 4ac > 0$	To løsninger	$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$b^2 - 4ac = 0$	En løsning	$c = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$
	$b^2 - 4ac < 0$	Ingen løsninger	Ingen løsninger siden kvadratroten <i>ikke</i> er definert for <i>negative</i> tall (komplekse tall ikke pensum)

Figure 2.23: Antall løsninger fra ABC-formelen.

- a) Hvorfor har lign.(2.225) fått navnet ABC-formelen?

Løsning:

ABC-formelen er løsning av lign.(2.223), dvs.:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2.232)$$

Koeffisientene i denne ligningen er a , b og c og inngår i løsningen i lign.(2.225). Derav navnet ABC-formelen.

- b) Regn ut diskriminanten $b^2 - 4ac$ og finn eventuelle løsninger til ligningen:

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 \quad (2.233)$$

Løsning:

Diskriminanten $b^2 - 4ac$ for lign.(2.233) er: $(a = 2, b = 4, c = 2)$

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0 \quad (2.234)$$

altså **null**. Bruker ABC-formelen for å finne løsningen til lign.(2.233):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.235)$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm 0}{4} = -1 \quad (2.236)$$

altså kun **én** løsning til lign.(2.233), nemlig nullpunktet $c_1 = -1$.

- c) Regn ut diskriminanten $b^2 - 4ac$ og finn eventuelle løsninger til ligningen:

$$2x^2 + 4x - 2 = 0 \quad (2.237)$$

Løsning:

Diskriminanten $b^2 - 4ac$ for lign.(2.237) er: $(a = 2, b = 4, c = -2)$

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 16 + 16 = 2 \cdot 16 = 32 \quad (2.238)$$

altså positiv: $b^2 - 4ac > 0$.

Bruker ABC-formelen for å finne løsningen til lign.(2.237):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.239)$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \quad (2.240)$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{2 \cdot 16}}{4} \quad (2.241)$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{2} \cdot 4}{4} \quad (2.242)$$

som gir nullpunktene

$$c_1 = -1 + \sqrt{2} \quad \text{og} \quad c_2 = -1 - \sqrt{2} \quad (2.243)$$

altså to løsninger.

- d) Regn ut diskriminanten $b^2 - 4ac$ og finn eventuelle løsninger til ligningen:

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \quad (2.244)$$

Løsning:

Diskriminanten $b^2 - 4ac$ for lign.(2.244) er: $(a = 1, b = 4, c = 8)$

$$b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 \quad (2.245)$$

altså negativ: $b^2 - 4ac < 0$.

Bruker ABC-formelen for å finne løsningen til lign.(2.244):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.246)$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \quad (2.247)$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} \quad (2.248)$$

som ikke gir noen løsning fordi man kan ikke ta kvadratroten av et negativt tall.

■

²²Komplekse tall er ikke pensum i dette kurset.

Problem 2.11 — Fundamentalsetningen for aritmetikk

Et heltall $n > 1$ kan enten dekomponeres i mindre naturlige tall (primtall) ²³ eller så er tallet et primtall som ikke kan faktorerises ytterligere:

Setning 2.0.4 — Fundamentalsetningen for aritmetikk

Ethvert naturlig tall $n > 1$ kan skrives som et entydig **produkt av primtall** p_i

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_m^{a_m} \quad (2.250)$$

hvor $i \leq m$ og $a_i \in \mathbb{N}$.

a) Faktorerisér følgende naturlige tall dersom de ikke allerede er faktorerisert.

$$i) \quad 1 \quad (2.251)$$

$$ii) \quad 2 \quad (2.252)$$

$$iii) \quad 3 \quad (2.253)$$

$$iv) \quad 4 \quad (2.254)$$

$$v) \quad 5 \quad (2.255)$$

$$vi) \quad 6 \quad (2.256)$$

²³Et primtall er et naturlig tall $n \geq 1$, som bare er delelig med seg selv og 1. De første 10 primtallene er:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \quad (2.249)$$

Løsning:

- | | | | |
|-------------|-----------------|--------------------------------------|---------|
| <i>i)</i> | 1 | faktorisering er ikke definert for 1 | (2.257) |
| <i>ii)</i> | 2 | (2 er primtall - er faktorisert) | (2.258) |
| <i>iii)</i> | 3 | (3 er primtall - er faktorisert) | (2.259) |
| <i>iv)</i> | $4 = 2^2$ | (2 er primtall) | (2.260) |
| <i>v)</i> | 5 | (5 er primtall - er faktorisert) | (2.261) |
| <i>vi)</i> | $6 = 3 \cdot 2$ | (2 og 3 er primtall) | (2.262) |

b) Faktoriser følgende naturlige tall dersom de ikke allerede er faktorisert.

$$i) \quad 9 \qquad (2.263)$$

$$ii) \quad 34 \qquad (2.264)$$

$$iii) \quad 108 \qquad (2.265)$$

$$iv) \quad 258 \qquad (2.266)$$

$$v) \quad 11 \qquad (2.267)$$

$$vi) \quad 1024 \qquad (2.268)$$

Løsning:

$$i) \quad 9 = 3^2 \qquad (3 \text{ er primtall}) \qquad (2.269)$$

$$ii) \quad 34 = 2 \cdot 17 \qquad (2 \text{ og } 17 \text{ er primtall}) \qquad (2.270)$$

$$\begin{aligned} iii) \quad 108 &= 2 \cdot 54 = 2 \cdot 2 \cdot 27 = 2^2 \cdot 27 \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 9 = 2^2 3^3 \end{aligned} \qquad (2 \text{ og } 3 \text{ er primtall}) \qquad (2.271)$$

$$iv) \quad 258 = 2 \cdot 129 = 2 \cdot 3 \cdot 43 \qquad (2, 3 \text{ og } 43 \text{ er primtall}) \qquad (2.272)$$

$$v) \quad 11 \qquad (11 \text{ er primtall}) \qquad (2.273)$$

$$vi) \quad 1024 = 2^{10} \qquad (2 \text{ er primtall}) \qquad (2.274)$$

■

Problem 2.12 — Fundamentalsetningen for algebra

Faktorisering av polynomer gjøres ved hjelp av nullpunktene.

Setning 2.0.5 — Fundamentalsetningen for algebra

Polynomet

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.275)$$

kan faktorerises på formen

$$y = a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_{n-1})(x - c_n) \quad (2.276)$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_n$ er nullpunktene (mulig komplekse) til polynomet.

a) Finn faktoriseringen til polynomene: ²⁴

$$i) \quad y = x^2 + 13x \quad (2.277)$$

$$ii) \quad y = 2z^3 - 16z^2 \quad (2.278)$$

$$iii) \quad y = -x + 2x^2 - x^3 \quad (2.279)$$

$$iv) \quad y = xa + 5x \quad (2.280)$$

$$v) \quad y = x^2 + 4x + 4 \quad (2.281)$$

$$vi) \quad y = 4x^2 + 20x + 25 \quad (2.282)$$

²⁴Husk, a, b, c osv. er parametre, mens x, y og z er variabler.

Løsning:

$$i) \quad y = x^2 + 13x = x(x + 13) \quad (2.283)$$

$$ii) \quad y = 2z^3 - 16z^2 = 2z^2(z - 8) \quad (2.284)$$

$$iii) \quad y = -x + 2x^2 - x^3 \quad (2.285)$$

$$= x(-1 + 2x - x^2) = -x \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{=(x-1)^2} = -x(x-1)^2 \quad (2.286)$$

$$iv) \quad y = xa + 5x = x(a + 5) \quad (2.287)$$

$$v) \quad y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \quad (2.288)$$

$$vi) \quad y = 4x^2 + 20x + 25 \quad (2.289)$$

$$= (2x)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5x + 5^2 \quad (2.290)$$

$$= (2x + 5)^2 \quad (2.291)$$

b) Finn faktoriseringen til polynomene:

$$i) \quad y = ax - 2x \quad (2.292)$$

$$ii) \quad y = 2a^2z + 4az^2 \quad (2.293)$$

$$iii) \quad y = x^2 + 2xd + d^2 \quad (2.294)$$

$$iv) \quad y = x^2 - 2xe + e^2 \quad (2.295)$$

$$v) \quad y = x^2 - a^2 \quad (2.296)$$

$$vi) \quad y = 2x^4c^4 - 32 \quad (2.297)$$

Løsning:

