



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høgskole i logistikk

4. Derivasjon

Øving 3: Oppgaver

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 01

- Utlevering:
 - Mandag 21. sep. kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - senest mandag 19. okt. kl. 12:00
 - dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- **FORarbeid:**
 - Se videoene for uke 5
 - Les kompendiet.
 - Se eksempel videoer
- **ETTERarbeid:**
 - Gå gjennom løsning 3 som legges ut fredag 16. okt. kl. 12:00.

Problem 4.6 — Derivasjon - mix 1

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = x^2 - 2x \quad (4.1)$$

$$ii) \quad f(x) = (x^2 - 2x)^4 \quad (4.2)$$

$$iii) \quad f(x) = 7x\sqrt{x} \quad (4.3)$$

$$iv) \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad (4.4)$$

b) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{3x^2} \quad (4.5)$$

$$ii) \quad f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 7} \quad (4.6)$$

$$iii) \quad f(x) = 2 + x \quad (4.7)$$

$$iv) \quad f(x) = 2x \quad (4.8)$$

■

Problem 4.7 — Derivasjon - mix 2

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = \left(\frac{1-x}{x+1} \right)^3 \quad (4.9)$$

$$ii) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (4.10)$$

$$iii) \quad f(x) = x^2 \quad (4.11)$$

$$iv) \quad g(q) = (q^2)^2 \quad (4.12)$$

b) Deriver funksjonene:

$$i) \quad h(y) = y^{-0.32} \quad (4.13)$$

$$ii) \quad f(x) = g(x) + h(x) \quad (4.14)$$

$$iii) \quad f(x) = g(x)h(x) \quad (4.15)$$

c) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = (x^3 - x)(5x^4 + x^2) \quad (4.16)$$

$$ii) \quad g(p) = 7(p-2)^3 + h(p) \quad (4.17)$$

$$iii) \quad f(x) = \frac{c(x)}{x} \quad (4.18)$$

$$iv) \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad (4.19)$$

Problem 4.8 — Derivasjon mix 3

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad g(p) = p^a + b \quad (4.20)$$

$$ii) \quad h(x) = f(x^2) \quad (4.21)$$

$$iii) \quad c(q) = 20q - 4q\left(25 - \frac{q}{2}\right) \quad (4.22)$$

$$iv) \quad f(x) = (x^3)^a \quad (4.23)$$

b) Finn den 2. deriverte dersom vi vet:

$$i) \quad f'(x) = x^3 \quad (4.24)$$

$$ii) \quad f'(x) = 11x^{8/3} \quad (4.25)$$

$$iii) \quad c(x) = 2x + 1 \quad (4.26)$$

$$iv) \quad f(x) = xg(x) \quad (4.27)$$

c) Deriver funksjonene:

$$i) \quad F(x) = 1000(1 + 0.06x)^{3/2} \quad (4.28)$$

$$ii) \quad f(x) = x^{0.5} \quad (4.29)$$

$$iii) \quad f(x) = -x^{-0.5} \quad (4.30)$$

$$iv) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (4.31)$$

Problem 4.9 — Oppgave 5 Eksamen 18. des. 2014 - hjørnepunktsløsningen

Varme- og belysningsprodusenten *Glamox* produserer to typer varmeovner for offshore og maritim industri. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

x_1 = antall produserte varmeovner av type 1 per dag

x_2 = antall produserte varmeovner av type 2 per dag

Inntekten til Glamox ved salg av slike varmeovner er da gitt ved inntektsfunksjonen:

$$i(x_1, x_2) = 1200x_1 + 1750x_2 \quad (4.32)$$

Denne inntektsfunksjonen er gitt i norske kroner (NOK).
Glamox ønsker å maksimere denne inntekten.



Figure 4.1: Glamox heating.

Avdelingen til Glamox som kun driver med produksjon av disse varmeovnene har begrenset med ressurser. Per dag har de 75 timer disponibelt til produksjon av komponenter, 160 timer til montering og kun 30 timer til pakking. Disse **restriksjonene** kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$\text{restriksjoner : } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 75 & (\text{produksjon av komponenter}) \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 160 & (\text{montering}) \\ x_1 + x_2 \leq 30 & (\text{pakking}) \end{cases} \quad (4.33)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$.

- a) Hva er prisen på en ovn av type 1? Og type 2?
Hvor lang tid brukes på å pakke en ovn av type 1? Og type 2? ¹

- b) Gjør om ulikhetene i lign.(4.33) til likheter og vis at restriksjonene kan skrives

$$x_2(x_1) = 25 - x_1 \quad (4.34)$$

$$x_2(x_1) = 20 - \frac{1}{2}x_1 \quad (4.35)$$

$$x_2(x_1) = 30 - x_1 \quad (4.36)$$

hvor x_2 er en funksjon av x_1 .

¹I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

- c) I vedlegget bakerst i denne øvingen finner du tre verditabeller og et koordinatsystem.

Fyll ut verditabellene og plott lign.(4.34), (4.35) og (4.36) i dette koordinatsystemet.²

- d) Skraver det området i figuren som tilfredsstiller alle restriksjonene.

- e) Vil "pakking" være en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av x_1 og x_2 ?

- f) Inntekten i lign.(4.32) skal **maksimeres** under restriksjonene beskrevet av lign.(4.33). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.

- i) Indiker alle *hjørneløsninger* på figuren fra oppgave d).
- ii) Les av alle *hjørneløsninger*³ fra grafen og regn ut tilhørende inntekt $i(x_1, x_2)$.
- iii) Hvilken kombinasjon av x_1 og x_2 gir *maksimal* inntekt $i(x_1, x_2)$?

■

²Husk at vedlegget skal legges ved i din innlevering.

Husk også å skrive inn ditt studentnummer på vedlegget.

³Dvs. les av koordinatene (x_1, x_2) for alle *hjørneløsningene*.

