



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

3. Funksjoner

Øving 2: Oppgaver

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 01

- Utlevering:
 - Mandag 7. sept.kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - Mandag 5. okt. kl. 12:00
 - Dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - Vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- FORarbeid:
 - Se videoene for uke 3
 - Les kompendiet.
 - Les gjennom øvingoppgave 2
 - * Husk: diffus mode til hjernen - den jobber i underbevisstheten med å løse den dersom du kjenner problemstillingen.
- ETTERarbeid:
 - Gå gjennom løsning 2 som legges ut fredag 2. okt. kl. 12:00.

Problem 3.1 — Funksjoner og funksjonsverdier

Gitt funksjonen:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad (3.1)$$

a) Regn ut:

$$i) f(0) \quad (3.2)$$

$$ii) f(-1) \quad (3.3)$$

$$iii) f(1/2) \quad (3.4)$$

$$iv) f(\sqrt{2}) \quad (3.5)$$

b) For hvilke verdier av x er følgende sant?

$$i) f(x) = f(-x) \quad (\text{symmetrisk}) \quad (3.6)$$

$$ii) f(x+1) = f(x) + f(1) \quad (3.7)$$

$$iii) f(2x) = 2f(x) \quad (3.8)$$

■

Problem 3.2 — Funksjoner, definisjonsmengde og verdimengde

Grafen til funksjonen f er vist i figur 3.6.

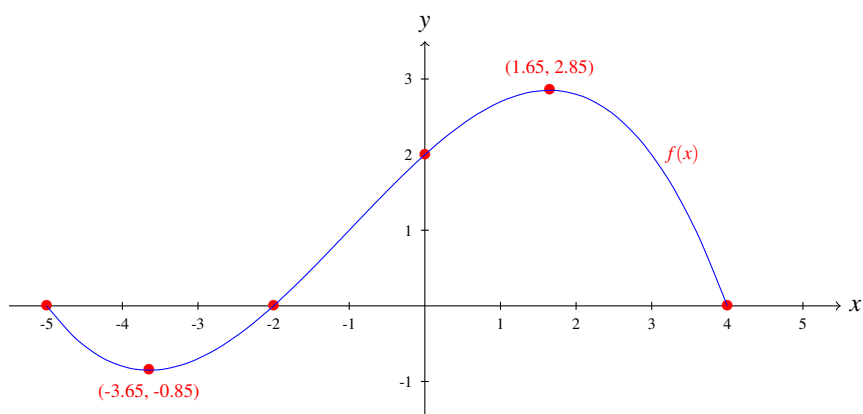


Figure 3.1: $f(x)$.

a) Finn følgende funksjonsverdier ved å lese av grafen. ¹

$$i) f(-5) \quad (3.9)$$

$$ii) f(-3.65) \quad (3.10)$$

$$iii) f(-2) \quad (3.11)$$

$$iv) f(0) \quad (3.12)$$

$$v) f(1.65) \quad (3.13)$$

$$vi) f(4) \quad (3.14)$$

b) Hva er definisjonsmengden D_f til $f(x)$?

c) Hva er verdimengden V_f til $f(x)$?

¹Altså her skal man ikke gjøre noen utregninger. Man skal kun lese av grafen.

Problem 3.3 — Lineære funksjoner

Gitt den lineære funksjonen:

$$f(x) = -2x + 5 \quad (3.15)$$

- a) Lag verditabell og plott funksjonen i intervallet $x \in [-3, 5]$.
- b) Finn stigningstallet a ved regning.
- c) I hvilket punkt skjærer $f(x)$ y -aksen? Regn ut svaret.
- d) I hvilket punkt skjærer $f(x)$ x -aksen?

■

Problem 3.4 — Ett- og to-punktsformelen

a) Bestem ligningen til den rette linjen som går gjennom punktene:

i) $f(x)$: $(x_1, y_1) = (0, 1)$ og $(x_2, y_2) = (4, 3)$

ii) $g(x)$: $(x_1, y_1) = (-2, 6)$ og $(x_2, y_2) = (1, 3)$

b) Lag verditabell og **plott** de rette linjene $y = f(x)$ og $y = g(x)$ i en og samme figur for intervallet $x \in [-4, 6]$.

c) Finn **skjæringspunktet** mellom grafene: ²

i) grafisk ³

ii) analytisk ⁴

Gir disse to tilnærmelsene samme svar?

■

²Å finne skjæringspunktet vil si å finne (x, y) bestemt av $f(x) = g(x)$.

³Grafisk, dvs. ved avlesning fra figuren du fikk i oppgave **b**).

⁴Analytisk, dvs. ved regning.

Problem 3.5 — Kvadratiske funksjoner , optimering , toppunkt

Shell har oppdaget et nytt oljefelt i Barentshavet. Fagfolk har anslått oljefunnet til å inneholde 45 millioner fat med olje. Kostnadene ved å utvinne og føre oljen frem til markedet fra feltet er anslått til å være:

$$k(x) = x^2 + 50x + 400, \quad (3.16)$$

hvor x = antall **millioner** oljefat og $x \in [0, 45]$.
Funksjonen $k(x)$ gir kostnadene i millioner dollar.

Anta at oljeprisen er 100 dollar per fat i hele produksjonsperioden på feltet. Inntektene ved å selge x millioner oljefat er dermed:

$$i(x) = 100x, \quad (3.17)$$

målt i millioner dollar.

- a)** Vis at fortjenesten $f(x) = i(x) - k(x)$ som funksjon av x er gitt ved:

$$f(x) = -x^2 + 50x - 400 \quad (3.18)$$

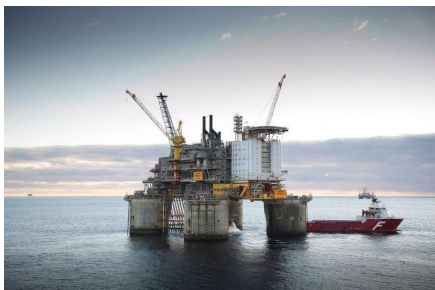


Figure 3.2: Oljefunn.

Dersom man plotter lign.(3.18) så får man følgende graf:

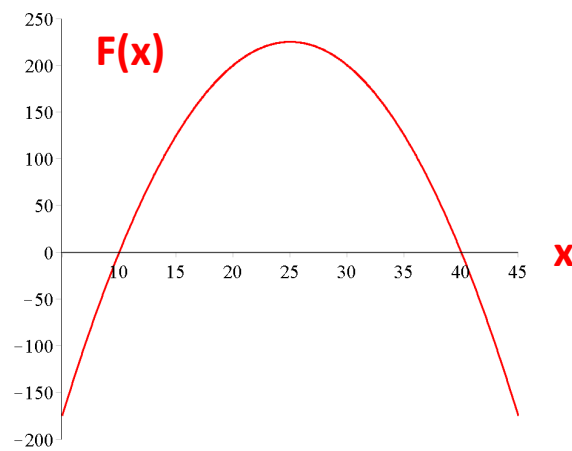


Figure 3.3: $f(x) = -x^2 + 50x - 400$.

- b) Regn ut for hvilke verdier av x har Shell null fortjeneste. ⁵

Visuell inspeksjon av grafen i figur 3.3 gir at fortjenesten $f(x)$ er maksimal dersom det produseres $x = 25$ millioner oljefat.