$$i) \quad y = ax - 2x = x(a - 2) \quad (2.298)$$

$$ii) \quad y = 2a^2z + 4az^2 = 2az(a + z) \quad (2.299)$$

$$iii) \quad y = x^2 + 2xd + d^2 = (x + d)^2 \quad (2.300)$$

$$iv) \quad y = x^2 - 2xe + e^2 = (x - e)^2 \quad (2.301)$$

$$v) \quad y = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a) \quad (2.302)$$

$$vi) \quad y = 2x^4c^4 - 32 \quad (2.303)$$

$$= 2(x^4c^4 - 16) \quad (2.304)$$

$$= 2((x^2c^2)^2 - 16) \quad (2.305)$$

$$= 2(x^2c^2 - 4)(x^2c^2 + 4) \quad (2.306)$$

$$= 2(xc - 2)(xc + 2)(x^2c^2 + 4) \quad (2.307)$$

c) Finn faktoriseringen til følgende algebraiske uttrykket:

$$i) \quad y = -32 + 2x^2 \quad (2.308)$$

$$ii) \quad y = -7 + x^2 - 6x \quad (2.309)$$

$$iii) \quad y = -1 + x^2 \quad (2.310)$$

$$iv) \quad y = 2z^2 - 6z + 4 \quad (2.311)$$

$$v) \quad y = 5 + 15x \quad (2.312)$$

$$vi) \quad y = z^2 - 2b^2 \quad (2.313)$$

Løsning:

$$i) \quad y = -32 + 2x^2 = 2(x^2 - 16) = 2(x - 4)(x + 4) \quad (2.314)$$

$$ii) \quad y = -7 + x^2 - 6x = x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1) \quad (2.315)$$

$$iii) \quad y = -1 + x^2 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1) \quad (2.316)$$

$$iv) \quad y = 2z^2 - 6z + 4 = 2(z^2 - 3z + 2) = 2(z - 2)(z - 1) \quad (2.317)$$

$$v) \quad y = 5 + 15x = 5(5x + 1) \quad (2.318)$$

$$vi) \quad y = z^2 - 2b^2 = z^2 - (\sqrt{2}b)^2 = (z - \sqrt{2}b)(z + \sqrt{2}b) \quad (2.319)$$

■

Problem 2.13 — Polynomer og faktorisering

Denne kombinerer både *ABC*-formelen, polynomer og faktorisering.

Anta vi har gitt et 3. gradspolynom:

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2. \quad (2.320)$$

Da vet vi fra **algebraens fundamentalsetning**, se lign.(2.323), at vi kan faktorisere polynomet på høyresiden i lign.(2.320), dvs.

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 = \underbrace{(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)}_{\text{faktorisert}} \quad (2.321)$$

hvor c_1 , c_2 og c_3 er nullpunktene (muligens komplekse) til polynomet.

Setning 2.0.6 — Fundamentalsetningen for algebra

Polynomet

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.322)$$

kan faktorerises på formen

$$y = a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_{n-1})(x - c_n) \quad (2.323)$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_n$ er nullpunktene (mulig komplekse) til polynomet.

- a) Tegn opp polynomet

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad (2.324)$$

ved hjelp av GeoGebra ([geogebra.org/classics](https://www.geogebra.org/classics)).

Har polynomet tre *reelle* nullpunkter?
Begrunn svaret kort.

Les av nullpunktene på grafen. ²⁵

Løsning:

Polynomet i GeoGebra:

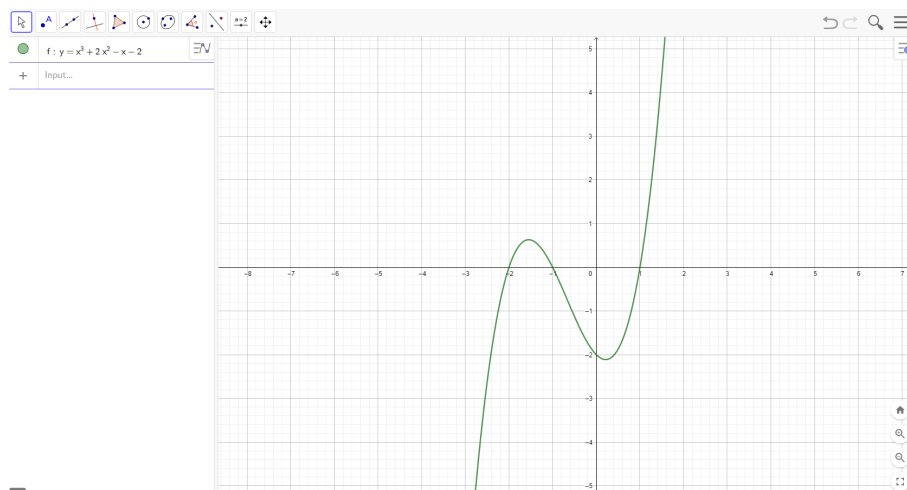


Figure 2.24: $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Som vi ser av figur 2.24, krysser grafen x -aksen **tre** ganger.
Polynomet har dermed tre **reelle** nullpunkter.

²⁵Altså, oppgaven krever ingen regning.

Ved å lese av på grafen, finner vi nullpunktene:

$$c_1 = -2 \quad (2.325)$$

$$c_2 = -1 \quad (2.326)$$

$$c_3 = 1 \quad (2.327)$$

Nå er oppgave **a)** ferdig.

På neste side og frem til side 77 skal vi vise hvordan man finner nullpunktene til 3. gradspolynomet i lign.(2.324) ved regning.

Når nullpunktene er funnet, kan vi også faktorisere polynomet. Det skal vi gjøre i **b)** på side 77.

Til slutt, i oppgave **c)** på side 79, skal vi se på et **annet** polynom og løse det fra start til slutt, også det ved regning. Da er det meningen at dere skal bruke samme metode som i eksemplet på neste side og frem til side 77.

Anta nå at vi kjenner *ett* av nullpunktene til polynomet, f.eks. anta vi vet at

$$x = 1 \quad (2.328)$$

løser ligningen ²⁶

$$0 = x^3 + 2x^2 - x - 2. \quad (2.329)$$

Hvordan kan vi da finne de to *andre* nullpunktene?

Det er dette som er tema i denne gruppeoppgaven.

Setning 2.0.7 Dersom 3. gradspolynomet

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0 \quad (2.330)$$

har et kjent nullpunkt $x = c$, kan vi **faktorisere** polynomet i lign.(2.330) på formen

$$y = (x - c) \overbrace{(a'x^2 + b'x + c')}^{2. \text{ gradspolynom}}, \quad a' \neq 0. \quad (2.331)$$

Kjenner vi med andre ord ett av nullpunktene, kan vi finne de to andre nullpunktene ved å løse 2. gradsligningen

$$a'x^2 + b'x + c' = 0, \quad (2.332)$$

via **ABC-formelen**.

Men hvordan finner vi parametrene a' , b' og c' i lign.(2.331)?

²⁶Ved å sette inn $x = 1$ i lign.(2.329), kan vi raskt sjekke at $x = 1$ faktisk *er* en løsning.

Setningen vi bruker for å bestemme parametrene a' , b' og c' i lign.(2.331) er enkel, men også svært kraftigfull:

Setning 2.0.8 La:

$$y = a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad \text{og} \quad y' = b_1x^1 + b_2x^2 + \dots + b_nx^n \quad (2.333)$$

Dersom polynomene er like, dvs.:

$$y = y' \quad (2.334)$$

så er også alle **koeffisientene** like:

$$a_i = b_i \quad (2.335)$$

for alle $i = 1, \dots, n$.

Med ord:

Dersom to polynomer av **samme grad** er like, må alle **koeffisientene** være like.