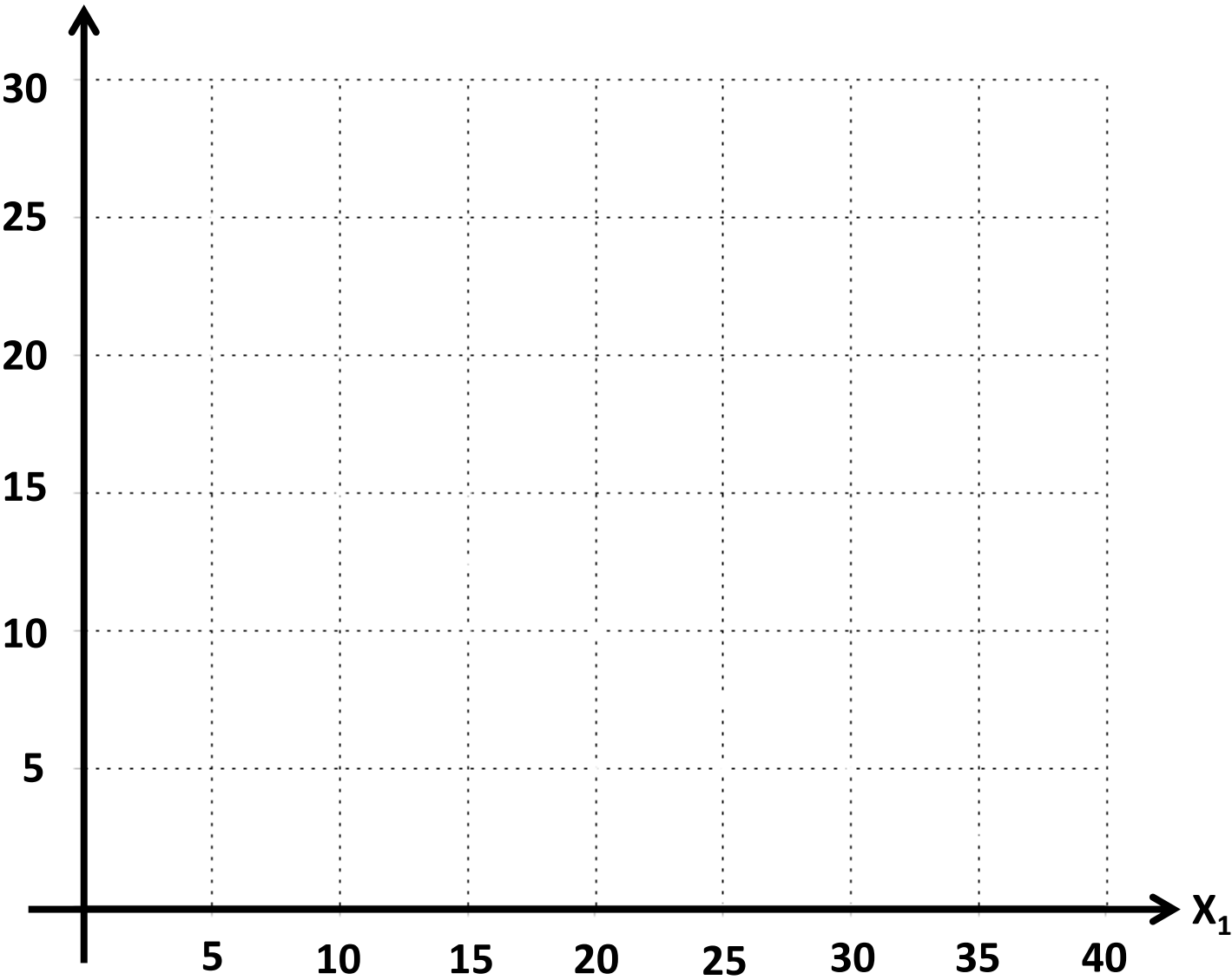
Vedlegg

x_1	0	10	20	25
$x_2(x_1)$				

x_1	0	10	20	40
$x_2(x_1)$				

x_1	0	10	20	30
$x_2(x_1)$				

$x_2(x_1)$



Problem 4.10 — Globale og lokale ekstremalpunkt

- a) Vi har to typer ekstremalpunkt. Hvilke?
- b) Figur 4.2 viser en funksjon som har definisjonsmengde $D_f = [0.1, 1.1]$. Marker ekstremalpunktene på figuren. ⁴

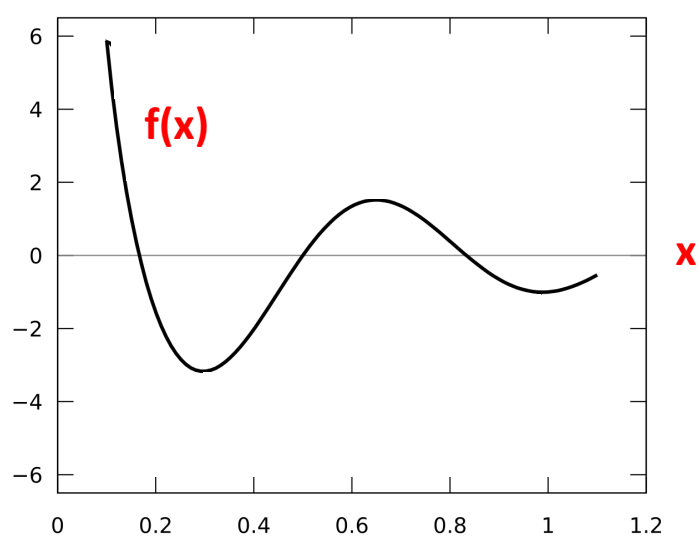


Figure 4.2: Globale og lokale ekstremalpunkter.

■

⁴Du kan tegne av figuren i besvarelsen din.

Problem 4.11 — Lokale ekstremalpunkt

Setning 4.0.1 — 1. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt ekstremalpunkt } x = c \quad \Rightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad (4.37)$$

1. derivasjonstesten er en nødvendig kriterium for lokale ekstremalpunkt.

- a) Sier 1. derivasjonstesten noe om lokale eller globale ekstremalpunkter?
Eller begge deler?
- b) Gi en geometrisk tolkning av 1. derivasjonstesten.
- c) Hva bruker vi 1. derivasjonstesten til?

1. derivasjonstesten

Kriteriet $\frac{df(c)}{dx} = 0$ er et **nødvendig**, men **ikke tilstrekkelig** kriterium for at $x = c$ skal representere et lokalt ekstremalpunkt.

Eksempel:

For funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 1$ så er $\frac{df(c)}{dx} = 0$ for $x = 1$. Likevel ser vi av figur 4.3 at $x = 1$ **hverken** representerer et lokalt minimumpunkt **eller** maksimumpunkt.

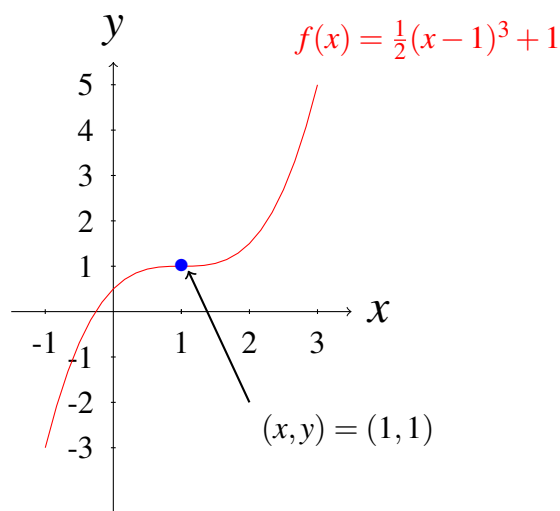


Figure 4.3: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 1$.