- c) Regn ut den maksimale fortjenesten til Shell.

⁵Dvs. ikke svar kun ved visuell inspeksjon av figur 3.3.

Fra oppgaveteksten og oppgave c) fant vi toppunktet $(x_1^*, y_1^*) = (25, 225)$ til $f(x)$ ved grafisk inspeksjon. Nå skal vi finne dette toppunktet ved regning.⁶

Velg to vilkårlige punkter, si (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , langs grafen til $f(x)$, se figur 3.4.

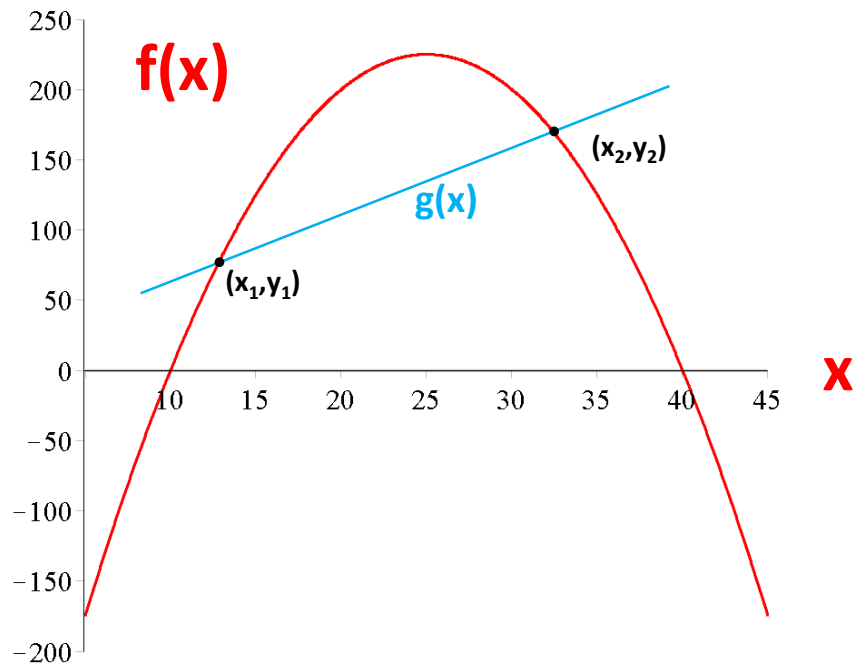


Figure 3.4: $f(x)$ og $g(x)$.

- d) Vis at ligningen for linjen som beskriver linjen mellom (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er:⁷

$$g(x) = \underbrace{(-(x_2 + x_1) + 50)}_{\text{stigningstall}}(x - x_1) + y_1 \quad (3.19)$$

Linjen $g(x)$ kalles en sekant.

⁶Vi skal i kapittel 4 toppunktet via derivasjon.

⁷Diskuter gjerne problemet med andre studentert. Dersom dere står fast så spør om retningshjelp.

La nå punktet (x_2, y_2) nærme seg det andre punktet, dvs.:

$$(x_2, y_2) \longrightarrow (x_1, y_1) \quad (3.20)$$

Sekanten vil da nærme seg tangenten $t(x)$ i punktet (x_1, y_1) , se figur 3.5.

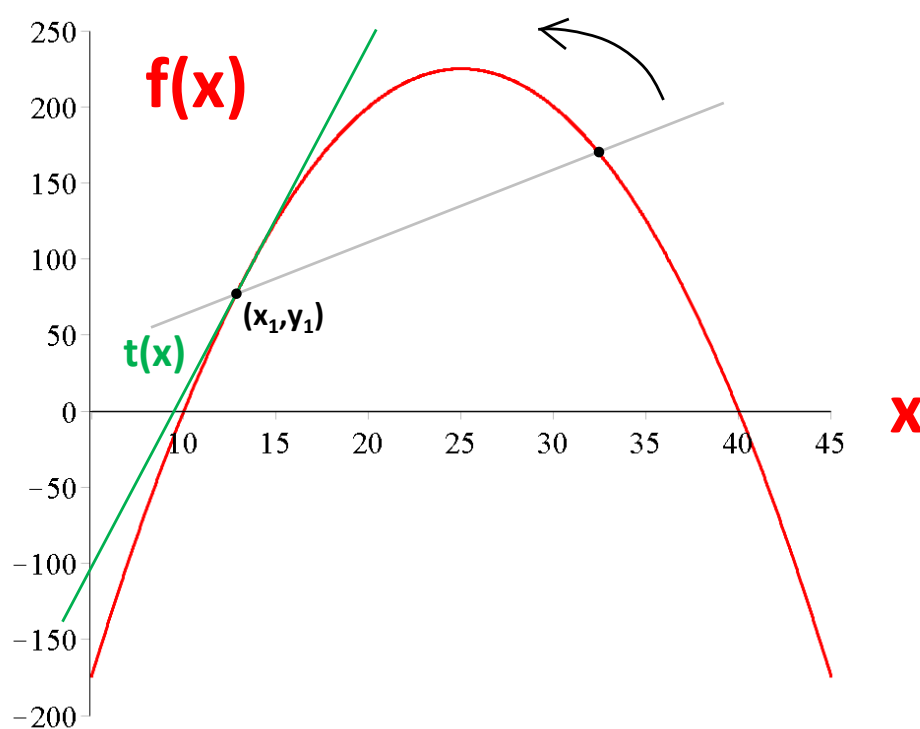


Figure 3.5: $f(x)$ og $t(x)$.

e) Vis at tangenten $t(x)$ er gitt ved:

$$t(x) = \underbrace{(-2x_1 + 50)}_{\text{stigningstall}} (x - x_1) + y_1 \quad (3.21)$$

Toppunktet for parabelen $f(x)$ er hvor tangenten $t(x)$ er horisontal (flat), dvs. at *stigningstallet* til tangenten $t(x)$ er null i toppunktet.

- f) Finn toppunktet (x_1^*, y_1^*) til $f(x)$ ved å bruke lign.(3.21).⁸
- g) Stemmer svaret ditt med toppunktet vi fant ved visuell inspeksjon av grafen i figur 3.3?

■

⁸Her skal man altså finne frem til et numerisk svar, dvs. tallsvar. Stemmer svaret ditt med (x_1^*, y_1^*) som vi fant ovenfor?

Problem 3.6 — Rasjonale funksjoner

- a) Forenkle funksjonene og avgjør om de er rasjonale eller ei:

$$i) \quad f(x) = \frac{4x^2 + 8x}{x + 2} \quad (3.22)$$

$$ii) \quad g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{2x + 2} \quad (3.23)$$

$$iii) \quad h(x) = \frac{x}{x + 3} - \frac{x^2}{(x + 3)(x - 5)} \quad (3.24)$$

$$iv) \quad i(x) = \frac{x}{x\sqrt{1+h} - \sqrt{h}} + \frac{x}{x\sqrt{1+h} + \sqrt{h}} \quad (3.25)$$

- b) Hva er definisjonsmengden D og verdimengden V til følgende rasjonale funksjoner? ⁹

Har noen av funksjonene nullpunkt(er)?
Begrunn svaret.

$$i) \quad f(x) = \frac{1}{x - 2} \quad (3.26)$$

$$ii) \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - 2} \quad (3.27)$$

$$iii) \quad h(x) = \frac{x^2 - 9}{x} \quad (3.28)$$

$$iv) \quad i(x) = x - \frac{9}{x} \quad (3.29)$$

⁹Her er det meningen at dere kun skal skrive ned svaret uten utregninger. Dere behøver heller ikke å tegne figurer, men dersom du er usikker så plott gjerne funksjonene i GeoGebra.

