Ny og bedre versjon 2020

# MAT100

## Matematikk

Kompendium 2020, del 2

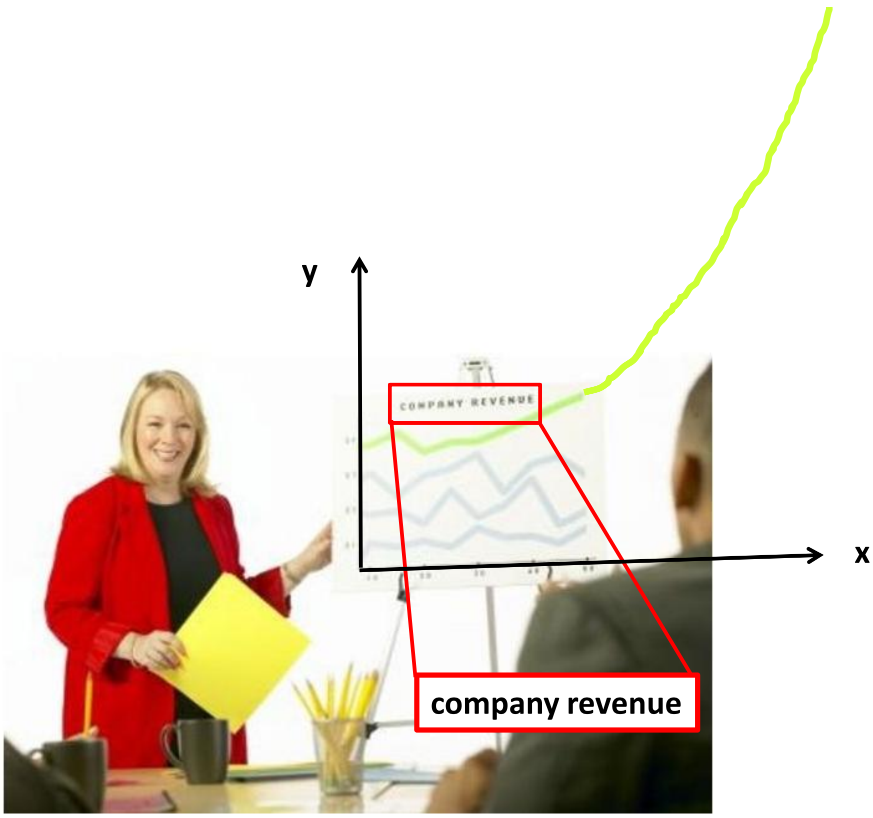
Per Kristian Rekdal og Bård-Inge Pettersen

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Dette kompendiet er tillatt å ha med på eksamen.

# Innholdsfortegnelse

# 3. Funksjoner




Figur 3.1: Funksjoner.

## 3.1 Funksjoner

**Eksempel 3.1 — Funksjon**

La oss igjen se på linjen fra side 108:

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \tag{3.1}$$

Løsningsmengden til denne ligningen var et sett med punkter $(x, y)$ som ga en linje i planet. For en gitt $x$ finnes en entydig $y$ slik at $y = \frac{1}{2}x - 2$, f.eks. med $x = 10$ så er tilhørende $y = 3$:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 10 - 2 = 5 - 2 = 3 \tag{3.2}$$

Slik kan vi fortsette med alle mulige verdier for $x$. Vi kan derfor si at vi har en funksjon

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 \tag{3.3}$$

slik at for hver $x$ har funksjonen en verdi "$\frac{1}{2}x - 2$". Vi skriver funksjonen som

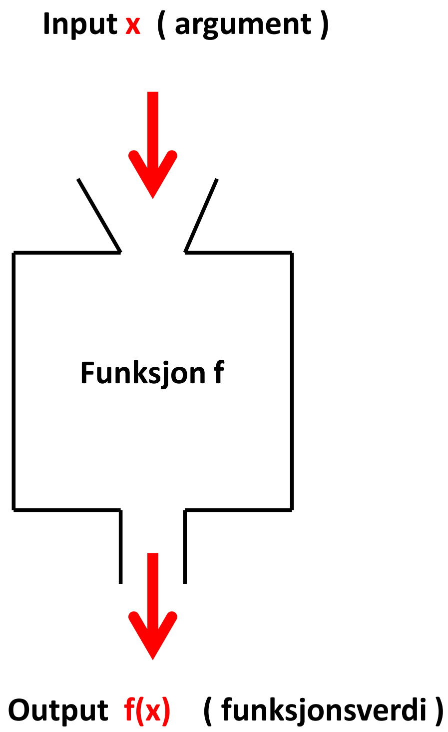
$$y = f(x) \tag{3.4}$$

for å vise verdien tilhørende $x$-variabelen.
Vi kan da skrive:

$$f(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 - 2 = 3 \tag{3.5}$$

$$f(20) = \frac{1}{2} \cdot 20 - 2 = 8 \tag{3.6}$$

■




Figur 3.2: Visualisering av en funksjon $f$.

**Definisjon 3.1.1 — Funksjon**

En funksjon $f$ er: [a]

$$\text{funksjon } f = \text{entydig assosiasjon fra en størrelse } x \text{ til en annen } f \tag{3.7}$$

hvor $x$ ofte kalles den *uavhengige variabelen* eller bare *argumentet*, og $y = f(x)$ kalles ofte *funksjonsverdien*.

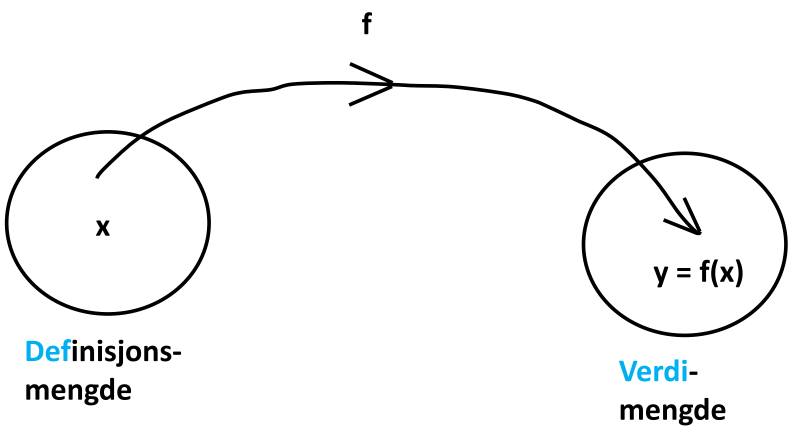
[a] Isteden for "*entydig*" kunne vi like gjerne sagt "èn og bare èn verdi".

**Definisjon 3.1.2 — Definisjonsmengde og verdimengde**

Vi definerer definisjonsmengde og verdimengde:

$$\text{definisjonsmengde} = \text{alle mulige } \underline{\textit{tillatte}} \text{ verdier av } x \tag{3.8}$$

$$\text{verdimengde} = \text{alle mulige funksjonsverdier til } y = f(x) \text{ tilhørende alle } \underline{\textit{tillatte}} \text{ verdier av } x \tag{3.9}$$




Figur 3.3: Funksjon $y = f(x)$.

## 3.2 Lineære funksjoner (rette linjer)

I avsnitt 2.3 lærte vi om 1. gradsligninger, dvs. lineære funksjoner.

**Definisjon 3.2.1 — Lineær funksjon**

En $\overbrace{\text{lineær funksjon}}^{\text{rett linje}}$ $y = f(x)$ har formen:

$$f(x) = ax + b \tag{3.10}$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

I avsnitt 2.5.1 (se side 115) lærte vi hvordan man kan finne løse nullpunktene $f(x) = 0$ til slike lineære funksjoner. Nå skal vi $\underbrace{\text{plotte}}_{\text{tegne}}$ og studere dem mer.

■ **Eksempel 3.2 — Lineære funksjoner**

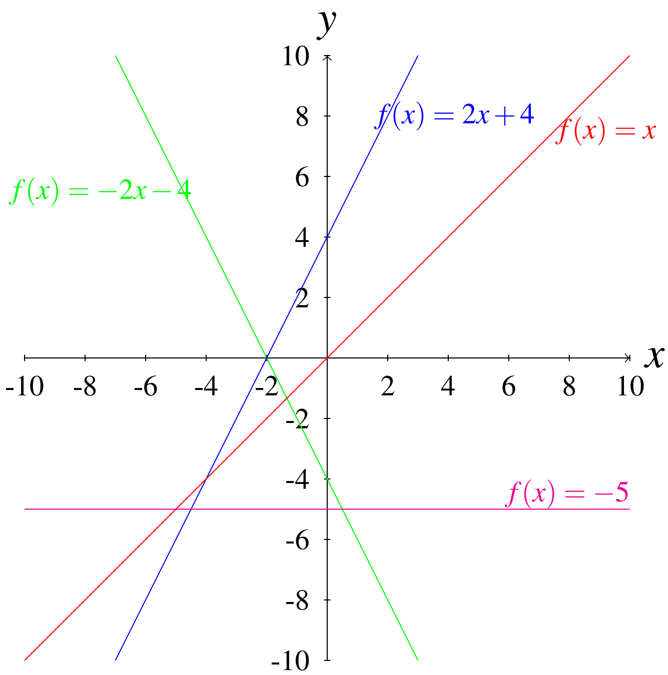
Lineære funksjoner er rette linjer.

$$f(x) = 2x + 4 \tag{3.11}$$

$$g(x) = x + 0 \tag{3.12}$$

$$h(x) = -2x - 4 \tag{3.13}$$

$$i(x) = 0x - 5 = -5 \tag{3.14}$$




Figur 3.4: Lineære funksjoner.

■

**■ Eksempel 3.3 — Lineær funksjon**

**a)** Plott funksjonen

$$f(x) = 2x - 1 \tag{3.15}$$

**b)** Finn stigningstallet $a$.

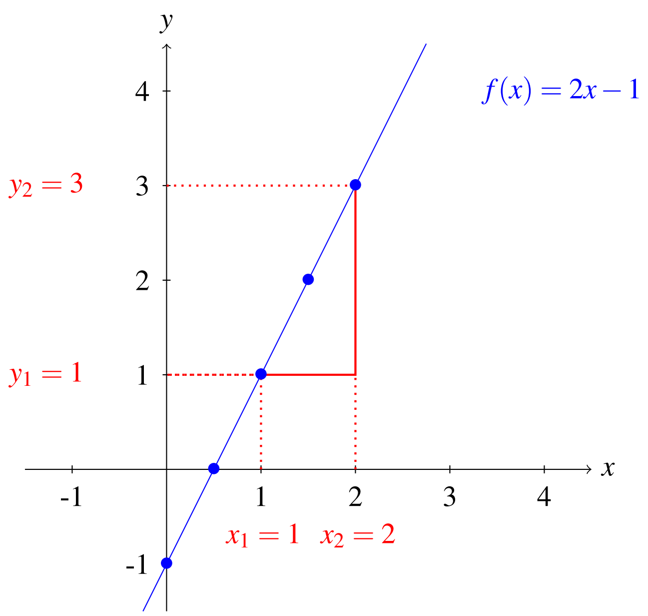
**c)** Skjærer linjen $y$-aksen?
Dersom den gjør det, for hvilken verdi gjør den det?

Løsning:

**a)** Når man skal $\overbrace{\text{plotte}}^{\text{tegne}}$ funksjoner, lag en verditabell:

| $x$ | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |

Tabell 3.1: Verditabell for $f(x) = 2x - 1$.




Figur 3.5: Plott av funksjonen $f(x) = 2x - 1$.

K For en rett linje er det tilstrekkelig med bare to funksjonsverdier når den skal $\overbrace{\text{plottes}}^{\text{tegnes}}$ .
Da er den rette, lineære linjen entydig bestemt. Men av "sikkerhetsmessige" grunner er det lurt å ha flere verdier som f.eks. i tabellen i figur (3.1).

**b**) For en rett linje er det tilstrekkelig med bare to funksjonsverdier når den skal plottes.
Stigningstallet $a$ :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2 \tag{3.16}$$

At stigningstallet er $a = 2$ kan man innse direkte, uten regning, via $f(x) = 2x - 1$.

**c**) Fra figur (3.5) ser vi at linjen skjærer $y$-aksen for $y = -1$.
Også dette kan vi innse direkte ut fra ligningen, via $f(x) = 2x - 1$:

$$y = f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \tag{3.17}$$

■

K Det er to måter en lineær funksjon kan bestemmes på:

1. stigningstallet $a$ er kjent og ett punkt $(x_1, y_1)$
2. to punkt $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$

### 3.2.1 Ett- og to-punktsformelen

**Setning 3.2.1 — $\overbrace{\textit{Ett-punktsformelen}\ \textbf{for lineære funksjoner}}^{\text{dersom stigningstallet } a \text{ er kjent}}$**

Dersom stigningstallet $a$ og ett punkt $(x_1, y_1)$ på en rett linje er kjent så er den lineære funksjonen gitt ved:

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1 \tag{3.18}$$

Denne formelen kalles *ett-punktsformelen*.

**Setning 3.2.2 — $\overbrace{\textit{To-punktsformelen}\ \textbf{for lineære funksjoner}}^{\text{dersom vi kjenner to punkter på linjen}}$**

Dersom to punkt $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$ er kjent på en rett linje, så er den lineære funksjonen gitt ved:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \tag{3.19}$$

Denne formelen kalles *to-punktsformelen*. Stigningstallet er da $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

K Ser du når du skal bruke ett-punktsformelen og når du skal bruke to-punktsformelen?

1. Ett-punktformelen: dersom vi kun kjenner ett punkt $(x_1, y_1)$ samt stigniingstallet.
2. To-punktformelen: dersom vi kjenner to punkt $(x_1, y_1)$ og $(x_1, y_1)$.

**■ Eksempel 3.4 — Ett- og to-punktsformelen for lineære funksjoner**

**a)** Finn ligningen for den rette linjen som går gjennom punktet $P$ og har stigningstallet $a$:

$$f(x): \quad P=(-3,2) \quad \text{og} \quad a=5$$

**b)** Finn ligningen til den rette linjen som går gjennom punktene:

$$g(x): \quad (x_1,y_1)=(8,1) \quad \text{og} \quad (x_2,y_2)=(4,3)$$

Løsning:

**a)** Siden vi kjenner 1 punkt og stigningstallet $a$ for den rette linjen så kan vi bruke *ett-punktsformelen* for lineære funksjoner:

$$f(x)=\overbrace{a(x-x_1)+y_1}^{\text{ett-pkt.formel}}=5\Big(x-(-3)\Big)+2=5x\,+\,17 \tag{3.20}$$

**b)** Siden vi kjenner 2 punkter på den rette linjen så kan vi bruke *to-punktsformelen* for lineære funksjoner:

$$g(x)=\overbrace{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\big(x-x_1\big)+y_1}^{\text{to-pkt.formel}} \tag{3.21}$$

$$=\frac{3-1}{4-8}\big(x-8\big)+1 \tag{3.22}$$

$$=-\frac{1}{2}\big(x-8\big)+1 \tag{3.23}$$

$$=-\frac{x}{2}\,+\,5 \tag{3.24}$$

■

■ **Eksempel 3.5 — Lineære funksjoner ,** *SØK100 Makroøkonomi* **, ISLM modellen**

I "*SØK100 Makroøkonomi*" lærer man om IS-kurven. IS-kurven representerer alle kombinasjoner av renten $r$ og nasjonalproduktet $R$ som gir likevekt i produktmarkedet.

Anta at en slik IS-kurve er gitt ved:

$$r_{IS} = -\frac{1}{2000}R + \frac{1}{1000}G + \frac{3}{10} \qquad \text{(IS-kurve)} \tag{3.25}$$

hvor $G =$ offentlige utgifter (G="government").

En LM-kurve representerer alle kombinasjoner av renten $r$ og nasjonalproduktet $R$ som gir likevekt i pengemarkedet. I eksemplet fra øving 1 fant vi at en slik LM-kurve var gitt:

$$r_{LM} = \frac{1}{4000}R - \frac{1}{5} \qquad \text{(LM-kurve)} \tag{3.26}$$


Figur 3.6: Makroøkonomi.

**a**) $\overbrace{\text{Plott}}^{\text{tegn}}$ $r_{IS}$ sfa.[1] $R$, dvs. $r_{IS}(R)$ når $G = 600$.

**b**) Løs analytisk, dvs. ved regning:
Ved hvilken verdi for nasjonalproduktet $R$ krysser disse linjene IS- og LM-kurven hverandre?

**c**) Hva betyr det, ut fra et økonomisk ståsted, at LM-kurven og IS-kurven er like?

[1] sfa. = "som funksjon av"

Løsning:

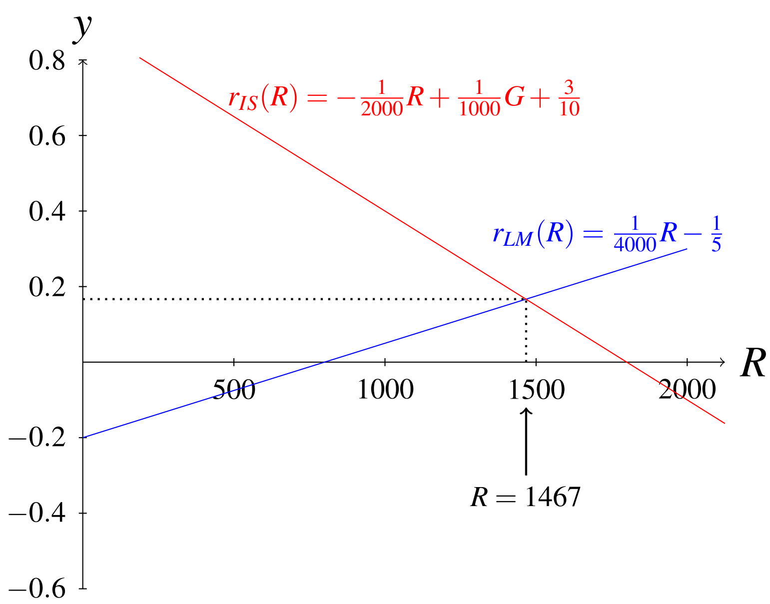
**a**) Når man skal $\overbrace{\text{plotte}}^{\text{tegne}}$ funksjoner, lag en verditabell:

| $R$ | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_{IS}(R)$ | 0.90 | 0.65 | 0.40 | 0.15 | −0.10 |

Tabell 3.2: Verditabell for $r_{IS}(R)$ ($G = 600$)

| $R$ | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_{LM}(R)$ | −0.20 | −0.075 | 0.05 | 0.175 | 0.30 |

Tabell 3.3: Verditabell for $r_{LM}(R)$




Figur 3.7: Plott av IS-kurven og LM-kurven.

**b**) IS- og LM-kurven krysser hverandre når: $G = 600$

$$r_{IS} = r_{LM} \tag{3.27}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{2000}R + \frac{1}{1000}600 + \frac{3}{10} = \frac{1}{4000}R - \frac{1}{5} \tag{3.28}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{2000}R - \frac{1}{4000}R = -\frac{1}{5} - \frac{6}{10} - \frac{3}{10} \qquad \text{samler } R\text{'ene på venste side} \tag{3.29}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1 \cdot 2}{2000 \cdot 2}R - \frac{1}{4000}R = -\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{6}{10} - \frac{3}{10} \qquad \text{fellesnevner} \tag{3.30}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{3}{4000}R = -\frac{2+6+3}{10} \tag{3.31}$$

$$\Updownarrow$$

$$R = \frac{4400}{3} \approx 1467 \tag{3.32}$$

Renten $r_{IS}$ i produktmarkedet er sammenfallende med renten $r_{LM}$ i pengemarkedet når nasjonalproduktet er $R \approx 1467$.

**c**) Når linjene skjærer hverandre, dvs. er like, så betyr det at det er likevekt mellom produktmarkedet og pengemarkedet.

Med andre ord: økonomien er i *makroøkonomisk likevekt*.

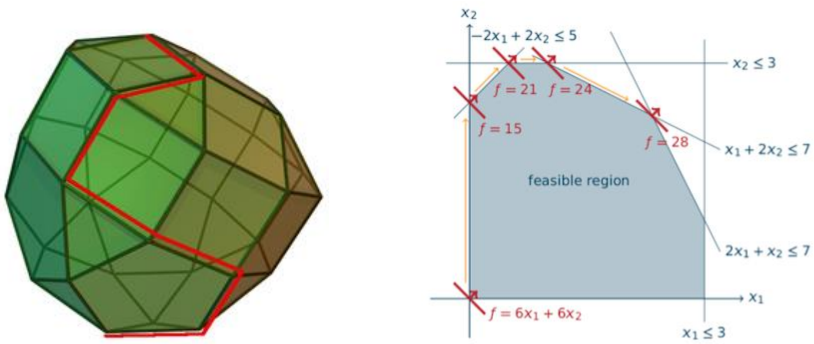
■

## 3.3 Simplex-algoritmen

Simplex-algoritmen er en matematisk teknikk innen optimeringsteori for numerisk løsning av lineærprogrammeringsproblemer.

Simplex-algoritmen er en komplisert algoritme som mange av dere kommer til å lære mer om senere i studiene. I “*LOG733 Exact Optimization Methods in Logistics”* lærer man blant annet om lineær programmering (LP). Men allerede nå kan vi nok matematikk til å løse et enkelt optimeringseksempel, se neste side.

En litt forenklet og kort beskrivelse av Simplex-algoritmen er hjørneløsningsmetoden.




Figur 3.8: Simplex metoden = hjørneløsningsmetoden.

■ **Eksempel 3.6 — Lineære funksjoner** , *BØK205 Økonomistyring og regnskap* , **LP[2] problem**

La oss se på bedriften *Møretank A/S* sitt optimeringsproblem. De produserer to typer varmtvannsberedere, type 1 and type 2. Da er det hensiktsmessig å definere beslutningsvariablene:

$$x_1 = \text{antall varmtvannsberedere av type 1} \tag{3.33}$$
$$x_2 = \text{antall varmtvannsberedere av type 2} \tag{3.34}$$

Anta at inntekten $i \equiv i(x_1, x_2)$ til bedriften er gitt ved:

$$i(x_1, x_2) = 350x_1 + 300x_2 \tag{3.35}$$

Denne inntekten skal maksimeres.


Figur 3.9: Møretank A/S.

Møretank A/S har kun 200 pumper, 1566 arbeidstimer og 2880 dm rør tilgjengelig. Varmtvannsberederne trenger en pumpe hver. Det tar 9 timer å lage type 1, og det tar 6 timer å lage type 2. Det trengs 12 dm rør til type 1, og det trengs 16 dm rør til type 2.

[2] LP = linær programmering

Disse restriksjonene kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$\text{restriksjoner} \quad : \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \ \leq \ 200 & \text{(pumper)} \\ 9x_1 + 6x_2 \ \leq \ 1566 & \text{(arbeidstimer)} \\ 12x_1 + 16x_2 \ \leq \ 2880 & \text{(rør)} \\ \\ x_1 \ \geq \ 0 \\ x_2 \ \geq \ 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

hvor de to siste ulikhetene stammer fra det faktum at $x_1$ og $x_2$ må være positive siden det dreier seg om mengde produsert.

Inntekten $i(x_1, x_2)$ i lign.(3.35) skal maksimeres under restriksjonene beskrevet av lign.(3.36).

