



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høgskole i logistikk

4. Derivasjon

Øving 3: Løsning

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 01

- Utlevering:
 - Mandag 21. sep. kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - senest mandag 19. okt. kl. 12:00
 - dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- FORarbeid:
 - Se videoene for uke 5
 - Les kompendiet.
 - Se eksempel videoer
- ETTERarbeid:
 - Gå gjennom løsning 3 som legges ut fredag 16. okt. kl. 12:00.

Problem 4.6 — Derivasjon - mix 1

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = x^2 - 2x \quad (4.1)$$

$$ii) \quad f(x) = (x^2 - 2x)^4 \quad (4.2)$$

$$iii) \quad f(x) = 7x\sqrt{x} \quad (4.3)$$

$$iv) \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad (4.4)$$

Løsning:

i) Deriver:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x) = 2x - 2 \quad (4.5)$$

ii) Sammensatt funksjon:

$$f(x) = (x^2 - 2x)^4 \quad (4.6)$$

hvor

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \quad (4.7)$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjernen)} \quad (4.8)$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(u(x)) \quad (4.9)$$

hvor

$$g(u) = u^4 \quad (\text{ytre funksjon}) \quad (4.10)$$

$$u(x) = x^2 - 2x \quad \underbrace{(\text{indre funksjon})}_{\text{kjerne}} \quad (4.11)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre} \right)' \left(\text{indre} \right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.12)$$

$$= g'(u) u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.13)$$

$$= \left(u^4 \right)' (x^2 - 2x)' \quad (4.14)$$

$$= 4u^3 \cdot (2x - 2) \quad (4.15)$$

$$= 4(x^2 - 2x)^3 (2x - 2) \quad \text{sett inn } u = x^2 - 2x \quad (4.16)$$

$$= 8(x^2 - 2x)^3 (x - 1) \quad 2x - 2 = 2(x - 1) \quad (4.17)$$

iii) Omskriving:

$$f(x) = 7x\sqrt{x} = 7x^{1+1/2} = 7x^{3/2} \quad (4.18)$$

Deriverer:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(7x^{3/2} \right) = 7 \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{21}{2} \sqrt{x} \quad (4.19)$$

iv) Omskriving:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{1/3} + x^{-1/3} \quad (4.20)$$

Deriverer:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(x^{1/3} + x^{-1/3} \right) \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{3} x^{1/3-1} + \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-1/3-1} \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{3} x^{-2/3} + \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-4/3} \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{3x^{2/3}} \left(1 - \frac{1}{x^{2/3}} \right) \quad (4.24)$$

b) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{3x^2} \quad (4.25)$$

$$ii) \quad f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 7} \quad (4.26)$$

$$iii) \quad f(x) = 2 + x \quad (4.27)$$

$$iv) \quad f(x) = 2x \quad (4.28)$$

Løsning:

i) Omskriving: ¹

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{3x^2} = \frac{x^3}{3x^2} + \frac{3x^2}{3x^2} + \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}x + 1 + \frac{1}{3}x^{-2} \quad (4.29)$$

Deriverer:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x + 1 + \frac{1}{3}x^{-2} \right) \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}(-2)x^{-3} \quad (4.31)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3x^3} \quad (4.32)$$

¹Man kan også løse denne oppgaven via derivasjonsregelen for en brøk, men metoden vist ovenfor er nok enklere og krever mindre arbeid.

ii) Sammensatt funksjon:

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 7} = (x^2 - 7)^{1/4} \quad (4.33)$$

hvor

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \quad (4.34)$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjernen)} \quad (4.35)$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(u(x)) \quad (4.36)$$

hvor

$$g(u) = u^{1/4} \quad (\text{ytre funksjon}) \quad (4.37)$$

$$u(x) = x^2 - 7 \quad \underbrace{(\text{indre funksjon})}_{\text{kjerne}} \quad (4.38)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre} \right)' \left(\text{indre} \right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.39)$$

$$= g'(u) u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.40)$$

$$= \left(u^{1/4} \right)' (x^2 - 7)' \quad (4.41)$$

$$= \frac{1}{4} u^{1/4-1} \cdot (2x - 0) \quad (4.42)$$

$$= \frac{1}{4} (x^2 - 7)^{-3/4} 2x \quad (\text{sett inn } u = x^2 - 7) \quad (4.43)$$

$$= \frac{x}{2(x^2 - 7)^{3/4}} \quad (4.44)$$

$$\text{iii) } f'(x) = \frac{d}{dx}(2+x) = 1 \quad (4.45)$$

$$\text{iv) } f'(x) = \frac{d}{dx}(2x) = 2 \quad (4.46)$$

■

Problem 4.7 — Derivasjon - mix 2

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = \left(\frac{1-x}{x+1} \right)^3 \quad (4.47)$$

$$ii) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (4.48)$$

$$iii) \quad f(x) = x^2 \quad (4.49)$$

$$iv) \quad g(q) = (q^2)^2 \quad (4.50)$$

Løsning:

i) Funksjon:

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{x+1} \right)^3 = \left(\frac{u}{v} \right)^3 \quad (4.51)$$

hvor

$$u = 1 - x \quad (4.52)$$

$$v = x + 1 \quad (4.53)$$

La oss derivere **brøken** først:

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (4.54)$$

$$= \frac{(1-x)'(x+1) - (1-x)(x+1)'}{(x+1)^2} \quad (4.55)$$

$$= \frac{(-1)(x+1) - (1-x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-1+x}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2} \quad (4.56)$$