Gitt den rasjonale funksjonen

$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (3.30)$$

hvor a, b, c og d er konstanter. $R(x)$ kalles en **hyperbel**.

- c) Dersom $c = 0$, er da $R(x)$ en rasjonal funksjon?
Hvis nei, hva slags funksjon er $R(x)$ da?

Med $a = 0$, $d = 0$ og $c = 1$ så blir $R(x)$ redusert til

$$R(x) = \frac{b}{x} \quad (3.31)$$

Denne funksjonen er plottet i figur 3.6 nedenfor.

La oss velge et tilfeldig punkt x_0 på den positive x -aksen.

- d) Regn ut arealet A som vist i figur 3.6.
- e) Er arealet A avhengig av hvor x_0 er plassert?
Begrunn svaret.

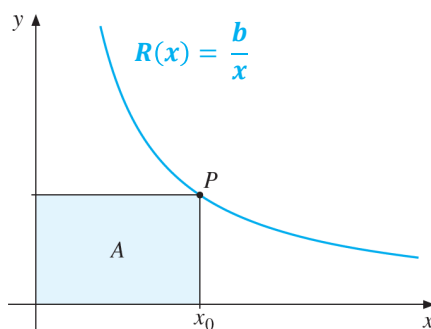


Figure 3.6: $R(x)$ og arealet A .

Problem 3.7 — Asymptoter

Anta at kostanden $C(x)$ for en bedrift er:

$$C(x) = 0.01x^2 + 200x + 5\,000 \quad \text{kostnad} \quad (3.32)$$

hvor x er antall produserte vareenheter og $x \in [0, 2000]$.

Grafen til enhetskostnaden

$$\frac{C(x)}{x} = \frac{0.01x^2 + 200x + 5\,000}{x} \quad \text{enhetskostnad} \quad (3.33)$$

er vist i figur 3.7.

Den **blå** linjen er asymptoten til $\frac{C(x)}{x}$.

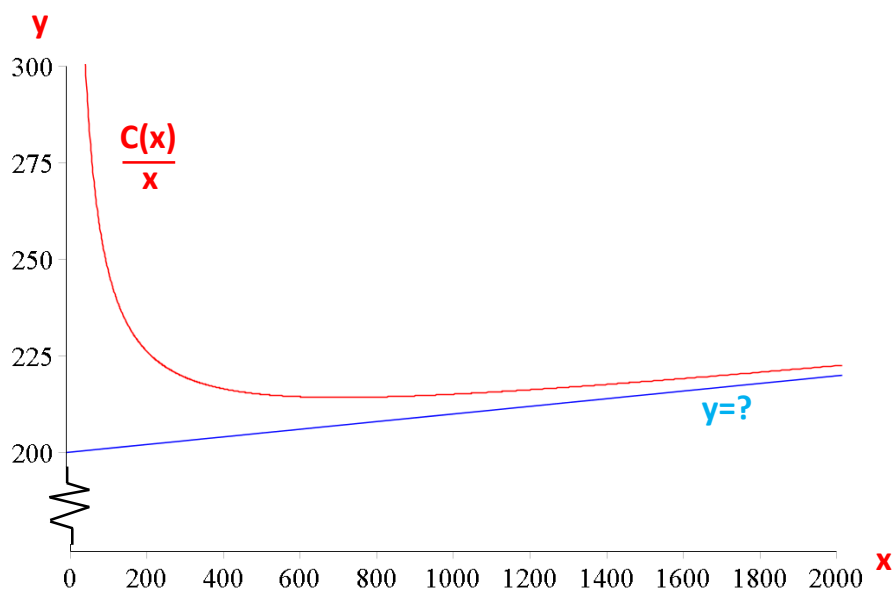


Figure 3.7: Enhetskostnad $C(x)/x$ med asymptote.

- a) Finn ligningen for asymptoten som vist i figur 3.7.

Gitt funksjonen:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (3.34)$$

Grafen til funksjonen f er vist i figur 3.8.

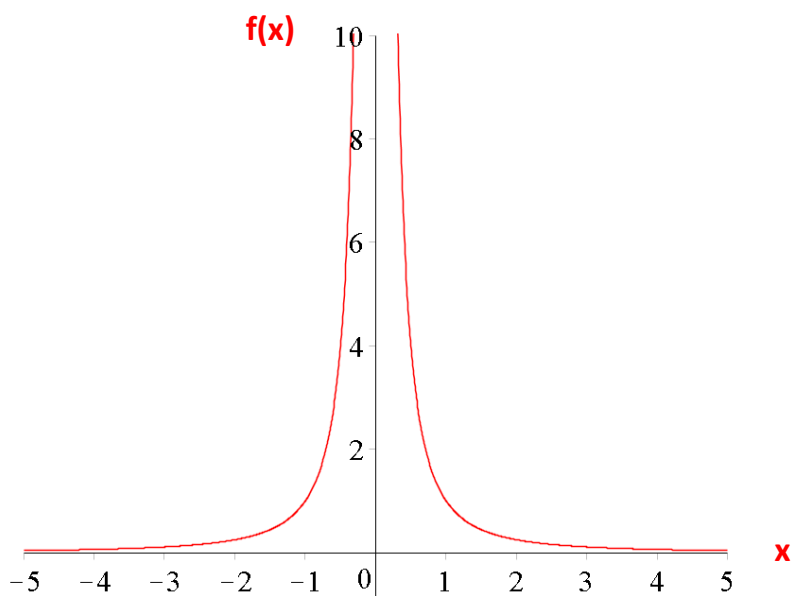


Figure 3.8: $f(x)$.

- b) Finn asymptotene til $f(x)$.¹⁰

¹⁰I denne oppgaven behøver man ikke noe regning. Kun en kort argumentasjon holder.

Gitt funksjonen:

$$f(x) = \frac{2x-6}{4-x} \quad (3.35)$$

Grafen til funksjonen f er vist i figur 3.9.

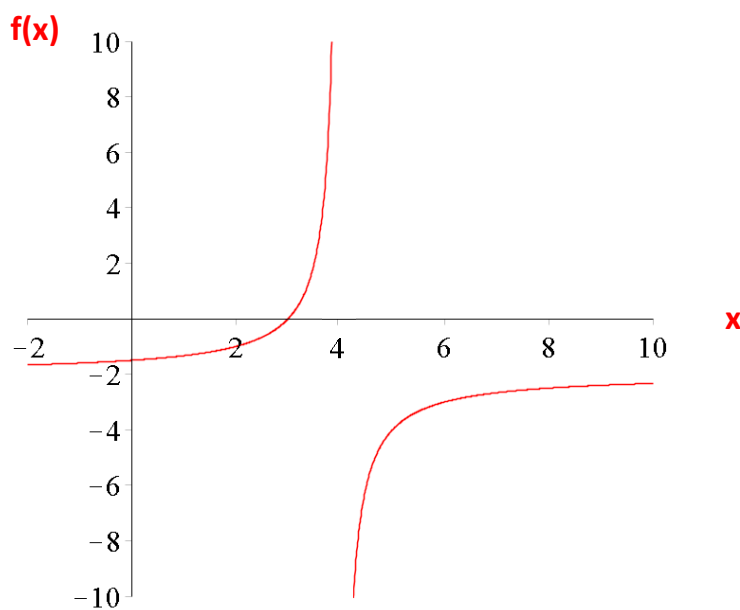


Figure 3.9: $f(x) = \frac{2x-6}{4-x}$.