La oss fortsette eksempelet vårt med denne nye informasjonen nært i minne:
Siden

$$x = 1 \quad (2.336)$$

løser ligningen

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0, \quad (2.337)$$

så har vi, via lign.(2.331):

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 = \overbrace{(x-1)(a'x^2 + b'x + c')}^{\text{lign.(2.331)}} \quad (\text{pilmetoden}) \quad (2.338)$$

$$= a'x^3 + b'x^2 + c'x - a'x^2 - b'x - c' \quad (\text{like ledd}) \quad (2.339)$$

$$= a'x^3 + (b' - a')x^2 + (c' - b')x - c' \quad (2.340)$$

Vi har dermed to 3. gradspolynomer som er like (i rødt):

$$\text{lign.(2.338)} = \text{lign.(2.340)} \quad (2.341)$$

$$\overbrace{1 \cdot x^3 + 2x^2 - 1x - 2}^{\text{lign.(2.338)}} = \overbrace{a'x^3 + (b' - a')x^2 + (c' - b')x - c'}^{\text{lign.(2.340)}} \quad (2.342)$$

Setning 2.0.8 sier da at koeffisientene må være like, se lign.(2.335).²⁷
Lign.(2.342) gir da ligningene:

$$1 = a' \quad (2.343)$$

$$2 = b' - a' \Leftrightarrow 2 = b' - 1 \Leftrightarrow b' = 3 \quad (2.344)$$

$$-1 = c' - b' \Leftrightarrow -1 = c' - 3 \Leftrightarrow c' = 2 \quad (2.345)$$

²⁷Husk at $x = 1 \cdot x$

Vi har dermed funnet koeffisientene:

$$a' = 1 \quad (2.346)$$

$$b' = 3 \quad (2.347)$$

$$c' = 2 \quad (2.348)$$

som innsatt i lign.(2.338) gir

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) \overbrace{(1x^2 + 3x + 2)}^{ABC\text{-formelen}} \quad (2.349)$$

- b)** Bestem de to siste nullpunktene til polynomet i lign.(2.349) ved hjelp av *ABC*-formelen, dvs. løs ligningen

$$1x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (2.350)$$

Stemmer svaret dere får med avlesningen av GeoGebra-figuren fra oppgave **a**)?

Skriv polynomet i lign.(2.349) på faktorisert form.

Løsning:

Finner løsningen til 2. gradsligningen via *ABC*-formelen:

$$1x^2 + 3x + 2 = 0, \quad (\text{ABC-formelen}) \quad (2.351)$$

$$\Updownarrow \quad (2.352)$$

$$x = \frac{-3 - \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \vee x = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \quad (2.353)$$

$$\Updownarrow \quad (2.354)$$

$$x = \frac{-3 - \sqrt{9 - 8}}{2} \vee x = \frac{-3 + \sqrt{9 - 8}}{2} \quad (2.355)$$

$$\Updownarrow \quad (2.356)$$

$$x = \frac{-3 - 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \vee x = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad (2.357)$$

altså $c_2 = -2$ og $c_3 = -1$ er nullpunktene til 2. gradspolynomet i lign.(2.351).

Totalt er det 3 nullpunkter for 3. gradspolynomet i lign.(2.349), nemlig:

$$c_1 = 1 \quad (2.358)$$

$$c_2 = -2 \quad (2.359)$$

$$c_3 = -1 \quad (2.360)$$

3. gradspolynomet i lign.(2.349) på faktorisert form er dermed:

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) \overbrace{(1x^2 + 3x + 2)}^{\text{ABC-formelen}} \quad (2.361)$$

$$= (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \quad (2.362)$$

$$= (x - 1)(x + 2)(x + 1) \quad (\text{faktorisert form}) \quad (2.363)$$

- c) La oss nå se på et annet 3. gradspolynom, nemlig:

$$y = x^3 + 2x^2 - 2x - 4 \quad (2.364)$$

Faktoriser 3. gradspolynomet i lign.(2.364) når dere får oppgitt at ett av nullpunktene er gitt ved løsningen

$$x = -2 \quad (2.365)$$

Hva er **nullpunktene** til polynomet i lign.(2.364)?

Løsning:

Siden

$$x = -2 \quad (2.366)$$

løser ligningen

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0, \quad (2.367)$$

så har vi, via setning 2.0.7:

$$y = x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = (x + 2)(a'x^2 + b'x + c') \quad \begin{array}{l} \text{(pilmetoden)} \\ (2.368) \end{array}$$

$$= a'x^3 + b'x^2 + c'x + 2a'x^2 + 2b'x + 2c' \quad \begin{array}{l} \text{(like ledd)} \\ (2.369) \end{array}$$

$$= a'x^3 + (b' + 2a')x^2 + (c' + 2b')x + 2c' \quad (2.370)$$

Vi har dermed to 3. gradspolynomer som er like (i blått):

$$\text{lign.}(2.368) = \text{lign.}(2.370) \quad (2.371)$$

$$\overbrace{1 \cdot x^3 + 2x^2 - 2x - 4}^{\text{lign.}(2.368)} = \overbrace{a'x^3 + (b' + 2a')x^2 + (c' + 2b')x + 2c'}^{\text{lign.}(2.370)} \quad (2.372)$$

Setning 2.0.8 sier da at koeffisientene må være like, se lign.(2.372).²⁸
Det gir ligningene:

$$1 = a' \quad (2.373)$$

$$2 = b' + 2a' \Leftrightarrow 2 = b' + 2 \cdot 1 \Leftrightarrow b' = 0 \quad (2.374)$$

$$-2 = c' + 2b' \Leftrightarrow -2 = c' + 2 \cdot 0 \Leftrightarrow c' = -2 \quad (2.375)$$

Vi har dermed funnet koeffisientene:

$$a' = 1 \quad (2.376)$$

$$b' = 0 \quad (2.377)$$

$$c' = -2 \quad (2.378)$$

som innsatt i lign.(2.368) gir

$$y = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2)(1x^2 + 0x - 2) \quad (2.379)$$

$$= (x + 2)(x^2 - 2) \quad (\text{konj.set.}) \quad (2.380)$$

$$= (x + 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \quad (2.381)$$

som er faktoriseringen av polynomet.

²⁸Husk at $x = 1 \cdot x$

Siden polynomet er faktorisert så kjenner vi også nullpunktene:

$$c_1 = -2 \tag{2.382}$$

$$c_2 = -\sqrt{2} \tag{2.383}$$

$$c_3 = \sqrt{2} \tag{2.384}$$

■

Problem 2.14 — Ulikheter

Alle tallmengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er utstyrt med en *ordningsrelasjon*.
En ordningsrelasjon plasserer i prinsippet alle tallene langs en *rekkefølge*.

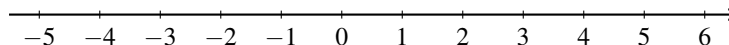


Figure 2.25: Tallene er *ordnet* langs en rett linje.

Definisjon 2.0.7 Dersom et tall b er til høyre for et annet tall a på tallinjen, sier vi at a er mindre enn b .

Matematisk skriver vi

$$a < b. \quad (2.385)$$

Figur 2.26 illustrerer lign.(2.385):

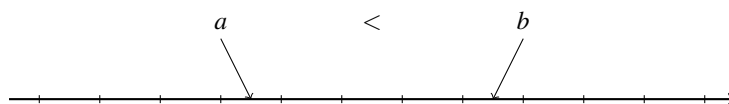


Figure 2.26: Når a er mindre enn b , dvs. $a < b$.

- a) **Løs** ulikheten, skriv opp **løsningsmengden** og tegn opp en **tallinje** for løsningsmengden:

$$i) \quad 4 \leq -2z \quad (2.386)$$

$$ii) \quad 5x + 4 > 3x + 12 \quad (2.387)$$

$$iii) \quad \frac{1}{3}(1-x) \geq 2(x-3) \quad (2.388)$$

Løsning:

- i) Vi transformerer ulikheten til en enklere form:

$$4 \leq -2z \quad \bigg/ \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (2.389)$$

$\Downarrow$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \geq (-2z) \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{SNU ulikheten pga. mult. med negativt tall} \quad (2.390)$$

$\Downarrow$

$$-2 \geq z \quad (2.391)$$

som gir løsningsmengden:

$$\mathcal{L} = \{ z \mid z \leq -2 \} = \langle -\infty, 2] \quad (2.392)$$

Figur 2.27 illustrerer løsningsmengden langs tallinjen.

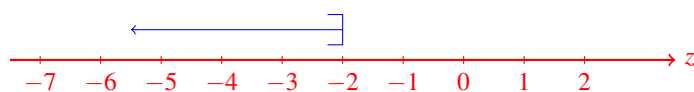


Figure 2.27: Løsningsmengden til $4 \leq -2z$.

ii) Vi transformerer ulikheten til en enklere form:

$$5x + 4 > 3x + 12 \quad \quad \quad / -3x - 4 \quad \quad \quad (2.393)$$

$$\Downarrow$$

$$5x - 3x > 12 - 4 \quad \quad \quad (2.394)$$

$$\Downarrow$$

$$2x > 8 \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad \quad \quad (2.395)$$

$$\Downarrow$$

$$x > 4 \quad \quad \quad (2.396)$$

som gir løsningsmengden:

$$\mathcal{L} = \{ x \mid x > 4 \} = \langle 4, \infty \rangle \quad \quad \quad (2.397)$$

Figur 2.28 illustrerer løsningsmengden langs tallinjen.