2. der. testen

Vi trenger derfor en **ekstra test** for å finne ut:

- i) om $x = c$ faktisk er et lokalt ekstremalpunkt eller ei
- ii) om $x = c$ er et lokalt maksimum eller lokalt minimum

Denne **ekstra testen** heter 2. derivasjonstesten:

Setning 4.0.2 — 2. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt maksimum } x = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2f(c)}{dx^2} < 0 \quad (\text{negativ}) \quad (4.38)$$

$$\text{lokalt minimum } x = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2f(c)}{dx^2} > 0 \quad (\text{positiv}) \quad (4.39)$$

- d) Gi en geometrisk tolkning av 2. derivasjonstesten.

■

Problem 4.12 — Vendepunkt

La oss igjen se på funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 1 \quad (4.40)$$

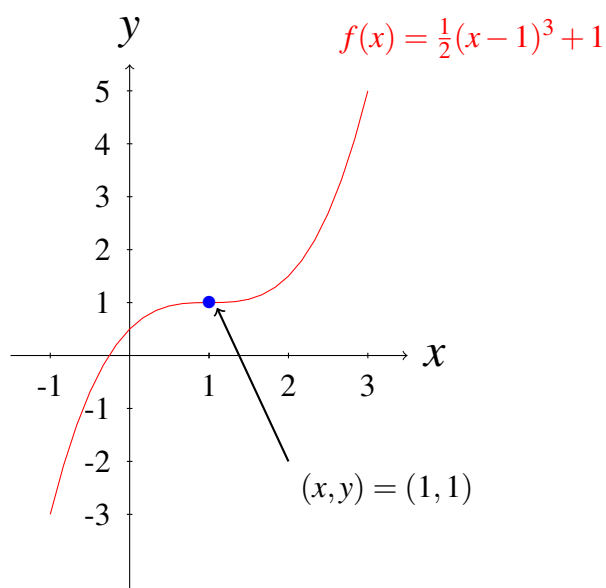


Figure 4.4: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 1$.

- a) Finn kandidatene for de lokale ekstremalpunktene til $f(x)$ ved hjelp av 1. derivasjonstesten.
- b) Er punktet $(x, y) = (1, 1)$ et lokalt ekstremalpunkt? Begrunn svaret ved regning.

■

Problem 4.13 — Lokale ekstremalpunkt ved regning I

La oss se på følgende 3. gradsfunksjon:

$$f(x) = 8x^3 + 81x^2 - 42x - 8 \quad (4.41)$$

Funksjonen er plottet i figur 4.5:

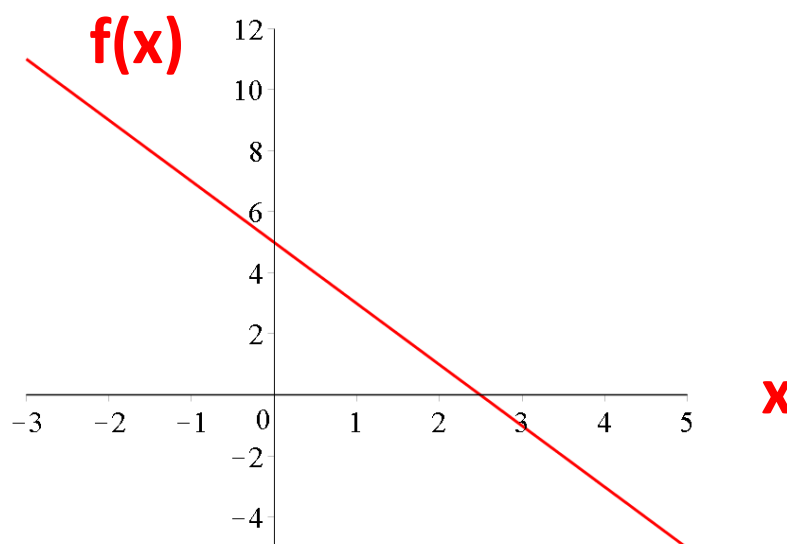


Figure 4.5: $f(x) = 8x^3 + 81x^2 - 42x - 8$.

Vi ønsker å regne ut de lokale ekstremalpunktene ved hjelp av 1. og 2. derivasjonstesten.

a) Regn ut $\frac{df(x)}{dx}$.

b) Via ABC-formelen kan man kan vise at $f'(x)$ fra oppgave a) kan faktoriseres på følgende måte: ⁵

$$f'(x) = 24x^2 + 162x - 42 = \underbrace{6(4x - 1)(x + 7)}_{\text{faktorisert form}} \quad (4.42)$$

Finn alle **kandidatene** til **lokale ekstremalpunkter** til $f(x)$ via 1. derivasjonstesten. ⁶

c) Finn de lokale maksimum- og minimumpunktene via 2. derivasjonstesten.

■

⁵Du skal ikke bevise lign.(4.42). Bare ta den for gitt.

⁶Når du skal finne punkter så må du angi både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. angi (x, y) .

Problem 4.14 — Lokale ekstremalpunkt ved regning II

La oss se på følgende 5. gradsfunksjon:

$$f(x) = 3x^5 - 45x^3 + 100 \quad (4.43)$$

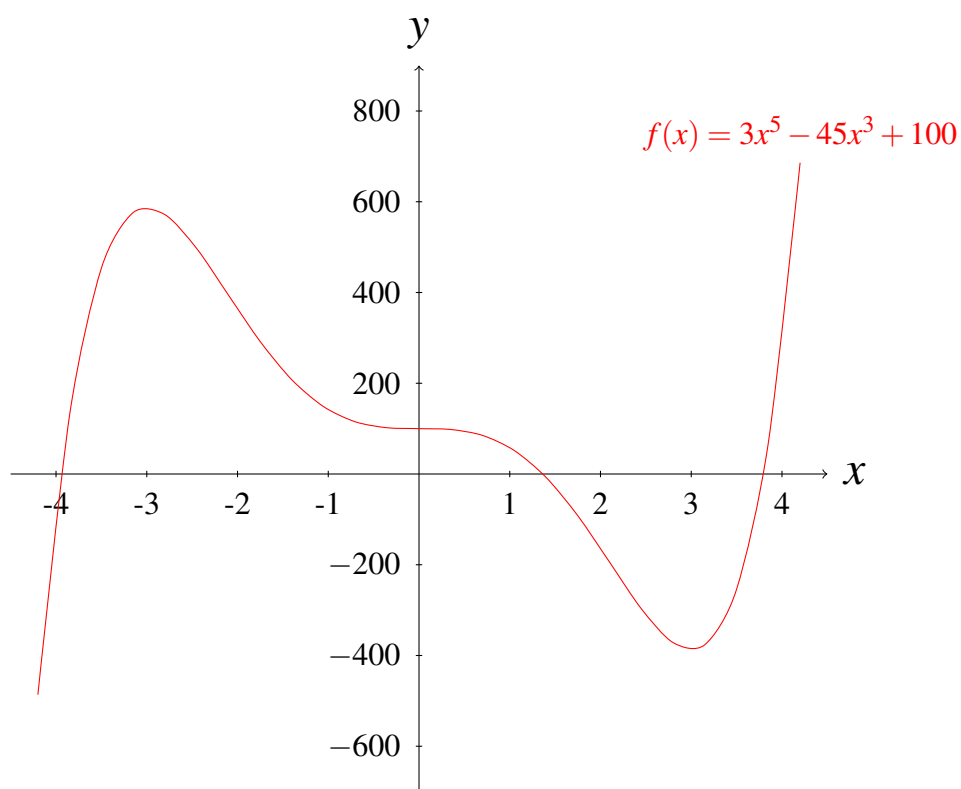


Figure 4.6: Funksjonen $f(x) = 3x^5 - 45x^3 + 100$.

- a) Regn ut $\frac{df(x)}{dx}$.
- b) Finn alle **kandidatene** til **lokale ekstremalpunkter** bestemt av 1. derivasjonstesten.⁷
- c) For **kandidatene** til **lokale ekstremalpunkter** fra oppgave b) ovenfor, bruk 2. derivasjonstesten uten bruk av fortegnsskjema til å finne ut **hva slags type** lokale ekstremalpunkt de representerer.⁸
- d) Samme oppgave som c), men bruk denne gangen den andre formuleringen av 2. derivasjonstesten og sett opp et fortegnsskjema.⁹
- e) Punktet $x = 0$ representerer hverken lokalt maksimum eller lokalt minimum. På tross av det er den første deriverte lik null for $x = 0$.
- Er det i konflikt med 1. derivasjonstesten?
Begrunn svaret.
-

⁷For å finne kandidatene til de lokale ekstremalpunktene må man finne faktorisere $\frac{df(x)}{dx}$. Husk i den sammenheng at $135 = 15 \cdot 9$.

⁸Hva slags type, da tenker vi på om punktene representerer et maksimumpunkt, minimumpunkt eller ingen av delene. I sistnevnte tilfelle for vår funksjon $f(x)$ kalles punktet et "vendepunkt".

⁹Dersom du tar en titt i kompendiet så ser du at det er to formuleringer av 2. derivasjonstesten.

Problem 4.15 — Kartellvirksomhet i Colombia på 80-tallet

I tidsrommet 1980 - 1995 regjerte narkokartellene i Colombia.

Narkotikaen de solgte var et hvitt melaktig pulver laget av kokaplantene som dessverre store deler av USA sin yngre befolkning raskt ble avhengig av.



Figure 4.7: Narkotika.

Narkobaronen Pablo Escobar var den store kongen på midten av 80-tallet.



Figure 4.8: Pablo Escobar.

Pablo Escobar styrte det såkalte Medellin-kartellet, som i [allianse](#) med bl.a. Cali-kartellet leverte 96 % av det totale narkotikamarkedet i USA på midten av 80-tallet. Kartellet tjente på den tiden grovt sett ca. 100 million dollar per dag i profitt (!).



Figure 4.9: [Allianse](#) mellom Medellin-kartellet og Cali-kartellet.

Som for de fleste kartellallianser varte ikke samarbeidet med Calikartellet. Brødrene Gilberto og Miguel Rodriguez Orejuela gikk sammen med Pacho Herrera **ut** av alliansen og var i **konkurranse** med Medellin-kartellet på slutten av 80-tallet.



Figure 4.10: Cali-kartellet gikk **ut** av alliansen med Medellin-kartellet.

Markedet i USA for hvitt pulver fra Colombia gjennomgikk derfor to faser ila. perioden 1980-1995:

Fase 1: Tidlig 80-tall:

Medellin-kartellet hadde **monopol** sammen med Cali-kartellet. Begge kartellene tjente da ekstremt mye penger siden de fikk en "**optimal**" pris for produktet. ¹⁰

Fase 2: Slutten 80-tall:

Medellin-kartellet var i **duopol** sammen med Cali-kartellet. Begge kartellene tjente da **mindre** enn når de samarbeidet. ¹¹

¹⁰Et marked hvor det kun er *én* aktør.

¹¹Et marked hvor det kun er *to* aktører.

Vi skal i denne gruppeoppgaven bruke det vi har lært om å **derivere** og finne ekstremalpunkter samt økonomisk teori, for å forstå hvorfor aktørene gikk vekk fra en lukrativ allianse og inn i en konkurransetilstand hvor begge parter tjente mindre penger.

Kartellene vurderte hvor mange tonn hvitt pulver de skulle smugle til USA hver uke.

Definisjoner:

$$q_1 = \text{antall tonn hvitt pulver smuglet til USA av Medellin-kartellet per uke} \quad (4.44)$$

$$q_2 = \text{antall tonn hvitt pulver smuglet til USA av Cali-kartellet per uke} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} Q &= q_1 + q_2 \\ &= \text{antall tonn hvitt pulver smuglet til USA totalt per uke} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\pi_1 = \text{ukentlig profitt for Medellin-kartellet (i mill. dollar)} \quad (4.47)$$

$$\pi_2 = \text{ukentlig profitt for Cali-kartellet (i mill. dollar)} \quad (4.48)$$

Antagelser: (alle pris- og kostnadstall i millioner dollar)

1. Vi antar begge kartellene hadde samme kostnadsfunksjon:

$$c(q) = 30 + 16q \quad (\text{kostnaden å smugle } q \text{ tonn hvitt pulver til USA}) \quad (4.49)$$

Denne kostnaden innbærte alt fra råvarefangst, produksjon, lager og transport samt fastkostnader som lønning av ansatte, våpen, bestikklser, smøring, fester osv.

2. Pris-etterspørsel funksjonen var gitt ved:

$$p(Q) = 192 - 22Q \quad (\text{prisen dersom } Q \text{ tonn ble smuglet til USA}) \quad (4.50)$$

Fase 1: (**monopol**-allianse, tidlig 80-tall)

Når kartellene hadde en allianse, opererte de som en aktør med monopol på markedet. Målet var da å maksimere profitten totalt.

- a) Vis at den totale profitten π som alliansen fikk dersom de solgte totalt Q kilo var gitt ved ¹²

$$\pi(Q) = -22Q^2 + 176Q - 30 \quad (4.51)$$

- b) Bestem antall tonn hvitt pulver Q^* som kartellene måtte smugle til USA per uke for å maksimere profitten til alliansen.