Sammensatt funksjon:

$$f(x) = \left(\frac{1-x}{x+1} \right)^3 = (h(x))^3 \quad (4.57)$$

hvor

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \quad (4.58)$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjernen)} \quad (4.59)$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(h(x)) \quad (4.60)$$

hvor

$$g(h) = h^3 \quad (\text{ytre funksjon}) \quad (4.61)$$

$$h(x) = \frac{1-x}{x+1} \quad \underbrace{(\text{indre funksjon})}_{\text{kjerne}} \quad (4.62)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre} \right)' \left(\text{indre} \right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.63)$$

$$= g'(h) h'(x) \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.64)$$

$$= (h^3)' (h(x))' \quad (4.65)$$

$$= 3h^2 \left(-\frac{2}{(x+1)^2} \right) \quad (4.66)$$

$$= 3 \left(\frac{1-x}{x+1} \right)^2 \left(-\frac{2}{(x+1)^2} \right) \quad \left(\text{sett inn } h(x) = \frac{1-x}{x+1} \right) \quad (4.67)$$

$$= -6 \frac{(1-x)^2}{(x+1)^4} \quad (4.68)$$

ii) Kjelleromskrivning og sammensatt funksjon:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \quad (4.69)$$

hvor

$$u = 1 + x^2 \quad (4.70)$$

og

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \quad (4.71)$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjernen)} \quad (4.72)$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(u) \quad (4.73)$$

hvor

$$g(u) = u^{-1} \quad (\text{ytre funksjon}) \quad (4.74)$$

$$u = 1 + x^2 \quad \underbrace{(\text{indre funksjon})}_{\text{kjerne}} \quad (4.75)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre} \right)' \left(\text{indre} \right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.76)$$

$$= g'(u) u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.77)$$

$$= (u^{-1})' (1+x^2)' \quad (4.78)$$

$$= (-1)u^{-2} 2x \quad (4.79)$$

$$= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad (\text{sett inn } u = 1+x^2) \quad (4.80)$$

$$iii) \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \quad (4.81)$$

$$iv) \quad g'(q) = \frac{d}{dq}((q^2)^2) = \frac{d}{dq}(q^4) = 4q^3 \quad (4.82)$$

b) Deriver funksjonene:

$$i) \quad h(y) = y^{-0.32} \quad (4.83)$$

$$ii) \quad f(x) = g(x) + h(x) \quad (4.84)$$

$$iii) \quad f(x) = g(x)h(x) \quad (4.85)$$

Løsning:

i) Derivasjon av et polynom:

$$h'(y) = \frac{d}{dy} \left(y^{-0.32} \right) = (-0.32)y^{-0.32-1} = -0.32y^{-1.32} = -\frac{0.32}{y^{1.32}} \quad (4.86)$$

ii) Derivasjon av en sum:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(g(x) + h(x) \right) = g'(x) + h'(x) \quad (4.87)$$

iii) Derivasjon av et produkt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(g(x)h(x) \right) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad (4.88)$$

c) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = (x^3 - x)(5x^4 + x^2) \quad (4.89)$$

$$ii) \quad g(p) = 7(p - 2)^3 + h(p) \quad (4.90)$$

$$iii) \quad f(x) = \frac{c(x)}{x} \quad (4.91)$$

$$iv) \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad (4.92)$$

Løsning:

i) Funksjon:

$$f(x) = (x^3 - x)(5x^4 + x^2) = uv \quad (4.93)$$

hvor

$$u = x^3 - x \quad (4.94)$$

$$v = 5x^4 + x^2 \quad (4.95)$$

Derivasjon av et produkt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left((x^3 - x)(5x^4 + x^2) \right)' \quad (4.96)$$

$$= (uv)' \quad (4.97)$$

$$= u'v + uv' \quad (4.98)$$

$$f'(x) = u'v + uv' \quad (4.99)$$

$$= (x^3 - x)'(5x^4 + x^2) + (x^3 - x)(5x^4 + x^2)' \quad (4.100)$$

$$= (3x^2 - 1)(5x^4 + x^2) + (x^3 - x)(20x^3 + 2x) \quad (4.101)$$

hvor lign.(4.101) kan omskrives med blant annet felles faktor, men det er ikke noe oppgaven ber oss om å gjøre.

ii) Deriverer funksjonen: (derivasjon av en bluesum samt kjerneregelen)

$$g'(p) = \frac{d}{dp} \left(7(p-2)^3 + h(p) \right) \quad (4.102)$$

$$= 21(p-2)^2 + h'(p) \quad (4.103)$$

iii) Derivasjon av en brøk:

$$f'(p) = \frac{d}{dx} \left(\frac{c(x)}{x} \right) \quad (4.104)$$

$$= \frac{c'(x)x + c(x)x'}{x^2} \quad (4.105)$$

$$= \frac{c'(x)x + c(x)}{x^2} \quad (4.106)$$

iv) Derivasjon av en brøk:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{h(x)} \right) \quad (4.107)$$

$$= \frac{g'(x)h(x) + g(x)h'(x)}{(h(x))^2} \quad (4.108)$$

■

Problem 4.8 — Derivasjon mix 3

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad g(p) = p^a + b \quad (4.109)$$

$$ii) \quad h(x) = f(x^2) \quad (4.110)$$

$$iii) \quad c(q) = 20q - 4q\left(25 - \frac{q}{2}\right) \quad (4.111)$$

$$iv) \quad f(x) = (x^3)^a \quad (4.112)$$

Løsning:

i) Deriverer funksjonen:

$$g'(p) = \frac{d}{dp}(p^a + b) = ap^{a-1} \quad (4.113)$$

ii) Kjernerreglen: (sammensatt funksjon)

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x^2)\right) = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du} 2x \quad u = x^2 \quad (4.114)$$

iii) Distributive lov: (”pilmetoden”)

$$c(q) = 20q - 4q\left(25 - \frac{q}{2}\right) = 20q - 100q + 2q^2 = -80q + 2q^2 \quad (4.115)$$

Deriverer:

$$c'(q) = \frac{d}{dq}(-80q + 2q^2) = -80 + 4q \quad (4.116)$$

iv) Deriverer funksjonen:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}\left((x^3)^a\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{3a}\right) = 3ax^{3a-1} \quad (4.117)$$

b) Finn den 2. deriverte dersom vi vet:

$$i) \quad f'(x) = x^3 \quad (4.118)$$

$$ii) \quad f'(x) = 11x^{8/3} \quad (4.119)$$

$$iii) \quad c(x) = 2x + 1 \quad (4.120)$$

$$iv) \quad f(x) = xg(x) \quad (4.121)$$

Løsning:

2. deriverte:

$$i) \quad f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \quad (4.122)$$

$$ii) \quad f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(11x^{8/3}) = 11 \frac{8}{3} x^{8/3-1} = \frac{88}{3} x^{5/3} \quad (4.123)$$

$$iii) \quad c'(x) = \frac{d}{dx}(2x + 1) = 2 \quad (4.124)$$

$$iv) \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(xg(x)) = x'g(x) + xg'(x) = g(x) + xg'(x) \quad (4.125)$$

c) Deriver funksjonene:

$$i) \quad F(x) = 1000(1 + 0.06x)^{3/2} \quad (4.126)$$

$$ii) \quad f(x) = x^{0.5} \quad (4.127)$$

$$iii) \quad f(x) = -x^{-0.5} \quad (4.128)$$

$$iv) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (4.129)$$

Løsning:

Kjerneregelen: (sammensatt funksjon)

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(1000 \overbrace{(1 + 0.06x)}^{=u} \right)^{3/2} \quad (4.130)$$

$$= \frac{dF(u)}{du} \frac{du}{dx} \quad (4.131)$$

$$= \frac{d}{du} \left(1000 u^{3/2} \right) \frac{d}{dx} (1 + 0.06x) \quad (4.132)$$

$$= 1000 \frac{3}{2} u^{1/2} 0.06 \quad (4.133)$$

$$= 90 \sqrt{1 + 0.06x} \quad (4.134)$$

$$ii) \quad f'(x) = \frac{d}{dx} (x^{0.5}) = 0.5x^{0.5-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (4.135)$$

$$iii) \quad f'(x) = \frac{d}{dx} (-x^{-0.5}) = -(-0.5)x^{-0.5-1} = \frac{1}{2x^{3/2}} \quad (4.136)$$

$$iv) \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx} (x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad (4.137)$$

■

Problem 4.9 — Oppgave 5 Eksamen 18. des. 2014 - hjørnepunktsløsningen

Varme- og belysningsprodusenten *Glamox* produserer to typer varmeovner for offshore og maritim industri. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

x_1 = antall produserte varmeovner av type 1 per dag

x_2 = antall produserte varmeovner av type 2 per dag

Inntekten til Glamox ved salg av slike varmeovner er da gitt ved inntektsfunksjonen:

$$i(x_1, x_2) = 1200x_1 + 1750x_2 \quad (4.138)$$

Denne inntektsfunksjonen er gitt i norske kroner (NOK).
Glamox ønsker å maksimere denne inntekten.



Figure 4.1: Glamox heating.

Avdelingen til Glamox som kun driver med produksjon av disse varmeovnene har begrenset med ressurser. Per dag har de 75 timer disponibelt til produksjon av komponenter, 160 timer til montering og kun 30 timer til pakking. Disse **restriksjonene** kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$\text{restriksjoner : } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \leq 75 & (\text{produksjon av komponenter}) \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 160 & (\text{montering}) \\ x_1 + x_2 \leq 30 & (\text{pakking}) \end{cases} \quad (4.139)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$.

- a) Hva er prisen på en ovn av type 1? Og type 2?
Hvor lang tid brukes på å pakke en ovn av type 1? Og type 2? ²

Løsning:

Fra lign.(4.138) ser vi at prisen på varmeovn av type 1 er 1 200 NOK og 1 750 NOK for type 2.

Fra den nederste restriksjonen i lign.(4.139) ser vi at det brukes én time på å pakke hver av de to typene varmeovner.

²I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

- b)** Gjør om ulikhetene i lign.(4.139) til likheter og vis at restriksjonene kan skrives

$$x_2(x_1) = 25 - x_1 \quad (4.140)$$

$$x_2(x_1) = 20 - \frac{1}{2}x_1 \quad (4.141)$$

$$x_2(x_1) = 30 - x_1 \quad (4.142)$$

hvor x_2 er en funksjon av x_1 .

Løsning:

Gjør om ulikhetene til likheter (dvs. vi finner *randen* til mulighetsområdet):

$$3x_1 + 3x_2 = 75 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (4.143)$$

$$4x_1 + 8x_2 = 160 \quad (\text{montering}) \quad (4.144)$$

$$x_1 + x_2 = 30 \quad (\text{pakking}) \quad (4.145)$$

Produksjon av komponenter:

$$3x_1 + 3x_2 = 75 \quad \quad \quad / - 3x_1 \quad (4.146)$$

$$\Updownarrow$$

$$3x_2 = 75 - 3x_1 \quad \quad \quad / : 3 \quad (4.147)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = 25 - x_1 \quad (4.148)$$

Montering:

$$4x_1 + 8x_2 = 160 \quad \quad \quad / - 4x_1 \quad (4.149)$$

$$\Updownarrow$$

$$8x_2 = 160 - 4x_1 \quad \quad \quad / : 8 \quad (4.150)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = 20 - \frac{1}{2}x_1 \quad (4.151)$$

Pakking:

$$x_1 + x_2 = 30 \quad \quad \quad / - x_1 \quad (4.152)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 = 30 - x_1 \quad (4.153)$$

- c) I vedlegget bakerst i denne øvingen finner du tre verditabeller og et koordinatsystem.

Fyll ut verditabellene og plott lign.(4.140), (4.141) og (4.142) i dette koordinatsystemet.³

Løsning:

x_1	0	10	20	25
$x_2(x_1)$	25	15	5	0

x_1	0	10	20	40
$x_2(x_1)$	20	15	10	0

x_1	0	10	20	30
$x_2(x_1)$	30	20	10	0

Figure 4.2: Verditabeller.