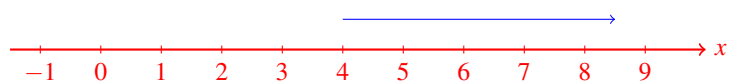


Figure 2.28: Løsningsmengden til $5x + 4 > 3x + 12$.

iii) Vi transformerer ulikheten til en enklere form:

$$\frac{1}{3}(1-x) \geq 2(x-3) \quad \bigg/ \cdot 3 \quad (2.398)$$

$$\Updownarrow$$

$$(1-x) \geq 6(x-3) \quad \text{distributive lov} \quad (2.399)$$

$$\Updownarrow$$

$$1-x \geq 6x-18 \quad \bigg/ x+18 \quad (2.400)$$

$$\Updownarrow$$

$$19 \geq 7x \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{7} \quad (2.401)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{19}{7} \geq x \quad (2.402)$$

som gir løsningsmengden: ²⁹

$$\mathcal{L} = \left\{ x \mid x \leq \frac{19}{7} \right\} = \left\langle -\infty, \frac{19}{7} \right] \quad (2.403)$$

Figur 2.29 illustrerer løsningsmengden langs tallinjen.

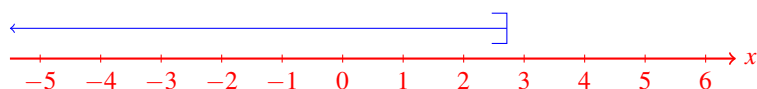


Figure 2.29: Løsningsmengden til $\frac{1}{3}(1-x) \geq 2(x-3)$.

²⁹ $\frac{19}{7} = 2.7142\dots$

b) Sett opp **fortegnsskjema** og løs polynomulikhetene:

$$i) \quad (x+3)(x-1) < 0 \quad (2.404)$$

$$ii) \quad x(x+2)(x+4) > 0 \quad (2.405)$$

$$iii) \quad (1-x)(x+2) \leq 0 \quad (2.406)$$

Løsning:

i) Siden ulikheten er på faktorisert form,

$$(x+3)(x-1) < 0 \quad (2.407)$$

ser vi umiddelbart at nullpunktene er $c_1 = -3$ og $c_2 = 1$.

Fortegnsskjema:

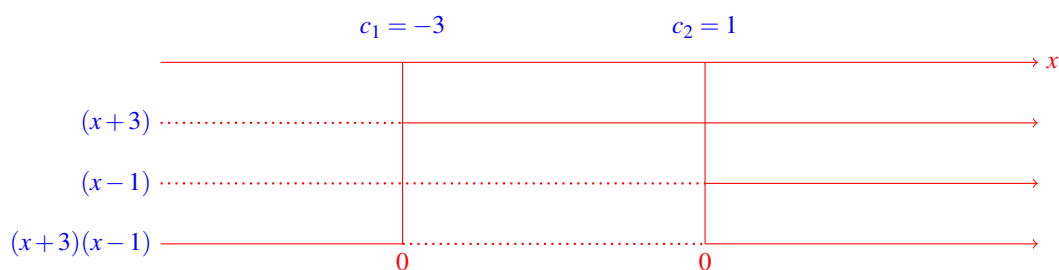


Figure 2.30: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra figur 2.30:

$$-3 < x < 1 \quad (2.408)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -3, 1 \rangle \quad (2.409)$$

ii) Siden ulikheten er på faktorisert form,

$$x(x+2)(x+4) > 0 \quad (2.410)$$

ser vi umiddelbart at nullpunktene er $c_1 = -4$, $c_2 = -2$ og $c_3 = 0$.

Fortegnsskjema:

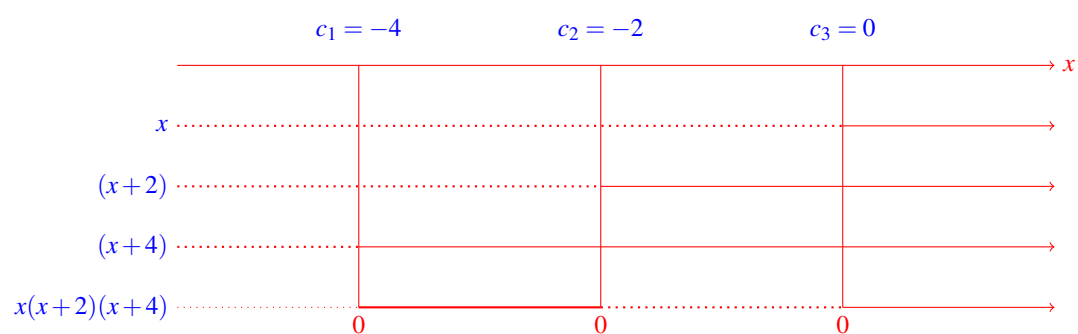


Figure 2.31: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra figur 2.31:

$$-4 < x < -2 \quad \vee \quad x > 0 \quad (2.411)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -4, -2 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle \quad (2.412)$$

iii) Siden ulikheten er på faktorisert form,

$$(1-x)(x+2) \leq 0 \quad (2.413)$$

ser vi umiddelbart at nullpunktene er $c_1 = -2$ og $c_2 = 1$.

Fortegnsskjema:

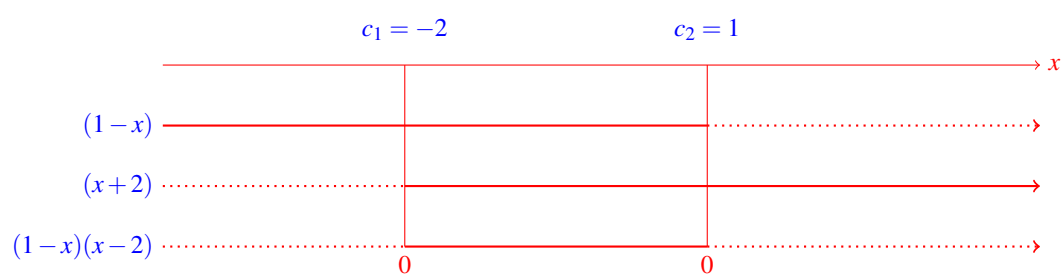


Figure 2.32: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra figur 2.33:

$$-\infty < x \leq -2 \quad \vee \quad 1 \leq x < \infty \quad (2.414)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -\infty, -2] \cup [1, \infty) \quad (2.415)$$

c) Løs polynomulikhetene:

$$i) \quad x^2 - 25 < 0 \quad (2.416)$$

$$ii) \quad x^2 - 5x + 4 \geq 0 \quad (2.417)$$

$$iii) \quad -(4x^2 - 16x + 16) \leq 0 \quad (2.418)$$

Løsning:

i) Siden

$$x^2 - 25 < 0 \quad (2.419)$$

$$(x - 5)(x + 5) < 0 \quad (\text{faktorisert form}) \quad (2.420)$$

ser vi umiddelbart at nullpunktene er $c_1 = -5$ og $c_2 = 5$.

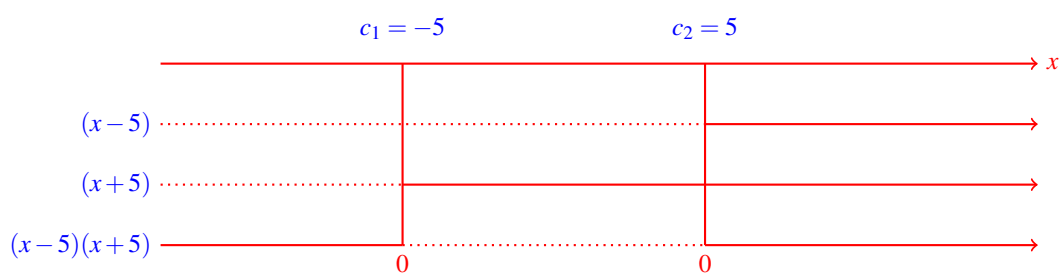


Figure 2.33: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra figur 2.33:

$$-5 < x < 5 \quad (2.421)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -5, 5 \rangle \quad (2.422)$$

ii) Siden

$$x^2 - 5x + 4 \geq 0 \quad (2.423)$$

$$(x - 1)(x - 4) \geq 0 \quad (\text{faktorisert form}) \quad (2.424)$$

ser vi umiddelbart at nullpunktene er $c_1 = 1$ og $c_2 = 4$.