- c) Bestem hvor mye alliansen hadde totalt i profitt π^* hver uke.

- d) Anta kartellene hadde samme kapasitet og smuglet dermed **like mye** til USA hver uke. ¹³

Hvor mye smuglet kartellene hver for seg, dvs. hva var q_1^* og q_2^* ?

Hvor mye profitt hadde kartellene individuelt per uke, dvs. hva var π_1^* og π_2^* ?

¹²Profitt er lik inntekter minus kostnader. Inntekter er lik pris multiplisert med antall kilo solgt.

¹³Denne antagelsen er ikke helt rett og tatt med for enkelthetens skyld da Medellín-kartellet hadde langt større kapasitet enn Cali-kartellet på denne tiden. I virkeligheten styrte Medellín-kartellet alliansen med hard hånd hvor mye Cali-kartellet fikk levere, som sannsynligvis var svært lavt ift. Medellín-kartellet.

Fase 2: (**duopol**-konkurranse, sent 80-tall)

Mot slutten av 80-tallet begynte DEA ("Drug Enforcement Administration") og de lokale myndighetene å presse Pablo Escobar. Medellin-kartellets makt ble svekket.

Cali-kartellet så da sitt snitt i å bryte alliansen, for dermed å oppnå høyere profitt på bekostning av Medellin-kartellet.

Vi skal nå begrunne hvordan Cali-kartellet kunne trekke ut mer profitt ved å bryte alliansen.

- e) Anta Medellin-kartellet forholder seg til avtalen og produserer $q_1 = 2$ tonn hvitt pulver per uke.

Anta videre at Cali-kartellet i det stille bestemmer seg for å bryte alliansen. De vil dermed maksimere sin *egen* profitt.

Vis at profittfunksjonen til Calikartellet er gitt ved

$$\pi_2(q_2) = -22q_2^2 + 132q_2 - 30 \quad (4.52)$$

under antagelsen at Medellin-kartellet smugler $q_1 = 2$ tonn i uken.

- f) Bestem antall tonn q_2^* som Cali-kartellet i det stille vil smugle over grensen for å maksimere sin egen profitt under antagelsen at Medellin-kartellet smugler $q_1 = 2$ tonn i uken.

- g) Regn ut prisen i markedet for den nye situasjonen.

- h)** Bestem hvor mye profitt Medellin- og Cali-kartellet får hver for seg når Cali-kartellet følger sin lumske plan, dvs. bestem π_1 og π_2 .

Hva blir den totale profitten for begge aktørene og hvor mye stjeler Cali-kartellet fra Medellin-kartellet hver uke?

Slikt blir det narkokrig av!

■



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

5. Eksponential- og logaritmefunksjoner

Problem 5.1 — Eksponentialfunksjon VS polynom

a) Funksjoner:

$$i) \quad f(x) = 3^x \quad (5.1)$$

$$ii) \quad g(x) = x^3 \quad (5.2)$$

Hva slags type funksjoner er dette?

b) Plott funksjonene i lign.(5.1) og (5.2). ¹

■

¹Bruk gjerne GeoGebra.

Problem 5.2 — Renteformelen - rentes rente - diskret vekst

En størrelse som vokser eller avtar med en fast prosent per tidsenhet, vokser eller avtar **eksponentielt**.

Vi skiller mellom:

- diskret vekst
 - Når veksten skjer ved **bestemte** (tellbare) **tidspunkt**, f.eks. på slutten av hver tidsperiode, så er veksten **diskret**.
- kontinuerlig vekst
 - Når veksten skjer **jevnt** hele tiden, så er veksten **kontinuerlig**.

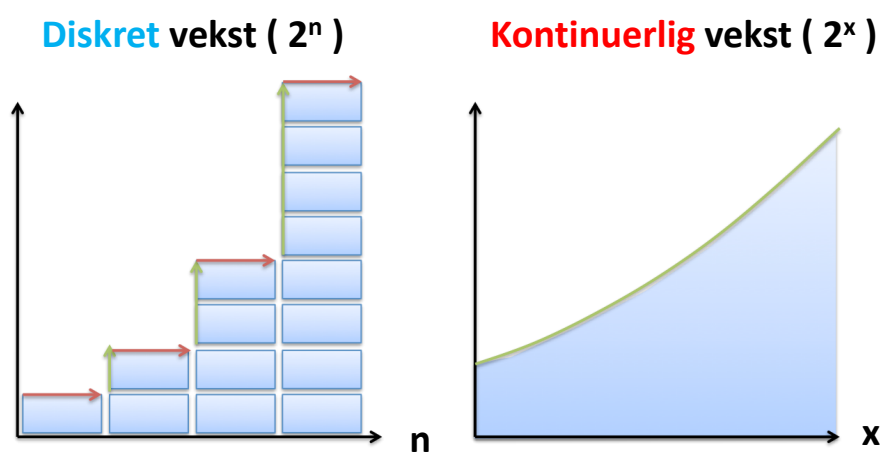


Figure 5.1: **Diskret** vekst og **kontinuerlig** vekst.

I kompendiet utledet vi renteformelen:

$$K(n) = K(0)(1 + r)^n \quad (5.3)$$

hvor

$$K(n) = \text{kapitalen etter } n \text{ år (eller } n \text{ terminer)} \quad (5.4)$$

$$K(0) = \text{startkapital, dvs. kapital etter 0 år (eller 0 terminer): nåverdi} \quad (5.5)$$

$$r = \frac{p}{100} = \text{rente med } p \% \text{ per termin} \quad (5.6)$$

$$n = \text{antall år (eller antall terminer)} \quad (5.7)$$

- a) Hva slags type funksjon er lign.(5.3)?
- b) Hva er vekstfaktoren i lign.(5.3)?
- c) Du setter inn $K_0 = 150\,000$ NOK i starten av et år.
Anta at renten er 6 %, dvs. $r = \frac{6\%}{100\%} = 0.06$.

Hvor mye kapital har du i banken etter 8 år? ²



Figure 5.2: Bank.

²Rund av til nærmeste hele krone.

Problem 5.3 — Avskrivning - diskret nedgang

En bil koster 50 000 NOK.

Anta at bilens verdi taper seg med 12 % per år.

- a) Hva er vekstfaktoren? ³
- b) Hva er bilens verdi etter 5 år? ⁴

Her anbefales det at du introduserer en hensiktsmessig notasjon.
Prøv først å skriv ned den relevante formelen med bokstaver. ⁵
Sett så til slutt inn tallene.



Figure 5.3: Bil.

³Vi kaller det vekstfaktor selv om vi har en funksjon som er avtagende.