**a**) Man kan vise matematisk at løsningen av et LP-problem inntreffer et sted når ulikhetene er likhet, i ett av hjørnene. [3]
Det betyr at løsnsingen inntreffer når en eller flere av ressursene er helt brukt opp.

Siden løsningen til LP-problemet inntreffer et sted når ulikhetene er likhet, gjør om ulikhetene til likheter og løs restriksjonene $x_2$ sfa.[4] $x_1$.

**b**) Plott alle restriksjonene i en og samme figur.
Bruk $x_2$ på $y$-aksen og $x_1$ på $x$-aksen.

**c**) Skraver det området i figuren som tilferdsstiller alle restriksjonene.

**d**) Dette er et LP optimeringsproblem som kan løses grafisk:

i) Indiker på grafen hvor alle “hjørneløsninger”.

ii) Les av alle hjørneløsninger og regn ut tilhørende inntekt $i$.

iii) Hvilken kombinasjon av $x_1$ og $x_2$ gir maksimal inntekt $i$?

[3]Du skal ikke vise dette faktum. Bare ta det for gitt.
[4]sfa. = “som funksjon av”

Løsning:

**a**) Gjør om ulikhetene til likheter:

Pumper:

$$x_1 + x_2 = 200 \qquad \Big/ - x_1 \tag{3.37}$$
$$\Updownarrow$$
$$x_2 = -x_1 + 200 \tag{3.38}$$

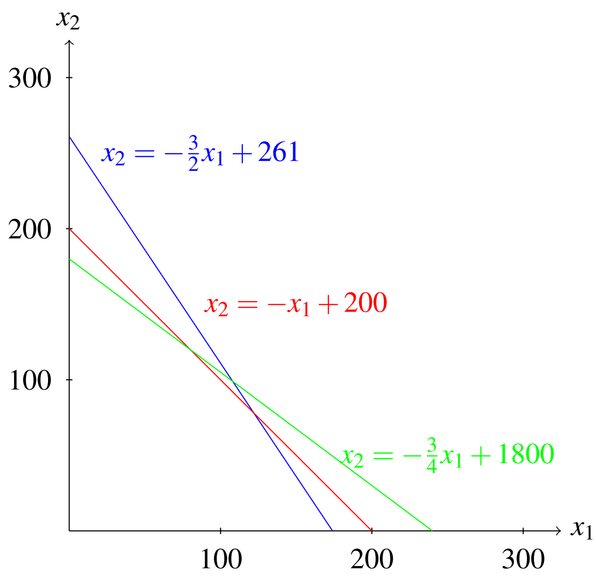
Arbeidstimer:

$$9x_1 + 6x_2 = 1566 \qquad \Big/ - 9x_1 \tag{3.39}$$
$$\Updownarrow$$
$$6x_2 = 1566 - 9x_1 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{6} \tag{3.40}$$
$$\Updownarrow$$
$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 261 \tag{3.41}$$

Rør:

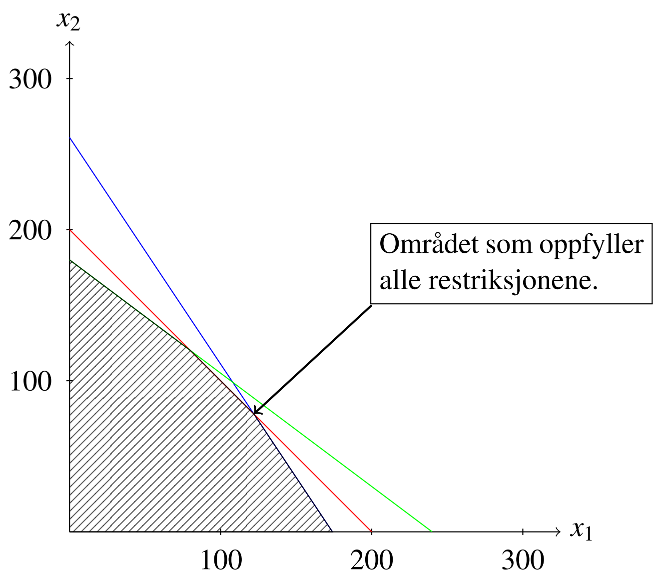
$$12x_1 + 16x_2 = 2880 \qquad \Big/ - 12x_1 \tag{3.42}$$
$$\Updownarrow$$
$$16x_2 = 2880 - 12x_1 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{16} \tag{3.43}$$
$$\Updownarrow$$
$$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + 180 \tag{3.44}$$

**b)** $\overbrace{\text{Plotter}}^{\text{Tegner}}$ alle restriksjonene i en og samme figur:



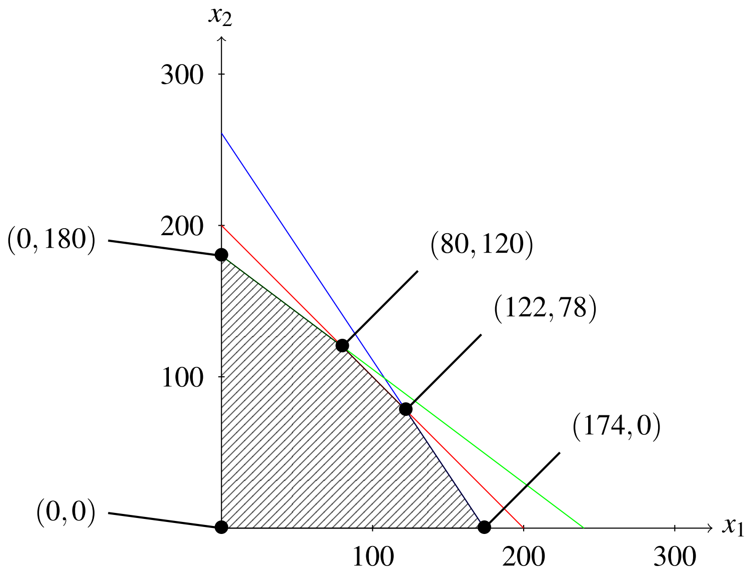

Figur 3.10: Plott av de lineære restriksjonene.

**c)** Området i figuren som oppfyller alle restriksjonene:




Figur 3.11: Området som oppfyller alle restriksjonene.

**d**) i) Indikerer alle “hjørneløsninger”:




Figur 3.12: Totalt er det 5 hjørner, dvs. 5 hjørneløsninger.

ii) Inntekten $i \equiv i(x_1, x_2)$ ved hjørnepunktene:

$$i(0,0) = 350 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0 \tag{3.45}$$

$$i(0,180) = 350 \cdot 0 + 300 \cdot 180 = 54\,000 \tag{3.46}$$

$$i(80,120) = 350 \cdot 80 + 300 \cdot 120 = 64\,000 \tag{3.47}$$

$$i(122,78) = 350 \cdot 122 + 300 \cdot 78 = 66\,100 \tag{3.48}$$

$$i(174,0) = 350 \cdot 174 + 300 \cdot 0 = 60\,900 \tag{3.49}$$

iii) Maksimal inntekt $i$ når $x_1 = 122$ og $x_2 = 78$: $i(122,78) \;=\; 66\,100$

■

## 3.4 Kvadratiske funksjoner (parabler)

**Definisjon 3.4.1 — Kvadradtisk funksjon**

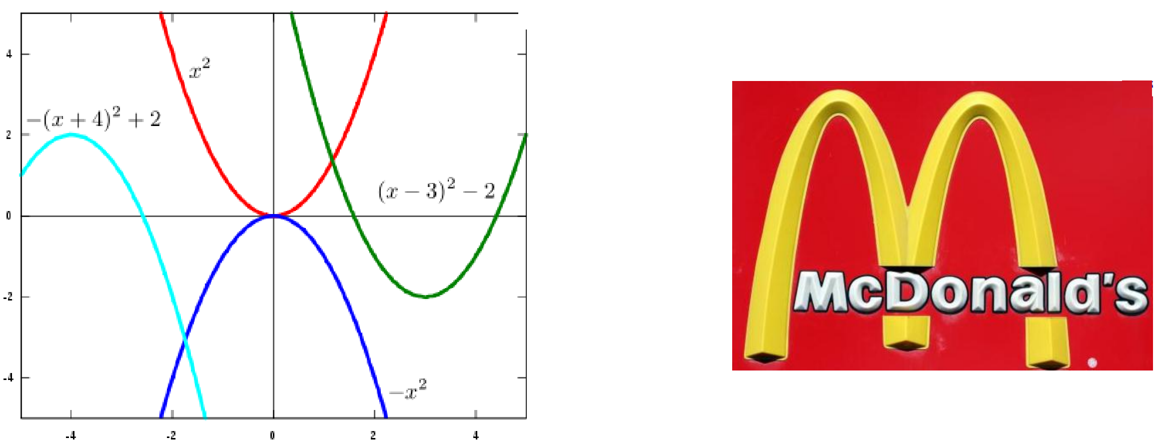
En $\overbrace{\text{2. gradsfunksjon}}^{\text{kvadratisk}}$ $y = f(x)$ har formen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.50}$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ er konstanter.

K 2. gradsfunksjon = parabel = kvadratisk funksjon

I avsnitt 2.5 på side 115 diskuterte vi hvordan man kan finne nullpunktene $f(x) = 0$ til slike kvadratiske funksjoner. Nå skal vi $\underbrace{\text{plotte}}_{\text{tegne}}$ og studere dem mer.




Figur 3.13: Kvadratiske funksjoner.

### 3.4.1 Noen egenskaper til kvadratiske funksjoner (parabler)

Kvadratiske funksjoner

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3.51}$$

har følgende egenskaper:

- $a > 0 \quad \Rightarrow \quad$ grafen er $\cup$-formet, "smiley face".
- $a < 0 \quad \Rightarrow \quad$ grafen er $\cap$-formet, "sad face".
- Dersom $b^2 - 4ac \geq 0$ så har $f(x)$ to nullpunkt(er), dvs. $f(x)$ skjærer $x$-aksen $f(x) = 0$, se figur (2.26):

$$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.52}$$

- Dersom $b^2 - 4ac < 0$, så er det ingen nullpunkter. Vi har samtidig at:
  $b^2 - 4ac > 0$ : grafen ligger i sin helhet **over** $x$-aksen
  $b^2 - 4ac < 0$ : grafen ligger i sin helhet **under** $x$-aksen

**■ Eksempel 3.7 — Kvadratiske funksjoner (parabler)**

Gitt de kvadratiske funksjonene:

$$f(x)=x^2-4x \tag{3.53}$$

$$g(x)=-x^2+6 \tag{3.54}$$

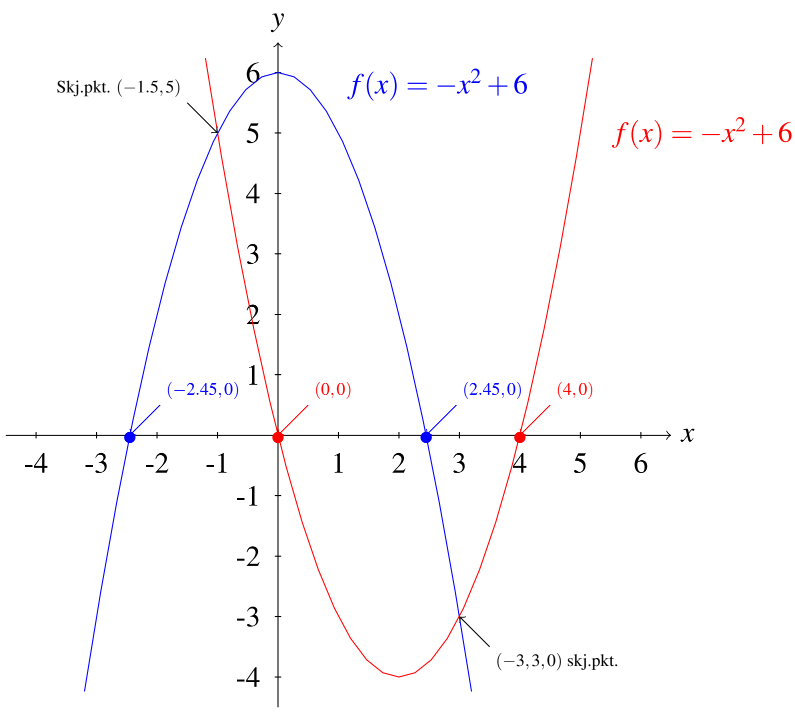
**a)** Plott funksjonene.

**b)** Finn nullpunktene til både $f(x)$ og $g(x)$. ( både grafisk og ved regning )

**c)** Finn skjæringspunkt(ene) til grafene. ( både grafisk og ved regning )

Løsning:

**a)** Plott: [5]




Figur 3.14: Plott av parabelene $f(x)=x^2-4x$ og $g(x)=-x^2+6$.

[5] Når man plotter bør man sette opp en verditall.

K En kvadratisk funksjon er symmetrisk gjennom topp/bunnpunktet (se figur 3.14).

K $f(x)$ er hul opp pga. $+x^2$, dvs. $a = 1 > 0$

K $g(x)$ er hul ned pga. $-x^2$, dvs. $a = -1 < 0$

**b**) Nullpunkt:

Nullpunktene er bestemt av $f(x) = 0$. Disse kan finnes ved grafisk løsning:

$$f(x) = 0: \qquad c_1 \;=\; 0 \;\text{ og }\; c_2 \;=\; 4 \tag{3.55}$$

$$g(x) = 0: \qquad c_1 \;=\; -2.45 \;\text{ og }\; c_2 \;=\; 2.45 \tag{3.56}$$

eller ved regning, dvs. analytisk, ( løsning av 2. gradsligning )

$$f(x) = 0: \quad c_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 4}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \;\text{ og }\; c_2 = 4$$

$$g(x) = 0: \quad c_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{\mp 2\sqrt{6}}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\sqrt{6} \;\text{ og }\; c_2 = \sqrt{6}$$

hvor $\sqrt{6} \approx 2.45$.

**c)** Skjæringspunkt $f(x) = g(x)$:

Skjæringspunktene $f(x) = g(x)$ kan finnes ved grafisk løsning:

$$f(x) \; = \; g(x) \; : \qquad x = -1 \quad \text{og} \quad y = 5 \qquad\qquad x = 3 \quad \text{og} \quad y = -3 \tag{3.57}$$

eller ved regning ( løsning av 2. gradsligning )

$$f(x) = g(x) \tag{3.58}$$

$$\Updownarrow \tag{3.59}$$

$$x^2 - 4x = -x^2 + 6 \qquad \text{samler like ledd} \tag{3.60}$$

$$\Updownarrow \tag{3.61}$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \qquad \text{2. gradsligning} \tag{3.62}$$

Løser 2. gradsligningen i lign.(3.62) med ABC-formelen

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 8}{4} \tag{3.63}$$

$$\Downarrow \tag{3.64}$$

$$x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 3 \tag{3.65}$$

med tilhørende $y$-verdier

$$f(-1) = g(-1) = -(-1)^2 + 6 \; = 5 \tag{3.66}$$

$$f(3) = g(3) = -3^2 + 6 \; = -3. \tag{3.67}$$

Alt i alt er skjæringspunktene gitt ved:

$$(-1, 5) \;\; \text{og} \;\; (3, -3). \tag{3.68}$$

■

### ■ Eksempel 3.8 — Kvadratiske funksjoner [6]

Du jobber som økonomisjef ved Power (selger elektronikk) på Molde Storsenter. I forbindelse med lansering og salg av iPhone 9 våren 2020 ønsker du å finne hva slags pris som er optimal for å maksimere fortjenesten. Siden du har hatt faget "*BØK105 Finansregnskap 1*" så vet du at totalt resultat $TR$ er gitt ved:

$$TR(x) = TI(x) - TK(x) \tag{3.69}$$

hvor total inntekt er

$$TI(x) = px \tag{3.70}$$

og $TK(x)$ = total kostnad, $p$ = pris og $x$= etterspørsel (antall iPhoner). Ut fra kjennskapen til markedet kan man modellere sammenhengen mellom pris og etterspørsel. Anta at denne er:

$$p(x) = 1900 - 0.4x \tag{3.71}$$

Total kostnad $TK(x)$ er kan også modelleres. Anta at denne er:

$$TK(x) = 0.75x^2 - 150x + 85\,000 \tag{3.72}$$


Figur 3.15: Power skal lansere ny iPhone.

[6] *BØK205 Økonomistyring og regnskap*

**a**) $\overbrace{\text{Plott}}^{\text{Tegn}}$ den totale kostnaden $TR(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 500$.

**b**) Hvor mange iPhoner $x^*$ selges når det totale resultatet $TR(x)$ maksimeres?
Løs oppgaven grafisk.

**c**) Hva slags pris bør Power sette på iPhone 9 for å maksimere $TR(x)$?
Løs oppgaven ved regning.

**d**) Hva blir det optimale resultatet $TK(x^*)$?
Løs oppgaven grafisk.

Løsning:

**a**) Først må vi finne et eksplisitt uttrykk for totalt resultat $TR(x)$:

$$TR(x) = TI(x) - TK(x) \tag{3.73}$$

$$= px \; - \; TK(x) \tag{3.74}$$

$$= \big(1900 - 0.4x\big)x \; - \; \big(0.75x^2 - 150x + 85\,000\big) \tag{3.75}$$

$$= 1900x - 0.4x^2 - 0.75x^2 + 150x - 85000 \tag{3.76}$$

$$= -1.15x^2 + 2050x - 85000 \tag{3.77}$$

Når man skal plotte funksjoner, lag en verditabell:

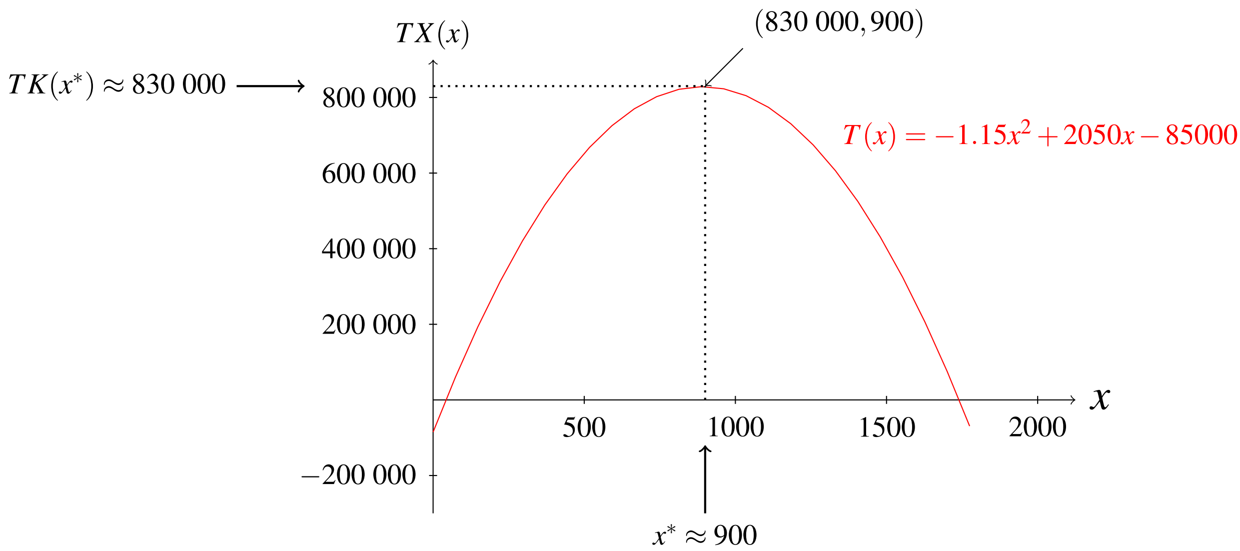
| $x$ | 0 | 200 | 400 | 600 | 800 |
|---|---|---|---|---|---|
| $TR(x)$ | -85 000 | 279 000 | 551 000 | 731 000 | 819 000 |

Tabell 3.4: Verditabell for $TR(x)$.)

| $x$ | 1000 | 1 200 | 1 400 | 1 600 | 1 800 |
|---|---|---|---|---|---|
| $TR(x)$ | -815 000 | 719 000 | 531 000 | 251 000 | -121 000 |

Tabell 3.5: Fortsettelse verditabell for $TR(x)$.

Plotter grafen:




Figur 3.16: Totalt resultat $TR(x)$.

**b**) Av figuren ser vi at: ( grafisk løsning )
Totalt resultat $TR(x)$ maksimeres når det selges $x^* \approx 900$ stk. iPhoner. [7]

**c**) Maksimert resultat $TR$ oppnås når iPhonene prises til:

$$p(x^*) = p(900) = \big(1\,900 - 0.4 \cdot 900\big) \text{ NOK} = 1\,540 \text{ NOK} \tag{3.78}$$

**d**) Av figuren ser vi at det maksimale totale resultatet $TR$ er: [8]

$$TR(x^*) = TR(900) \approx 830\,000 \text{ NOK} \tag{3.79}$$

■

[7] Senere skal vi også løse denne oppgaven ved regning, dvs. algebraisk. Da finner man $x^* = 891.3$.

[8] Det eksakte svaret er $TR(891.3) = 828\,587$ NOK. Dette kommer vi tilbake til senere i kompendiet når vi skal regne ut svaret analytisk, dvs. ved regning.

## 3.5 Rasjonale funksjoner

I lign.(1.72) definerte vi rasjonale tall:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \right\} \tag{3.80}$$

Her utvider vi dette til rasjonale funksjoner.

**Definisjon 3.5.1 — rasjonal funksjon**

En ligning på formen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{3.81}$$

hvor $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer, kalles en *rasjonal* funksjon.

K Lign.(3.81) har:

- *en* ukjent $x$
- en brøk mellom to polynomer av generell grad $n$

### ■ Eksempel 3.9 — Kvadratiske funksjoner [9]

La oss returnere til eksemplet som beskrevet på side 176.
I dette eksemplet ble kostnadsfunksjonen modellert ved lign.(3.72), dvs.:

$$TK(x) = 0.75x^2 - 150x + 85\,000 \tag{3.82}$$

De tilhørende totale gjennomsnittlige *enhetskostnadene* $TEK(x)$ er definert ved:

$$TEK(x) = \frac{TK(x)}{x} \qquad \text{(rasjonal funksjon)} \tag{3.83}$$

Med $TK(x)$ som i lign.(3.82) så blir denne:

$$TEK(x) = \frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \qquad \text{(rasjonal funksjon)} \tag{3.84}$$

**a)** Plott $TEK(x)$ i intervallet $0 \le x \le 500$.

**b)** Hvor mange iPhoner $x^*$ må selges for å minimere den totale gjennomsnittlige enhetskostnaden $TEK(x)$?
Løs oppgaven grafisk.

**c)** Hva er den tilhørende enhetskostnaden, dvs. $TEK(x^*)$?
Løs oppgaven grafisk.


Figur 3.17: Power. Salg av iPhone.