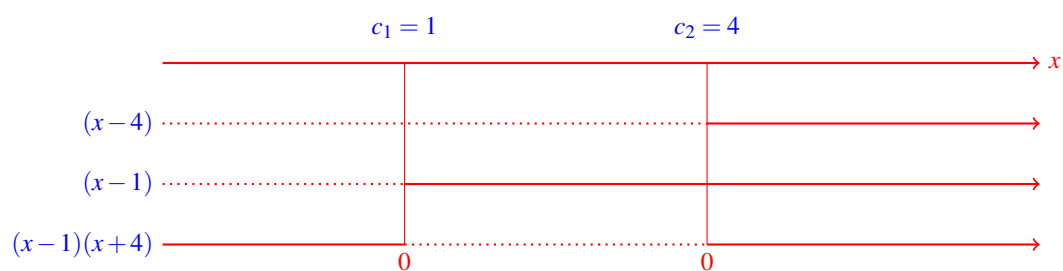


Figure 2.34: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra figur 2.34:

$$x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 4 \quad (2.425)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -\infty, 1] \cup [4, \infty) \quad (2.426)$$

iii) Siden

$$-(4x^2 - 16x + 16) \leq 0 \quad (2.427)$$

$$-4(x^2 - 4x + 4) \leq 0 \quad (2.428)$$

$$-4(x - 2)^2 \leq 0 \quad (\text{faktorisert form}) \quad (2.429)$$

Faktoren $(x - 2)^2$ er alltid null eller positiv for alle $x \in \mathbb{R}$. Og -4 er alltid negativ. Dette ser vi uten å sette opp fortegnsskjema.

Dermed:

$$\mathcal{L} = \mathbb{R} \quad (2.430)$$

■

Problem 2.15 — Ulikheter

Polynomet

$$y = -3x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{609}{2}x^2 - 1209x + 1260 \quad (2.431)$$

har nullpunktene

$$c_1 = -12 \quad , \quad c_2 = 2 \quad , \quad c_3 = \frac{5}{2} \quad , \quad c_4 = 7 \quad (2.432)$$

a) Løs ulikheten,

$$y > 0 \quad (2.433)$$

Løsning:

Siden nullpunktene er oppgitt, så kan uttrykket faktoriseres direkte uten videre utregninger: ³⁰

$$y = -3x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{609}{2}x^2 - 1209x + 1260 \quad (2.434)$$

$$= -3(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4) \quad (2.435)$$

$$= -3(x+12)(x-2)\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-7) \quad (2.436)$$

³⁰Husk fundamentalsetningen for algebra.

For å løse ulikheten

$$y > 0 \quad (2.437)$$

dvs.:

$$-3(x+12)(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-7) > 0 \quad (2.438)$$

setter vi opp et fortegnsskjema:

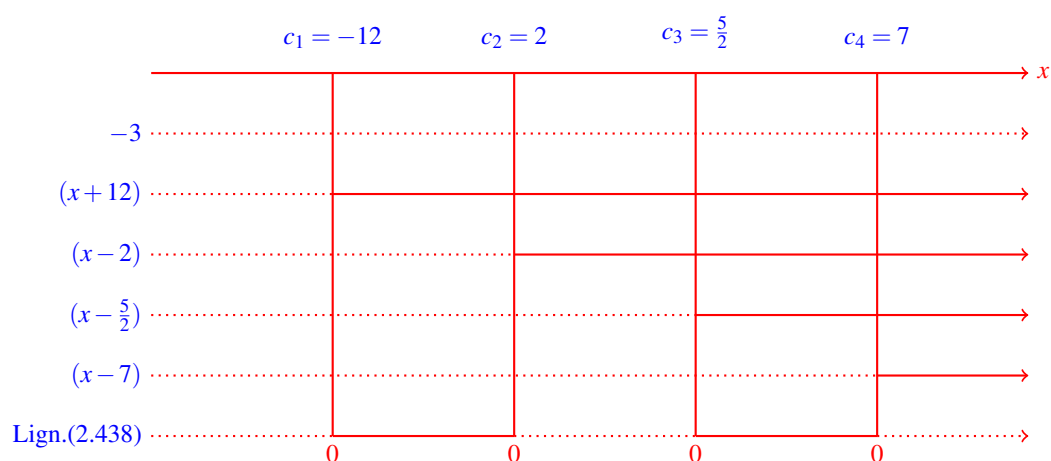


Figure 2.35: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra figur 2.35:

$$-12 < x < 2 \vee \frac{5}{2} < x < 7 \quad (2.439)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -12, 2 \rangle \cup \langle \frac{5}{2}, 7 \rangle \quad (2.440)$$

b) Løs ulikheten,

$$y < 0 \tag{2.441}$$

Løsning:

Vi trenger ikke sette opp et nytt fortegnsskjema for $y < 0$.
Vi bruker fortegnsskjema fra forrige deloppgave, se figur 2.35,
og leser av løsningsmengden direkte:

$$x < -12 \quad \vee \quad 2 < x < \frac{5}{2} \quad \vee \quad x > 7 \tag{2.442}$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -\infty, -12 \rangle \cup \langle 2, \frac{5}{2} \rangle \cup \langle 7, \infty \rangle \tag{2.443}$$

■

Problem 2.16 — Ulikheter med rasjonale uttrykk

Definisjon 2.0.8 En rasjonal ulikhet er en ulikhet på formen

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad (2.444)$$

hvor $A(x)$ og $B(x)$ er polynomer av grad n og m hhv.

a) Løs ulikheten:

$$\frac{2x-7}{x+2} < 3 \quad (2.445)$$

Løsning:

Vi multipliserer ikke med $x+2$ siden vi ikke vet om $x+2$ er positivt eller negativt.
Vi flytter heller tallet 3 over på venstre side:

$$\frac{2x-7}{x+2} < 3 \quad \quad \quad / -3 \quad (2.446)$$

$$\frac{2x-7}{x+2} - 3 < 0 \quad (2.447)$$

Dermed:

$$\frac{2x-7}{x+2} - 3\frac{x+2}{x+2} < 0 \quad \text{fellesnevner} \quad (2.448)$$

$$\frac{2x-7-3x-6}{x+2} < 0 \quad (2.449)$$

$$\frac{-x-13}{x+2} < 0 \quad \bigg/ \cdot (-1) \quad (2.450)$$

$$\frac{x+13}{x+2} > 0 \quad \text{SNU ulikhetstegnet} \quad (2.451)$$

Med $c_1 = -13$ og $c_2 = -2$:

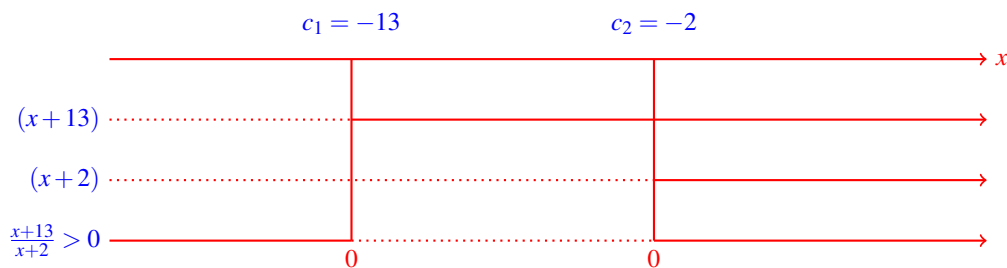


Figure 2.36: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra figur 2.36:

$$x < -13 \vee x > -2 \quad (2.452)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -\infty, -13 \rangle \cup \langle -2, \infty \rangle \quad (2.453)$$

- b) For sammenligningen sin skyld, la oss nå løse lign.(2.445) med likhet istedet for ulikhet, dvs.:

$$\frac{2x-7}{x+2} = 3 \quad (2.454)$$

Hvor mange løsninger har lign.(2.454)?