⁴Rund av til nærmeste hele krone.

⁵Dersom renteformelen i lign.(??) representerer formelen for diskret vekst, hva tror du da formelen for diskret nedgang er?

Problem 5.4 — Derivasjon - eksponential funksjon

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = e^{3x} \quad (5.8)$$

$$ii) \quad f(x) = e^{-x} \quad (5.9)$$

$$iii) \quad f(x) = e^{x^2} e^{-7x} \quad (5.10)$$

$$iv) \quad f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{7x}} \quad (5.11)$$

■

Problem 5.5 — Eulers tall

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (5.12)$$

Regn ut funksjonsverdiene. Bruk 4 desimalers nøyaktighet.

$$i) \quad f(0.01) \quad (5.13)$$

$$ii) \quad f(1) \quad (5.14)$$

$$iii) \quad f(10) \quad (5.15)$$

$$iv) \quad f(100) \quad (5.16)$$

b) Mot hvilket tall konvergerer $f(x)$ når $x \rightarrow \infty$?

c) Deriver funksjonene:

$$i) \quad F(x) = 1000e^{1+2x^{3/2}} \quad (5.17)$$

$$ii) \quad f(x) = \sqrt{e^x} \quad (5.18)$$

$$iii) \quad f(x) = \sqrt{e^{-x}} \quad (5.19)$$

$$iv) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}} \quad (5.20)$$

■

Problem 5.6 — Markedføring - Kahoot Plus

Kahoot er en sosial app hvor man kan lage spørrekonkurranser online. Kahoot brukes også mye i skolesammenheng for å gjøre læring artigere for elever og studenter.

Figur 5.6 viser selve grensesnittet for spillet, hvor et spørsmål dukker opp på en felles skjerm som alle spillerne ser. Man svarer via Kahoot-appen på mobil.

På den måten kan svært mange spillere delta på det samme spillet, f.eks. i et klasserom eller på en fest, hvor spørsmålene vises på en prosjektør eller TV.

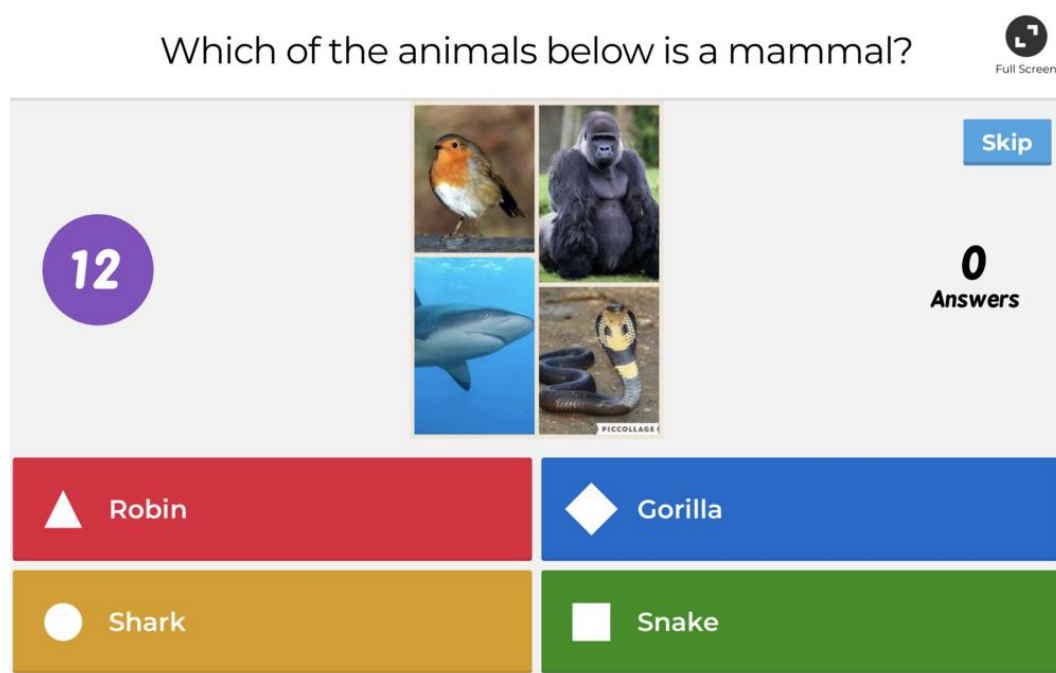


Figure 5.4: Kahoot.

Et av produktene til Kahoot er "*Kahoot Plus*", som gir muligheten for bedrifter å sette opp online Kahoot spill med opptil 20 spillere med mange gode fordeler, se figur 5.7.

Anta at markedsavdelingen til Kahoot, har estimert størrelsen på det totale markedet til Kahoot Plus til 10 millioner potensielle kunder, dvs. la $a = 10 \cdot 10^6$ kunder.

Kahoot har bestemt seg for å kjøre en **kontinuerlig reklamekampanje** for å verve nye brukere av *Kahoot Plus*.

Fra lignende kampanjer, ekspertuttalelser og spørreundersøkelser i markedet har et eksternt analyseselskap kommet frem til følgende responsfunksjon:

$$f(t) = 0.7(1 - e^{-0.2t}), \quad t \geq 0 \quad (5.21)$$

hvor

$$f(t) = \text{andel av det totale markedet} \quad (5.22)$$

som har respondert på reklamekampanjen etter t dager

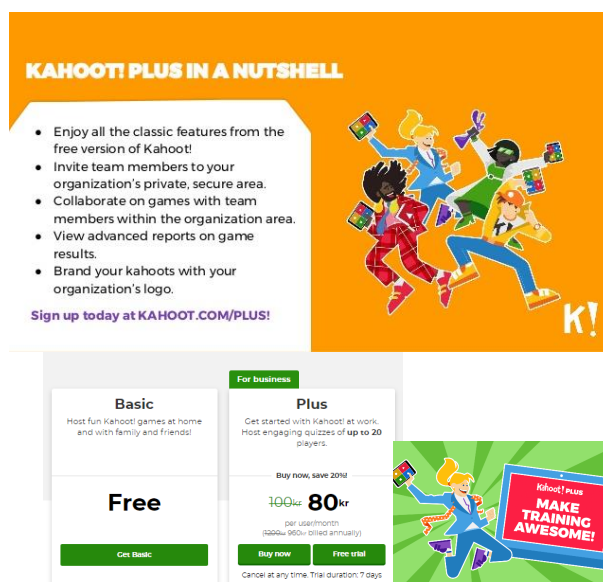


Figure 5.5: Kahoot Plus.

Anta at Kahoot tjener $i_0 = 20$ NOK i gjennomsnitt for hver respons de får fra kampanjen.