[9] *BØK205 Økonomistyring og regnskap*

Løsning:

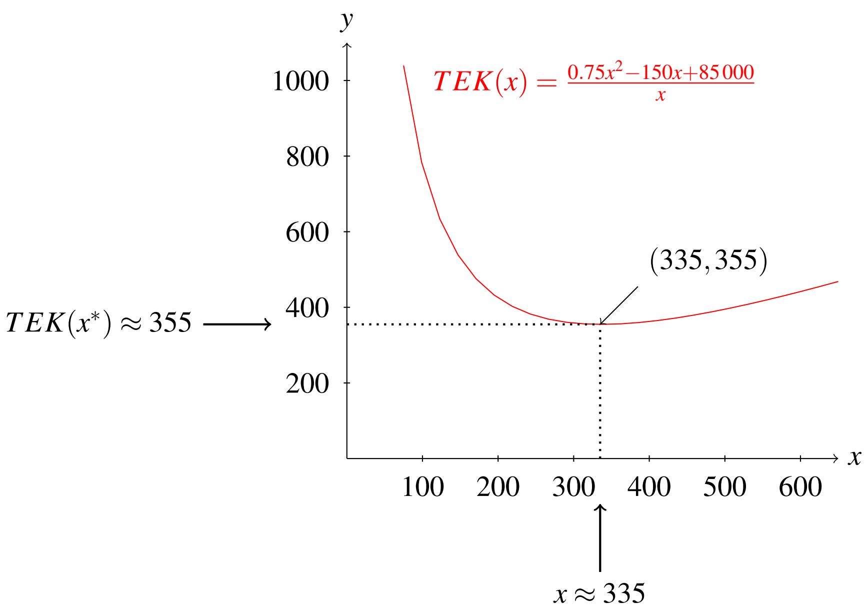
**a**) Når man skal plotte funksjoner, lag en verditabell:

| $x$ | 0 | 50 | 100 | 6150 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| $TEK(x)$ | ulovlig | 1 588 | 775 | 529 | 425 |

Tabell 3.6: Verditabell for $TR(x)$.)

| $x$ | 250 | 300 | 350 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|
| $TEK(x)$ | 378 | 358 | 355 | 363 | 395 |

Tabell 3.7: Verditabell for $TEK(x) = \frac{0.75x^2-150x+85\,000}{x}$.




Figur 3.18: Total enhetskostnad $TEK(x)$.

**b**) Av figuren ser vi at: ( grafisk løsning )
den $x$ som gir minst $TEK(x)$ er: $x^* \approx 335$ [10]

**c**) Av figuren ser vi at: ( grafisk løsning )
den minste $TEK(x)$ er: $TEK(x^*) = TEK(335) \approx 355.$

■

[10] Senere skal vi også løse denne oppgaven ved regning, dvs. algebraisk. Da finner man $x^* = 336.7$, se lign.(4.121) side 224.

### ■ Eksempel 3.10 — Nyttemaksimering [11]

Du har fått sommerjobb hos Molde Taxisentral. Du skal jobbe ei langhelg, fredag, lørdag og søndag, dvs. tre dager. Føringene du har fått fra din arbeidsgiver for denne arbeidshelgen er at de samlede konsumkostnader må være begrenset, maksimum $m$ NOK. Konsumutgiftene skal dekke bensin- og matkostnader. La:

$$p = \text{pris på bensin} \qquad (\text{NOK/liter}) \qquad (\text{gode nr. } 1) \tag{3.85}$$
$$q = \text{pris på pølsemeny} \qquad (\text{NOK/pølsemeny}) \qquad (\text{gode nr. } 2) \tag{3.86}$$

Budsjettligningen (ulikheten) for arbeidshelgen blir dermed:

$$px + qy \leq m \tag{3.87}$$

hvor $m =$ samlet konsumutgift og

$$x = \text{antall liter bensin} \qquad (\text{gode nr. } 1) \tag{3.88}$$
$$y = \text{antall pølsemenyer} \qquad (\text{gode nr. } 2) \tag{3.89}$$

Anta at nytten ved forbruk at bensin $X$ (gode 1) og mat/drikke $Y$ (gode 2) er bestemt av nyttefunksjonen: [12]

$$u(x,y) = 2x^2y \tag{3.90}$$



Figur 3.19: Taxi og Narvesen.

[11] *SØK200 Mikroøkonomi*
[12] Valget av notasjonen $u$ er fordi “utility”=nytte.

**a**) Gjør om ulikheten til likhet i budsjettligningen (3.87) og vis at $y$ sfa. $x$ er gitt ved:

$$y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}x \tag{3.91}$$

for gitt $m$.

**b**) i) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(3.91) $y$-aksen?

ii) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(3.91) $x$-aksen?

iii) Lign.(3.91) er en lineær kurve. Hva er stigningstallet?

**c**) For en gitt, bestemt nytte $u_0 = u(x,y)$, vis at $y$ sfa. $x$ i nyttefunksjonen (3.90) er gitt ved:

$$y = \frac{u_0}{2x^2} \tag{3.92}$$

Denne ligningen kalles *indifferanseligningen*. [13]

Anta at prisen på bensin er $p = 10$ NOK/liter og at pølsemenyen på Narvesen koster $q = 40$ NOK. Restriksjonen du får fra vakthavende ved Molde Taxisentral er $m = 1200$ NOK for den aktuelle helgen.

**d**) For tallene som oppgitt:

i) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(3.91) $y$-aksen?

ii) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(3.91) $x$-aksen?

iii) Hva er stigningstallet?

**e**) Plott lign.(3.91) og (3.92) i èn og samme figur for tilfellene:

i) $u_0 = 55\,000$

ii) $u_0 = 128\,000$

iii) $u_0 = 250\,000$

[13] I "*SØK200 Mikroøkonomi*" lærer man at en *indifferansekurve* består av alle godekombinasjoner som gir samme, bestemte nytte $U_0$ for konsumenten.

**f)** Hva er den optimale kombinasjonen $(x^*, y^*)$ av bensin og pølse som gir størst nytte?
Dvs. hvilken kombinasjon av $x$ og $y$ gir størst nytte innenfor budsjettet?
Løs problemet grafisk. [14]

[14] Dette problemet kalles *nyttemaksimeringsproblemet* i "*SØK200 Mikroøkonomi*". Senere i dette matematikkurset skal vi lære å løse dette problemet *analytisk* ved hjelp av noe som heter Lagrangemultiplikatorer.

Løsning:

**a**) Gjør om ulikheten til likhet i budsjettligningen (3.87) og løser $y$ mhp. $x$:

$$px + qy = m \tag{3.93}$$
$$\Updownarrow$$
$$qy = m - px \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{q} \tag{3.94}$$
$$\Updownarrow$$
$$y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}x \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{3.95}$$

**b**) i) Linjen i lign.(3.91) skjærer $y$-aksen når $x = 0$:

$$y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}\overbrace{x}^{=0} \qquad x = 0 \quad \text{skjæring med } x\text{-aksen} \tag{3.96}$$
$$\Updownarrow$$
$$y = \frac{m}{p} - \frac{p}{q} \cdot 0 \tag{3.97}$$
$$\Updownarrow$$
$$y = \frac{m}{q} \tag{3.98}$$

ii) Linjen i lign.(3.91) skjærer $x$-aksen når $y = 0$:

$$\overbrace{y}^{=0} = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}x \tag{3.99}$$
$$\Updownarrow$$
$$0 = \frac{m}{\cancel{q}} - \frac{p}{\cancel{q}}x \qquad \Big/ \cdot \cancel{q} \tag{3.100}$$
$$\Updownarrow$$
$$0 = m - px \tag{3.101}$$
$$\Updownarrow$$
$$px = m \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{p} \tag{3.102}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \frac{m}{p} \tag{3.103}$$

iii) Stigningstallet til den lineære lign.(3.91)

$$y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q} x \tag{3.104}$$

er *koeffisienten* foran $X$-variabelen, dvs.:

$$\text{stigningstall} = \frac{p}{q} \tag{3.105}$$

**c**) Løser $y$ sfa. $x$ i nyttefunksjonen (3.90) for gitt nytte $u(x,y) = u_0$:

$$\overbrace{u(x,y)}^{=u_0} = 2x^2 y \qquad \text{gitt nytte } \ u(x,y) = u_0 \tag{3.106}$$

$$\Updownarrow$$

$$u_0 = 2x^2 y \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{2x^2} \tag{3.107}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{u_0}{2x^2} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{3.108}$$

**d**) i) Skjærer $y$-aksen ved:

$$y = \frac{m}{q} = \frac{1200 \, \cancel{\text{NOK}}}{40 \, \cancel{\text{NOK}}/\text{pølsemenyer}} = 30 \ \ \text{pølsemenyer} \tag{3.109}$$

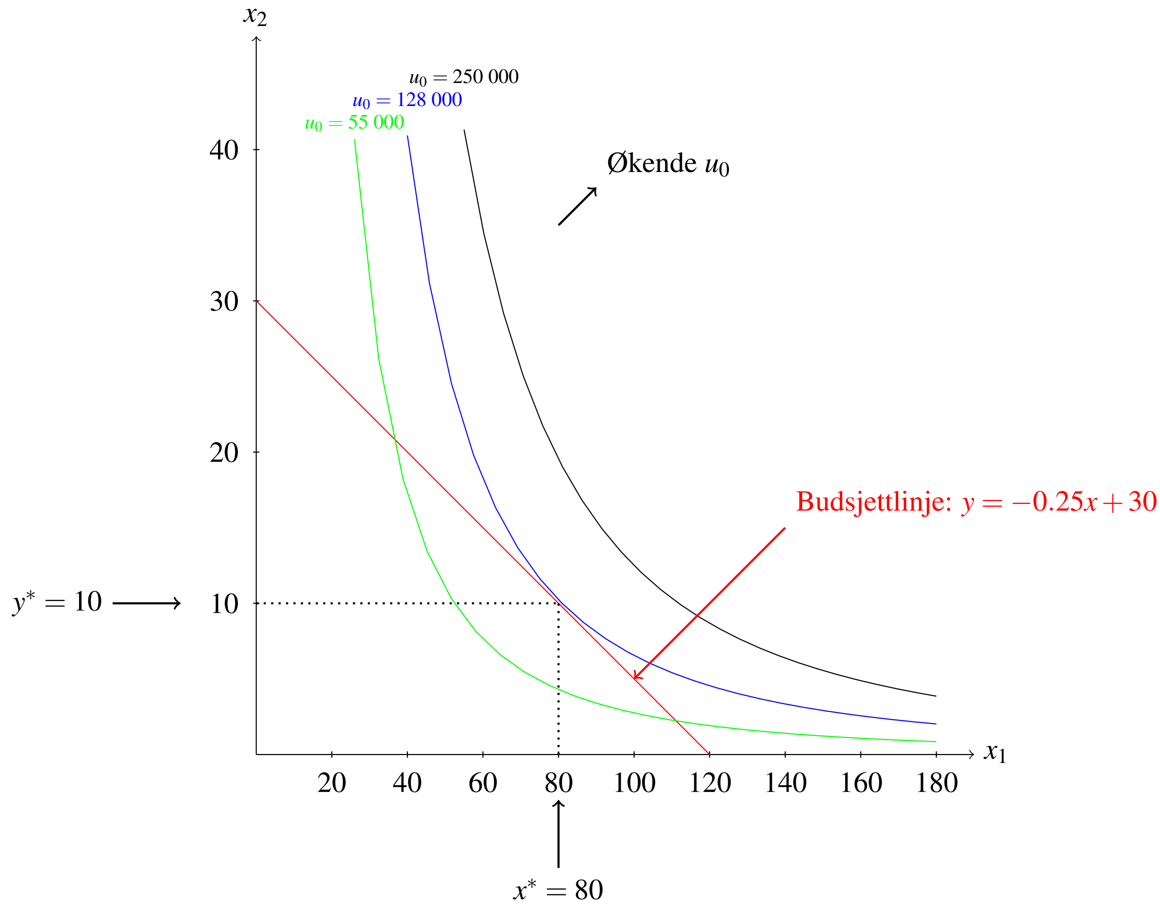
ii) Skjærer $x$-aksen:

$$x = \frac{m}{p} = \frac{1200 \, \cancel{\text{NOK}}}{10 \, \cancel{\text{NOK}}/\text{liter}} = 120 \text{ liter} \tag{3.110}$$

iii) Stigningstallet: ( stigningstallet er et dimensjonsløst tall )

$$\text{stigningstall} = -\frac{p}{q} = -\frac{10 \, \cancel{\text{NOK}}}{40 \, \cancel{\text{NOK}}} = -0.25 \tag{3.111}$$

**e**) Plotting av lign.(3.91) og (3.92):




Figur 3.20: Optimal tilpassing er når **indifferansekurven tangerer budsjettlinjen**.

Dette er et eksempel på at optimal tilpassing av en budsjettligning kan finnes ved at:

$$\boxed{\text{indifferansekurven tangerer budsjettlinjen}}$$

fordi nyttefunksjonen vokser med økende $u_0$.

**f**) Av figur (3.20) ser vi at:

$$x^* = 80 \tag{3.112}$$

$$y^* = 10 \tag{3.113}$$

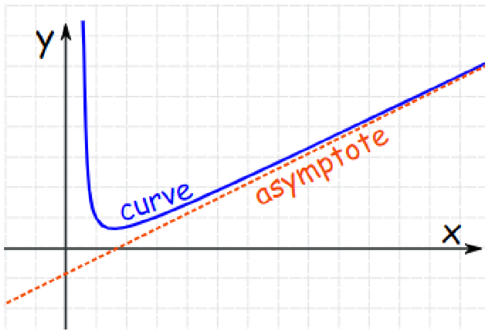
er tangeringspunktet mellom indifferansekurven og budsjettlinjen.
Med nyttefunksjonen $u(x,y) = 2x^2y$ så er det størst nytte ved å konsumere:

$$x^* = 80 \text{ liter bensin} \quad \text{og} \quad y^* = 10 \text{ pølsemenyer} \tag{3.114}$$

■

## 3.6 Asymptoter

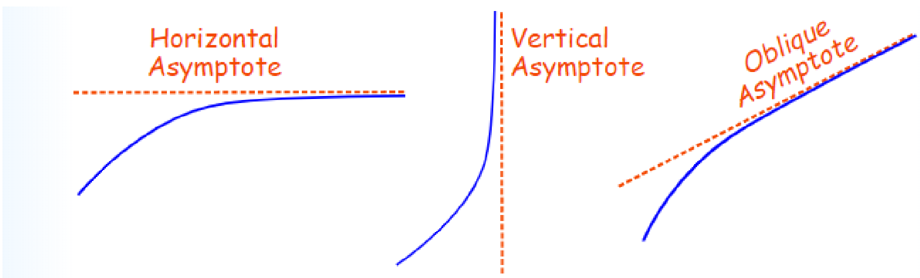
En asymptote er en linje som en graf nærmer seg når argumentet går mot uendelig.




Figur 3.21: Asymptote.

Det er tre typer asymptoter:

1. vertikale asymptoter
2. horisontale asymptoter
3. skrå asymptoter




Figur 3.22: Tre typer asymptoter.

**Definisjon 3.6.1 — Vertikal asymptote**

$x = a$ er en vertikal asymptote til grafen $f(x)$ dersom $x \to a$ medfører $f(x) \to \pm\infty$

**Definisjon 3.6.2 — Horisontal asymptote**

$y = b$ er en horisontal asymptote til grafen $f(x)$ dersom $f(x)$ nærmer seg et fast tall $b$ når $x \to \pm\infty$.

**Definisjon 3.6.3 — Skrå asymptote**

$y = ax + b$ er en skrå asymptote til funksjonen $f(x)$, dersom følgende er oppfylt:

$$|f(x) - (ax+b)| \ \to \ 0 \tag{3.115}$$

når $x \to \pm\infty$.

### 3.6.1 Asymptoter for rasjonale funksjoner

Rasjonal funksjon, se lign.(3.81),

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{3.116}$$

er et eksempel på en klasse funksjoner hvor vi bruker asymptoter som hjelpelinjer for å beskrive funksjonen.

For rasjonale funksjoner:

1. En vertikal asymptote for finnes ved å finne nullpunktene til nevneren:

   $$Q(x) = 0 \tag{3.117}$$

2. Samme grad:
   Dersom $P(x)$ og $Q(x)$ har samme grad, har grafen en horisontal asymptote $b$. Denne finnes ved å betrakte $f(x)$ for store $x$:

   $$x \longrightarrow \pm\infty \tag{3.118}$$

3. Høyere grad:
   Dersom $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$ har samme grad, har grafen en horisontal asymptote $y = 0$.

4. En grad høyere: Dersom graden til $P(x)$ = graden til $Q(x) + 1$, så kan polynomert skrives på formen

   $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = ax + b + \frac{\text{rest}}{\text{nevner}} \tag{3.119}$$

   har grafen en skrå asymptote på formen $y = ax + b$.

### ■ Eksempel 3.11 — vertikal asymptote

Gitt den rasjonale funksjonen:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \tag{3.120}$$

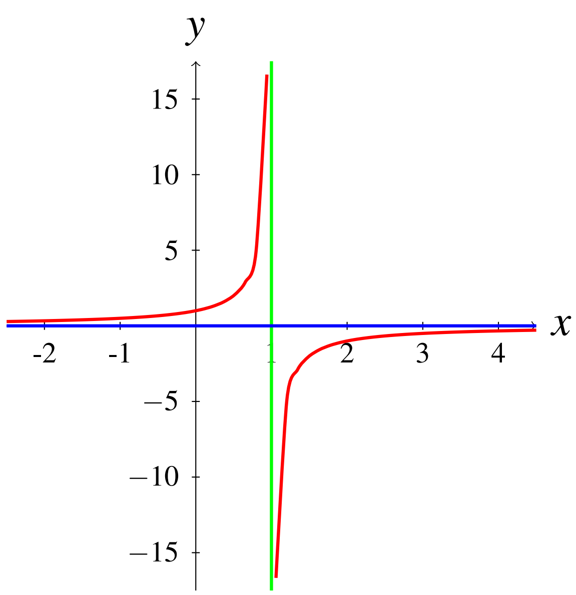
**a)** Finn asymptoten(e) til $f(x)$.

**b)** Plott funksjonen $f(x)$ sammen med dens asymptote(r).

<u>Løsning</u>:

**a)** $f(x)$ har en vertikal asymptote når telleren $x-1=0$, dvs. $x=1$.
Ved $x \to \pm\infty$ i lign.(3.120) så innser vi at $y =$ er en horisontal asymptote.

**b)** Man kan lage verditabell og deretter plotte $f(x)$ sammen med $x=1$.
Den vertikale asymptoten $x=1$ er den blå linjen i figur 3.23.
Den horisontale asymptoten $y=0$ er den grønne linjen i figur 3.23.
Eller man kan bruke f.eks. GeoGebra til å plotte grafen:




Figur 3.23: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ og asymptotene $x=1$ og $y=0$.

■

### ■ Eksempel 3.12 — skrå asymptote

La oss igjen se på eksemplet hvor Power selger iPhoner.
Det totale gjennomsnittlige *enhetskostnadene* $TEK(x)$ fra lign.(3.84) på side 181 er:

$$TEK(x) \;=\; \frac{0.75x^2 \;-150x \;+\; 85\,000}{x} \qquad \text{(rasjonal funksjon)} \tag{3.121}$$

**a**) Finn den skrå asymtoten til $TEK(x)$.

**b**) Plott funksjonen $TEK(x)$ sammen med den skrå asymptoten.


Figur 3.24: Power skal lansere ny iPhone.

Løsning:

**a**) Omskriving: ( kjelleromskriving )

$$TEK(x) = \frac{0.75x^2 \;-150x \;+\; 85\,000}{x} \tag{3.122}$$

$$= \frac{0.75x^2}{x} - \frac{150\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{85\,000}{x} \tag{3.123}$$

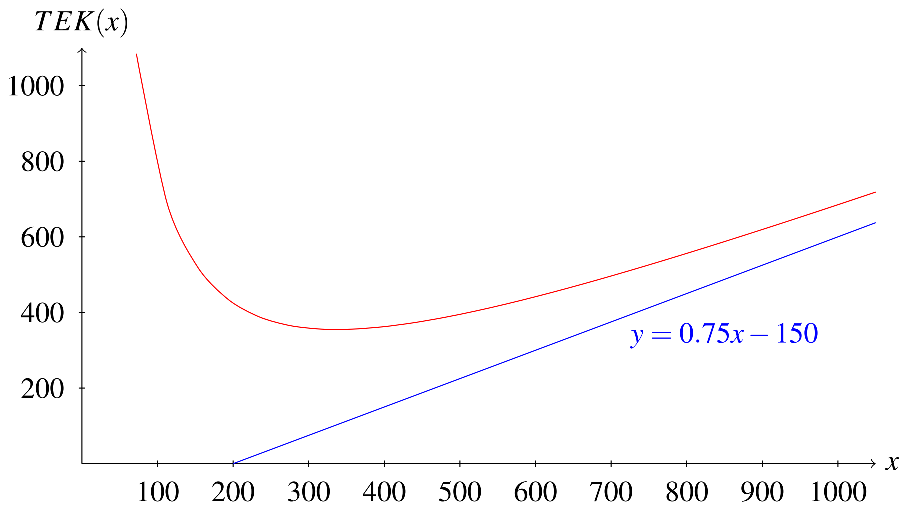
$$= \underbrace{0.75x - 150}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{85\,000}{x}}_{\to 0} \tag{3.124}$$

For $x \to \infty$ så vil $\frac{85\,000}{x} \to 0$. Dermed er:

$$y = 0.75x - 150 \tag{3.125}$$

den skrå asymptoten til $TEK(x)$

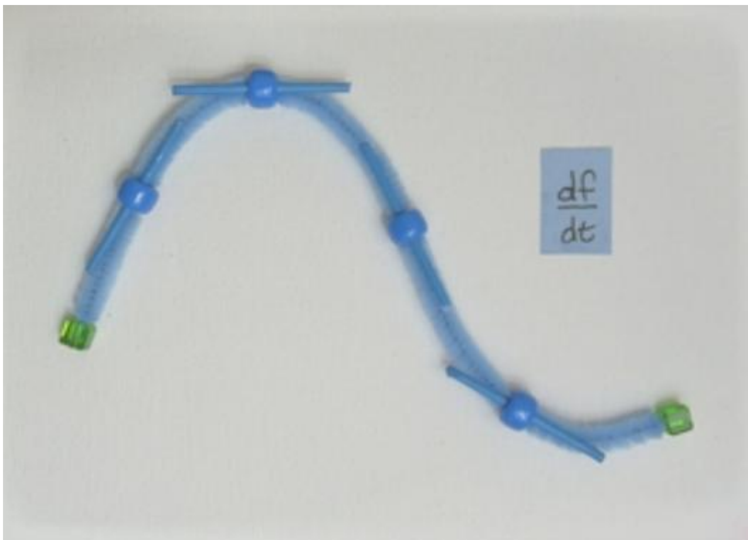
**b**) Man kan lage verditabeller og deretter plotte $TEK(x)$ og $y$.
Eller man kan bruke f.eks. GeoGebra til å plotte det.




Figur 3.25: $TEK(x)$ og asymptoten $y = +.75x - 150$.

■

# 4. Derivasjon




Figur 4.1: Deriverte.