- c) Vis at $f(x)$ i lign.(3.35) kan skrives på formen

$$f(x) = \frac{2 - \frac{6}{x}}{\frac{4}{x} - 1} \quad (3.36)$$

- d) Finn asymptotene til $f(x)$. ¹¹

¹¹I denne oppgaven behøver man ikke noe regning. Kun en kort argumentasjon holder.

Gitt funksjonen:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x - 1}{2x - 4} \quad (3.37)$$

Grafen til funksjonen f er vist i figur 3.10.

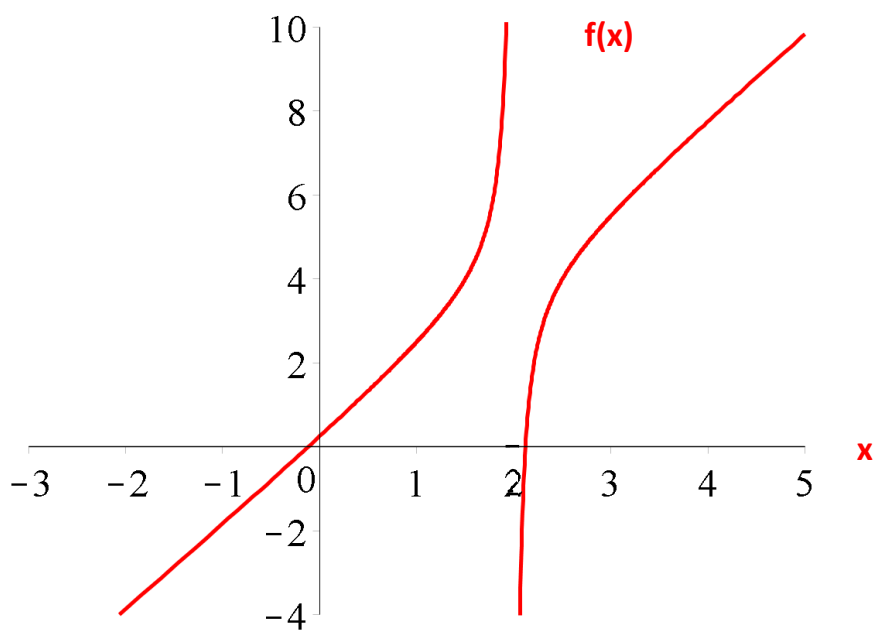


Figure 3.10: $f(x) = \frac{4x^2 - 8x - 1}{2x - 4}$.

- e) Vis at $f(x)$ kan skrives på formen

$$f(x) = 2x - \frac{1}{2x - 4} \quad (3.38)$$

- f) Finn asymptotene til $f(x)$.

Problem 3.8 — Optimering av transportkostnader

Denne oppgaven handler om LP-setningen som vi lærte om i kompendiet:

Setning 3.0.1 Optimum for et LP-problem må være ett av **hjørnene** i mulighetsområdet.

Når et LP-problem har mange variabler og mange føringer så vil antall hjørner være eksponentielt mange. I det tilfelle lar det seg ikke gjøre i praksis å regne ut alle hjørnepunktene.

Med mange hjørner så bruker man "Simplex"-algoritmen for å finne det optimale hjørnet.

I denne oppgaven skal vi ikke bruke "Simplex"-algoritmen.

Vi skal kun bruke setning 3.0.1 som Simplex-algoritmen bygger på.

Vi skal redusere et 4-dimensjonalt (4D) LP-problem til et 2-dimensjonalt (2D) LP-problem via algebra.¹²

Deretter skal vi manuelt sjekke hjørneløsningene.

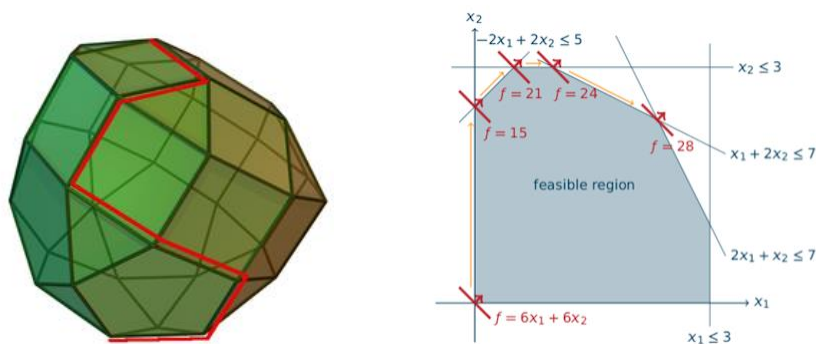


Figure 3.11: Hjørneløsninger.

¹²Dermed reduserer vi antall hjørnepunkter som må sjekkes.

Glamox AS er en produsent av lysarmatur og varmeovner. Fra fabrikk i Molde leverer Glamox produkter til forhandlere over hele verden, blant annet USA.

Vi skal i denne oppgaven se på transporten av varmeovner av typen “*TPA 1000W Panel*” til Los Angeles og lysarmaturen av typen “*DLT RT(M)*” til Miami, se figur 3.12. Disse varmeovnene og lysarmaturene blir produsert i Molde og skal transporteres til henholdsvis Los Angeles og Miami.

Glamox bruker følgende rederier for transporten mellom Norge og USA:

- CMA Group
- Hapag-Lloyd

som begge har ruter til både Los Angeles og Miami.

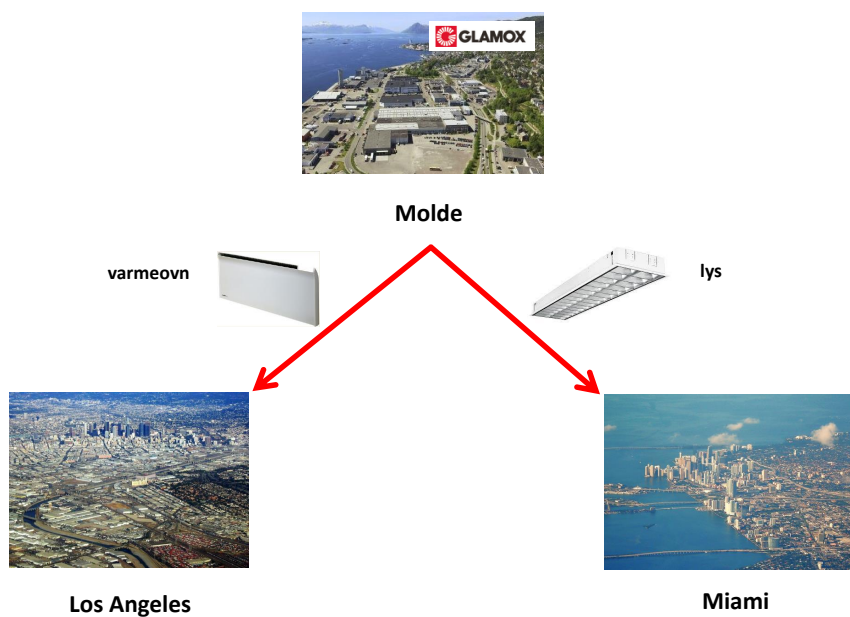


Figure 3.12: Transport til Los Angeles og Miami.