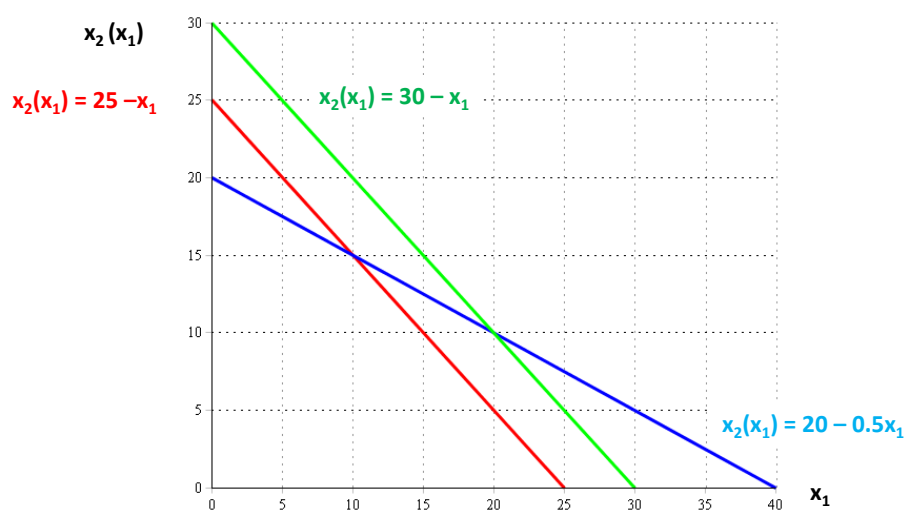


Figure 4.3: Plott av de lineære lign.(4.140), (4.141) og (4.142).

³Husk at vedlegget skal legges ved i din innlevering.
Husk også å skrive inn ditt studentnummer på vedlegget.

- d) Skriver det området i figuren som tilfredsstiller alle restriksjonene.

Løsning:

Området i figuren som oppfyller alle restriksjonene:

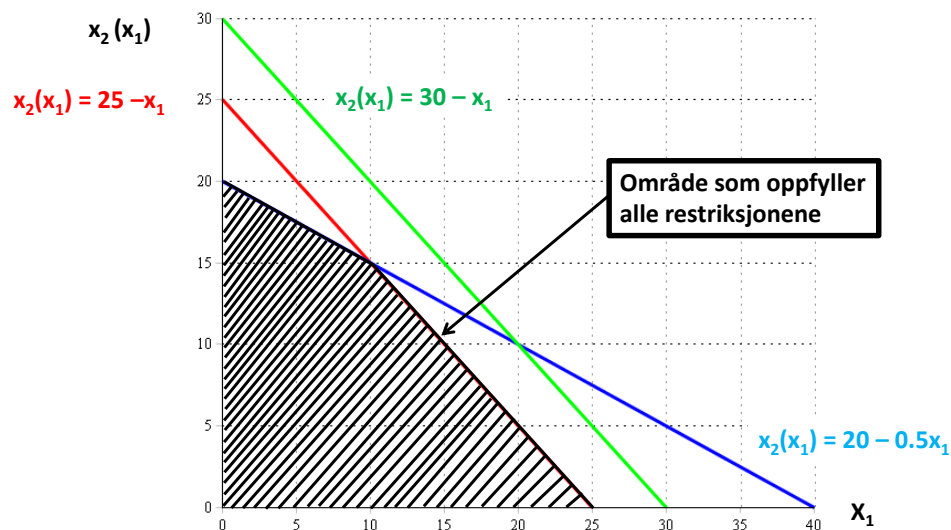


Figure 4.4: Området som oppfyller alle ulikhetene.

- e) Vil "pakking" være en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av x_1 og x_2 ?

Løsning:

Den grønne linjen i figur (4.4) beskriver sammenhengen mellom x_1 og x_2 når det gjelder pakking. Denne grønne linjen ligger i sin helhet *utenfor* det skraverte området. Derfor vil ikke pakking for være en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av x_1 og x_2 .⁴

⁴Med **mulige** kombinasjoner av x_1 og x_2 menes da alle mulige kombinasjoner innen det **skraverte**

- f) Inntekten i lign.(4.138) skal **maksimeres** under restriksjonene beskrevet av lign.(4.139). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.
- i) Indiker alle *hjørneløsninger* på figuren fra oppgave d).
 - ii) Les av alle hjørneløsninger ⁵ fra grafen og regn ut tilhørende inntekt $i(x_1, x_2)$.
 - iii) Hvilken kombinasjon av x_1 og x_2 gir *maksimal* inntekt $i(x_1, x_2)$?

Løsning:

Indikerer alle “hjørnepunktsløsninger”:

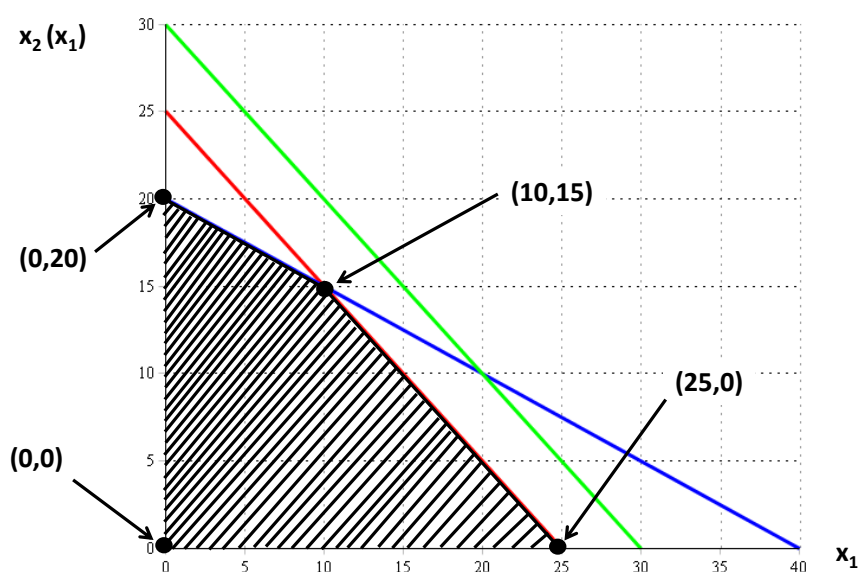


Figure 4.5: Hjørnepunktsløsninger.

området.