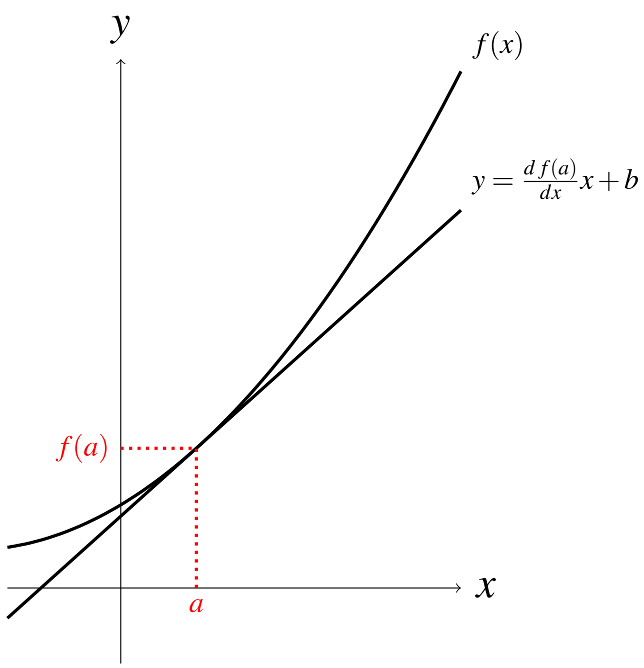
## 4.1 Derivasjon

**Tolkning**: ( deriverte, med ord ) [1]

$$\frac{d\,f(a)}{dx} = \text{den deriverte til funksjonen } y = f(x) \text{ i punktet } x = a \tag{4.1}$$

$$= \underline{\textit{stigningstallet}} \text{ til tangenten til grafen i punktet } x = a \tag{4.2}$$

$$= \underline{\textit{stigningen}} \text{ i punktet } \big(a, f(a)\big) \text{ på grafen} \tag{4.3}$$



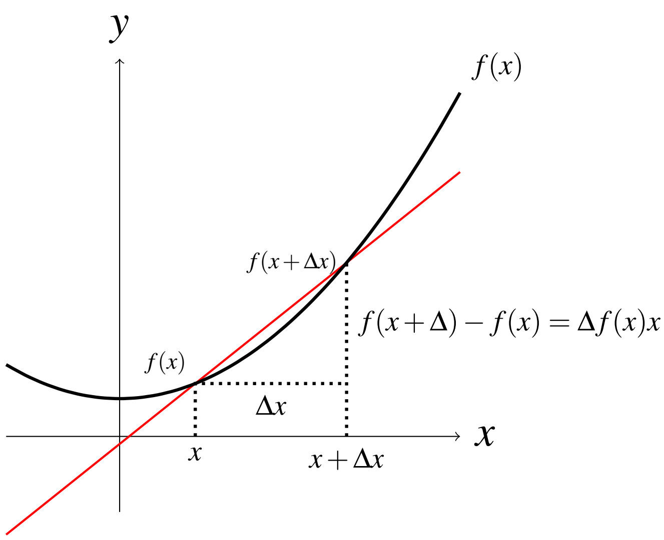

Figur 4.2: Den deriverte i punktet $x = a$, dvs. stigningstallet til tangenten i punktet $x = a$.

[1] Her i MAT100 bruker vi som oftest, men ikke alltid, $\underbrace{\text{Leibniz}}_{\frac{d\,f(x)}{dx}}$ notasjon istedet for bare $f'(x)$: $\quad f'(x) = \underbrace{\frac{d\,f(x)}{dx}}_{\text{Leibniz}}$.

**Definisjon 4.1.1 — Deriverte**

La $f(x)$ være en deriverbar funksjon i punktet $x$. Den deriverte av denne funksjonen i $x$ er definert ved:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4.4}$$




Figur 4.3: Gjennomsnittlig endring.

Den deriverte = en grenseverdi.

Dersom grenseverdien eksisterer i et punkt $x = a$ så sies funksjonen å være deriverbar i punktet.

Tolkning:
- et mål for hvor raskt funksjonen endrer seg i punktet
- et mål for "bratthet"

Her i MAT100 bruker vi som oftest, men ikke alltid $\overbrace{\text{Leibniz}}^{\frac{df(x)}{dx}}$ notasjon istedet for bare $f'(x)$:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{df(x)}{dx}}_{\text{Leibniz}} \tag{4.5}$$

## 4.2 Derivasjonsregler

### 4.2.1 Generell derivasjonsregler

**Setning 4.2.1 — Derivasjon av et polynom**

Den deriverte av funksjonen

$$f(x) = ax^n \tag{4.6}$$

hvor $a \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$, er

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = n\,ax^{n-1} \tag{4.7}$$

*Bevis.*
Derivasjonsreglen i lign.(4.7) kan utledes ved å bruke definisjonen av derivasjon i lign.(4.4). Det er litt teknisk krevende. Derfor nøyer vi oss med å kun presentere resultatene.

■

Fra hovedregelen lign.(4.7) følger det direkte at: [2]

**Setning 4.2.2 — Derivasjonsregler**

Fra lign.(4.7) følger at:

$$a = 1 \text{ og } n = 1: \qquad f(x) = x \qquad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = 1 \tag{4.8}$$

$$a = 1 \text{ og } n = -1: \qquad f(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2} \tag{4.9}$$

$$a = 1 \text{ og } n = 1/2: \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{4.10}$$

for $x \neq 0$ i lign.(4.9) og (4.10).

[2] Selv om $n \in \mathbb{N}$ i lign.(4.7) så skal vi senere utvide "hovedregelen" for derivasjon til reelle tall i eksponenten. Derfor er det i orden å bruke $n = -1$ og $n = 1/2$ i lign.(4.9) og (4.10).

**Setning 4.2.3 — Generelle derivasjonsregler**

La $f(x)$ være en deriverbar funksjon i $x$, og la $k \in \mathbb{R}$ være en konstant.
Da gjelder følgende generelle derivasjonsregler:

$$f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \tag{4.11}$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) \tag{4.12}$$

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) - h'(x) \tag{4.13}$$

$$f(x) = k\,g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k\,g'(x) \tag{4.14}$$

*Bevis.*
De generelle derivasjonsreglene kan utledes ved å bruke definisjonen av derivasjon i lign.(4.4). Det er litt teknisk krevende. Derfor nøyer vi oss med å kun presentere resultatene.

■

K I regnereglene ovenfor brukes kortnotasjonen $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

■ **Eksempel 4.1** Deriver funksjonen:

$$f(x) = 5x^3 + 7x \tag{4.15}$$

Løsning:

Deriverer $f(x)$ mhp. $x$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(5x^3 + 7x\right) \qquad \text{Leibnitz' notasjon} \tag{4.16}$$

$$= \frac{d}{dx}5x^3 \; + \; \frac{d}{dx}7x \qquad \text{(se lign.(4.12))} \tag{4.17}$$

$$= 5 \cdot 3x^{3-1} \; + \; 7 \cdot 1x^{1-1} \qquad \text{(se lign.(4.7), hovedregelen)} \tag{4.18}$$

$$= 15x^2 \; + \; 7 \tag{4.19}$$

hvor vi har brukt at $x^{1-1} = x^0 = 1$.

■

■ **Eksempel 4.2 — Deriverte,** *BØK205 Økonomistyring og regnskap*

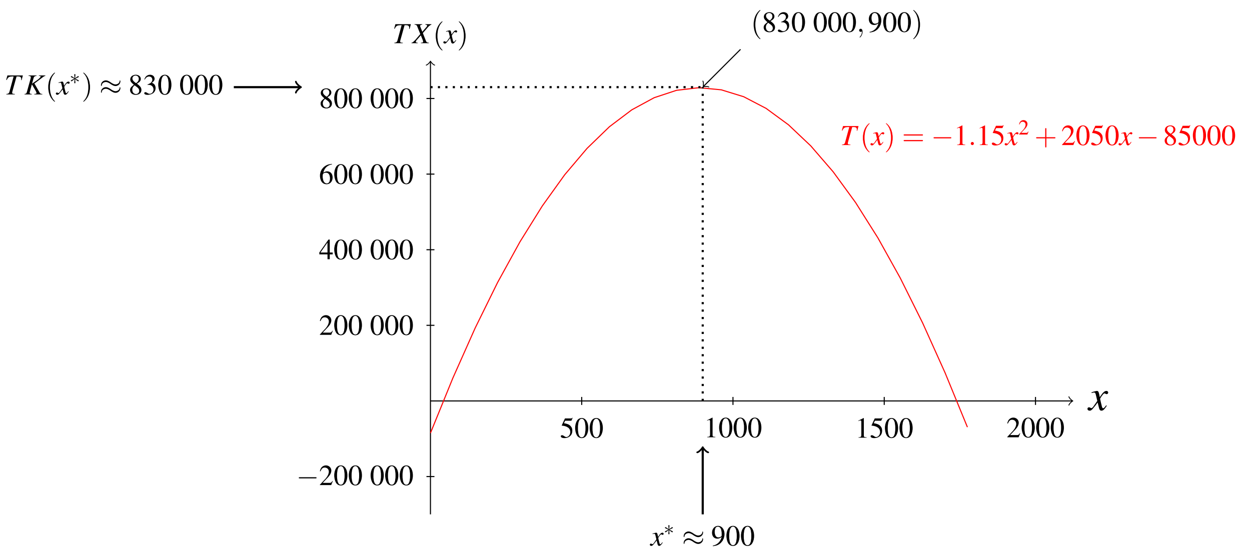
På side 178, lign.(3.77), fant vi at det totale det totale resultatet $TR(x) = TI(x) - TK(x)$ er gitt ved:

$$TR(x) = -1.15x^2 + 2050x - 85\,000 \tag{4.20}$$

hvor $\;x =$ antall iPhoner


Figur 4.4: Power. Ny iPhone.

På side 178, figur 3.16, plottet vi $TR(x)$ i et koordinatsystem:




Figur 4.5: Totalt resultat $TR(x)$.

Ut fra figur 4.5 ser vi at

$$TR(x) \;\text{ er flat i maksimumspunktet} \tag{4.21}$$

dvs.

$$\frac{d\,TR(x)}{dx} = 0 \tag{4.22}$$

akkurat i nullpunktet. [3]

**a**) Finn verdien for $x$ i maksimumspunktet ved hjelp av derivasjon når $TR(x)$ er gitt ved lign.(4.20).

**b**) Finn også tilhørende funksjonsverdi for $TR(x)$.

**c**) Stemmer de analytiske resultatene de grafiske avlesningene i figur 4.5?

[3] Vi skal senere i kurset lære mer om hvordan man finner ekstramelpunkt via 1. derivasjonstesten og 2. derivasjonstesten.

Løsning:

**a**) Ut fra figur 4.5 ser vi at $TR(x)$ har et maksimimspunkt.
Maksimumspunktet til $TR(x)$ inntreffer når den $\underbrace{\text{deriverte er null}}_{\frac{dTR(x)}{dx}\text{ er flat}}$:

$$\frac{d\,TR(x)}{dx} = 0 \qquad \text{flat} \tag{4.23}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\Big(-1.15x^2 + 2050x - 85\,000\Big) = 0 \tag{4.24}$$

$$\Updownarrow$$

$$-1.15 \cdot 2x^{2-1} + 2050 \cdot 1x^{1-1} + 0 = 0 \qquad \text{(hovedregelen)} \tag{4.25}$$

$$\Updownarrow$$

$$-2.3x + 2050 = 0 \tag{4.26}$$

$$\Updownarrow$$

$$-2.3x = -2050 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{-2.3} \tag{4.27}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\cancel{-2.3}x}{\cancel{-2.3}} = -\frac{2050}{-2.3} \qquad \text{kansellering} \tag{4.28}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 891.3 \tag{4.29}$$

**b**) Tilhørende funksjonsverdi for $TR(x)$:

$$TR(891.3) = \Big(-1.15891.3^2 + 2050 \cdot 891.3 - 85000\Big) \text{ NOK} = 828\,587 \text{ NOK} \tag{4.30}$$

**c**) Ja, de grafiske avlesningene i figur 4.5

$$x = 900 \text{ iPhoner og } TR(900) \approx 830\,000 \text{ NOK} \tag{4.31}$$

stemmer bra med de analytiske resultatene

$$x = 891.3 \text{ iPhoner og } TR(891.3) \approx 828\,587 \text{ NOK} \tag{4.32}$$

K For å være sikre på at vi har med et maksimumspunkt å gjøre så må vi utføre 2. derivasjonstesten. Den testen skal vi lære mer om senere, i kapittel 4.3.3.

K Men siden vi her har en figur 4.5 som viser at $TK(x)$ har et maksimumspunkt i vårt tilfelle, så er det i orden å si at vi har et maksimumspunkt uten å gjennomføre 2. derivasjonstesten.

■

### ■ Eksempel 4.3 — Derivasjon , EOQ-formelen [4]

I emnene *BØK300 Finansiell og økonomisk styring* og *SCM200 Lager- og produksjonsstyring* lærer man blant annet om lagerstyring. Man lærer at det koster penger å ha varer på lager.

Den totale kostnaden $c(x)$ per år forbundet med $\overbrace{\text{lager-}}^{=h}$ og $\overbrace{\text{ordrekostnader}}^{=s}$ er: [5]

$$c(x) = d\,c + \underbrace{\frac{x}{2}h}_{\text{lagerkost.}} + \underbrace{\frac{d}{x}s}_{\text{ordrekost.}} \tag{4.33}$$

hvor [6]

$$d = \text{etterspørsel per år} \qquad (\text{“demand”}) \tag{4.34}$$
$$c = \text{innkjøpspris per enhet} \tag{4.35}$$
$$x = \text{ordrestørrelse} \qquad (\text{“quantity”}) \tag{4.36}$$
$$h = i\,c = \text{lagerkostnader per enhet per år} \tag{4.37}$$
$$i = \text{lagerrente} \tag{4.38}$$
$$s = \text{ordrekostnad, dvs. kostnad per ordre} \tag{4.39}$$

Leddene i lign.(4.33) har en direkte økonomisk tolkning:

$$d\,c = \text{kostnad forbundet med etterspørsel per år} \tag{4.40}$$
$$\frac{x}{2}h = \text{gjennomsnittlig lagerkostnader per år} \tag{4.41}$$
$$\frac{d}{x}s = \text{ordrekostnader per år} \tag{4.42}$$

K Legg merke til at gjennsnittlig lagerkostnad per år $\frac{x}{2}h$ øker med økende ordrestrørrelse $x$.

K Men: ordrekostnaden per år $\frac{d}{x}s$ minker med økende ordrestrørrelse $x$.

[4] Tema fra emnet *SCM200 Lager- og produksjonsstyring*.
[5] Lign.(4.33) gjelder kun under visse betingelser. Det skal dere lære mer om i emnet *SCM200 Lager- og produksjonsstyring*.
[6] Her er: $x =$ variabel og de andre størrelsene er parametre.

Anta at du er innkjøpsansvarlig hos Oshaug Metall A/S i Molde. I den sammenheng skal du gjøre innkjøp av metall som råvare til de støpte emnene for propellkomponenter som Oshaug Metall produserer. En typisk pris for den metalltypen som Oshaug bruker er 29 NOK/kg. Anta videre at Oshaug trenger 730 kg/år. Lagerrenten for Oshaug Metall er 15 % og kostnaden per ordre er 450 NOK:

$$d = 730 \text{ kg/år} \tag{4.43}$$
$$c = 29 \text{ NOK/kg} \tag{4.44}$$
$$i = 15 \text{ \%} \tag{4.45}$$
$$s = 450 \text{ NOK} \tag{4.46}$$

**a**) $\overbrace{\text{Plott}}^{\text{tegn}}$ den totale kostnaden $c(x)$ fra lign.(4.33) for intervallet $100 \leq x \leq 1200$.

**b**) i) Hvor mange kg metall bør Oshaug Metall A/S bestille for å minimere den totale kostnaden $c(x)$ per år?
Løs oppgaven grafisk.

ii) Hva er den tilhørende totale lagerkostnaden per år for Oshaug Metall A/S?
Løs oppgaven grafisk.



Figur 4.6: Oshaug Metall A/S.

**c**) Vis at det antall kg metall som Oshaug Metall må bestille for å *minimere* den totale årlige kostnaden $c(x)$, inntreffer når:

$$\frac{x}{2}h = \frac{d}{x}s \tag{4.47}$$

**d**) Hva betyr lign.(4.47) i økonomisk sammenheng?
Har kostnaden $d\,c$ noen betydning for dette optimum?
Begrunn svaret.

**e**) Vis at lign.(4.47) er den samme som den velkjente "EOQ"-formelen i lagerstyring:

$$x^* = \sqrt{\frac{2ds}{h}} \tag{4.48}$$

**f**) Løs oppgave **b** ved regning.
Svarene skal selvfølgelig stemme overens. Gjør de det?

Løsning:

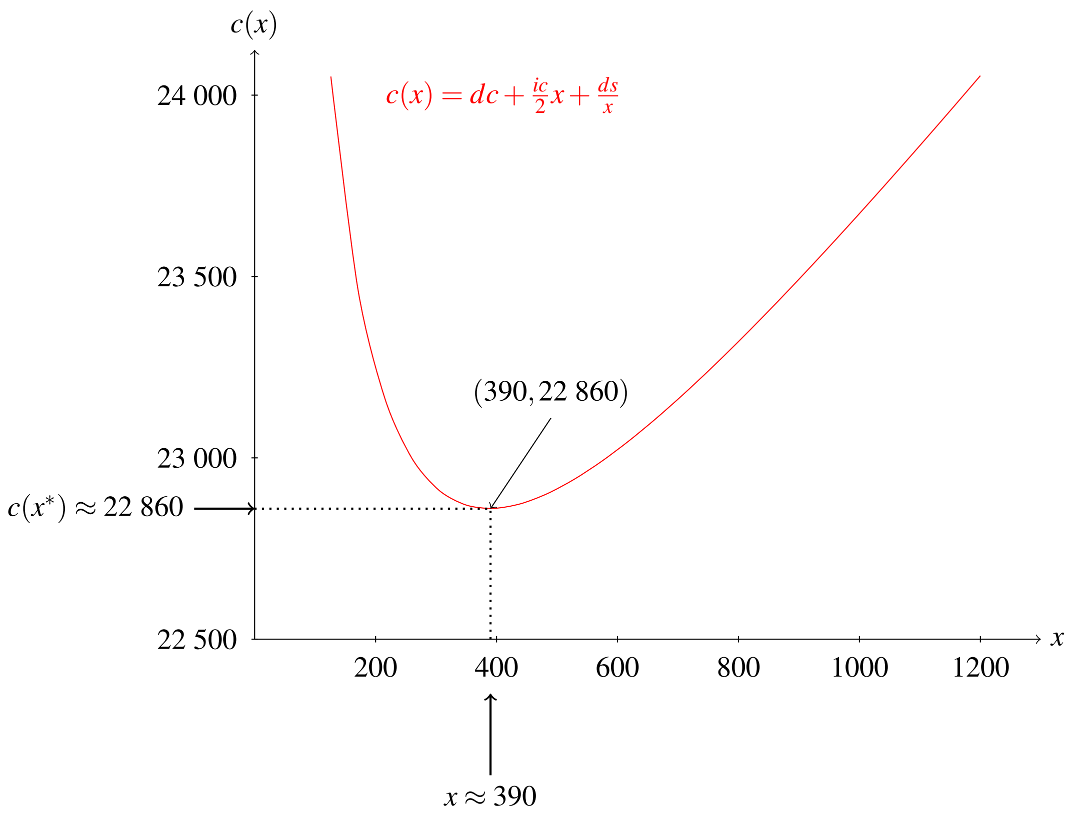
**a)** Når man skal plotte en funksjon, lag en verditabell:

| $x$ | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c(x)$ | 24 673 | 23 248 | 22 918 | 22 861 | 22 915 | 23 023 |

Tabell 4.1: Verditabell for kostnaden $c(x)$.)

| $x$ | 700 | 800 | 900 | 1000 | 1100 | 1200 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c(x)$ | 23 162 | 23 321 | 23 493 | 23 674 | 23 861 | 24 054 |

Tabell 4.2: Fortsettelse verditabell for kostnaden $c(x)$.




Figur 4.7: Total kostnad $c(x)$ per år.

**b)** i) Fra figuren ser vi at den minste kostnaden $c(x)$ per år oppnås ved bestilling av:
$x^* \approx 390$ kg metall per gang.

ii) Fra figuren ser vi at den minste kostnaden $c(x)$ per år er:
$c(x^*) \approx 22\,860$ NOK. [7]

**c)** Mimimum av total kostnad $c(x)$ inntreffer når stigningstallet $= 0$:

$$\text{stigningstallet til } c(x) = 0 \tag{4.49}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{d\,c(x)}{dx} = 0 \tag{4.50}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{d}{dx}\left(d\,c + \frac{x}{2}h + \frac{d}{x}s\right) = 0 \tag{4.51}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{d}{dx}\left(d\,c + \frac{x}{2}h + d\,x^{-1}s\right) = 0 \qquad \text{(kjelleromskriving)} \tag{4.52}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{h}{2} + d\,(-1)x^{-1-1}s = 0 \qquad \text{(hovedregelen)} \tag{4.53}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{h}{2} - \frac{d}{x^2}s = 0 \qquad \Big/ + \frac{d}{x^2} \tag{4.54}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{h}{2} = \frac{d}{x^2}s \qquad \Big/ \cdot x \tag{4.55}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{x}{2}h = \frac{d}{x}s \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{4.56}$$

[7] Når man bare leser av grafen så er det ikke så lett å få akkurat rett svar pga. avlesningsfeil. Men det er tilstrekkelig at avlesningen er i nærheten av det riktige svaret.

**d**) Lagerkostnaden er $xh/2$ og ordrekostnaden er $ds/x$.
Lign.(4.56) betyr da at totalkostnaden er minst når lagerkostnaden og ordekostnaden er like.

Siden

$$\frac{d\,dc}{dx} = 0 \tag{4.57}$$

så påvirker ikke kostnaden $dc$ minimum i lign.(4.56).

**e**) Ut fra lign.(4.56) kan vi løse ut $Q$ alene:

$$\frac{x}{2}h = \frac{d}{x}s \qquad \Big/ \cdot x \tag{4.58}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{2}h = d\,s \qquad \Big/ \cdot \frac{2}{h} \tag{4.59}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = \frac{2d\,s}{h} \qquad \Big/ \sqrt{\cdot} \tag{4.60}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^* = \sqrt{\frac{2\,ds}{h}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{4.61}$$

hvor $h = ic$ og hvor notasjonen $x^*$ er introdusert for optimal $x$. [8]

[8] Noen bruker også notasjonen:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2d\,s}{h}} \tag{4.62}$$

**f**) Den minste kostnaden $c_{\min}$ per år oppnås ved bestilling av:

$$x^* = \sqrt{\frac{2d\,s}{i\,c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 730 \cdot 450}{0.15 \cdot 29}} = 388.63 \approx 389 \tag{4.63}$$

$x^*$ innsatt i lign.(4.33): ( bruker at $h = ic$ )

$$c(x^*) = d \cdot c + \frac{x^*}{2} ic + \frac{d}{x^*} s \tag{4.64}$$

$$= \left( 730 \cdot 29 + \frac{388.63}{2} 0.15 \cdot 29 + \frac{730}{388.63} \cdot 450 \right) \text{NOK} \tag{4.65}$$

$$= 22\,860.55 \;\; \text{NOK} \tag{4.66}$$

Ja, den grafiske løsningen, se figur 4.7, og den analytiske løsningen gir tilnærmet samme svar, slik som det skal.