Hvor mange løsninger har lign.(2.445)?

Løsning:

Når vi har en ligning, derimot, kan vi multiplisere med $x+2$:

$$\frac{2x-7}{x+2} = 3 \quad \quad \quad \bigg/ \cdot (x+2) \quad (2.455)$$

$$2x-7 = 3(x+2) \quad \quad \quad \text{pilmetoden} \quad (2.456)$$

$$2x-7 = 3x+6 \quad \quad \quad \bigg/ 7-3x \quad (2.457)$$

$$2x-3x = 6+7 \quad (2.458)$$

$$x = -13 \quad (2.459)$$

Konklusjon:

Lign.(2.454) har kun én løsning, nemlig $x = -13$.
Men ulikheten i lign.(2.445) har uendelig antall løsninger.

Altså: det er stor forskjell på ligninger og ulikheter.

■

Problem 2.17 — Absoluttverdi

Definisjon 2.0.9 — Absoluttverdi

Absoluttverdien av et tall $a \in \mathbb{R}$ er definert som

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{ når } a \geq 0 \\ -a & , \text{ når } a < 0 \end{cases} \quad (2.460)$$

a) Regn ut absoluttverdiene:

$$i) \quad |-3.85| \quad (2.461)$$

$$ii) \quad |3.85| \quad (2.462)$$

$$iii) \quad |0| \quad (2.463)$$

$$iv) \quad |10^{-5}| \quad (2.464)$$

Løsning:

$$i) \quad |-3.85| = 3.85 \quad (2.465)$$

$$ii) \quad |3.85| = 3.85 \quad (2.466)$$

$$iii) \quad |0| = 0 \quad (2.467)$$

$$iv) \quad |10^{-5}| = 10^{-5} \quad (2.468)$$

- b) Skisser punktene (x, y) som oppfyller ligningen ³¹

$$y = |-5x + 7| \quad (2.469)$$

Løsning:

Vi må finne nullpunktet til uttrykket i absoluttverdien i lign.(2.469).

$$-5x + 7 = 0 \quad \quad \quad / -7, \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \quad (2.470)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ x = \frac{7}{5} \end{array} \quad (2.471)$$

Dermed vet vi at uttrykket er negativt når $x > \frac{7}{5}$ og positivt eller null når $x \leq \frac{7}{5}$.
Definisjonen gir da

$$y = |-5x + 7| = \begin{cases} -5x + 7 & , \text{ når } x \leq \frac{7}{5} \\ -(-5x + 7) & , \text{ når } x > \frac{7}{5}. \end{cases} \quad (2.472)$$

Figur 2.37 viser at absoluttverdien er alltid positiv og symmetrisk rundt nullpunktet, som i dette tilfellet er $c_1 = \frac{7}{5}$.

³¹Å skisse betyr at man ikke tegner opp nøyaktig, men kun får frem formen på grafen. Bruk kunnskapen du har om en rett linje med stigningstall og skjæringspunkt med y-aksen. Er grafen symmetrisk?

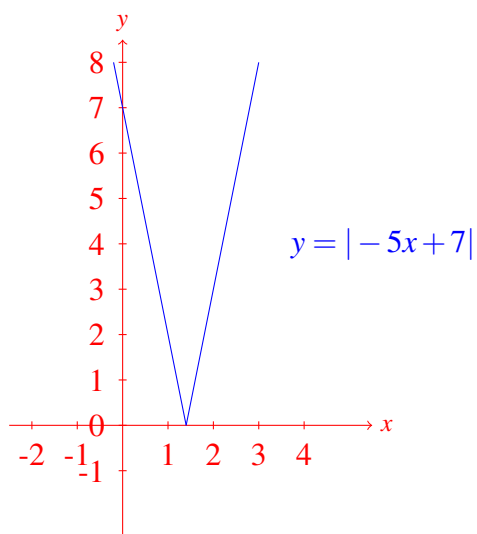


Figure 2.37: Plott av ligningen $y = |-5x + 7|$.

c) Løs likheten

$$y = |-5x + 7| - 2x - 1 = 0 \quad (2.473)$$

Løsning:

Fra lign.(2.472) har vi:

$$y = |-5x + 7| = \begin{cases} -5x + 7 & , \text{ når } x \leq \frac{7}{5} \\ -(-5x + 7) & , \text{ når } x > \frac{7}{5}. \end{cases} \quad (2.474)$$

1) $x \leq \frac{7}{5}$:

$$|-5x + 7| - 2x - 1 = 0 \quad (2.475)$$

$$\Downarrow$$

$$-5x + 7 - 2x - 1 = 0 \quad (\text{samler like ledd}) \quad (2.476)$$

$$\Downarrow$$

$$-7x + 6 = 0 \quad / -6 \quad (2.477)$$

$$\Downarrow$$

$$-7x = -6 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \quad (2.478)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{6}{7} \quad (2.479)$$

Siden $\frac{6}{7} \leq \frac{7}{5}$ så er $x = \frac{6}{7}$ en løsning.

$$2) \quad x > \frac{7}{5}:$$

$$|-5x + 7| - 2x - 1 = 0 \quad (2.480)$$

$$\Updownarrow$$

$$-(-5x + 7) - 2x - 1 = 0 \quad (\text{pilmetoden}) \quad (2.481)$$

$$\Updownarrow$$

$$5x - 7 - 2x - 1 = 0 \quad \text{samler like ledd} \quad (2.482)$$

$$\Updownarrow$$

$$3x - 8 = 0 \quad / + 8, \cdot \frac{1}{3} \quad (2.483)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{8}{3} \quad (2.484)$$

Siden $\frac{8}{3} > \frac{7}{5}$ så er $x = \frac{8}{3}$ en løsning.

Løsningsmengden er dermed:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{6}{7}, \frac{8}{3} \right\} \quad (2.485)$$

■

Problem 2.18 — Ulikheter på Haltenbanken

Vi skal i denne gruppeoppgaven se på en anvendelse av **polynomer**, **faktorisering** og **ulikheter** i en aktuell logistikksammenheng.

På Haltenbanken rett utenfor kysten til Nordmøre ligger flere store oljefelt. Her finner vi f.eks. oljefeltene Kristin, Åsgard, Heidrun, Norne, Njord og Draugen, se figur 2.38.

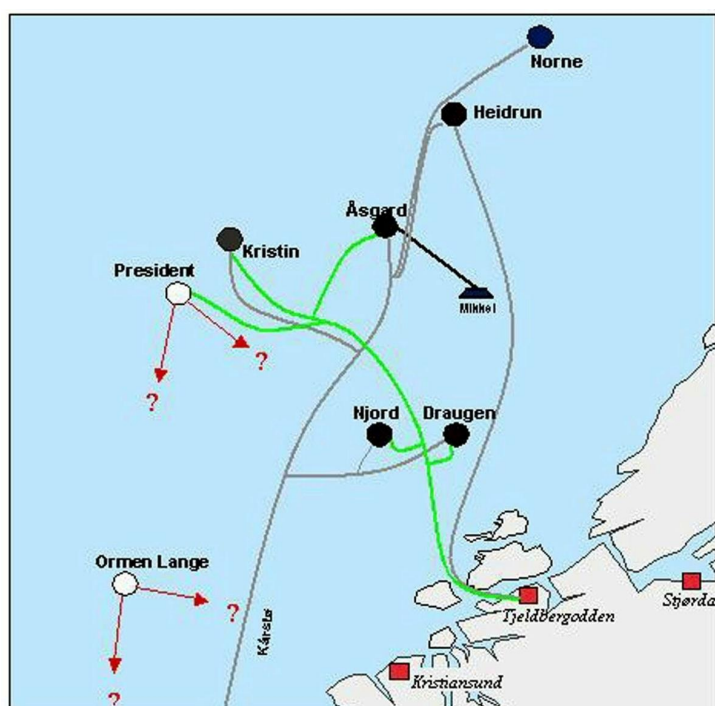


Figure 2.38: Haltenbanken.

Draugen var det første oljefeltet på Haltenbanken, se figur 2.39.