Anta videre at kampanjen kostet $c = 300\,000$ NOK å produsere og $k = 50\,000$ NOK å kjøre per dag.

- a) Hva er den horisontale asymptoten til $f(t)$, dvs. hva blir $f(t)$ når $t \rightarrow \infty$.
Gi en tolkning av asymptoten.
- b) Hvor stor prosent av markedet har respondert etter 7 dager?
- c) Skriv opp funksjonen for fortjenesten π som Kahoot har fått etter t dager.
Hva blir profitten etter 7 dager?
Avrund svaret til nærmeste heltall.
- d) Skisser grafen for fortjenesten $\pi(t)$.⁶
Er det enkelt å lese av tiden hvor fortjenesten er maksimal?
- e) Etter hvor mange dager t^* oppnår Kahoot maksimal fortjeneste π^* ?
Finn svaret ved regning og bruk 2. derivasjonstesten til å forsikre deg om at du har funnet et maksimum.⁷
- Hva er den maksimale fortjenesten $\pi^* = \pi(t^*)$?
Avrund svaret til nærmeste heltall.

■

⁶Husk at $D_\pi = [0, \rightarrow)$. Bruk gjerne Geogebra. Bare tegn av GeoGebra for hånd.

⁷Bruk at løsning av ligningen

$$e^{-0.2t} = \frac{k}{i_0 a 0.14} = \frac{5}{2800} \quad (5.23)$$

er gitt ved $t = 31.6$.

Problem 5.7 — $\ln(x)$ og $\log(x)$

a) Regn ut **uten** bruk av kalkulator:

$$i) \quad 10^{\log(2.3)} \quad (5.24)$$

$$ii) \quad 10^{\log(5^2)} \quad (5.25)$$

$$iii) \quad 10^{\log(1.2 \cdot 10^3)} \quad (5.26)$$

b) Regn ut **uten** bruk av kalkulator:

$$i) \quad e^{\ln(2.3)} \quad (5.27)$$

$$ii) \quad e^{\ln(5^2)} \quad (5.28)$$

$$iii) \quad e^{\ln(1.2 \cdot 10^3)} \quad (5.29)$$

c) Regn ut.

$$i) \quad e^{\log(2.3)} \quad (5.30)$$

$$ii) \quad 10^{\ln(5^2)} \quad (5.31)$$

$$iii) \quad e^{\log(1.2 \cdot 10^3)} \quad (5.32)$$

■

Problem 5.8 — Regneregler

a) Forenkle funksjonene om mulig:

$$i) \quad f(x) = \ln(x^2 e^x) \quad (5.33)$$

$$ii) \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{e^{2x}}\right) \quad (5.34)$$

$$iii) \quad f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad (5.35)$$

$$iv) \quad f(x) = \log(x^2 - 1) \quad (5.36)$$

$$v) \quad f(x) = e^{\ln(x^2 - 1)} \quad (5.37)$$

b) Regn ut.

$$i) \quad \ln 1 \quad (5.38)$$

$$ii) \quad \ln e \quad (5.39)$$

$$iii) \quad \log 10 \quad (5.40)$$

$$iv) \quad e^{\log 10} \quad (5.41)$$

$$v) \quad 10^{\log 2.8} \quad (5.42)$$

$$vi) \quad e^{\log 2.8} \quad (5.43)$$

$$vii) \quad \ln 10 \quad (5.44)$$

■

Problem 5.9 — Løse ligninger

a) Løs ligningene:

$$i) \quad 4^x = 550 \quad (5.45)$$

$$ii) \quad 128\,000 = 91\,000 \cdot 1.051^t \quad (5.46)$$

$$iii) \quad 6e^{0.2x} = 9 \quad (5.47)$$

$$iv) \quad 10^{-x/2} = 5 \quad (5.48)$$

$$v) \quad e^{-x/2} = 5 \quad (5.49)$$

b) Anta at folketallet i en kommune etter tiden t kan beskrives ved:

$$f(t) = 1500e^{-0.018t} \quad (5.50)$$

Hvor lang tid vil det tar før folketallet har blitt redusert til 1250?

c) Anta at prisen på en vare vokser med r % per år ihht. til funksjonen:

$$p(t) = p_0 e^{rt/100} \quad (5.51)$$

hvor $p_0 = 895$ NOK er prisen ved tidspunktet $t = 0$.

Anta at etter 5 år har prisen vokst til 1020 NOK.

Finn r .⁸

■

⁸Oppgi svaret med 1 desimals nøyaktighet.

Problem 5.10

Definisjon 5.0.1 — logaritmen m/e som grunntall

Logaritmen til et tall x er den eksponenten vi må opphøye Eulers tall e i for å få x :

$$e^{\ln x} = x \tag{5.52}$$

altså $\ln(x)$ = den naturlige logaritmen = $\underbrace{\text{det tallet vi må opphøye } e \text{ i for å få } x}_{\text{NB!}}$.

- a) Bruk definisjonen i lign.(5.52) og vis at:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \tag{5.53}$$

Tips:

Bruk kjerneregelen. Deriver lign.(5.52) på begge sider.

■

Problem 5.11 — Derivasjon av $\ln$

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = \ln x \quad (5.54)$$

$$ii) \quad f(x) = \ln(x^2) \quad (5.55)$$

$$iii) \quad f(x) = \ln(e^{x^2}) \quad (5.56)$$

b) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = x \ln x \quad (5.57)$$

$$ii) \quad f(x) = x \ln(x^2) \quad (5.58)$$

$$iii) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (5.59)$$

■

Problem 5.12 — Cobb-Douglas produktfunksjon - *Stabburet*

I 1928 publiserte Paul Douglas og Charles Cobb en studie om veksten til den amerikanske økonomien i perioden 1899 - 1922.

De så på en forenklet modell hvor de prøvde å beskrive den totale produksjonen i USA ved hjelp av to *produksjonsfaktorer*:⁹

- *Arbeidskraft*, som de ga symbolet L (for "Labour").
- *Realkapital*, som de ga symbolet K .
Realkapital var for eksempel gjenstander som bidro til produksjonen, og som kunne brukes over lengre tid, for eksempel bygninger, utstyr, maskiner, og lignende. Alt som ikke var arbeidskraft falt under denne kategorien.