■

■ **Eksempel 4.4 — Derivasjon,** *BØK105 Finansregnskap 1*, **priselastisitet**

Blant annet i emnet "*BØK105 Finansregnskap 1*" vil man lære om elastisitet.
Det finnes mange typer elastisiteter, f.eks. priselastistitet.
Priselastisitet $E_p(x)$ er definert ved:

$$E_p(x) = \frac{dx(p)}{dp} \frac{p}{x(p)} \tag{4.67}$$

hvor

$$p = \text{pris} \tag{4.68}$$

$$x(p) = \text{en størrelse som varierer med prisen} \tag{4.69}$$

$$\frac{dx(p)}{dp} = \text{den deriverte av } x(p) \text{ med hensyn til prisen } p \tag{4.70}$$

Størrelsen $x(t)$ kan f.eks. være etterspørselen av en vare.

Den momentane priselastisiteten i lign.(4.67) kan tolkes som det momentane forholdet mellom endringen i etterspørsel og endringen i pris:

$$E_p(x) = \frac{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}{\text{\%-vis endring i pris}} \tag{4.71}$$

Flybussen A/S har leid inn studenter ved Høgskolen i Molde og funnet ut at sammenheng mellom etterspørsel av flybussbilletter og pris $p$ er:

$$x(p) = \frac{c}{p^{1.3}} \tag{4.72}$$

hvor $c =$ en konstant. Anta at $c = 35$ NOK$^{1.3}$.


Figur 4.8: Flybussen i Molde.

**a**) Finn priselasitsiteten $E_p(x)$.

**b**) Tolk resultatet i oppgave **a**.

**c**) Hvor mye vil etterspørselen av bussreiser endre seg med dersom prisen øker med 2.5 %?

**d**) Spiller konstanten $c = 35$ NOK noen rolle i denne oppgaven?

Løsning:

**a**) Priselasitsiteten $E_p(x)$ finnes via lign.(4.67):

$$E_p(x) \overset{\text{Eq.}(4.67)}{=} \frac{d\,x(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \tag{4.73}$$

$$= \frac{d}{dp}\left(\frac{c}{p^{1.3}}\right) \cdot \frac{p}{\frac{c}{p^{1.3}}} \tag{4.74}$$

$$= \frac{d}{dp}\left(c \cdot p^{-1.3}\right) \cdot \frac{p \cdot p^{1.3}}{c} \qquad \text{kjelleromskriving} \tag{4.75}$$

$$= \left(\cancel{c} \cdot (-1.3) \cdot \cancel{p^{-1.3-1}}\right) \cdot \frac{\cancel{p^{1+1.3}}}{\cancel{c}} \tag{4.76}$$

$$= -1.3 \tag{4.77}$$

**b**) Siden

$$E_p(x) = \frac{\%\text{-vis endring i etterspørsel}}{\%\text{-vis endring i pris}} \tag{4.78}$$

så ser vi at:

$$\%\text{-vis endring i etterspørsel} = E_p(x) \cdot \%\text{-vis endring i pris} \tag{4.79}$$

$$= (-1.3) \cdot \%\text{-vis endring i pris} \tag{4.80}$$

som gir tolkningen:

Dersom billettprisen $p$ øker med 1 % så vil etterspørselen etter bussbilletter minke med 1.3 %

**c)** Siden

$$E_p(x) = \frac{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}{\text{\%-vis endring i pris}} \tag{4.81}$$

så ser vi at:

$$\text{\%-vis endring i etterspørsel} = E_p(x) \cdot \overbrace{\text{\%-vis endring i pris}}^{2.5\ \%} \tag{4.82}$$

$$= (-1.3) \cdot 2.5\ \% \tag{4.83}$$

$$= -3.25\ \% \tag{4.84}$$

**d)** I oppgave **a** ser vi at konstanten $c$ kansellerer.
Priselastistiteten er altså uavhengig av $c$.

Dermed innser vi at $c$ ikke spiller noen rolle i denne oppgaven.

■

### 4.2.2 Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner

**Setning 4.2.4 — Derivasjon av et produkt**

La $u(x)$ og $v(x)$ være deriverbare funksjoner. For produktet

$$f(x) = uv \tag{4.85}$$

gjelder følgende derivasjonsregel:

$$f'(x) = u'v + uv' \tag{4.86}$$

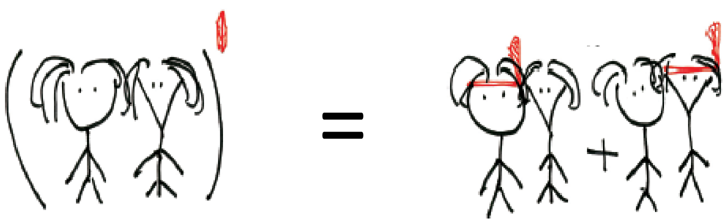
**Setning 4.2.5 — Derivasjon av en brøk**

La $u(x)$ og $v(x)$ være deriverbare funksjoner. For brøken

$$f(x) = \frac{u}{v} \tag{4.87}$$

gjelder følgende derivasjonsregel:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{4.88}$$



Figur 4.9: "Indianerfjær-huskeregelen" - huskeregel for derivasjon av et produkt.

**■ Eksempel 4.5 — Derivasjon av et produkt**

Gitt funksjonen:

$$f(x) \;=\; (4x-3)(3x+2) \tag{4.89}$$

**a**) Deriver $f(x)$ via produktregelen.

**b**) Deriver $f(x)$ ved først å multiplisere ut parentesene.

Løsning:

**a**) Deriver $f(x)$ via produktregelen:

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} \tag{4.90}$$

$$= \overbrace{(4x-3)}^{u}\overbrace{(3x+2)}^{v} \tag{4.91}$$

$$= (uv)' \tag{4.92}$$

$$= u'v + uv' \qquad \text{(produktregelen)} \tag{4.93}$$

$$= (4x-3)'(3x+2) \;+\; (4x-3)(3x+2)' \tag{4.94}$$

$$= 4(3x+2) + (4x-3)3 \tag{4.95}$$

$$= 12x + 8 + 12x - 9 \tag{4.96}$$

$$= 24x - 1 \tag{4.97}$$

**b**) Multiplisere ut parentesene:

$$(x) = (4x-3)(3x+2) \tag{4.98}$$

$$= \frac{d}{dx} 4x \cdot 3x + 4x \cdot 2 - 3 \cdot 3x - 3 \cdot 2 \tag{4.99}$$

$$= 12x^2 + 8x - 9x - 6 \tag{4.100}$$

$$= 12x^2 - x - 6 \tag{4.101}$$

Nå kan man derivere via regneregelen i lign.(4.7):

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} \tag{4.102}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(12x^2 - x - 6\right) \tag{4.103}$$

$$= 12 \cdot 2x^{2-1} - 1 \tag{4.104}$$

$$= 24x - 1 \tag{4.105}$$

altså samme svar som i oppgave **a**, lign.(4.97).

■

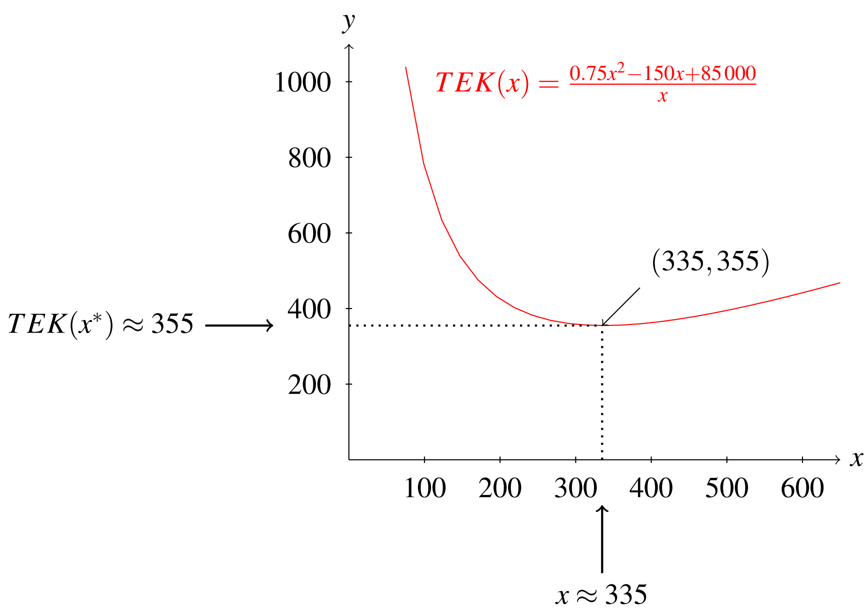
■ **Eksempel 4.6 — Deriverte**, *BØK205 Økonomistyring og regnskap*

La oss se på eksempelet fra side 181.
I dette eksemplet var den totale enhetskostnaden modellert ved: ( se lign.(3.84) )

$$TEK(x) = \frac{TK(x)}{x} = \frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \tag{4.106}$$

hvor $x$ = antall solge iPhoner.


Figur 4.10: Power skal lansere ny iPhone.




Figur 4.11: Total enhetskostnad $TEK(x)$, se lign.(4.106).

**a**) Finn verdien til $x$ i minimumspunktet for $TEK(x)$ når enhetskostnaden er gitt ved lign.(4.106).

**b**) La oss sammenligne $x$-verdien ved minimum av $TEK(x)$ vi har funnet i dette eksemplet med $x$-verdien for maksimum av totalt resultat $TR(x)$ fra det foregående eksemplet.

Er antall iPhoner som Power må selge for å maksimere $TR(x)$ og minimere $TEK(x)$ sammenfallende?

Begrunn svaret.

Løsning:

**a)** Funksjonen $TEK(x)$ gitt ved lign.(4.106) er plottet i figur 4.11.
Fra denne figuren ser vi at $TEK(x)$ har et minimumspunkt. [9]

Minimumspunktet til $TEK(x)$ inntreffer når den deriverte er null:

$$\frac{d\,TEK(x)}{dx} = 0 \qquad \text{deriverte lik null} \tag{4.107}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x}\right) = 0 \tag{4.108}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{0.75x^2}{x} - \frac{150x}{x} + \frac{85\,000}{x}\right) = 0 \tag{4.109}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\Big(0.75x - 150 + 85\,000x^{-1}\Big) = 0 \qquad \text{kjelleromskriving} \tag{4.110}$$

$$\Updownarrow$$

$$0.75 \cdot 1x^{1-1} - 0 + 85\,000 \cdot (-1)x^{-1-1} = 0 \qquad \text{hovedregel} \tag{4.111}$$

$$\Updownarrow$$

$$0.75 - 85\,000x^{-2} = 0 \tag{4.112}$$

hvor vi i lign.(4.110) har gjort "kjelleromskrivingen":

$$\frac{85\,000}{x} = 85\,000x^{-1} \qquad \text{kjelleromskriving} \tag{4.113}$$

fordi det da er lettere å bruke derivasjonsregelen $\underbrace{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}_{\text{hovedregel}}$. [10]

[9] Vi skal senere i kurset lære mer om 2. derivasjonstesten som sier noe om et ekstremalpunkt er maksimalpunkt eller minimalpunkt. Men siden vi har en figur som i dette eksemplet som eksplislitt viser at vi har et minimumspunkt, så er det tilstrekkelig her.

[10] Man kan også derivere $TEK(x)$ ved hjelp av derivasjon av en brøk. Derivasjon av en brøk skal vi lære mer om senere, i seksjon 4.2.2.

Løser med hensyn på $x$ alene:

$$0.75 - 85\,000x^{-2} = 0 \qquad \text{deriverte lik null} \tag{4.114}$$

$$\Updownarrow$$

$$0.75 = 85\,000x^{-2} \tag{4.115}$$

$$\Updownarrow$$

$$0.75 = \frac{85\,000}{x^2} \qquad \Big/ \cdot x^2 \tag{4.116}$$

$$\Updownarrow$$

$$0.75x^2 = \frac{85\,000}{\cancel{x^2}}\cancel{x^2} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{0.75} \tag{4.117}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = \frac{85\,000}{0.75} \tag{4.118}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{85\,000}{0.75}} \qquad \sqrt{\cdot} \tag{4.119}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^* = \sqrt{\frac{85\,000}{0.75}} \tag{4.120}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^* = 336.7 \tag{4.121}$$

For å minimere enhetskostanden $TEK(x)$ må Power selge  337 iPhoner.

**b**) Fra oppgave **a** på forrige side samt eksempelet på side 203 ser vi at:

$$TR_{max} \overset{\text{lign.(4.29)}}{\Rightarrow} x = 891.3 \ \text{ iPhoner} \tag{4.122}$$

$$TEK_{min} \overset{\text{lign.(4.121)}}{\Rightarrow} x = 336.7 \ \text{ iPhoner} \tag{4.123}$$

Altså:
For å maksimere resultatet $TR(x)$ må Power selge $x = 891$ iPhoner.
For å minimere enhetskostnaden $TEK(x)$ må Power selge $x = 337$ iPhoner.

Konklusjon:

maksimalt resultat $TR(x)$ og minimal enhetskostnad $TEK(x)$

er **ikke** sammenfallende

dvs. de inntreffer ikke for samme verdi av $x$.

■

■ **Eksempel 4.7 — Derivasjon,** *BØK205 Økonomistyring og regnskap*

La oss igjen se på den totale enhetskostnad $TEK(x)$ fra side 221, lign.(4.106):

$$TEK(x) = \frac{TK(x)}{x} = \underbrace{\frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x}}_{\text{form 1}} = \underbrace{0.75x - 150 + \frac{\overbrace{85\,000}^{=85\,000\cdot x^{-1}}}{x}}_{\text{form 2}} \tag{4.124}$$

På side 223 deriverte vi denne ligningen ved å bruke "form 2". Det gav oss svaret i lign.(4.112). Bruk nå "form 1" deriverte av $TEK(x)$ mhp. $x$, dvs. finn $\frac{dTEK(x)}{dx}$.

Løsning:

Deriverer $TEK(x)$ mhp. $x$:

$$TEK'(x) = \frac{dTEK(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x}\right) \tag{4.125}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \tag{4.126}$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{4.127}$$

$$= \frac{\left(0.75x^2 - 150x + 85\,000\right)' x - \left(0.75x^2 - 150x + 85\,000\right) x'}{x^2} \tag{4.128}$$

$$= \frac{\left(0.75 \cdot 2x^{2-1} - 150\right) x - \left(0.75x^2 - 150x + 85\,000\right) \cdot 1}{x^2} \tag{4.129}$$

$$= \frac{1.5x^2 - \cancel{150x} - 0.75x^2 + \cancel{150x} - 85\,000}{x^2} \tag{4.130}$$

$$= \frac{0.75x^2 - 85\,000}{x^2} \tag{4.131}$$

$$= 0.75 - \frac{85\,000}{x^2} \tag{4.132}$$

altså samme svar som lign.(4.112) på side 223, selvfølgelig.

Konklusjon:

I dette eksemplet kan man bruke derivasjon av et produkt eller derivasjon av en brøk.
Begge gir samme svar.

Men muligens er derivasjon av et produkt mest hensiktsmessig å bruke her siden det gir litt mindre regningen.

∎

### 4.2.3 Kjerneregelen

**Setning 4.2.6 — Kjerneregelen**

Dersom vi har en sammensatt funksjon

$$f(x) = g(u(x)) \qquad \text{(ytre funksjon)} \tag{4.133}$$

hvor

$$u = u(x) \qquad \underbrace{\text{(indre funksjon)}}_{\text{kjerne}} \tag{4.134}$$

er en funksjon av $x$, så er den deriverte av $f(x)$ gitt ved:

$$f'(x) = g'(u)\,u' \tag{4.135}$$

hvor $u(x)$ er kjernefunksjonen.

K En alternativ måte å skrive denne ligningen på er:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d\,g(u)}{du}\,\frac{du}{dx} \tag{4.136}$$

hvor $u(x)$ er kjernefunksjonen.

**■ Eksempel 4.8 — Kjerneregelen**

Gitt funksjonen:

$$f(x) = (x^2 + 2)^{10} \tag{4.137}$$

Deriver $f(x)$, dvs. finn $f'(x)$.

Løsning:

Funksjonen $f(x)$ i lign.(4.137):

$$f(x) = (x^2 + 2)^{10} \tag{4.138}$$

hvor

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \tag{4.139}$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjernen)} \tag{4.140}$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(u(x)) \tag{4.141}$$

hvor

$$g(u) = u^{10} \qquad (\text{ytre funksjon}) \tag{4.142}$$

og

$$u(x) = x^2 + 2 \qquad \underbrace{(\text{indre funksjon})}_{\text{kjerne}} \tag{4.143}$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre}\right)'\left(\text{indre}\right)'}^{\text{kjerneregelen}} \tag{4.144}$$

$$= g'(u)\,u' \tag{4.145}$$

$$= (u^{10})'\,(x^2+2)' \tag{4.146}$$

$$= 10u^{10-1} \cdot 2x \tag{4.147}$$

$$= 10\,(x^2+2)^9\,2x \tag{4.148}$$

$$= 20x(x^2+2)^9 \tag{4.149}$$

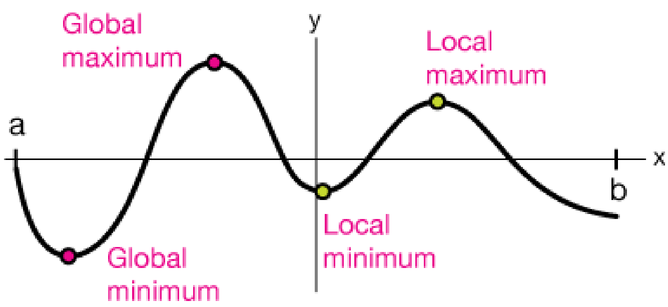
■

## 4.3 Globale og lokale ekstremalpunkt

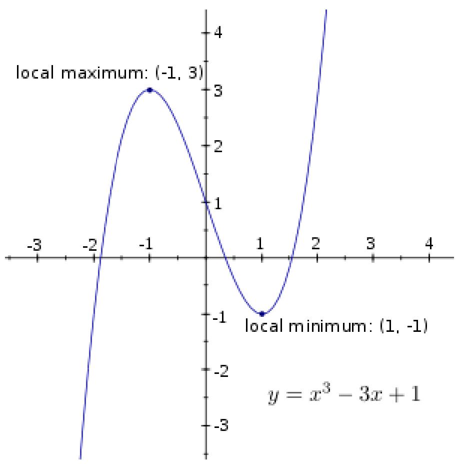
Et ekstremalpunkt er et minimums- eller maksimumspunkt.

Det er to typer ekstremalpunkt:

1. Lokale ekstremalpunkt.
2. Globale ekstremalpunkt.




Figur 4.12: Globale og lokale ekstremalpunkter. $(x \in [a, b])$




Figur 4.13: Kun lokale ekstremalpunkter. $(x \in \mathbb{R})$

**Definisjon 4.3.1 — Lokale ekstremalpunkt**

Et punkt $x$ er et lokalt minimumspunkt $x$ dersom det finnes et $\varepsilon > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x+d) \tag{4.150}$$

for alle $\quad d \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Et punkt $x$ er et lokalt maksimumspunkt $x$ dersom det finnes et $\varepsilon > 0$ slik at

$$f(x) \geq f(x+d) \tag{4.151}$$

for alle $\quad d \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

**Definisjon 4.3.2 — Globale ekstremalpunkt**

Et punkt $x$ er et globalt minimumspunkt $x$ dersom

$$f(x) \leq f(x') \tag{4.152}$$

for alle $\quad x'$.

Et punkt $x$ er et globalt maksimumspunkt $x$ dersom

$$f(x) \geq f(x+d) \tag{4.153}$$

for alle $\quad x'$.

**■ Eksempel 4.9 — Derivasjon, lokale ekstremalpunkt, 3. gradsligning**

La oss se 3. gradsligningen:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7 \tag{4.154}$$

**a)** Regn ut $f'(x)$.

**b)** Tegn fortegnsskjema for $f'(x)$.

Tegn grafen $f(x)$ og marker på figuren når $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$.
Marker på figuren ekstremalpunktene. Er de lokale eller globale?

Løsning:

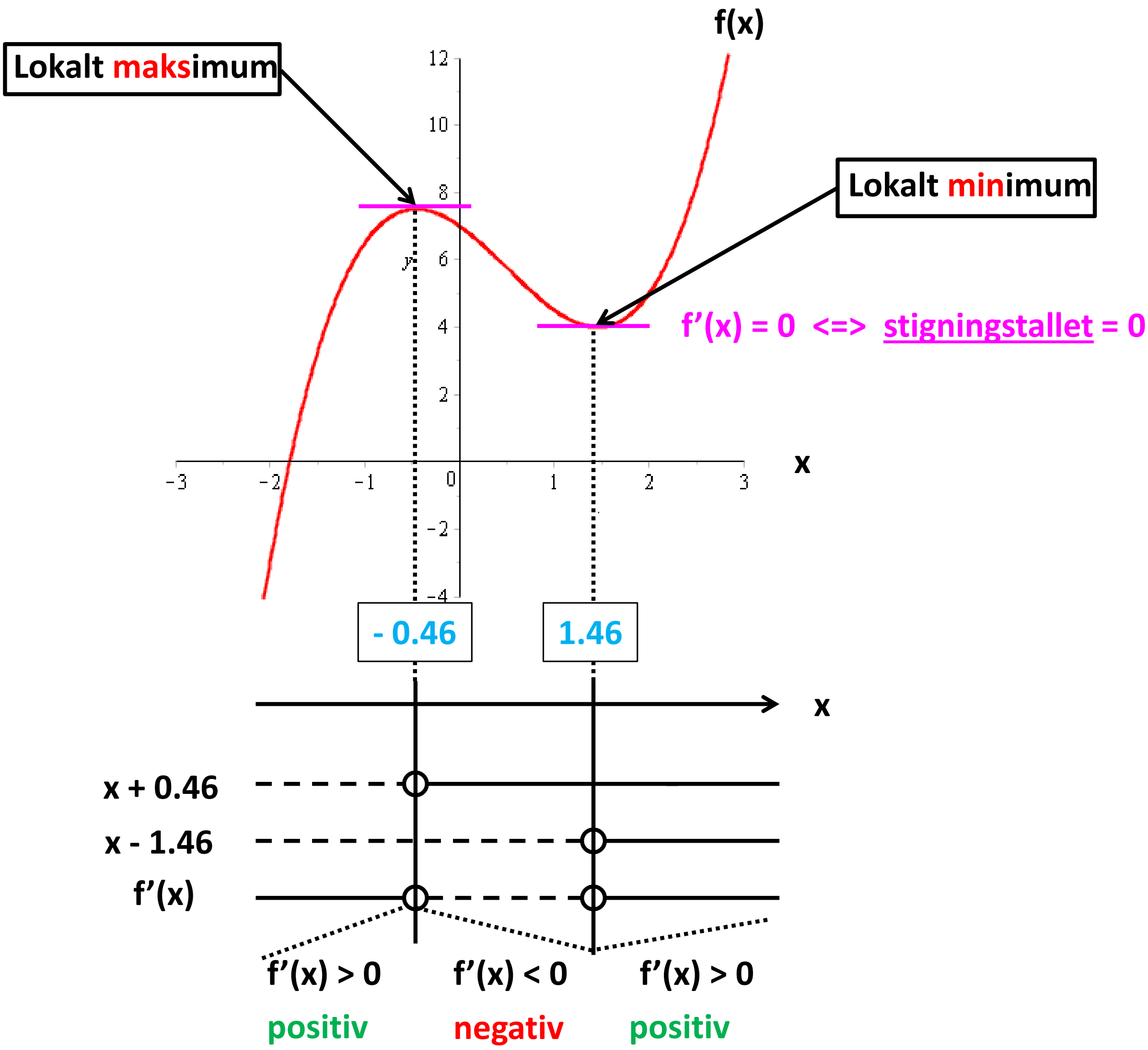
**a)** Første deriverte: ( hovedregelen for derivasjon )

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7\right) = 3x^2 - \frac{3}{2}\cdot 2\cdot x^{2-1} - 2 = 3x^2 - 3x - 2 \tag{4.155}$$

**b)** Første deriverte $f'(x)$ er en 2. gradsligning som kan *faktoriseres*:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = 3x^2 - 3x - 2 = 3\left(x^2 - x - \frac{2}{3}\right) = 3\,(x + 0.46)\,(x - 1.46) \tag{4.156}$$

siden nullpunktene kan finnes ved å bruke lign.(2.144): $x_{1,2} = 1/2 \mp \sqrt{33}/6$,
hvor vi gjør tilnærmelsene: $x_1 = -0.46$ og $x_2 = 1.46$.
Etter denne faktoriseringen kan man lage fortegnsskjema og markere på figuren
når $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$:




Figur 4.14: Funksjonen $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7$ og tilhørende fortegnsskjema for $f'(x)$.