Definer: (beslutningsvariabler)

$$x_1 = \text{antall varmeovner som skal transporteres} \\ \text{til Los Angeles med CMA Group} \quad (3.39)$$

$$x_2 = \text{antall lysarmatur som skal transporteres} \\ \text{til Miami med CMA Group} \quad (3.40)$$

og

$$y_1 = \text{antall varmeovner som skal transporteres} \\ \text{til Los Angeles med Hapag-Lloyd} \quad (3.41)$$

$$y_2 = \text{antall lysarmatur som skal transporteres} \\ \text{til Miami med Hapag-Lloyd} \quad (3.42)$$

dvs. 1 = Los Angeles og varmeovner og 2 = Miami og lysarmatur.

Anta at transportkostnaden C forbundet med transporten av varene til USA er:

$$C = 70x_1 + 90x_2 + 20y_1 + 60y_2 \quad (3.43)$$

Etterspørselen er 800 stk. varmeovner til Los Angeles og 900 lysarmaturer til Miami:

$$x_1 + y_1 = 800 \quad (\text{varmeovner}) \quad (3.44)$$

$$x_2 + y_2 = 900 \quad (\text{lys}) \quad (3.45)$$

Begge rederiene CMG Group og Hapag-Lloyd har begrenset kapasitet. CMG Group har begrenset kapasitet hva volum angår, de kan maksimalt ta med 20 000 dm³. Hapag-Lloyd har begrensning når det gjelder vekt. De kan maksimalt ta med 3 000 kg.¹³ Matematisk kan disse kapasitetsbegrensningene formuleres slik:

$$10x_1 + 20x_2 \leq 20\,000 \text{ dm}^3 \quad (\text{CMG Group}) \quad (3.46)$$

$$6y_1 + 6y_2 \leq 3\,000 \text{ kg} \quad (\text{Hapag-Lloyd}) \quad (3.47)$$

Alt i alt, vi har et 4D LP-problem: (4 variabler og 4 føringer)

Minimer

$$C = 70x_1 + 90x_2 + 20y_1 + 60y_2 \quad (3.48)$$

slik at

$$x_1 + y_1 = 800 \quad (3.49)$$

$$x_2 + y_2 = 900 \quad (3.50)$$

$$10x_1 + 20x_2 \leq 20\,000 \quad (3.51)$$

$$6y_1 + 6y_2 \leq 3\,000 \quad (3.52)$$

¹³ Årsaken til at kapasiteten er så liten er at fraktbåtene allerede er nesten fylt opp med annet gods.

Nå skal vi redusere LP-problemet fra 4D til 2D ved å substituere bort y_1 og y_2 .
La oss starte med målfunksjonen C .

- a) Bruk etterspørselene i lign.(3.49) og (3.50) og vis at C i lign.(3.48) kan skrives

$$C(x_1, x_2) = 50x_1 + 30x_2 + 70000 \quad (3.53)$$

-  Målfunksjonen $C(x_1, x_2)$ i lign.(3.53) har to variabler, ikke fire.

-  C er altså redusert fra 4D til 2D siden føringene i lign.(3.49) og (3.50) nå er innebygd i $C(x_1, x_2)$ i lign.(3.53).

Siden de to første føringene er innebygd i $C(x_1, x_2)$ så har vi bare de to siste føringene igjen, nemlig lign.(3.51) og (3.52).

La oss skrive om disse to siste føringene slik at de blir på en mer hensiktsmessig form.

- b) Vis at kapasitetsbegrensningen i lign.(3.51) kan skrives

$$x_2 \leq 1000 - 0.5x_1 \quad (\text{CMG Group}) \quad (3.54)$$

- c) Bruk etterspørselene i lign.(3.49) og (3.50) og vis at kapasitetsbegrensningen i lign.(3.52) kan skrives

$$x_2 \geq 1200 - x_1 \quad (\text{Hapag-Lloyd}) \quad (3.55)$$

Alt i alt, vi har nå et 2D LP-problem:

Minimer

$$C(x_1, x_2) = 50x_1 + 30x_2 + 70\,000 \quad (3.56)$$

slik at

$$x_2 \leq 1000 - 0.5x_1 \quad (3.57)$$

$$x_2 \geq 1200 - x_1 \quad (3.58)$$

K Legg merke til at y_i -variablene i 2D-problemet nå er eliminert.

K Det er kun x_i -variablene som er med i 2D-problemet.

- d)** I vedlegget bakerst i dette oppgavesettet finner du to verditabeller og et koordinatsystem. Fyll ut verditabellene og plott ligningene

$$x_2(x_1) = 1000 - 0.5x_1 \quad (3.59)$$

og

$$x_2(x_1) = 1200 - x_1 \quad (3.60)$$

som tilsvarer likhet istedet for ulikhet i lign.(3.57) og (3.58), i koordinatsystemet gitt i vedlegget.

- e)** Skraver det området i figuren som tilfredsstiller kapasitetsbegrensningene. ¹⁴

¹⁴Legg merke til at ulikhetene i lign.(3.57) og (3.58) er motsatt vei.

Transportkostnaden i lign.(3.56) skal **minimeres** under kapasitetsbegrensningene i lign.(3.57) og (3.58).

Dette er et LP optimaliseringsproblem som vi nå manuelt skal regne ut hvert hjørnepunkt og finne det hjørnepunktet (x_1, x_2) som gir lavest transportkostnad $C(x_1, x_2)$.

f) i) Indiker alle *hjørneløsninger* på figuren fra oppgave e).

ii) Les av alle hjørneløsninger ¹⁵ fra grafen og regn ut tilhørende kostnad $C(x_1, x_2)$.

iii) Hvor mange varmeovner og hvor mange lysarmaturer må transporteres med **CMA Group** dersom transportkostnaden $C(x_1, x_2)$ skal minimeres? ¹⁶
Hva er transportkostnaden $C(x_1, x_2)$ da?

g) Hvor mange varmeovner og hvor mange lysarmaturer må transporteres med **Hapag-Lloyd** dersom transportkostnaden $C(x_1, x_2)$ skal minimeres? ¹⁷

■

¹⁵Dvs. les av koordinatene (x_1, x_2) for alle hjørneløsninger.