⁵Dvs. les av koordinatene (x_1, x_2) for alle hjørneløsningene.

ii) Inntekten $i(x_1, x_2)$ ved hjørnepunktene: ⁶

$$i(0, 0) = (1200 \cdot 0 + 1750 \cdot 0) \text{ NOK} = 0 \text{ NOK} \quad (4.154)$$

$$i(0, 20) = (1200 \cdot 0 + 1750 \cdot 20) \text{ NOK} = 35\,000 \text{ NOK} \quad (4.155)$$

$$i(10, 15) = (1200 \cdot 10 + 1750 \cdot 15) \text{ NOK} = 38\,250 \text{ NOK} \quad (4.156)$$

$$i(25, 0) = (1200 \cdot 25 + 1750 \cdot 0) \text{ NOK} = 30\,000 \text{ NOK} \quad (4.157)$$

iii) **Maksimal** inntekt $i(x_1, x_2)$ når $x_1 = 10$ og $x_2 = 15$: $i(10, 15) = 38\,250 \text{ NOK}$

PS: Legg merke til at selv om det er fire hjørneløsninger så er det kun én av dem som gir maksimal inntekt $i(x_1, x_2)$.

■

⁶Hjørnepunktet $(x_1, x_2) = (10, 15)$ er ikke så enkelt å finne eksakt når man bare leser av figuren. Derfor godtas svar som er i nærheten. MEN: siden den blå og den grønne linjen skjærer hverandre i denne hjørneløsningen så kan man også regne seg frem til dette svaret analytisk. Da finner man svaret eksakt. Det samme gjelder hjørnepunktene $(x_1, x_2) = (0, 20)$ og $(x_1, x_2) = (25, 0)$. En slik utregning kreves ikke på innleveringen.

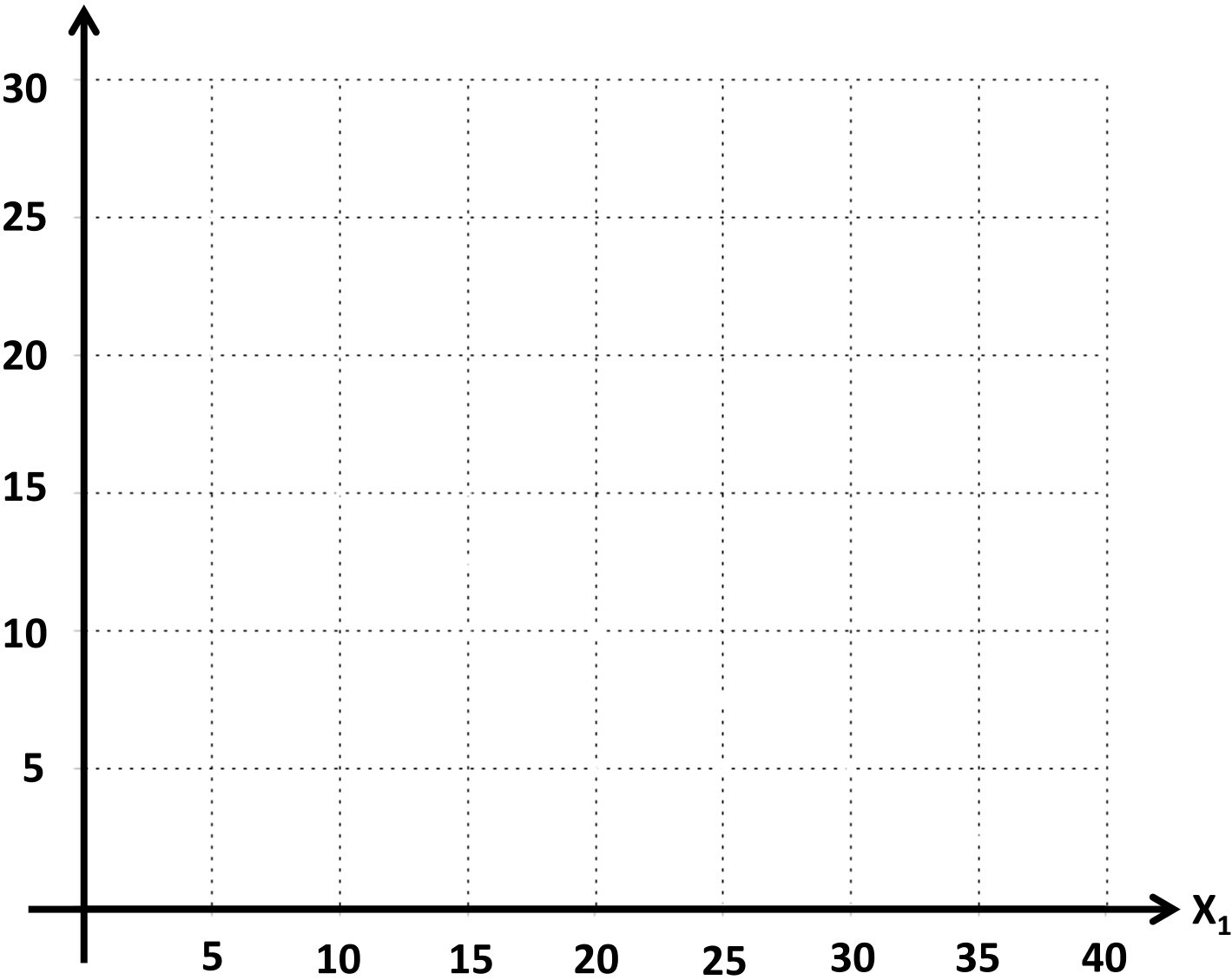
Vedlegg

x_1	0	10	20	25
$x_2(x_1)$				

x_1	0	10	20	40
$x_2(x_1)$				

x_1	0	10	20	30
$x_2(x_1)$				

$x_2(x_1)$



Problem 4.10 — Globale og lokale ekstremalpunkt

- a) Vi har to typer ekstremalpunkt. Hvilke?