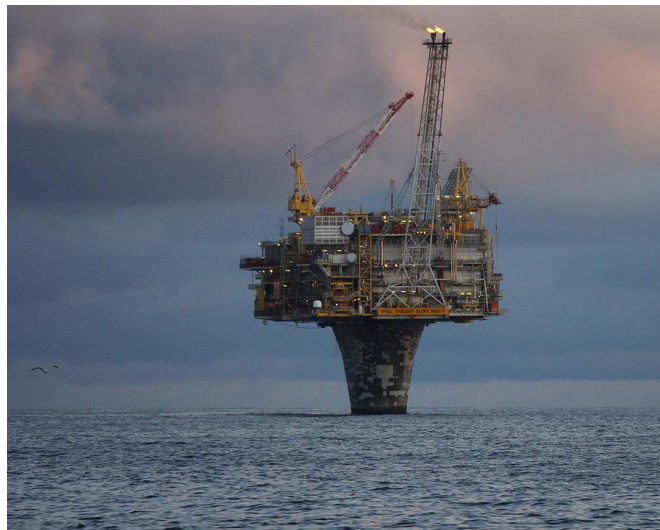


Figure 2.39: Draugen borerigg.

Oljelageret til Draugen ligger på havbunn, ca. 250m dypt vann. Når et tankskip skal hente olje, pumpes oljen fra havbunnen som vist i figur 2.40.



Figure 2.40: Tanking.

Et tankskip koster svært mye å leie/drifte pr. døgn. Dersom *bølgehøyden* er over en viss kritisk høyde c , kan ikke tankskipet pumpe inn olje. Skipet blir da liggende å vente til bølgehøyden komme under den kritiske høyden c .

Når tankskipet ligger og venter på at bølgehøyden blir lav nok, taper oljeselskapet mye penger.

Ekstreme bølgehøyder har også vært nyhetsoppslag i lokalavisen **Tidens Krav** i Kristiansund. Link finner dere [her](#).



Figure 2.41: Atlanterhavsveien utenfor Kristiansund.

For å unngå å sende tankskip til Draugen i de tidspunkt hvor bølgene er for høye, frem-skaffer oljeselskapene **prognoser** for bølgehøyden for et visst antall dager frem i tid.

Anta prognosene for bølgehøyden h for de neste 6 dagene ($0 < t < 6$) er gitt ved 6. gradspolynomet:

$$y = -0.1t^6 + 1.58t^5 - 9.075t^4 + 22.645t^3 - 21.095t^2 - 1.7785t + 14.83 \quad (2.486)$$

- a) Tegn opp polynomet i lign.(2.486) ved hjelp av GeoGebra ([geogebra.org/classics](https://www.geogebra.org/classics)).
32

Løsning:

Polynomet i GeoGebra: 33

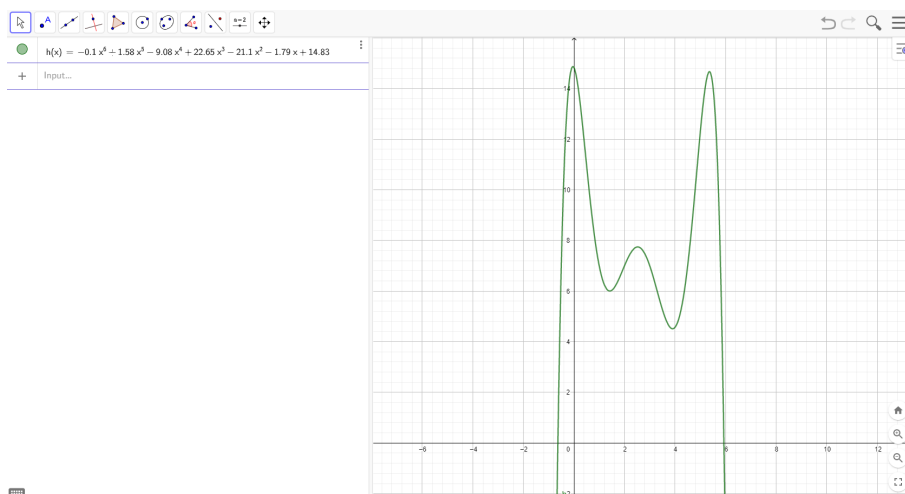


Figure 2.42: Bølgehøyden y gitt ved lign.(2.486).

³²Dersom du ikke har tilgang til printer så trenger du kun å skrive at du har brukt GeoGebra.

³³Legg merke til at ved endepunktene, dvs. rundt $t = 0$ og $t = 6$ er ikke prognosene spesielt gode. Dette er helt normalt for slike prognoser. Vi ser derfor kun på tidsintervallet $0 \leq t \leq 6$.

b) Anta at den kritiske bølgehøyden er gitt ved

$$c = 7 \text{ meter} \quad (2.487)$$

Tegn inn linjen

$$y = 7 \quad (2.488)$$

i samme figuren som i oppgave a) ved hjelp av GeoGebra ([geogebra.org/classics](https://www.geogebra.org/classics)). Les av på grafen de tidsintervallene mellom $0 < t < 6$ hvor tankskipet kan starte pumping av olje.

Løsning:

Linjen og polynomet i GeoGebra:

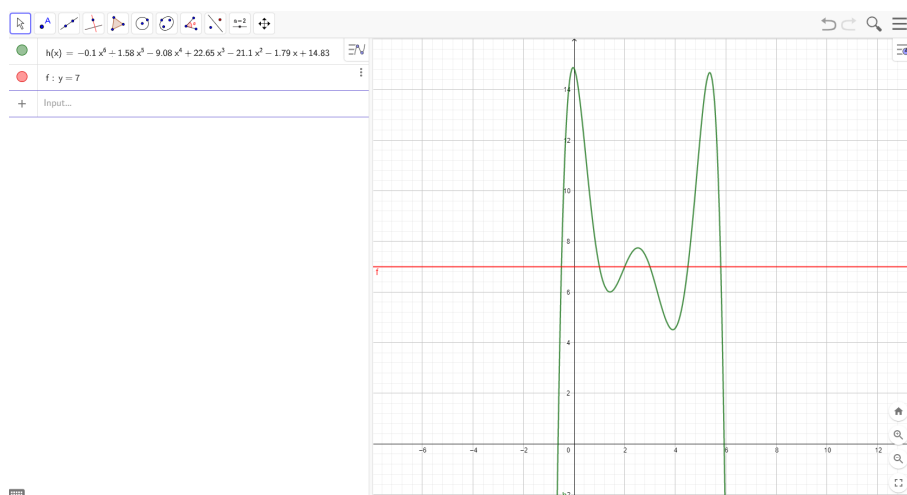


Figure 2.43: Bølgehøyden y og kritisk bølgehøyde $c = 7$.

Vi finner skjæringspunktene fra grafen ved hjelp av GeoGebra:

$$A = (-0.5, 7) \quad (2.489)$$

$$B = (1, 7) \quad (2.490)$$

$$C = (2, 7) \quad (2.491)$$

$$D = (3, 7) \quad (2.492)$$

$$E = (4.5, 7) \quad (2.493)$$

$$F = (5.8, 7) \quad (2.494)$$

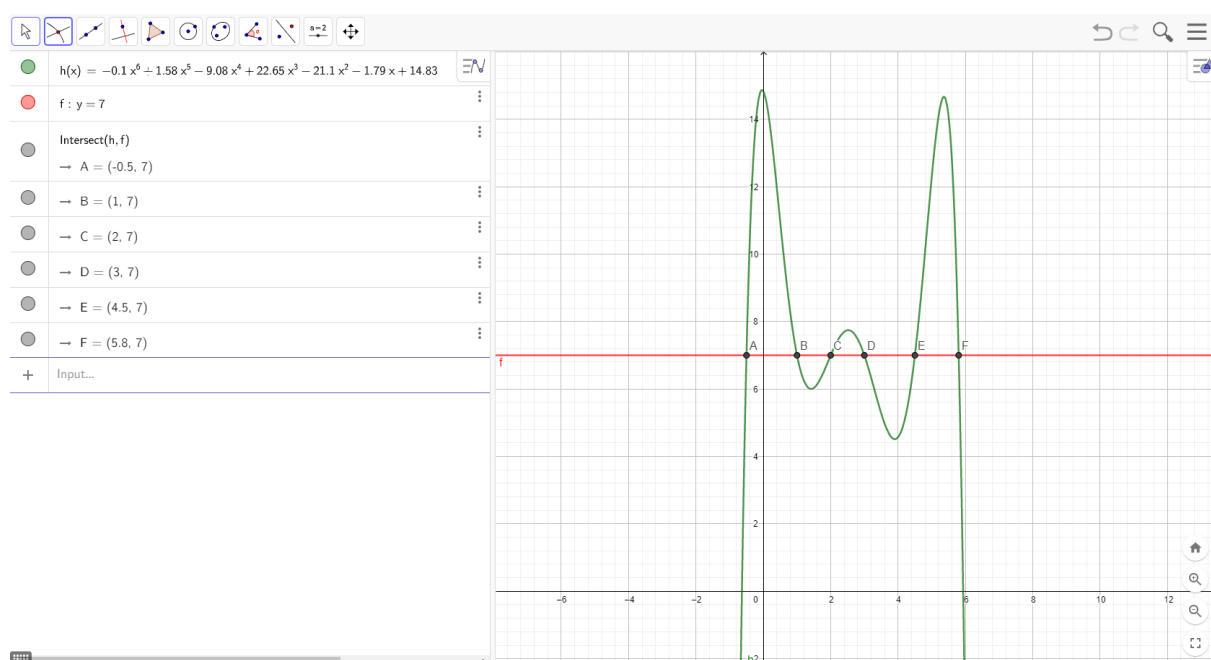


Figure 2.44: Bølgehøyden y og kritisk bølgehøyde $c = 7$.