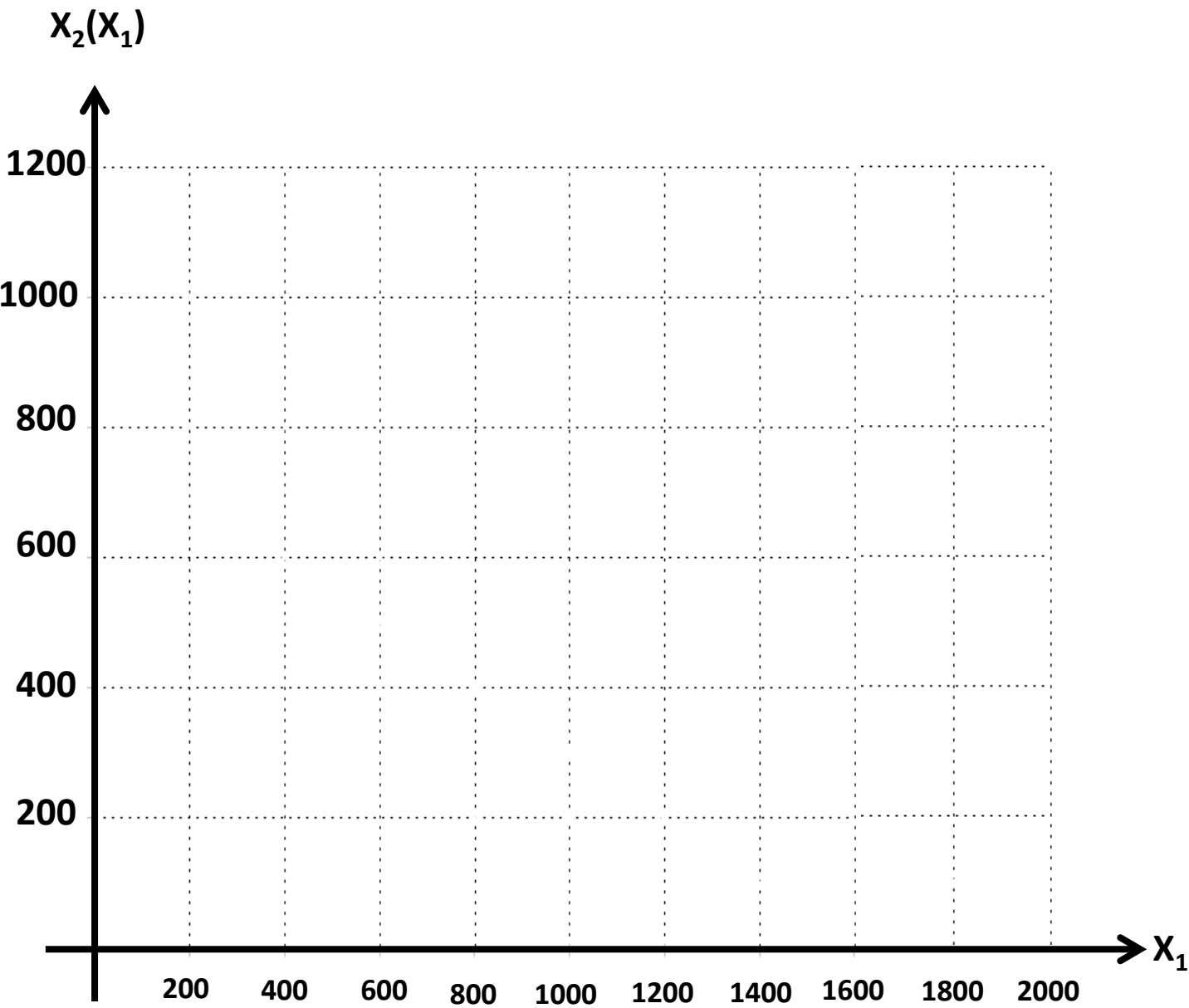
¹⁶Dvs. finn x_1 og x_2 .

¹⁷Dvs. finn y_1 og y_2 . Tips: Bruk lign.(3.49) og (3.50).

Vedlegg

x_1	0	600	1400	2000
$x_2(x_1)$				

x_1	0	400	800	1200
$x_2(x_1)$				





Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

4. Derivasjon

Problem 4.1 — Derivasjon av et polynom

- a) Finn den deriverte av $f(q)$ mhp. q , dvs. finn $\frac{df(q)}{dq} = f'(q)$, for følgende funksjoner: ¹

$$i) \quad f(q) = aq^n \quad (4.1)$$

$$ii) \quad f(q) = 7q^3 \quad (4.2)$$

$$iii) \quad f(q) = \frac{7}{q^3} \quad (4.3)$$

$$iv) \quad f(q) = \frac{7}{q^{\frac{1}{3}}} \quad (4.4)$$

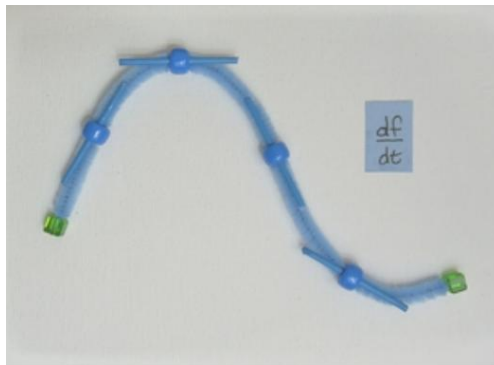


Figure 4.1: Deriverte.

¹I oppgave i) kan du bare skrive ned formelen uten mellomregning. Her er a bare en konstant.

b) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(z) = z + \frac{1}{z} \quad (4.5)$$

$$ii) \quad c(x) = dc + \frac{x}{2}h + \frac{d}{x}s \quad d, c, s \text{ og } h \text{ konstanter} \quad (4.6)$$

c) Er funksjonene i oppgave **b)** i prinsipp samme derivasjonsoppgave?
Gi en *kort* begrunnelse.

■

Problem 4.2 — Derivasjon

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 5 \quad (4.7)$$

$$ii) \quad f(x) = \frac{2}{3}x^{-3} \quad (4.8)$$

$$iii) \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \quad (4.9)$$

$$iv) \quad f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} \quad (4.10)$$

$$v) \quad f(x) = \frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \quad (4.11)$$

$$vi) \quad f(x) = (4x - 3)(3x + 2) \quad (4.12)$$

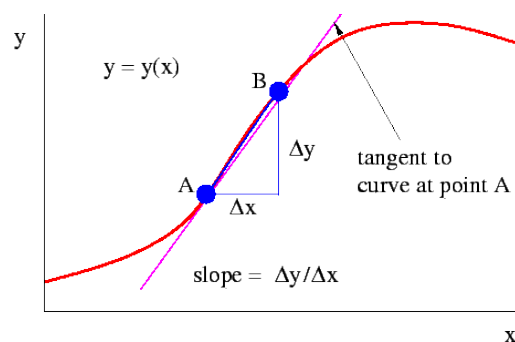


Figure 4.2: Deriverte - illustrasjon.

b) Gitt funksjonen:

$$f(x) = x^3 - 48x \quad (4.13)$$

Er det noen verdier av x hvor $f(x)$ hverken synker eller stiger?

c) Deriver funksjonen

$$s(t) = \frac{4}{t} - \frac{1}{6t^3} + \frac{8}{t^5} \quad (4.14)$$

d) Finn tangentlinjen til

$$f(x) = -x^2 + 5x - 3 \quad (4.15)$$

for $x = 1$.

e) Deriver funksjonen

$$h(z) = z(3z^2 - 9) \quad (4.16)$$

f) Anta at posisjonen til et objekt ved tiden t (i sekunder) er:

$$s(t) = 3t^4 - 40t^3 + 126t^2 - 9 \quad (\text{i meter}) \quad (4.17)$$

Hva er hastigheten etter $t = 1$ sekund? ²

²Vanskelig? Rekk opp hånden og spør på øvingsdagen.

g) Deriver funksjonen:

$$h(q) = \sqrt{q}(2q^2 - 4q) \quad (4.18)$$

h) Deriver funksjonen:

$$j(y) = 2y^{n-2} \quad (4.19)$$

i) Deriver funksjonen:

$$k(x) = \sqrt[5]{x} \quad (4.20)$$

Skriv svaret med generalisert kvadratroten.