Løsning:

Det er to typer ekstremalpunkt:

1. Lokale ekstremalpunkt.
2. Globale ekstremalpunkt.

- b) Figur 4.7 viser en funksjon som har definisjonsmengde $D_f = [0.1, 1.1]$. Marker ekstremalpunktene på figuren. ⁷

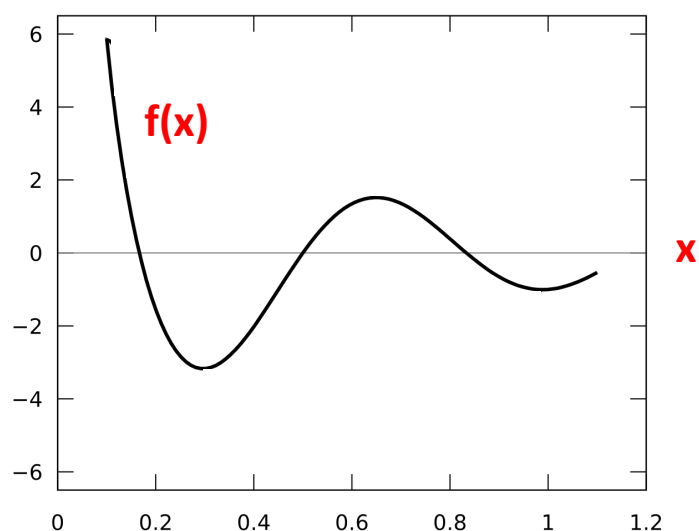


Figure 4.6: Globale og lokale ekstremalpunkter.

⁷Du kan tegne av figuren i besvarelsen din.

Løsning:

Markering av ekstremalpunkt:

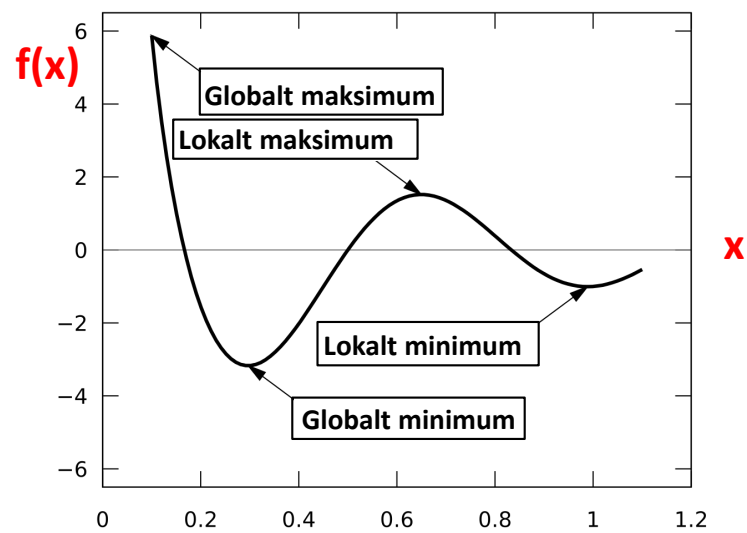


Figure 4.7: Globale og lokale ekstremalpunkter.

■

Problem 4.11 — Lokale ekstremalpunkt

Setning 4.0.1 — 1. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt ekstremalpunkt } x = c \quad \Rightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad (4.158)$$

1. derivasjonstesten er en nødvendig kriterium for lokale ekstremalpunkt.

- a) Sier 1. derivasjonstesten noe om lokale eller globale ekstremalpunkter? Eller begge deler?

Løsning:

1. derivasjonstesten sier kun noe om lokale ekstremalpunkter.

- b) Gi en geometrisk tolkning av 1. derivasjonstesten.

Løsning:

1. derivasjonstesten sier at:

Dersom $x = c$ er et maksimum- eller minimumpunkt så er tangenten til $f(x)$ i punktet $x = c$ horisontal, dvs. flat.

- c) Hva bruker vi 1. derivasjonstesten til?

Løsning:

1. derivasjonstesten brukes til å finne alle kandidatene til lokale ekstremalpunkt. Disse kandidatene finnes ved å løse ligningen

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (4.159)$$

1. derivasjonstesten

Kriteriet $\frac{df(c)}{dx} = 0$ er et **nødvendig**, men **ikke tilstrekkelig** kriterium for at $x = c$ skal representere et lokalt ekstremalpunkt.

Eksempel:

For funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 1$ så er $\frac{df(c)}{dx} = 0$ for $x = 1$. Likevel ser vi av figur 4.8 at $x = 1$ **hverken** representerer et lokalt minimumpunkt **eller** maksimumpunkt.

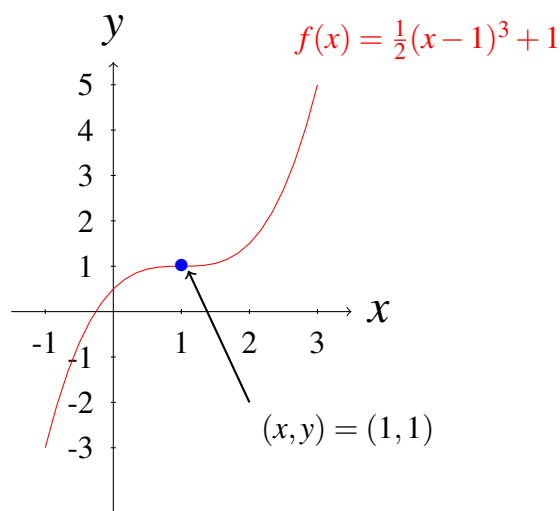


Figure 4.8: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 1$.

2. der. testen

Vi trenger derfor en **ekstra test** for å finne ut:

- i) om $x = c$ faktisk er et lokalt ekstremalpunkt eller ei
- ii) om $x = c$ er et lokalt maksimum eller lokalt minimum

Denne **ekstra testen** heter 2. derivasjonstesten:

Setning 4.0.2 — 2. derivasjonstesten, lokalt ekstremalpunkt

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt maksimum } x = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2f(c)}{dx^2} < 0 \quad (\text{negativ}) \quad (4.160)$$

$$\text{lokalt minimum } x = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2f(c)}{dx^2} > 0 \quad (\text{positiv}) \quad (4.161)$$

d) Gi en geometrisk tolkning av 2. derivasjonstesten.

Løsning:

Det er flere måter å formulere dette på: ⁸

- 2. derivasjonstesten sier noe om den deriverte $\frac{df(x)}{dx}$ i punktet $x = c$ er på vei **oppover** (økende) eller **nedover** (avtagende).
- 2. derivasjonstesten sier noe om funksjonen $f(x)$ er **konkav** eller **konveks** i punktet $x = c$.

■

⁸Det er nok at du svarer på én måte.