∎

### 4.3.1 Ekstremalpunkt eller ikke?

Spørsmål:

Er det alltid slik at når man setter $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$ så finner vi et ekstremalpunkt?

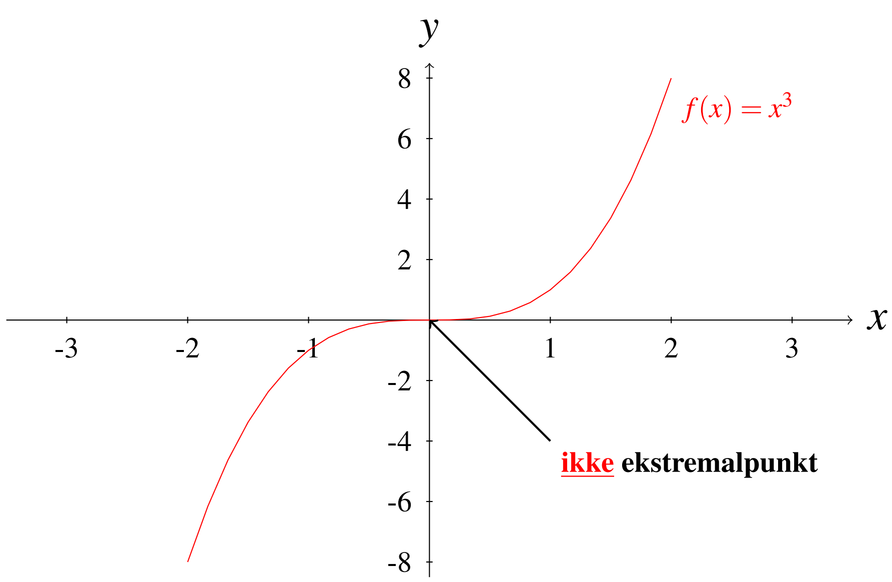
Svar:

Nei, $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$ representerer ikke alltid et ekstremalpunkt.

■ **Eksempel 4.10** Funksjonen

$$f(x) = x^3 \tag{4.157}$$

har $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$ for $x = 0$, men $x = 0$ er ikke et ekstremalpunkt for funksjonen.




Figur 4.15: Funksjonen $f(x) = x^3$.

■

## 4.3.2 Lokale ekstremalpunkt: 1. derivasjonstesten

Fra eksemplet på forrige side så vi at den deriverte er null, dvs. $\frac{df(x)}{dx} = 0$ , ikke er nok til å garantere et lokalt ekstremalpunkt:

$$\frac{df(c)}{dx} = 0 \qquad \overset{\text{ikke alltid}}{\Rightarrow} \qquad \text{lokalt ekstremalpunkt } \; x = c \tag{4.158}$$

Men omvendt er derimot alltid tilfelle:
Dersom vi har et lokalt ekstremalpunkt så vet vi med sikkerhet at $\frac{df(x)}{dx} = 0$:

$$\text{lokalt ekstremalpunkt } \; x = c \qquad \overset{\text{alltid}}{\Rightarrow} \qquad \frac{df(c)}{dx} = 0 \tag{4.159}$$

Den siste implikasjonen, dvs. lign.(4.159), formulerer vi i en egen setning - 1. derivasjonstesten:

**Setning 4.3.1 — 1. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt**

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt ekstremalpunkt } x = c \quad \Rightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \tag{4.160}$$

Spørsmål:

Hva betyr 1. derivasjonstesten i praksis?

Svar:

Jo, når vi skal finne lokale ekstremalpunkt så setter vi først

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = 0 \tag{4.161}$$

og løser denne ligningen med hensyn på $x$ alene, altså finner alle $x$'ene.

Det er ikke sikkert disse $x$'ene representerer ekstremalpunkter, men de er mulige kandidater. For å sjekke om disse kandidatene er faktisk ekstremalpunkter så må vi utføre en ny test, nemlig 2. derivasjonstesten.

Altså:

1) Finn mulige kandidater til ekstremalpunkter.
$\left( \text{1. derivasjonstesten} \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = 0 \right)$

2) Sjekk om kandidatene faktisk er et ekstremalpunkt eller ikke.
$\left( \text{2. derivasjonstesten} \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ positiv eller negativ} \right)$

### 4.3.3 Lokale ekstremalpunkt: 2. derivasjonstesten

For å sjekke om kandidater ekstremalpunkt er lokale eller ikke
så må vi utføre 2. derivasjonstesten.

**Setning 4.3.2 — 2. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt**

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt maksimum } x = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2 f(c)}{dx^2} < 0 \quad (\text{negativ}) \tag{4.162}$$

$$\text{lokalt minimum } x = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2 f(c)}{dx^2} > 0 \quad (\text{positiv}) \tag{4.163}$$

Det er flere måter å formulere 2. derivasjonstesten på.
Formuleringen nedenfor er en alternativ formuleringen: [11]

**Setning 4.3.3 — 2. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt**

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\begin{gathered}\text{lokalt maksimum } x = c \\ \Updownarrow \\ \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d\,f(c)}{dx} \text{ skifter fortegn fra } + \text{ til minus } -\end{gathered} \tag{4.164}$$

$$\begin{gathered}\text{lokalt minimum } x = c \\ \Updownarrow \\ \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d\,f(c)}{dx} \text{ skifter fortegn fra } - \text{ til minus } +\end{gathered} \tag{4.165}$$

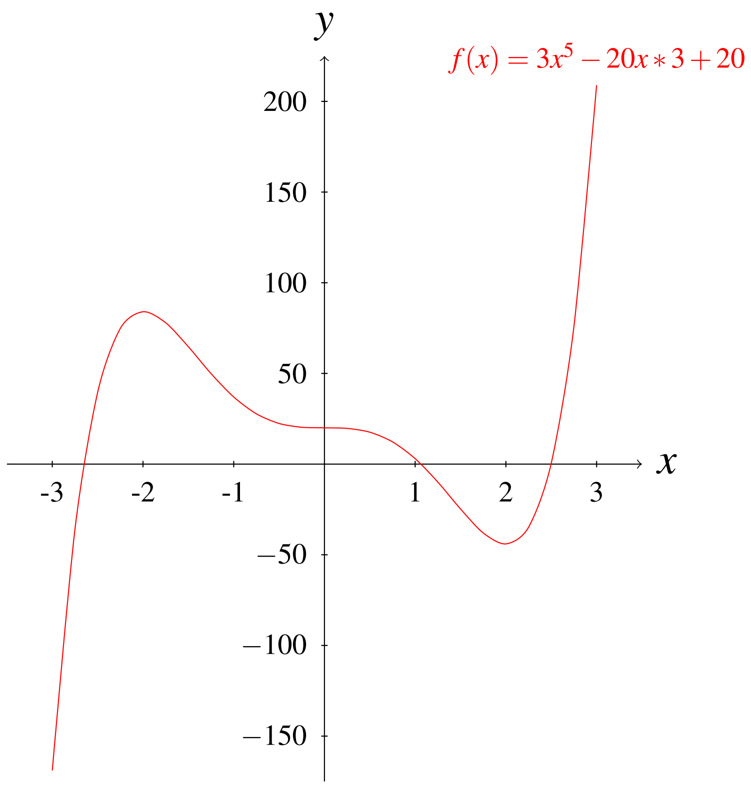
[11] Setning 4.3.3 er mer fundamental enn setning 4.3.2. Vet du hvorfor?

■ **Eksempel 4.11 — 2. derivasjonstesten**

La oss se på følgende 5. gradsfunksjon:

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 20 \tag{4.166}$$

Finn de lokale ekstremalpunktene til $f(x)$.




Figur 4.16: Funksjonen $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 20$.

Løsning:

Finner kandidater til ekstremalpunktene ved å derivere $f(x)$:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = 0 \qquad \text{(deriverte lik null)} \tag{4.167}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(3x^5 - 20x^3 + 20\right) = 0 \qquad \text{(setter inn fra lign.(4.166))} \tag{4.168}$$

$$\Updownarrow$$

$$3 \cdot 5x^{5-1} - 20 \cdot 3x^{3-1} + 0 = 0 \qquad \text{(hovedregelen)} \tag{4.169}$$

$$\Updownarrow$$

$$15x^4 - 60x^2 = 0 \tag{4.170}$$

$$\Updownarrow$$

$$15x^2\left(x^2 - 4\right) = 0 \qquad \text{(faktoriserer)} \tag{4.171}$$

$$\Updownarrow$$

$$15x^2\left(x-2\right)\left(x+2\right) = 0 \qquad \text{(faktorisere mer, konjugatsetningen brukes)} \tag{4.172}$$

Det er altså 3 løsninger av ligningen $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$:

$$x = -2 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x = 2 \tag{4.173}$$

For å sjekke hvilke(n) av disse kandidatene som representerer et lokalt ekstramelpunkt så må vi se på den 2. deriverte:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d f(x)}{dx} \tag{4.174}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(15x^4 - 60x^2\right) \tag{4.175}$$

$$= 15 \cdot 4x^{4-1} - 60 \cdot 2x^{2-1} \tag{4.176}$$

$$= 60x^3 - 120x \tag{4.177}$$

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\frac{d^2 f(-2)}{dx^2} = 60 \cdot (-2)^3 - 120 \cdot (-2) = -240 \qquad \text{(negativt)} \tag{4.178}$$

$$\Rightarrow \qquad x = -2 \text{ er et lokalt maksimum} \tag{4.179}$$

$$\frac{d^2 f(0)}{dx} = 60 \cdot 0^3 - 120 \cdot 0 \ = 0 \qquad \text{(verken negativt eller positivt)} \tag{4.180}$$

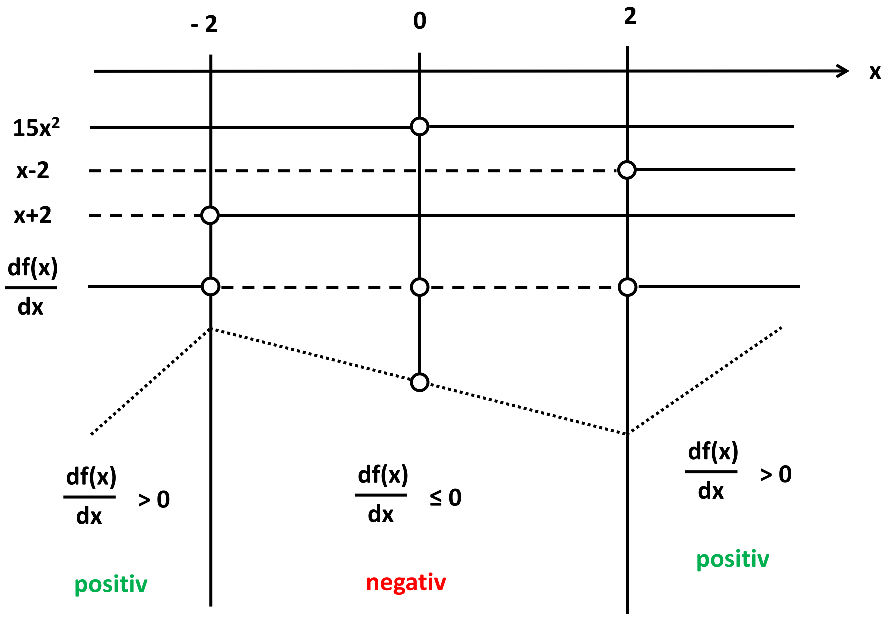
$$\Rightarrow \qquad x = 0 \text{ er verken et lokalt maksimum eller lokalt minimum} \tag{4.181}$$

$$\frac{d^2 f(2)}{dx^2} = 60 \cdot 2^3 - 120 \cdot 2 = 240 \qquad \text{(positivt)} \tag{4.182}$$

$$\Rightarrow \qquad x = 2 \text{ er et lokalt minimum} \tag{4.183}$$

Man kunne også satt opp fortegnsskjema for $\frac{df(x)}{dx}$ og brukt den alternative formlieringen av 2. derivasjonstesten, men da må man faktorisere først:

$$\frac{df(x)}{dx} = 15^4 - 60x^2 = 15x^2(x^2-4) = \underbrace{15x^2(x-2)(x+2)}_{\text{faktorisert form}} \tag{4.184}$$




Figur 4.17: Fortegnsskjema for $\frac{df(x)}{dx} = 15x^4 - 60x^2 = 15x^2(x-2)(x+2)$.

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ skifter fra } + \text{ til } - \quad \Rightarrow \quad x = -2 \text{ lokalt maksimum} \tag{4.185}$$

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ skifter fra } - \text{ til } + \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ lokalt minimum} \tag{4.186}$$

■

### 4.3.4 Globale ekstremalpunkt

Å finne globale ekstremalpunkter er generelt svært vanskelig.
Det finnes ingen generell måte å bestemme globale ekstremalpunkter på annet enn å tegne grafen og bruke "*stirremetoden*".

Men det finnes en klasse funksjoner hvor vi faktisk kan bestemme globale ekstramelpunkter.
Det gjelder for konvekse og konkave funksjoner.

I dette kapitlet skal vi definere hva som menes med konkave og konvekse funksjoner.
Deretter skal vi preseneter noen læresetningen angående globale ekstremalpunkter for konkave og konvekse funksjoner.

**Definisjon 4.3.3 — konveks**

Gitt to punkter $x_1$ og $x_2$.
Korden (linjen) mellom $x_1$ og $x_2$ er da definert ved:

$$ax_1 + (1-a)x_2 \tag{4.187}$$

hvor $0 \leq a \leq 1$. En funksjon er konveks dersom

$$f\big(ax_1 + (1-a)x_2\big) \leq af(x_1) + (1-a)f(x_2) \tag{4.188}$$

**Definisjon 4.3.4 — konkav**

Gitt to punkter $x_1$ og $x_2$.
Korden (linjen) mellom $x_1$ og $x_2$ er da definert ved:

$$ax_1 + (1-a)x_2 \tag{4.189}$$

hvor $0 \leq a \leq 1$. En funksjon er konkav dersom

$$f\big(ax_1 + (1-a)x_2\big) \geq af(x_1) + (1-a)f(x_2) \tag{4.190}$$

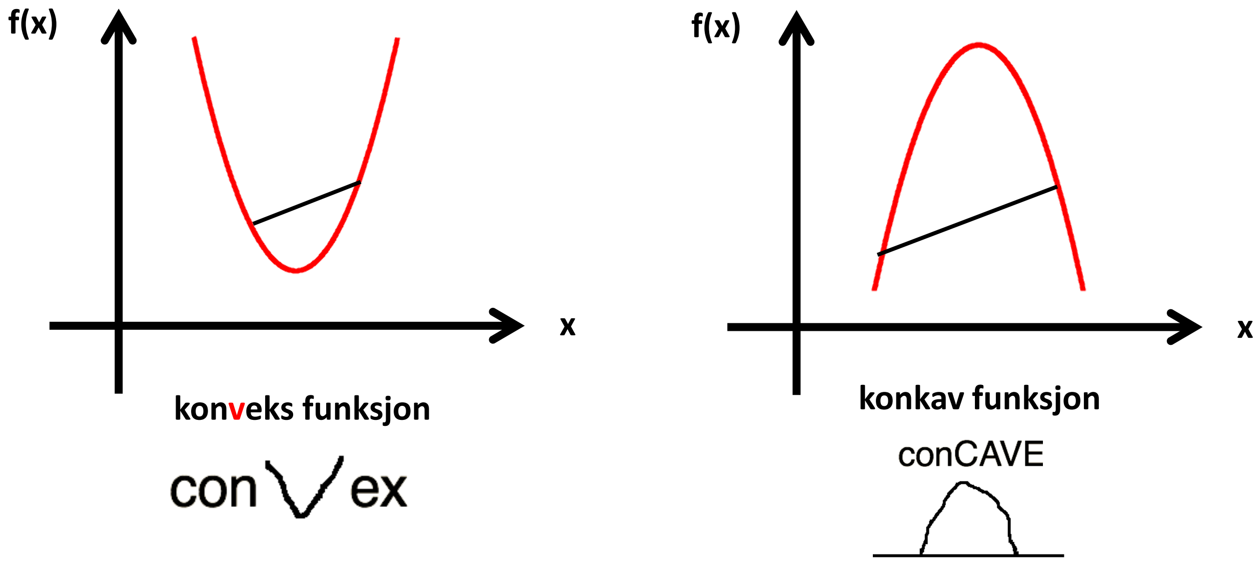
Definisjonenen på forrige side er litt teknisk og vanskelig å forstå.
Derfor formulerer vi dem med ord sammen med en figur:

**Definisjon 4.3.5 — konveks, med ord**

Funksjonen $f(x)$ kalles *konveks* (på et intervall) dersom korden mellom to vilkårlige punkter på grafen alltid ligger på eller over grafen til $f(x)$.

**Definisjon 4.3.6 — konkav, med ord**

Funksjonen $f(x)$ kalles *konkav* (på et intervall) dersom korden mellom to vilkårlige punkter på grafen alltid ligger på eller under grafen til $f(x)$.




Figur 4.18: En konveks og en konkav funksjon.

**Setning 4.3.4 — *Globalt* minimum**

Anta at $f(x)$ er en konveks funksjon.

Dersom $x = c$ er et lokalt minimum $\left(\frac{d\,f(x)}{dx} = 0\right)$ så er $x = c$ også et globalt minimum.

Anta at $f(x)$ er en konkav funksjon.

Dersom $x = c$ er et lokalt maksimum $\left(\frac{d\,f(x)}{dx} = 0\right)$ så er $x = c$ også et globalt maksimum.

**Setning 4.3.5 — *Globalt* minimum**

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0 \;\; \text{(positiv eller null)} \;\; \text{for alle } x \quad \Rightarrow \quad f(x) \;\; \text{er konveks} \tag{4.191}$$

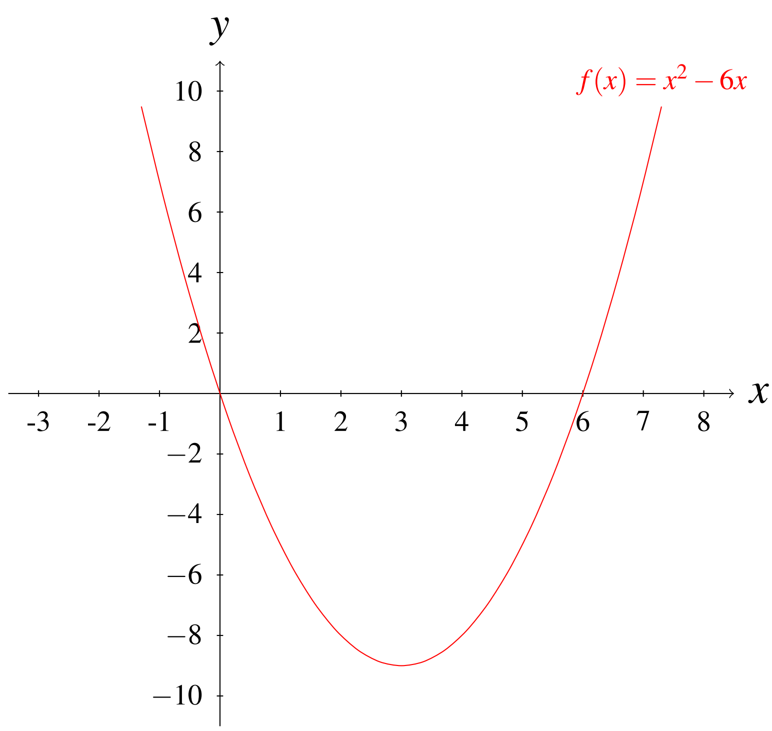
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0 \;\; \text{(negativ eller null)} \;\; \text{for alle } x \quad \Rightarrow \quad f(x) \;\; \text{er konkav} \tag{4.192}$$

**■ Eksempel 4.12 — 1. og 2. derivasjonstesten**

Gitt funksjonen:

$$f(x) = x^2 - 6 \tag{4.193}$$

Finn eventuelle ekstremalpunkt.
Angi hva slags type ekstremalpunkt det er snakk om.




Figur 4.19: Funksjonen $f(x) = x^2 - 6x$.

Løsning:

1. derivasjonstesten:

Mulige kandidater til lokale ekstremalpunkt er bestemt av $\frac{df(x)}{dx} = 0$:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \tag{4.194}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 6x\right) = 0 \tag{4.195}$$

$$\Updownarrow$$

$$2x - 6 = 0 \tag{4.196}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 3 \tag{4.197}$$

som er en kandidat til et ekstremalpunkt.

2. derivasjonstesten:

Vi bruker deretter 2. derivasjonstesten til å bestemme hva slags ekstremalpunkt det er.
Siden

$$\frac{d^2 f(x)}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 - 6x\right) = 2 \quad \text{(positiv)} \tag{4.198}$$

altså den 2. deriverte av $f(x)$ er positiv for $x = 3$. Fra lign.(4.163), dvs. 2. derivasjonstesten, så vet vi at $x = 3$ er et lokalt minimum.

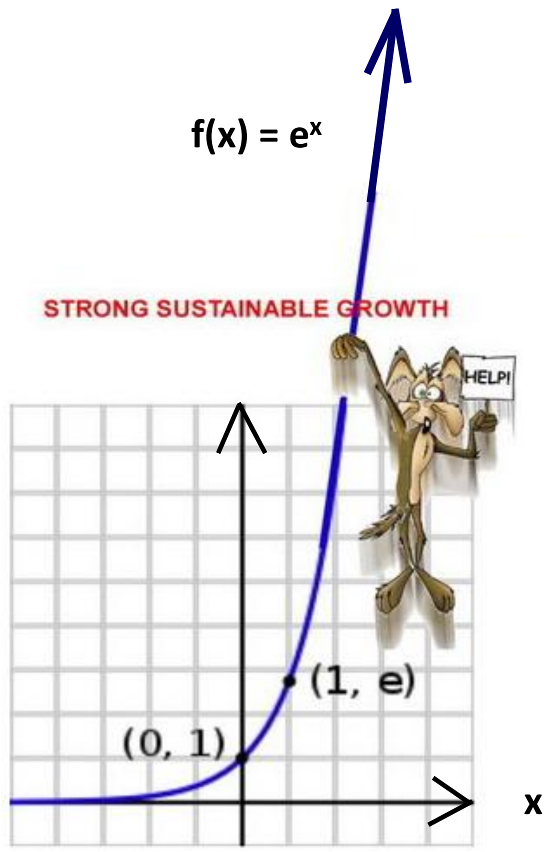
Setning 1 og 2: ( se side 245 )

Men $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ er ikke bare positiv for $x = 3$, den er positiv for alle $x$.
Da vet vi fra setning 2, se lign.(4.191), at $f(x)$ er konveks.