■

Problem 4.3 — Deriverte via definisjonen

I kompendiet definerte vi den deriverte:

Definisjon 4.0.1 — Deriverte

La $f(x)$ være en deriverbar funksjon i punktet x . Den deriverte av denne funksjonen i x er definert ved:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.21)$$

Det er sjelden at man bruker definisjonen av den deriverte i lign.(4.21) til å regne ut $df(x)/dx$.

Grunnen til at vi likevel skal gjøre det her i denne gruppeoppgaven er fordi vi ønsker å se på de fundamentale egenskapene til den deriverte.

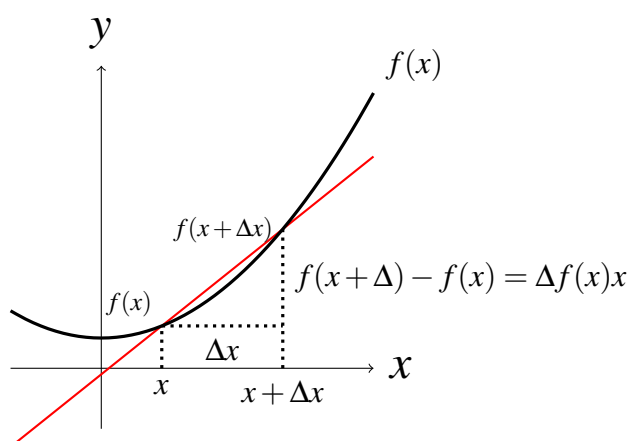


Figure 4.3: Gjennomsnittlig endring.

La oss nå vise et eksempel på hvordan man kan finne den deriverte til en funksjon via definisjonen i lign.(4.21):

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.22)$$

Uttrykket:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{stigningstall}) \quad (4.23)$$

i lign.(4.22) er stigningstallet til sekanten som går gjennom punktene $(x, f(x))$ og $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

Hvor har vi hørt om "sekant" før?

I en tidligere øving ja, stemmer det!

Vi skulle finne antall fat olje vi måtte produsere for å maksimere fortjenesten. Logikken var at akkurat på toppen er stigningstallet til *tangenten* lik 0. Ligningen for tangenten i et vilkårlig punkt fant vi ved å velge to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) , bruke to-punktsformelen for å finne sekanten gjennom disse punktene og til slutt å la sekanten "nærme seg" tangenten i punktet (x_1, y_1) ved å la punktet (x_2, y_2) gå mot punktet (x_1, y_1) , se figur 4.4.

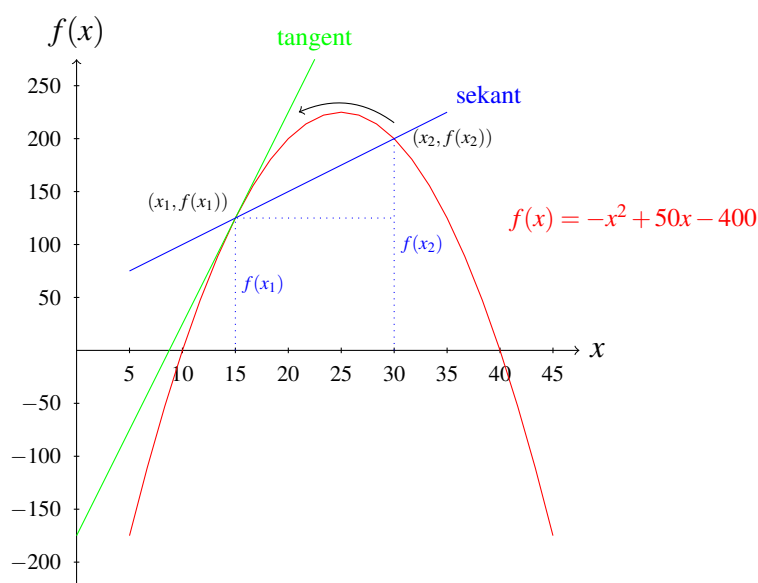


Figure 4.4: Fortjenesten $f(x) = -x^2 + 50x - 400$ (fra øving 9).

Stigningstallet til sekanten er gitt ved:

$$\text{stig.tall. sekant} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} \quad (4.24)$$

Her kommer koblingen med definisjonen, vi døper om punktene våre:

$$(x_1, f(x_1)) = (x, f(x)) \quad (4.25)$$

$$(x_2, f(x_2)) = (x + \Delta x, f(x + \Delta x)) \quad (4.26)$$

Hvorfor bruker vi Δx ?

Svaret er for å påpeke at punktene er "nærme" hverandre, siden det er akkurat da sekanten "nærmer seg" tangenten. Så $x + \Delta x$ står for en *liten* avstand fra punktet x . Figur 4.5 illustrerer omdøpingen:

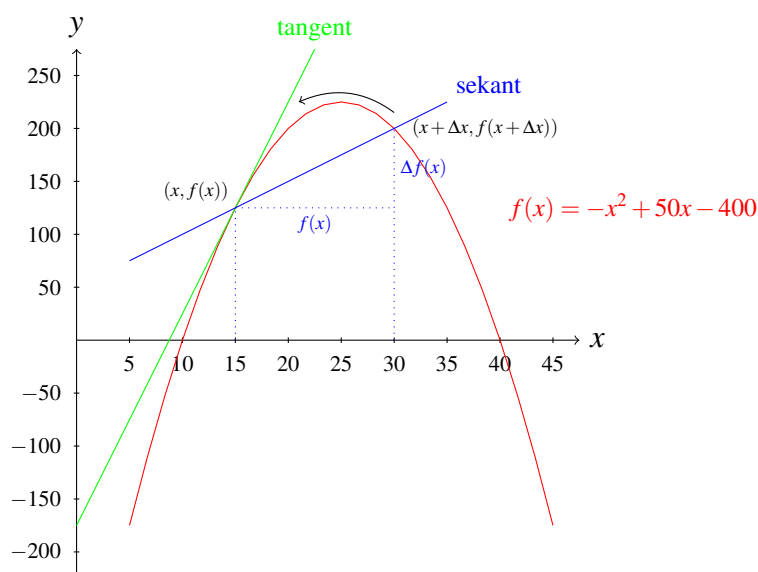


Figure 4.5: Fortjenesten $f(x) = -x^2 + 50x - 400$.