Problem 4.12 — Vendepunkt

La oss igjen se på funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 1 \quad (4.162)$$

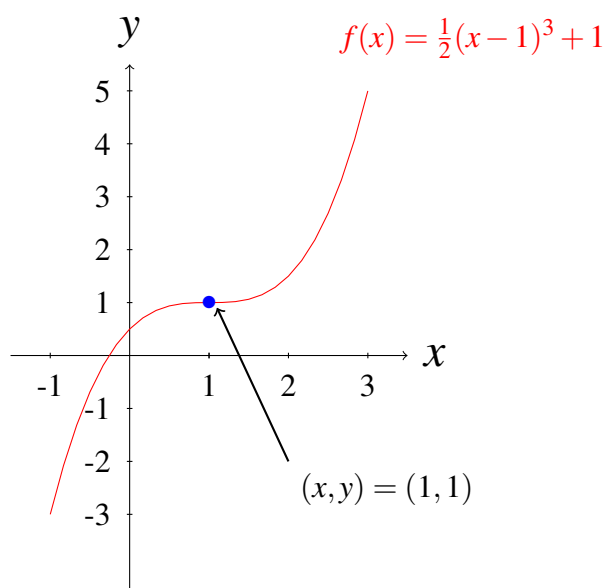


Figure 4.9: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 1$.

- a) Finn kandidatene for de lokale ekstremalpunktene til $f(x)$ ved hjelp av 1. derivasjonstesten.

Løsning:

Sammensatt funksjon:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 1 \quad (4.163)$$

hvor

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \quad (4.164)$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjernen)} \quad (4.165)$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(u(x)) \quad (4.166)$$

hvor

$$g(u) = \frac{1}{2}u^3 + 1 \quad (\text{ytre funksjon}) \quad (4.167)$$

$$u(x) = x - 1 \quad \underbrace{(\text{indre funksjon})}_{\text{kjerne}} \quad (4.168)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre} \right)' \left(\text{indre} \right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.169)$$

$$= g'(u) u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (4.170)$$

$$= \left(\frac{1}{2}u^3 + 1 \right)' (x-1)' \quad (4.171)$$

$$= \frac{3}{2}u^2 \cdot 1 \quad (4.172)$$

$$= \frac{3}{2}(x-1)^2 \quad (\text{sett inn } u = x - 1) \quad (4.173)$$

1. derivasjonstesten:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (4.174)$$

$\Downarrow$

$$\frac{3}{2}(x-1)^2 = 0 \quad (4.175)$$

som har kun én løsning, nemlig:

$$x = 1 \quad (4.176)$$

Konklusjon:

Ifølge 1. derivasjonstesten er det kun $x = 1$ som er kandidat til å være lokalt ekstremalpunkt.

- b) Er punktet $(x, y) = (1, 1)$ et lokalt ekstremalpunkt?
Begrunn svaret ved regning.

Løsning:

Dersom vi bruker kjerneregelen på samme måte som i oppgave a) så får vi:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 3(x-1) \quad (4.177)$$

For $x = 1$:

$$\frac{d^2f(1)}{dx^2} = 3(1-1) = 0 \quad (4.178)$$

Men siden $f''(x) = 0$, dvs. verken positiv eller negativ, så sier 2. derivasjonstesten at $x = 1$ ikke representerer et lokalt ekstremalpunkt.⁹

■

⁹Siden $f''(0) = 0$ sier 2. derivasjonstesten at $x = 0$ er hverken et maksimumpunkt eller minimumpunkt. Man kan vise at $f''(x)$ skifter fortegn ved $x = 0$. Derfor representerer $x = 0$ et vendepunkt. Oppgaven ber oss ikke sjekke om $(x, y) = (1, 1)$ er vendepunkter, derfor bare nevner vi det her i en fotnote.

Problem 4.13 — Lokale ekstremalpunkt ved regning I

La oss se på følgende 3. gradsfunksjon:

$$f(x) = 8x^3 + 81x^2 - 42x - 8 \quad (4.179)$$

Funksjonen er plottet i figur 4.10:

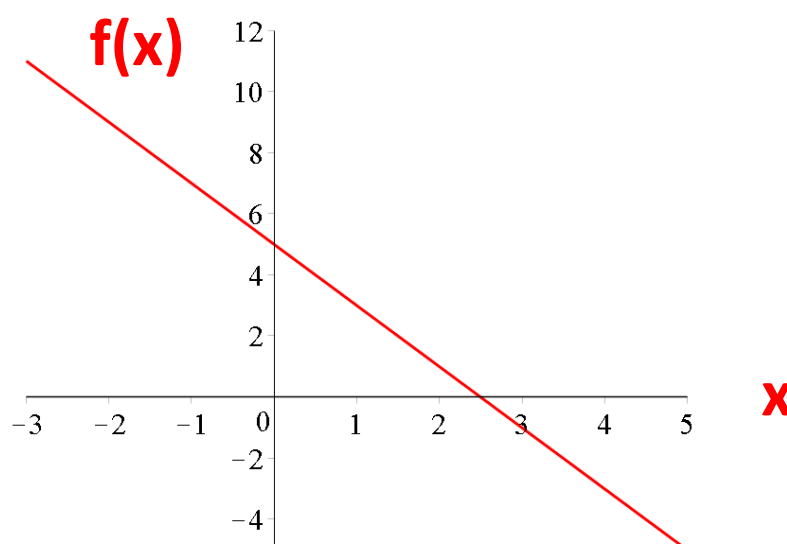


Figure 4.10: $f(x) = 8x^3 + 81x^2 - 42x - 8$.

Vi ønsker å regne ut de lokale ekstremalpunktene ved hjelp av 1. og 2. derivasjonstesten.

- a) Regn ut $\frac{df(x)}{dx}$.