Vi ser fra grafen at intervallene hvor bølgehøyden er *under* den kritiske høyden er gitt ved intervallene fra B til C , fra D til E og til slutt fra F til $t = 6$:

$$I_{BC} = \langle 1, 2 \rangle \quad (2.495)$$

$$I_{DE} = \langle 3, 4.5 \rangle \quad (2.496)$$

$$I_F = \langle 5.8, 6 \rangle \quad (2.497)$$

som er intervallene hvor tankskipet har mulighet til å fylle.

Vi skal nå finne de samme intervallene ved regning.

Vi starter med å definere et nytt polynom hvor vi tar det gamle og trekker fra bølgehøyden c :

$$y = -0.1t^6 + 1.58t^5 - 9.075t^4 + 22.645t^3 - 21.095t^2 - 1.7785t - 14.83 - c \quad (2.498)$$

hvor vi antar $c = 7$ meter. ³⁴

- c) Hva er nullpunktene til polynomet?
Svar uten utregninger.
Begrunn kort hvorfor.

³⁴Vi har med andre ord *trekt* den kritiske bølgehøyden fra den prognostiserte bølgehøyden (det opprinnelige polynomet).

Løsning:

Nullpunktene er de samme som vi fant i oppgave **b**):

$$c_1 = -0.5 \quad (2.499)$$

$$c_2 = 1 \quad (2.500)$$

$$c_3 = 2 \quad (2.501)$$

$$c_4 = 3 \quad (2.502)$$

$$c_5 = 4.5 \quad (2.503)$$

$$c_6 = 5.8 \quad (2.504)$$

I oppgave **b**) løste vi grafisk ligningen

$$-0.1t^6 + 1.58t^5 - 9.075t^4 + 22.645t^3 - 21.095t^2 - 1.7785t + 14.83 = c$$

som er ekvivalent med ligningen

$$-0.1t^6 + 1.58t^5 - 9.075t^4 + 22.645t^3 - 21.095t^2 - 1.7785t + 14.83 - c = 0$$

som viser at vi har funnet nullpunktene til polynomet i oppgaveteksten.

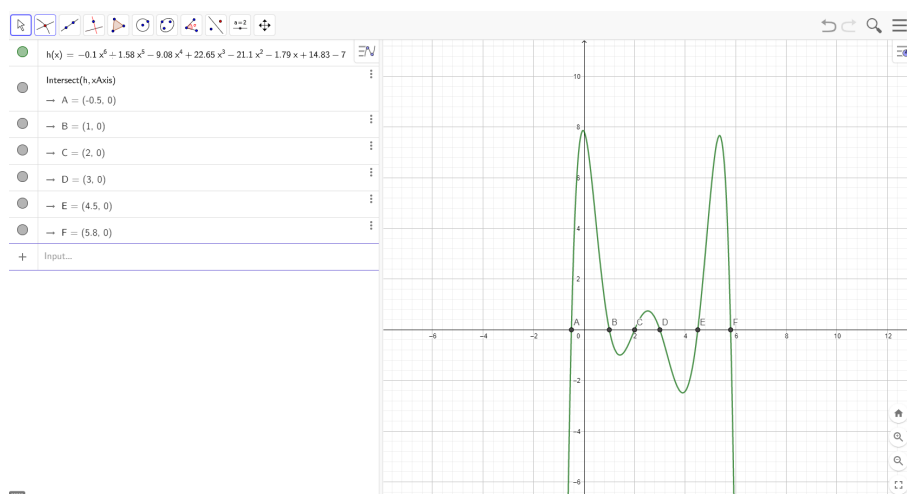


Figure 2.45: Nullpunktene.

- d) Regn ut intervallene mellom $0 < t < 6$ hvor tankskipene kan fylle olje ved å løse ulikheten.³⁵

$$-0.1t^6 + 1.58t^5 - 9.075t^4 + 22.645t^3 - 21.095t^2 - 1.7785t + 14.83 - c < 0$$

Fikk du samme svar som i oppgave b)?

³⁵Skriv opp faktorisert form av det nye polynomet i oppgave c) og bruk fortegnsskjema. Ikke glem koeffisienten -0.1 foran t^6 -leddet.

Løsning:

Siden nullpunktene er gitt ved

$$c_1 = -0.5 \quad (2.505)$$

$$c_2 = 1 \quad (2.506)$$

$$c_3 = 2 \quad (2.507)$$

$$c_4 = 3 \quad (2.508)$$

$$c_5 = 4.5 \quad (2.509)$$

$$c_6 = 5.8 \quad (2.510)$$

kan vi skrive opp ulikheten på **faktorisert form**:

$$\underbrace{-0.1(t+0.5)(t-1)(t-2)(t-3)(t-4.5)(t-5.8)}_{\text{faktorisert form}} < 0 \quad (2.511)$$

Vi setter så opp fortegnsskjemaet:

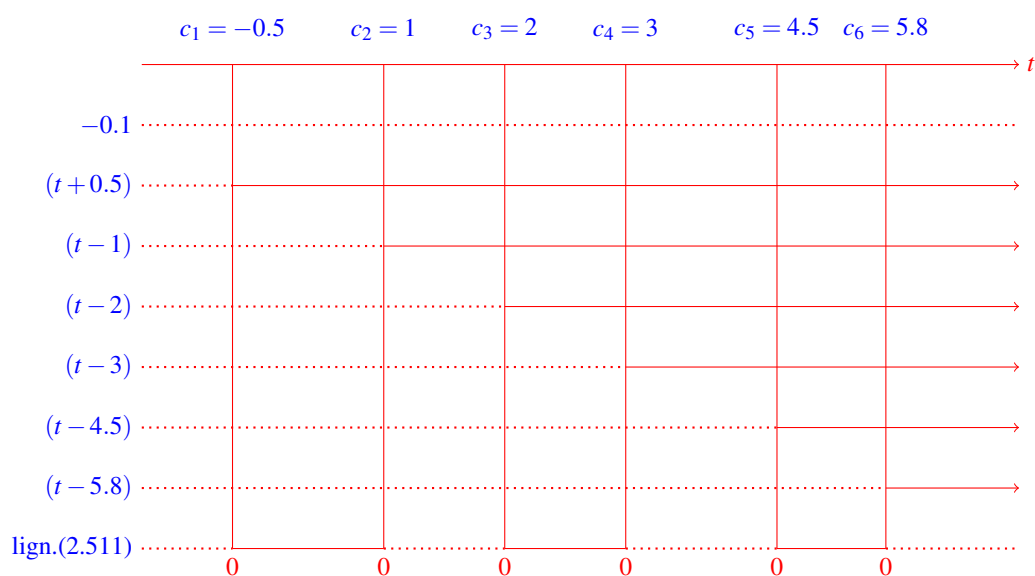


Figure 2.46: **Fortegnsskjema.**

Siden $0 < t < 6$ så blir løsningsmengden

$$\mathcal{L} = \langle 1, 2 \rangle \cup \langle 3, 4.5 \rangle \cup \langle 5.8, 6 \rangle \quad (2.512)$$

Vi konkluderer med at vi har regnet oss frem til de samme intervallene som vi fant i oppgave **b**).

■