Setter vi omdøpingen inn i lign.(4.24), får vi:

$$\text{stig.tall. sekant} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad (4.27)$$

Lign.(4.27) innsatt i definisjon av den deriverte, dvs. lign.(4.21):

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\overbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}^{\text{stig.tall sekanten}}}{\underbrace{\Delta x}_{\text{stig.tall tangenten}}}}_{\text{stig.tall tangenten}} \quad (4.28)$$

Uttrykket

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \quad (4.29)$$

tolker vi dermed at vi tar grensen (limit) når Δx gå mot null, som rent geometrisk betyr som tidligere at vi lar sekanten "nærme seg" tangenten.

Vi er nå i stand til å bruke *definisjonen* for å regne ut den deriverte av fortjenesten $f(x)$.

Setter inn $f(x) = -x^2 + 50x - 400$ inn i uttrykket for stigningstallet til tangenten (lign.4.27):

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\overbrace{[-(x+\Delta x)^2 + 50(x+\Delta x) - 400]}^{f(x+\Delta x)} - \overbrace{[-x^2 + 50x - 400]}^{f(x)}}{\Delta x} \\ &= \frac{\overbrace{-(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 50x + 50\Delta x + x^2 - 50x}^{1.\text{kvadratsetning}} - 50\Delta x}{\Delta x} \quad (4.30) \end{aligned}$$

$$= \frac{-2x\cancel{\Delta x} + 50\cancel{\Delta x} - (\Delta x)^2}{\cancel{\Delta x}} \quad (4.31)$$

$$= -2x + 50 - \Delta x \quad (4.32)$$

I grensen når $\Delta x \rightarrow 0$ får vi den deriverte (stigningstallet til tangenten):

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-2x + 50 - \overbrace{\Delta x}^{\rightarrow 0} \right) = -2x + 50 \quad (4.33)$$

Hvor kommer “hovedformelen”, dvs. lign.(4.35), fra?

Jo, man kan bruke definisjonen av den deriverte og gjøre tilsvarende utregninger som ovenfor.

Formelen for den deriverte av et polynom er svært viktig: (“hovedformelen”)

Setning 4.0.1 — Derivasjon av et polynom

Den deriverte av funksjonen

$$f(x) = ax^n \quad (4.34)$$

hvor $a \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$, er

$$\frac{df(x)}{dx} = nax^{n-1} \quad (4.35)$$

- a)** Bruk formelen i lign.(4.35), og regn ut den deriverte av funksjonen

$$f(x) = 8x^3 \quad (4.36)$$

- b)** Bruk nå definisjonen av den deriverte i lign.(4.21) til å regne ut den deriverte av den samme funksjonen: ^{3 4 5}

$$f(x) = 8x^3 \quad (4.38)$$

Stemmer svaret med det du fikk i oppgave **a**)?

Synes du formelen for derivert av et polynom er nyttig?

³Her er det viktig å innse at denne oppgaven er mer eller mindre den samme som eksemplet foran hvor vi i detalj har gått gjennom hvordan derivasjonen skal gjennomføres. Dersom du er usikker på hvordan denne oppgaven skal løses så les gjennom eksemplet foran en gang til.

⁴For å løse denne oppgaven kan du gjerne bruke følgende formel:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (4.37)$$

⁵Du behøver ikke tegne opp en figur for å løse denne oppgaven slik som gjort i illustrasjonseksemplet foran.

Fra formelen for derivert av et polynom, har vi følgende viktige spesialtilfeller:

Setning 4.0.2 — Derivasjonsregler

Fra lign.(4.35) følger at:

$$a = 1 \text{ og } n = 1 : f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = 1 \quad (4.39)$$

$$a = 1 \text{ og } n = -1 : f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad (4.40)$$

$$a = 1 \text{ og } n = 1/2 : f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (4.41)$$

for $x \neq 0$ i lign.(4.40) og (4.41).

- c) Bruk formelen for derivert av polynomer av til å bevise lign.(4.40) og lign.(4.41):

$$i) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (4.42)$$

$$ii) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad (4.43)$$

- d) Bruk nå definisjonen av den deriverte i lign.(4.21) til å regne ut den deriverte av de samme funksjonene: ^{6 7}

$$i) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (4.44)$$

$$ii) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad (4.45)$$

Stemmer svarene med de du fikk i oppgave c)?

Synes du formelen for derivert av et polynom er nyttig?

■

⁶Oppgave i: Slå sammen brøken med fellesnevner.

⁷Oppgave ii: Bruk konjugatsetningen.

Problem 4.4 — Derivasjon - produktregelen

- a) Det er flere måter å finne den deriverte av funksjonene nedenfor på. Bruk likevel regelen for derivasjon av et produkt og finn $df(x)/dx$:

$$i) \quad f(x) = (4x - 3)(3x + 2) \quad (4.46)$$

$$ii) \quad f(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 7) \quad (4.47)$$

- b) Det er flere måter å finne den deriverte av funksjonene nedenfor på. Bruk likevel regelen for derivasjon av en brøk og finn $df(x)/dx$:

$$i) \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \quad (4.48)$$

$$ii) \quad f(x) = \frac{x^5}{1 - x^6} \quad (4.49)$$

$$iii) \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d} \quad (4.50)$$

$$\text{hvor } a, b, c, d \text{ er konstanter.} \quad (4.51)$$

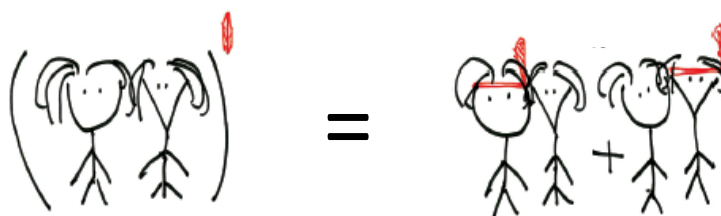


Figure 4.6: "Indianerfjær-huskeregelen".

Problem 4.5 — Derivasjon - kjerneregelen

- a)** Det er flere måter å finne den deriverte av funksjonene nedenfor på. Bruk likevel, blant annet, **kjerneregelen** og finn $df(x)/dx$:

$$i) \quad f(x) = 3(x^2 + 7)^2 \quad (4.52)$$

$$ii) \quad f(x) = 3\sqrt{x^2 + 7} \quad (4.53)$$

$$iii) \quad f(x) = 3\sqrt[4]{x^2 + 7} \quad (4.54)$$

- b)** Deriver funksjonen

$$f(x) = 2\left(3\sqrt[4]{x^2 + 7}\right)^{-5} \quad (4.55)$$

Hint: bruk svaret fra oppgave 4.5 **a)** *iii*.

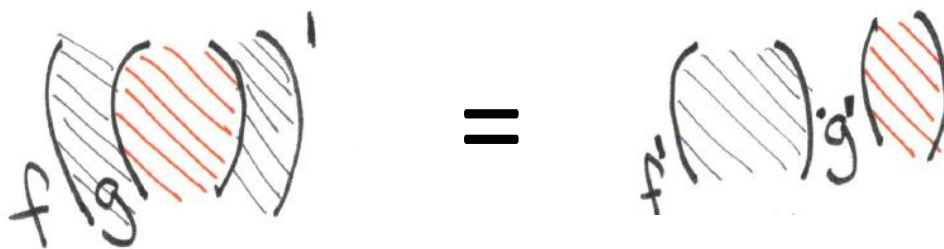


Figure 4.7: Kjerneregelen - indre og ytre funksjon.

■