Men siden $f(x)$ er konveks så vet vi fra setning 1 på side 245, at det lokale minimumet $x = 3$ også er et globalt minimum.

∎

# 5. Eksponential- og logaritmefunksjoner




Figur 5.1: Eksponentiell vekst.

## 5.1 Eksponentialfunksjonen

**■ Eksempel 5.1 — motiverende eksempel , renteformelen , årlig kreditering**

Anta at vi setter $K(0)$ NOK i banken, dvs. innskudd $K(0)$, ved år 0.
Anta videre at renten er $r$ og at renten krediteres èn gang i året, ved årets slutt.

Finn et uttrykk for hvor mye kapitalen $K(n)$ er etter $n$ år.

Løsning:

0) Kapital etter 0 år: ( kun innskudd )

$$K(0) \tag{5.1}$$

1) Kapital etter 1 år:

$$K(1) = K(0) + \overbrace{\text{rente}}^{K(0)r} \tag{5.2}$$

$$= K(0) + K(0)r \;=\; K(0)\big(1+r\big) = K(0)\big(1+r\big)^1 \tag{5.3}$$

2) Kapital etter 2 år:

$$K(2) = K(1) + \overbrace{\text{rente}}^{K(1)r} \tag{5.4}$$

$$= K(1) + K(1)r = K(1)\big(1+r\big) = K(0)(1+r)\big(1+r\big) = K(0)\big(1+r\big)^2 \tag{5.5}$$

Figur 5.2: Rente.

3) Kapital etter 3 år:

$$K(3) = K(2) + \overbrace{\text{rente}}^{K(2)r} \tag{5.6}$$

$$= K(2) + K(2)r = K(2)\big(1+r\big) = K(0)(1+r)^2\big(1+r\big) = K(0)\big(1+r\big)^3 \tag{5.7}$$

.
.
.
.

$n$) Kapital etter $n$ år: [1]

$$K(n) = K(0)\big(1+r\big)^n \tag{5.8}$$

Lign.(5.8) kalles ofte ”renteformelen”:

$$K(n) = K(0)(1+r)^n \tag{5.9}$$

hvor

$$K(n) = \text{kapitalen etter } n \text{ år (eller } n \text{ terminer)} \tag{5.10}$$

$$K(0) = \text{startkapital, dvs. kapital etter 0 år (eller 0 terminer):} \quad \text{nåverdi} \tag{5.11}$$

$$r = \frac{p}{100} = \text{rente med } p\ \% \text{ per termin} \tag{5.12}$$

$$n = \text{antall år (eller antall terminer)} \tag{5.13}$$

[1] For å vise dette må man bruke induksjon, men detaljene rundt dette tar vi ikke med her.

**Alternativ**: ( alternativ måte å skrive renteformelen i lign.(5.9) på )

Faktoren $1+r$ i lign.(5.9) kalles vekstfaktoren. Hvis vi setter

$$a = 1 + r \tag{5.14}$$

så kan vi skrive lign.(5.9) på en mer kompakt form:

$$K(n) = K(0)a^n \tag{5.15}$$

hvor

$$a = 1 + r = \text{vekstfaktor} \tag{5.16}$$

$$n = \text{antall år} \tag{5.17}$$

■

**■ Eksempel 5.2 — renteformelen , kontinuerlig kreditering**

Dersom banken krediterer innskuddet kontinuerlig,
dvs. etter en vilkårlig tid $t$ hvor $t$ er et reelt tall $t \in \mathbb{R}$,
hva blir da kapitalen $K(t)$?

Løsning:

Generalisering fra renteformelen i lign.(5.9) rett frem:

$$K(t) = K(0)\, a^t \tag{5.18}$$

hvor

$$a = 1 + r = \text{vekstfaktor} \tag{5.19}$$

$$t = \text{antall år, hvor } t \in \mathbb{R} \tag{5.20}$$

■

K Funksjonen $K(t)$ kalles "*eksponentialfunksjonen*" med grunntall $a$ og eksponent $t$. [2]

**Definisjon 5.1.1** **Definisjon**: ( eksponentialfunksjon )

Eksponentialfunksjon $f(x)$ er definert ved:

$$f(x) = a^x \tag{5.21}$$

hvor $x$ = eksponent, $x \in R$, $a =$ grunntall og $a > 0$.

[2] Siden funksjonen modellerer eksponentiell vekst kalles grunntallet også gjerne for vekstfaktoren. Andre eksempel på eksponentiell vekst er befolkningsvekst, utbredelse av virus og kjernereakasjoner.

**■ Eksempel 5.3 — eksponentialfunksjon**

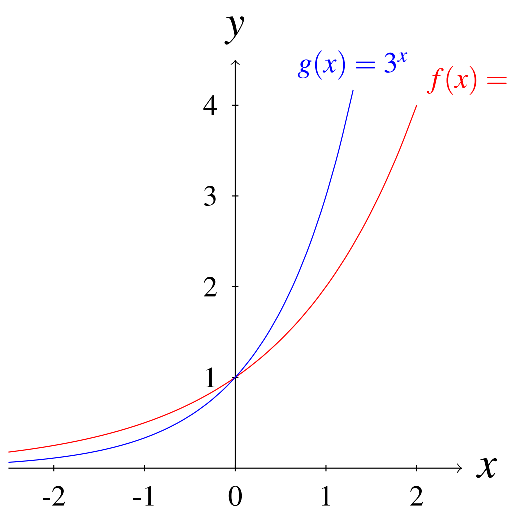
Plott eksponentialfunksjonene for $-2 \leq x \leq 2$:

$$f(x) = 2^x \qquad (a = 2) \tag{5.22}$$

$$g(x) = 3^x \qquad (a = 3) \tag{5.23}$$

Løsning:

Lag først en verditabell.
Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:




Figur 5.3: Eksponentialfunksjonene $f(x) = 2^x$ og $g(x) = 3^x$.

■

**■ Eksempel 5.4 — eksponentialfunksjon vs kvadratisk funksjon**

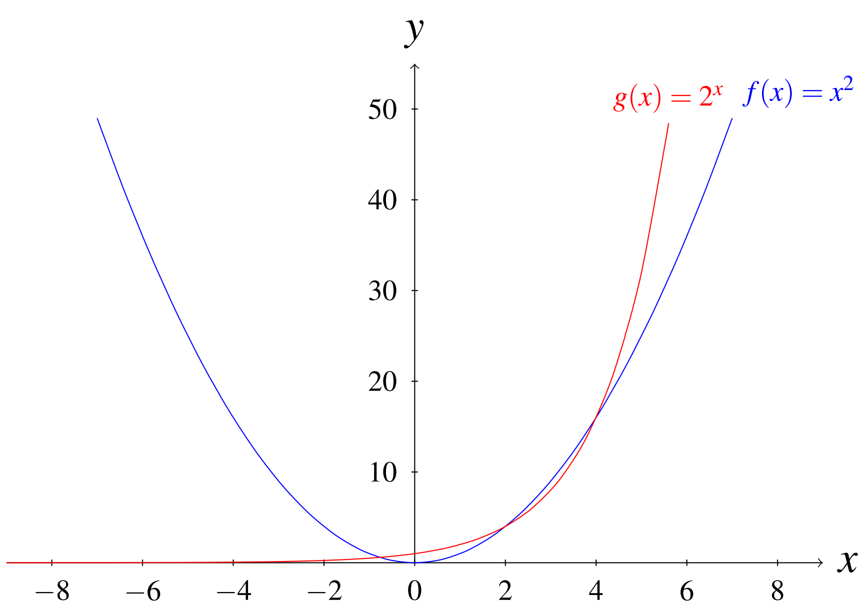
Plott funksjonene for $-8 \leq x \leq 8$:

$$f(x)=2^x \qquad \text{(eksponentialfunksjon)} \tag{5.24}$$

$$g(x)=x^2 \qquad \text{(2. gradsfunksjon )} \tag{5.25}$$

Løsning:

Lag først en verditabell.
Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:




Figur 5.4: Eksponentialfunksjoenen $f(x) = 2^x$ og 2. gradsfunksjonen $g(x) = x^2$.

■

## 5.2 Tallet $e$, Eulers tall

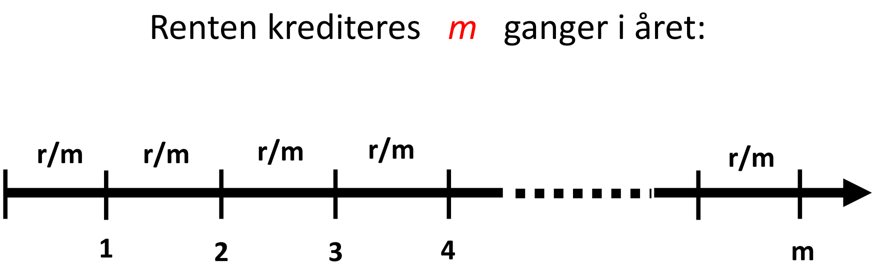
**■ Eksempel 5.5 — renteformelen , årlig kreditering , motiverende eksempel**

Anta at vi setter $K(0) = 1$ NOK i banken, dvs. innskudd på 1 krone.
For enkelhets skyld, la oss anta videre at renten er $r = \frac{100\ \%}{100} = 1$ og at renten krediteres $m$ ganger i året, og da slik at renten justeres til $r/m$ for hver av de $m$ periodene, se figur 5.5.

Hvor mye kapital $K_m(1)$ har vi etter ett år dersom renten krediteres $m$ ganger i løpet av året?

Hva blir kapitalen $K_\infty(1)$ i grensen når $m \to \infty$?

Foto: Lasse Tomren


Figur 5.5: Rente.

i) Renteformelen i lign.(5.8) sier at dersom man setter inn $K(0)$ i banken ved starten av år 1 så vil kapitalen etter $t$ år vokse til:

$$K_1(1) = K(0)\left(1+r\right)^1 = 1 \cdot (1+1)^1 \text{ NOK} = 2 \text{ NOK} \tag{5.26}$$

ii) Dersom renten krediteres $m = 2$ ganger i året så blir renten halvert for hver periode, dvs. $r/2 = 1/2$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_2(1)$ vokser da til:

$$K_2(1) = K(0)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \text{ NOK} = 2.25 \text{ NOK} \tag{5.27}$$

iii) Dersom renten krediteres $m = 3$ ganger i året så blir renten justeres for hver periode, til $r/3 = 1/3$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_3(1)$ vokser da til:

$$K_3(1) = K(0)\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \text{ NOK} = 2.37 \text{ NOK} \tag{5.28}$$

iv) Dersom renten krediteres $m = 4$ ganger i året så blir renten justeres for hver periode, til $r/4 = 1/4$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_4(1)$ vokser da til:

$$K_4(1) = K(0)\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \text{ NOK} = 2.44 \text{ NOK} \tag{5.29}$$

v) Dersom renten krediteres $m$ ganger i året så blir renten justeres for hver periode, til $r/m = 1/m$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_m(1)$ vokser da til:

$$K_m(1) = K(0)\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \text{ NOK} \tag{5.30}$$

$$\vdots$$

vi) I grensen når $m \to \infty$ blir dette eksponentialfunkjonen:

$$K_\infty(t) = K(0) \underbrace{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}_{\overset{\text{lign.(5.33)}}{=} e} = 2.718281828\ldots\text{NOK} \tag{5.31}$$

hvor

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \underbrace{2.718281828\ldots}_{\text{Eulers tall } e} \tag{5.32}$$

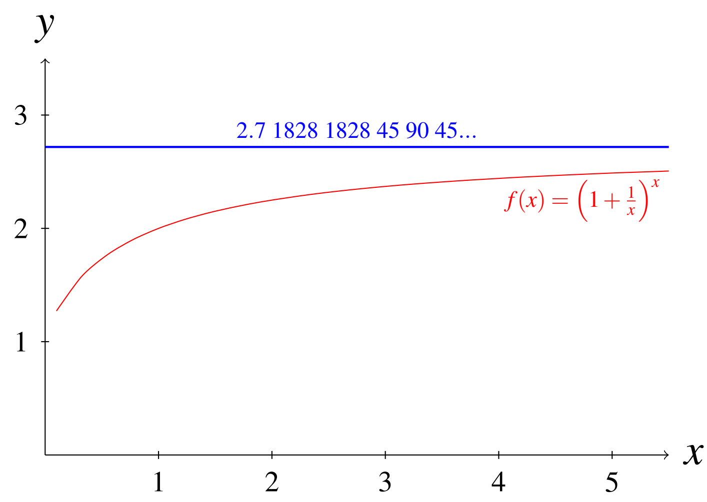
∎

**Setning 5.2.1 — Eulers tall $e$**

Eulers tall $e$ kan bestemmes av en grenseverdi. Denne grenseverdien er:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{5.33}$$

hvor $e = 2.7\,1828\,1828\,45\,90\,45\ldots$.




Figur 5.6: Funksjonen $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

### 5.2.1 Eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$

**Definisjon 5.2.1 — eksponentialfunksjon $\overbrace{\textbf{m/grunntall } e}^{\textbf{NB!}}$**

Eksponentialfunksjon $f(x)$ med grunntall $e$ er definert ved:

$$f(x) = e^x \tag{5.34}$$

hvor $x$ = eksponent, $x \in R$ og grunntall $e = 2.7\,1828\,1828\,45\,90\,45\ldots$.

La oss illustrere noen av egenskapene til eksponentialfunksjonen $f(x)$ ved å plotte den sammen med andre eksponentialfunksjoner.

**■ Eksempel 5.6 — eksponentialfunksjon**

Plott eksponentialfunksjonene

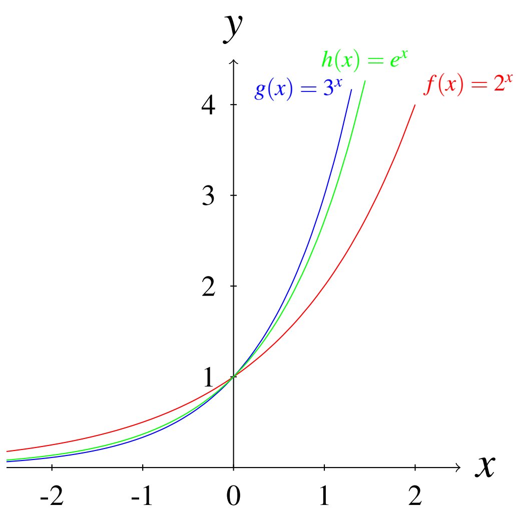
$$f(x) = 2^x \qquad (a = 2) \tag{5.35}$$

$$h(x) = e^x \qquad (a = e = 2.718281828459045\ldots) \tag{5.36}$$

$$g(x) = 3^x \qquad (a = 3) \tag{5.37}$$

Løsning:

Lag først en verditabell. Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:




Figur 5.7: Eksponentialfunksjonene $f(x) = 2^x$, $h(x) = e^x$ og $g(x) = 3^x$.

■

■ **Eksempel 5.7 — eksponentialfunksjon**

Plott eksponentialfunksjonen:

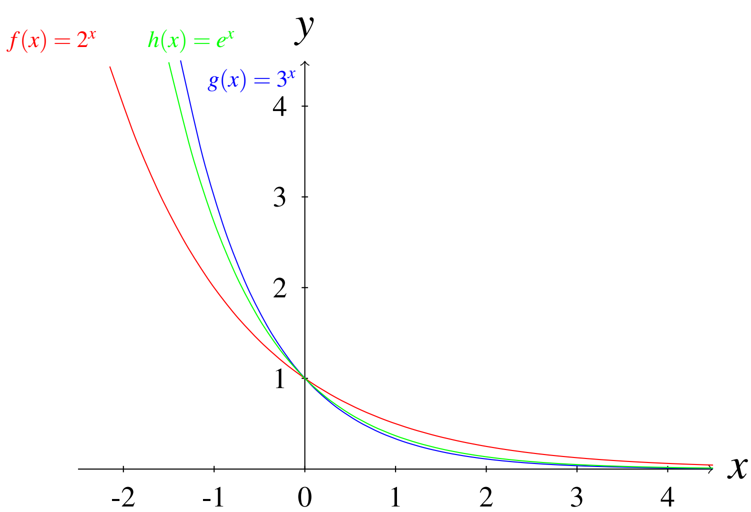
$$f(x)=2^{-x} \qquad (a=2) \tag{5.38}$$

$$h(x)=e^{-x} \qquad (a=e=2.718281828459045\ldots) \tag{5.39}$$

$$g(x)=3^{-x} \qquad (a=3) \tag{5.40}$$

Løsning:

Lag først en verditabell. Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:




Figur 5.8: Eksponentialfunksjonene $f(x)=2^{-x}$, $h(x)=e^{-x}$ og $g(x)=3^{-x}$.

■

### 5.2.2 Regneregler for $e^x$

Siden eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$ er bare et spesieltilfelle av potensfunksjonen $g(x) = a^x$, med $a = e = 2.718281828459045\ldots$ så gjelder samme potensregler som ble presentert på side 49: $(\, a \to e \,)$

**Setning 5.2.2 — regneregler for $e^x$**

La $x, y \in \mathbb{R}$ og $e = 2.718281828459045\ldots$.
Da gjelder:

$$e^x e^y = e^{x+y} \tag{5.41}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \tag{5.42}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^x e^{-y} \;=\; e^{x-y} \tag{5.43}$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \tag{5.44}$$

$$(e\,e)^x = e^x e^x \;= e^{2x} \tag{5.45}$$

$$\left(\frac{e}{e}\right)^x = \frac{e^x}{e^x} \;=\; 1 \tag{5.46}$$

og i tillegg:

$$e^0 = 1 \tag{5.47}$$

$$e^1 = e \tag{5.48}$$

### 5.2.3 Deriverte av $e^x$

Denne definisjonen i lign.(5.34), dvs.

$$f(x) = e^x \tag{5.49}$$

er motivert ut fra at faktoren foran eksp.-funksjonen til den deriverte er 1:

Vi bare oppgir her at: [3]

$$f(x) = 2^x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = 0.6931 \cdot 2^x \tag{5.50}$$

$$g(x) = 2.5^x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,g(x)}{dx} = 0.9163 \cdot 2.5^x \tag{5.51}$$

$$h(x) = 2.7^x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,h(x)}{dx} = 0.9933 \cdot 2.7^x \tag{5.52}$$

$$i(x) = (2.7182818....)^x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,i(x)}{dx} = 1.0000.... \cdot (2.7182818....)^x \tag{5.53}$$

$$j(x) = 3^x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,j(x)}{dx} = 1.0986 \cdot 3^x \tag{5.54}$$

Dette er så viktig at vi formulerer det i en egen setning.

**Setning 5.2.3 — eksponentialfunksjon $\overbrace{\text{m/grunntall } e}^{\text{NB!}}$**

Eksponentialfunksjon $f(x) = e^x$ er lik sin egen deriverte:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = e^x \tag{5.55}$$

hvor $x$ = eksponent, $x \in R$ og grunntall $e = 2.7\,1828\,1828\,45\,90\,45\,....$

[3] Man an vise lign.(5.50)-(5.54) via definisjonen av den deriverte, men detaljene skal vi ikke gå inn på her.

### ■ Eksempel 5.8 — eksponentialfunksjon / derivasjon

Gitt funksjonen:

$$f(x) = e^{3x-2} \tag{5.56}$$

Finn $\frac{d\,f(x)}{dx}$.

Løsning:

Her bruker man kjerneregelen som vi lærte om på side 228, lign.(4.136): $\quad ( u = 3x - 2 )$

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{3x-2}\right) \qquad \text{deriverer} \tag{5.57}$$

$$\overset{\text{lign.(4.136)}}{=} \frac{d}{du}\left(e^{u}\right) \cdot \frac{du}{dx} \qquad \text{kjerneregelen} \tag{5.58}$$

$$= \underbrace{\frac{d}{du}\left(e^{u}\right)}_{=\,e^{u}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left(3x-2\right)}_{=\,3} \qquad \text{kjerneregelen} \tag{5.59}$$

$$= e^{u} \cdot 3 \tag{5.60}$$

$$= 3e^{3x-2} \tag{5.61}$$

■

**■ Eksempel 5.9 — eksponentialfunksjon , derivasjon [4]**

La $p$ være prisen 0.5 liter ananasbrus.
La oss se på en avgrenset tidsperiode, f.eks. en dag. Anta at sammenhengen mellom etterspørsel $x$ av brus og prisen $p$, for en gitt dag, er:

$$x(p) = x_0 e^{-ap} \tag{5.62}$$

hvor [5] $a = 0.08$ 1/NOK og $x_0 = 10\,000$ halvlitere. Anta videre, for en gitt dag, at sammenhengen mellom total kostnad $TK(p)$ og pris $p$ er:

$$TK(p) = c\,x(p) \tag{5.63}$$

hvor $c = 2$ NOK er gjennomsnittkostanden per produsert brus for Oskar Sylte.



Figur 5.9: Ananasbrus.

[4]Tema hentet fra blant annet *BØK105 Finansregnskap 1*.
[5]Eksponenten $a\,p$ i en eksponentialfunksjon må være dimensjonsløs. Dermed må koeffisienten $a$ ha dimensjon 1/NOK siden prisen $p$ har dimensjon NOK.