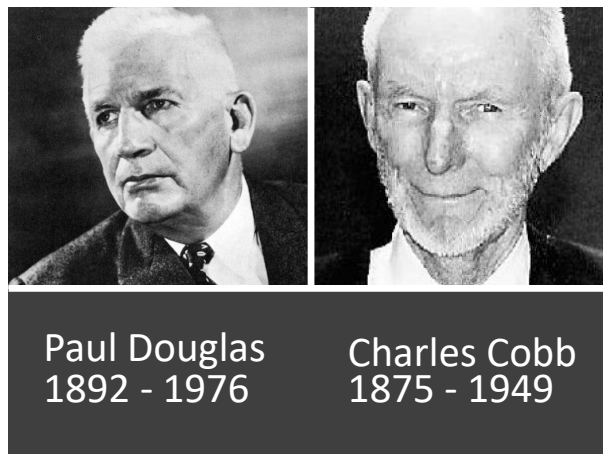


Figure 5.6: Charles Cobb og Paul Douglas.

⁹Denne oppgaven har hentet inspirasjon fra kompendiet til Erik Langelo i emnet "SØK200 Mikrøkonomi".

Funksjonen de brukte for å tilpasse dataene var på formen:

$$P = bL^\alpha K^\beta \quad (\text{Cobb-Douglas produktfunksjon}) \quad (5.60)$$

hvor

$$P = \text{den totale produksjonen i antall enheter produsert} \quad (5.61)$$

$$L = \text{arbeidskraften i antall timer} \quad (\text{variabel}) \quad (5.62)$$

$$K = \text{investert realkapital i antall 10 000 NOK} \quad (\text{variabel}) \quad (5.63)$$

$$b = \text{produktivitetsfaktoren} \quad (\text{parameter}) \quad (5.64)$$

$$\alpha = \text{produksjonselastisiteten mhp. arbeidskraft} \quad (\text{parameter}) \quad (5.65)$$

$$\beta = \text{produksjonselastisiteten mhp. kapital} \quad (\text{parameter}) \quad (5.66)$$

Produktfunksjonen i lign.(5.60) var en oppsiktsvekkende god tilnærming til de reelle dataene Paul Douglas og Charles Cobb hadde i 1928. Funksjonen ble dermed en suksess og blir derfor mye brukt i bedriftsøkonomien verden rundt.

La oss først prøve å forstå de tre parameterne b , α og β .

- a) Sett $L = 1$ og $K = 1$ inn i lign.(5.60) og gi en kort **tolkning** hva parameteren b står for.

- b) Vis at parameteren α er lik produksjonselastisiteten mhp. arbeidskraft, dvs. vis at:¹⁰

$$\frac{dP}{dL} \frac{L}{P} = \alpha \quad (5.67)$$

- c) Vis at parameteren β er lik produksjonselastisiteten mhp. realkapital investert, dvs. vis at:

$$\frac{dP}{dK} \frac{K}{P} = \beta \quad (5.68)$$

¹⁰Begrepet "elastisitet" introduserte vi i øving 12.

Nå som vi har etablert en forståelse av Cobb-Douglas produkfunksjon, la oss anvende den på et reelt case.

Anta at fabrikkene på Stranda på Sunnmøre, som produserer hele Norges kjente og kjære Grandiosa, har estimert følgende Cobb-Douglas produktfunksjon:

$$P = bL^{\alpha}K^{\beta} \quad (5.69)$$

hvor

$$b = 2\,000 \quad (5.70)$$

$$\alpha = 0.4 \quad (5.71)$$

$$\beta = 0.6 \quad (5.72)$$

Anta videre at fabrikkssjefen ved Stranda har fått et budsjett på $B = 40$ millioner NOK til produksjonen.

Kostnaden for arbeidskraft er $w = 1\,000$ NOK/time og at kostnaden per 10 000 investerte kroner er $r = 1\,000$ NOK.



Figure 5.7: Pizza Grandiosa.

d) Forklar kort hva følgende ligning sier: ¹¹

$$B = wL + rK \quad (\text{"budsjettligningen"}) \quad (5.73)$$

¹¹Forklar gjerne hva hvert ledd i lign.(5.73) betyr.

Hovedmålet til fabrikkssjefen er å produsere **maksimalt antall pizzaer** i året med det budsjettet han har fått.

Han leier derfor inn flinke studenter ved Høgskolen i Molde til å bestemme hvor mye arbeidskraft L og realkapital K han skal bruke for å maksimere antall pizzaer.

Studentene bestemmer seg for følgende **strategi**:

1. Bruk **budsjettligningen** til å uttrykke variablen K som funksjon av L .
2. Sett inn uttrykket for K i Cobb-Douglas produktfunksjonen i lign.(5.69).
3. Ta **ln** av venstre og høyre side av Cobb-Douglas produktfunksjonen i lign.(5.69). Dette gjør derivasjonen enklere.
4. **1. derivasjonstesten**:
Deriver den nye funksjonen mhp. arbeidskraften L og finn alle kandidatene til lokale ekstremalpunkt.
5. **2. derivasjonstesten**:
Bestem eventuelle lokale maksima og minima.
6. Bestem det optimale mengden arbeidskraft L^* og bruk budsjettligningen til å finne tilhørende optimal realkapital K^* .
7. Bestem det optimale antallet pizzaer P^* fabrikkssjefen kan produsere ila. 1 år slik at budsjettet er oppfylt.

- e) Punkt 1 i strategien:
Vis at budsjettlikningen gir følgende sammenheng mellom L og K :

$$K = \frac{1}{r}(B - wL) \quad (\text{"budsjettlikningen" omskrevet}) \quad (5.74)$$

- f) Punkt 2 i strategien:
Vis, ved å sette inn lign.(5.74) i produktfunksjonen, at:

$$P = \frac{b}{r^\beta} L^\alpha (B - wL)^\beta \quad (5.75)$$

- g) Punkt 3 i strategien:
Ta $\ln$ av høyre og venstre side av produktfunksjonen i lign.(5.76) og vis at:

$$\ln P = \ln \left(\frac{b}{r^\beta} \right) + \alpha \ln L + \beta \ln(B - wL) \quad (5.76)$$

- h) Punkt 4 i strategien:
Finn den deriverte av $\ln P$ i lign.(5.76) mhp. L og vis at den eneste kandidaten for ekstremalpunkt er gitt ved:

$$L^* = \frac{B}{w} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (5.77)$$

Regn ut verdien til L^* .

i) Punkt 5 i strategien:

Vis ved 2. derivasjonstesten at kandidaten funnet i oppgave h) faktisk er et lokalt maksimumspunkt, dvs. vis at:

$$\frac{d^2 \ln P}{dL^2} < 0 \quad (5.78)$$

når L er som gitt i lign.(5.79).

j) Punkt 6 i strategien:

Bruk budsjettligningen til å vise at den tilhørende optimale realkapitalen K^* er gitt ved:

$$K^* = \frac{B}{r} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (5.79)$$

Regn ut verdien til K^* .

k) Punkt 7 i strategien:

Regn ut maksimalt antall pizzaer P^* fabrikkssjefen klarer å produsere under det fastsatte budsjettet.

■