**a**) Finn et uttrykk for totalt resultat $TR(p)$, $TI(x)$ og $TK(x)$ sfa. prisen $p$.

**b**) Plott $TR(p)$, $TI(p)$ og $TK(p)$ sfa. prisen $p$ i intervallet $0 \leq p \leq 30$ i en og samme figur.

**c**) Hvilken pris bør settes på brusen for å maksimere *total inntekt* $TI(p)$?
Hva er inntekten $TI(p)$ da?

**d**) Hvilken pris bør settes på brusen for å maksimere *totalt resultat* $TR(p)$?
Hva er resultatet $TR(p)$ da?

**e**) Kommenter resultatet i oppgave **c** og **d**.

Løsning:

**a**) Totalt resultat $TR(p)$ sfa. prisen $p$:

$$TR(p) = TI(p) - TK(p) \qquad \text{totalt resultat} \tag{5.64}$$

$$= px(p) \; - \; cx(p) \tag{5.65}$$

$$= x(p)\big(p - c\big) \qquad \text{faktorisering} \tag{5.66}$$

$$= x_0\, e^{-a\,p}\Big(p \; - \; c\Big) \tag{5.67}$$

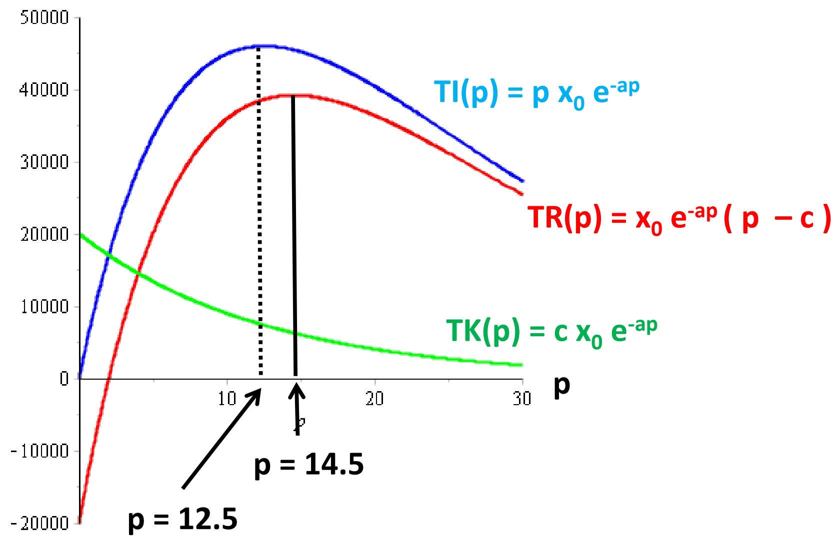
Totalt resultat $TI(p)$ sfa $p$: ( bruker lign.(5.62)) som er oppgitt i oppgaven )

$$TI(p) = px(p) = px_0 e^{-ap} \tag{5.68}$$

Totalt resultat $TK(p)$ sfa $p$: ( bruker lign.(5.62)) som er oppgitt i oppgaven )

$$TK(p) = cx(p) = cx_0 e^{-ap} \tag{5.69}$$

**b**) Plotter $TR(p)$, $TI(p)$ og $TK(p)$ i intervallet $0 \le p \le 30$:




Figur 5.10: Funksjonene $TR(p)$, $TI(p)$ og $TK(p)$ sfa. prisen $p$.

**c)** *Inntekten* er maksimal når stigningstallet er er null: [6]

$$\text{maksimuminntekt } TI_{\max} \tag{5.70}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{stigningstallet til } TI(p) \text{ er lik null} \tag{5.71}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{dTI(p)}{dp} = 0 \tag{5.72}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{d}{dp}\left(p \cdot \cancel{x_0} e^{-ap}\right) = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{x_0} \tag{5.73}$$
$$\Updownarrow$$
$$1 \cdot \cancel{e^{-ap}} + p \cdot \cancel{e^{-ap}}(-a) = 0 \qquad \Big/ \cdot e^{ap} \tag{5.74}$$
$$\Updownarrow$$
$$1 + p(-a) = 0 \tag{5.75}$$
$$\Updownarrow$$
$$p(-a) = -1 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{(-a)} \tag{5.76}$$
$$\Updownarrow$$
$$p = \frac{1}{a} \tag{5.77}$$
$$\Updownarrow$$
$$p = \frac{1}{0.08} \text{ NOK} = 12.5 \text{ NOK} \tag{5.78}$$

*Inntekten* blir største dersom brusen prises til 12.5 NOK.

Den totale inntekten $TI(p) = px(p)$ per dag blir da:

$$TI(12.5) = 12.5 \cdot 10\,000\, e^{-0.08 \cdot 12.5} \text{ NOK} = 45\,985 \text{ NOK} \tag{5.79}$$

[6] For å vise at man har et maksimum kan man f.eks. gjennomføre 2. derivasjonstesten. Vi hopper over det her. Ut fra figur 5.10 ser vi at det dreier seg om et maksimum og ikke et minimum.

**d**) *Resultatet* er maksimalt når stigningstallet er er null: [7]

$$\text{maksimumresultat } TR_{\max} \tag{5.80}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{stigningstallet til } TR(p) \text{ er lik null} \tag{5.81}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d\,TR(p)}{dp} = 0 \tag{5.82}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dp}\Big(\underbrace{x_0\,e^{-ap}(p-c)}_{\text{produkt } u\cdot v}\Big) = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{x_0} \tag{5.83}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dp}\Big(\underbrace{e^{-ap}(p-c)}_{\text{produkt } u\cdot v}\Big) = 0 \tag{5.84}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{e^{-ap}}(-a)(p-c) + \cancel{e^{-ap}} = 0 \qquad \Big/ \cdot e^{ap} \tag{5.85}$$

$$\Updownarrow$$

$$(-a)(p\cdot x_0 - TK_0) + 1 = 0 \tag{5.86}$$

$$\Updownarrow$$

$$(-a)(p-c) = -1 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{(-a)} \tag{5.87}$$

$$\Updownarrow$$

$$p = \frac{1}{a} + c \tag{5.88}$$

$$\Updownarrow$$

$$p = \left(\frac{1}{0.08} + 2\right) \text{NOK} = 14.5 \;\text{ NOK} \tag{5.89}$$

Det totale resultatet per dag blir da: ( bruker lign.(5.66) )

$$TR(14.5) \overset{\text{lign.(5.66)}}{=} x_0\,e^{-ap}\Big(p \;-\; c\Big) \tag{5.90}$$

$$= 10\,000\,e^{-0.08\cdot 14.5}\Big(14.5 \;-\; 2\Big)\,\text{NOK} = 39\,186 \;\text{ NOK} \tag{5.91}$$

[7] For å vise at man har et maksimum kan man f.eks. gjennomføre 2. derivasjonstesten. Vi hopper over det her. Ut fra figur 5.10 ser vi at det dreier seg om et maksimum og ikke et minimum.

**e**) Resultatet fra oppgave **c** og **d** viser at:

$$\underbrace{\text{maksimum inntekt}}_{p\,=\,12.5\text{ NOK}} \text{ er } \textbf{ikke} \text{ sammenfallende med } \underbrace{\text{maksimum resultat}}_{p\,=\,14.5\text{ NOK}} \tag{5.92}$$

■

K Konklusjon:

$$\boxed{\text{minimum enhetskostnad er } \textbf{ikke} \text{ sammenfallende med maksimum resultat} \quad (5.93)}$$

## 5.3 Logaritmer

Logaritmer er **inverse** funksjoner til eksponentialfunksjoner.

### 5.3.1 Definisjon

La oss bruke kalkulatoren til å regne ut følgende eksponenter:

$$10^0 = 1 \tag{5.94}$$

$$10^{0.3010} = 2 \tag{5.95}$$

$$10^{0.4770} = 3 \tag{5.96}$$

$$10^{0.6021} = 4 \tag{5.97}$$

$$10^{0.6990} = 5 \tag{5.98}$$

Av disse kalkulatorberegningene ser vi at f.eks. 0.4770 er det tallet vi må opphøye 10 i, for å få tallet 3. Tallet 0.4770 kalles logaritmen til 3. Dette tallet 0.4770 har fått en egen notasjon, nemlig $\log(3) = 0.4770$. Tilsvarende:

$$10^{0} = 10^{\log 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \log 1 = 0 \tag{5.99}$$

$$10^{0.3010} = 10^{\log 2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \log 2 = 0.3010 \tag{5.100}$$

$$10^{0.4770} = 10^{\log 3} = 3 \quad \Rightarrow \quad \log 3 = 0.4770 \tag{5.101}$$

$$10^{0.6021} = 10^{\log 4} = 4 \quad \Rightarrow \quad \log 4 = 0.6021 \tag{5.102}$$

$$10^{0.6990} = 10^{\log 5} = 5 \quad \Rightarrow \quad \log 5 = 0.6990 \tag{5.103}$$

**Definisjon 5.3.1 — logaritmen m/10 som grunntall** [a]

Logaritmen til et tall $x$ er den eksponenten vi må opphøye 10 i for å få $x$:

$$10^{\log x} = x \tag{5.104}$$

altså $\log(x)$ = logaritmen = $\underbrace{\text{det tallet vi må opphøye 10 i}}_{\text{NB!}}$ for å få $x$.

[a] Kalles også den Briggske logaritme.

Ut fra lign.(5.104) ser man at $\log x$ er den inverse funksjonen av $10^x$.

La oss bruke kalkulatoren til å regne ut følgende eksponenter:

$$e^0 = 1 \tag{5.105}$$

$$e^{0.6931} = 2 \tag{5.106}$$

$$e^{1.0986} = 3 \tag{5.107}$$

$$e^{1.3863} = 4 \tag{5.108}$$

$$e^{1.6094} = 5 \tag{5.109}$$

Av disse kalkulatorberegningene ser vi at f.eks. 1.0986 er det tallet vi må opphøye Eulers tall $e$ i, for å få tallet 3. Tallet 1.0986 kalles den naturlige logaritmen til 3. Dette tallet 1.0986 har fått en egen notasjon, nemlig $\ln(3) = 1.0986$. Tilsvarende:

$$e^{0} = e^{\ln 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 1 = 0 \tag{5.110}$$

$$e^{0.6931} = e^{\ln 2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = 0.6931 \tag{5.111}$$

$$e^{1.0986} = e^{\ln 3} = 3 \quad \Rightarrow \quad \ln 3 = 1.0986 \tag{5.112}$$

$$e^{1.3863} = e^{\ln 4} = 4 \quad \Rightarrow \quad \ln 4 = 1.3863 \tag{5.113}$$

$$e^{1.6094} = e^{\ln 5} = 5 \quad \Rightarrow \quad \ln 5 = 1.6094 \tag{5.114}$$

**Definisjon 5.3.2 — logaritmen m/$e$ som grunntall**

Logaritmen til et tall $x$ er den eksponenten vi må opphøye Eulers tall $e$ i for å få $x$:

$$e^{\ln x} = x \tag{5.115}$$

altså $\ln(x)$ = den naturlige logaritmen = $\underbrace{\text{det tallet vi må opphøye } e \text{ i}}_{\text{NB!}}$ for å få $x$.

K Ut fra lign.(5.115) ser man at $\ln x$ er den inverse funksjonen av $e^x$.

### 5.3.2 Regneregler

Ved å bruke definisjonen av den naturlige logaritmen sammen med regnereglene for potenser fra side 49 så innser man:

$$e^{\ln 2+\ln 3} = e^{\ln 2}e^{\ln 3} = 2\cdot 3 = 6 = e^{\ln 6} = e^{\ln(2\cdot 3)} \tag{5.116}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(2\cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 \tag{5.117}$$

$$e^{\ln 2-\ln 3} = e^{\ln 2}e^{-\ln 3} = \frac{2}{3} = e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \tag{5.118}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3 \tag{5.119}$$

$$e^{\ln(2^3)} = 2^3 = (2)^3 = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = (e^{\ln 2})^3 \overset{\text{lign.}(1.222)}{=} e^{3\cdot\ln 2} \tag{5.120}$$

$$\Rightarrow \quad \ln 2^3 = 3\cdot\ln 2 \tag{5.121}$$

Dette er regneregler for logaritmen som er svært viktige og som vi skal bruke mye i øvinger.

La oss skrive de mer generelt:

**Setning 5.3.1 — regneregler for ln-funksjoner**

La $a$ og $b$ være positive reelle tall, dvs. $a, b > 0$.
Da gjelder:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \tag{5.122}$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \tag{5.123}$$

$$\ln(a^p) = p \ln a \tag{5.124}$$

**Setning 5.3.2 — regneregler for ln-funksjoner**

For logaritmefunksjonen $\ln(x)$ gjelder:

$$\ln 1 = 0 \tag{5.125}$$

$$\ln e = 1 \tag{5.126}$$

$$\ln e^x = x \tag{5.127}$$

$$e^{\ln x} = x \quad , \quad x > 0 \tag{5.128}$$

Akkurat de samme regnereglene gjelder for dersom man har grunntall 10 istedet for Eulers tall $e$. Begrunnelsen er helt analog som for tilfellet på forrige side. Derfor skriver vi bare opp reglene:

**Setning 5.3.3 — regneregler for log-funksjoner**

La $a$ og $b$ være positive reelle tall, dvs. $a, b > 0$.
Da gjelder:

$$\log(ab) = \log a + \log b \tag{5.129}$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \tag{5.130}$$

$$\log(a^p) = p \log a \tag{5.131}$$

**Setning 5.3.4 — regneregler for log-funksjoner**

For logaritmefunksjonen $\log(x)$ gjelder:

$$\log 1 = 0 \tag{5.132}$$

$$\log 10 = 1 \tag{5.133}$$

$$\log 10^x = x \tag{5.134}$$

$$10^{\log x} = x \quad , \quad x > 0 \tag{5.135}$$

K Det finnes *ingen enkle* regler for $\log(a+b)$ eller $\log(a-b)$.

K $\log x$ er bare definert for positive verdier av $x$.

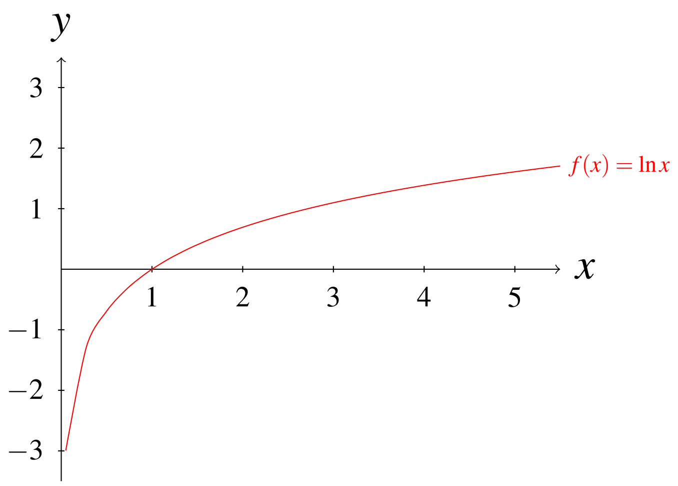
### ■ Eksempel 5.10 — ln-funksjon

Plott funksjonen

$$f(x) = \ln x \tag{5.136}$$

Løsning:

Ved å lage verditabell og deretter plotte finner man følgende graf:




Figur 5.11: Logaritmefunksjonen $f(x) = \ln x$.

■

K Egenskaper til ln-funksjonen: $(\, f(x) = \ln x \,)$

- Definisjonsmengde til $f(x)$: $D_f = \langle 0, \infty \rangle$
- Verdimengde til $f(x)$: $V_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
- $\ln x$ er strengt voksende i hele $D_f$
- Grafen skjærer $x$-aksen i $x = 1$ siden $\ln 1 = 0$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ og $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

■ **Eksempel 5.11 — logaritme** , *BØK300 Finansiell- og økonomisk styring*

Kapitalen $K_0$ plasseres i Sparebank 1 SMN ved år null.
Renten er $r = 6\,\%$, dvs. $r = \frac{6}{100} = 0.06$.

Hvor lang tid tar det før kapitalen fordobles?


Figur 5.12: Kapitalen $K_0$ i bank.

Løsning:

La $n$ være den tiden det tar før kapitalen $K_0$ fordobles til $K_n = 2K_0$.

Når man skal regne på rente med rentesrente slik som i denne oppgaven så brukes *renteformelen*. Renteformelen skal vi lære mer om i kapittel 6. Her, i denne oppgaven, skal vi bare ta formelen for gitt. Oppgaven består i å finne $n$.

Anta at det tar $n$ år før kapitalen dobles, dvs. $K_n = 2K_0$. Dermed:

$$K_n = K_0(1+r)^n \qquad \text{renteformelen} \tag{5.137}$$

$$\Updownarrow$$

$$2K_0 = K_0(1+r)^n \tag{5.138}$$

$$\Updownarrow$$

$$2K_0 = K_0(1+r)^n \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{K_0} \tag{5.139}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2\cancel{K_0}}{\cancel{K_0}} = (1+r)^n \qquad \text{kansellering} \tag{5.140}$$

$$\Updownarrow$$

$$2 = (1+r)^n \qquad \text{ta ln (eller log) på hver side av ligningen} \tag{5.141}$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln 2 = \ln(1+r)^n \qquad \text{bruker regneregel i lign.(5.124)} \tag{5.142}$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln 2 = n\ln(1+r) \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \tag{5.143}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\ln 2}{\ln(1+r)} = n \qquad \text{løser mhp. } x \text{ alene} \tag{5.144}$$

$$\Updownarrow$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} = \frac{\ln 2}{\ln(1+0.06)} \approx 11.9 \tag{5.145}$$

Kapitalen dobles etter 12 år med 6 % rente.

■

## 5.4 Deriverte av $\ln x$

**Setning 5.4.1 — deriverte av $\ln x$**

Den deriverte av $f(x) = \ln x$ er:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{1}{x} \tag{5.146}$$

*Bevis.* Fra definisjonen av lign.(5.115) har vi at:

$$e^{\ln(x)} = x \tag{5.147}$$

La oss derivere denne ligningen.
Den deriverte av høyre side av lign.(5.147) er 1. Vi deriver venstre side via kjerneregelen med kjernen $u(x) = \ln x$:

$$\underbrace{\frac{d}{du}\left(e^u\right)}_{=\,e^u}\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = 1 \qquad \text{kjerneregelen} \tag{5.148}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^u\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = 1 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{e^u} \tag{5.149}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \tag{5.150}$$

■

■ **Eksempel 5.12 — eksponentialfunksjon , derivasjon**

Gitt funksjonen:

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1) \tag{5.151}$$

Finn $f'(x)$.

Løsning:

Her bruker man kjerneregelen som vi lærte om på side 228, lign.(4.136): $\quad ( \, u = x^2 + 1 \, )$

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} \qquad \text{deriverer} \tag{5.152}$$

$$= \frac{d}{dx}\Big( x - \ln(x^2+1) \Big) \qquad \text{Leibniz' notasjon} \tag{5.153}$$

$$\overset{\text{lign.(4.136)}}{=} 1 \; - \; \frac{d}{du}\Big( \ln u \Big) \frac{du}{dx} \qquad \text{kjerneregelen} \tag{5.154}$$

$$= 1 \; - \; \underbrace{\frac{d}{du}\Big( \ln u \Big)}_{=\,\frac{1}{u}} \underbrace{\frac{d}{dx}\Big( x^2 + 1 \Big)}_{=\,2x} \qquad \text{kjerneregelen} \tag{5.155}$$

$$= 1 \; - \; \frac{1}{u} 2x \tag{5.156}$$

$$= 1 \; - \; \frac{2x}{x^2+1} \tag{5.157}$$

■

■ **Eksempel 5.13 — logaritme , derivasjon , lokale ekstremalpunkt**

Gitt funksjonen:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \tag{5.158}$$

hvor $D_f = \langle 0,1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$ fordi $\ln 1 = 0$. (Husk: det er ikke lov å dele på 0).

**a**) Regn ut $f'(x)$.

b) Tegn grafen $f(x)$ og marker på figuren når $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$ via et fortegnsskjema.

c) Marker på figuren ekstremalpunktet til $f(x)$. Er det lokalt eller globalt?

d) Marker asymptoten til $f(x)$ på figuren.

Løsning:

**a**) Deriverte: ( derivasjon av en brøk, se lign.(**??**) )

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right) \qquad \text{deriverer} \tag{5.159}$$

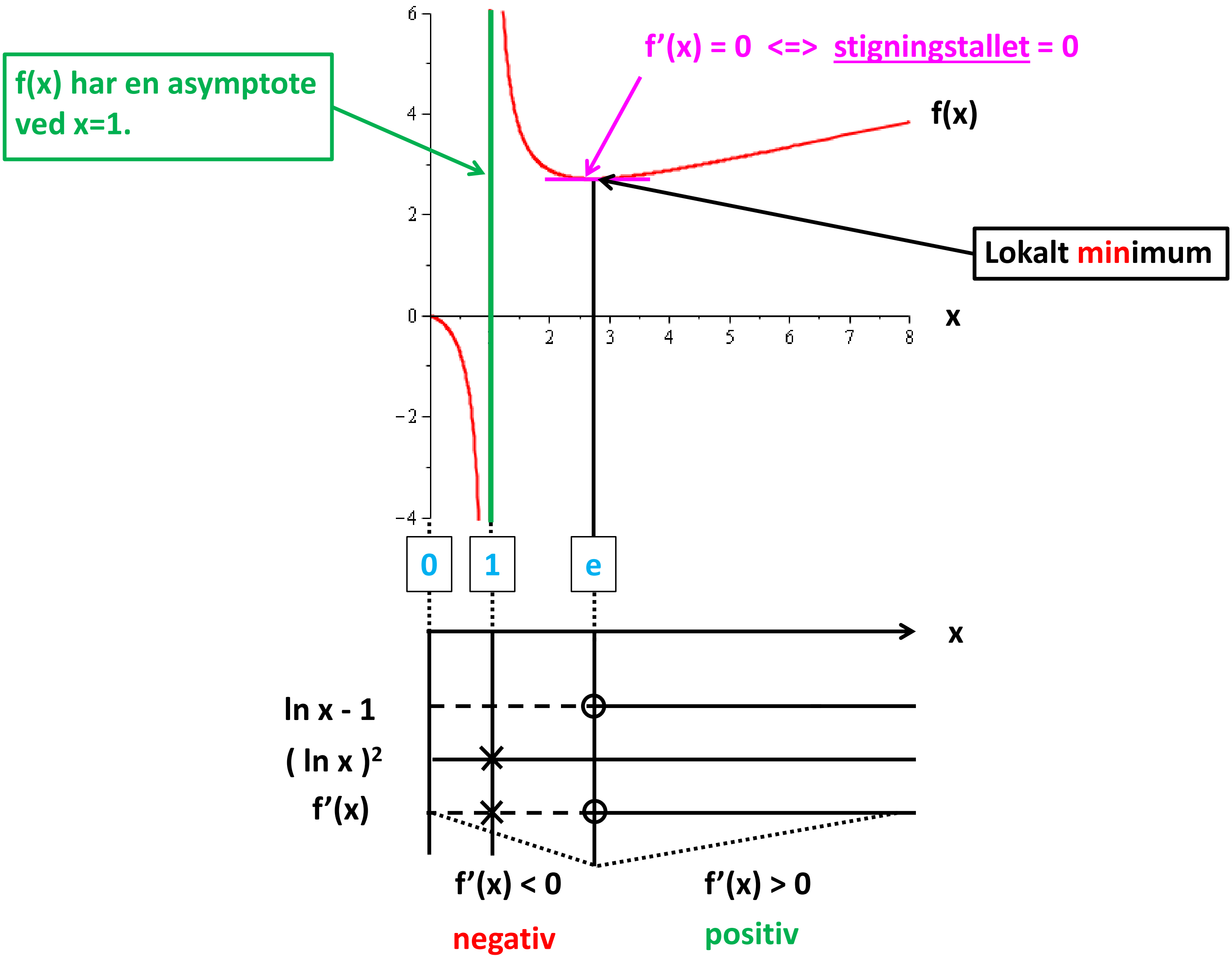
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \qquad \text{derivasjon av en brøk} \tag{5.160}$$

$$\overset{\text{lign.(??)}}{=} \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \text{derivasjon av en brøk} \tag{5.161}$$

$$= \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \tag{5.162}$$

$$= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \tag{5.163}$$

b, c og d): Plott av figuren, markering av fortegnet til $f'(x)$ og lokale ekstremalpunkt:




Figur 5.13: Funksjonen $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ og tilhørende fortegnsskjema for $f'(x)$.

∎