Løsning:

Derivasjon av et polynom: ("hovedregelen")

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (8x^3 + 81x^2 - 42x - 8) = 24x^2 + 162x - 42 \quad (4.180)$$

- b) Via ABC-formelen kan man vise at $f'(x)$ fra oppgave a) kan faktoriseres på følgende måte: ¹⁰

$$f'(x) = 24x^2 + 162x - 42 = \underbrace{6(4x - 1)(x + 7)}_{\text{faktorisert form}} \quad (4.181)$$

Finn alle **kandidatene** til **lokale ekstremalpunkter** til $f(x)$ via 1. derivasjonstesten. ¹¹

Løsning:

Fra lign.(4.181) ser vi at nullpunkt til $f'(x)$, dvs. ekstremalpunktene, inntreffer for:

$$x = \frac{1}{4} \quad , \quad x = -7 \quad (4.182)$$

Tilhørende funksjonsverdier: ¹²

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 8\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 81\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 42\left(\frac{1}{4}\right) - 8 = -13.3125 \quad (4.183)$$

$$f(-7) = 8(-7)^3 + 81(-7)^2 - (-7) - 8 = 1511 \quad (4.184)$$

¹⁰Du skal ikke bevise lign.(4.181). Bare ta den for gitt.

¹¹Når du skal finne punkter så må du angi både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. angi (x, y) .

¹²Å regne ut funksjonsverdiene kan du gjøre på kalkulator. Det er også greit å sjekke svaret du finner ved å sette inn i GeoGebra.

Kandidatene til lokale ekstremalpunktene er dermed:

$$(x, y) = (-7, 1511) \quad (4.185)$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, -13.3125\right) \quad (4.186)$$

- c) Finn de lokale maksimum- og minimumpunktene via 2. derivasjonstesten.

Løsning:

2. deriverte: (1. deriverte har vi via lign.(4.181))

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \quad (4.187)$$

$$= \frac{d}{dx} (24x^2 + 162x - 42) \quad (4.188)$$

$$= 48x + 162 \quad (4.189)$$

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\frac{d^2 f(-7)}{dx^2} = 48(-7) + 162 = -174 \quad (\text{negativt}) \quad (4.190)$$

dvs.

$$(x, y) = (-7, 1511) \text{ er et lokalt maksimum} \quad (4.191)$$

$$\frac{d^2 f(1/4)}{dx^2} = 48 \cdot \frac{1}{4} + 162 = 174 \quad (\text{positivt}) \quad (4.192)$$

dvs.

$$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, -13.3125 \right) \text{ er et lokalt minimum} \quad (4.193)$$

■

Problem 4.14 — Lokale ekstremalpunkt ved regning II

La oss se på følgende 5. gradsfunksjon:

$$f(x) = 3x^5 - 45x^3 + 100 \quad (4.194)$$

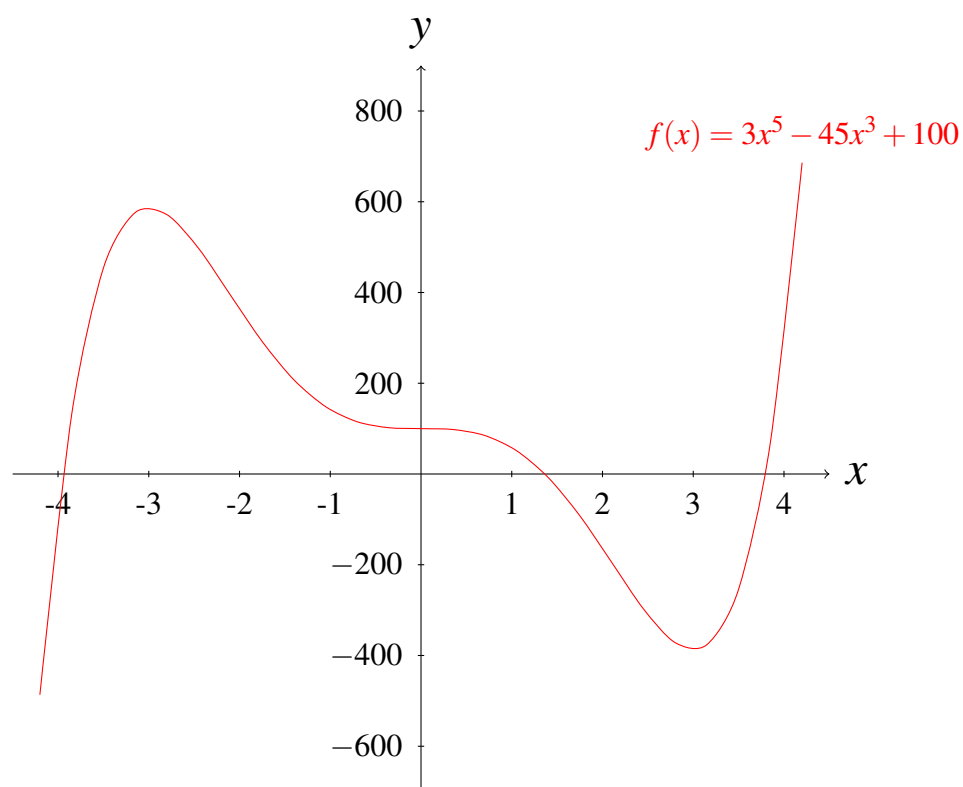


Figure 4.11: Funksjonen $f(x) = 3x^5 - 45x^3 + 100$.

- a) Regn ut $\frac{df(x)}{dx}$.

Løsning:

Deriverer $f(x)$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (3x^5 - 45x^3 + 100) \quad (4.195)$$

$$= 3 \cdot 5x^{5-1} - 45 \cdot 3x^{3-1} + 0 \quad (\text{hovedregelen}) \quad (4.196)$$

$$= 15x^4 - 135x^2 \quad (4.197)$$

- b) Finn alle kandidatene til lokale ekstremalpunkter bestemt av 1. derivasjonstesten.¹³

Løsning:

1. derivasjonstesten:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (4.198)$$

¹³For å finne kandidatene til de lokale ekstremalpunktene må man finne faktorisere $\frac{df(x)}{dx}$. Husk i den sammenheng at $135 = 15 \cdot 9$.

Bruker resultatet fra oppgave a), dvs. lign.(4.197):

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (4.199)$$

$$\Downarrow$$

$$15x^4 - 135x^2 = 0 \quad (4.200)$$

$$\Downarrow$$

$$15x^4 - 135x^2 = 0 \quad 135 = 15 \cdot 9 \quad (4.201)$$

$$\Downarrow$$

$$15x^2(x^2 - 9) = 0 \quad (\text{faktorisere}) \quad (4.202)$$

$$\Downarrow$$

$$15x^2(x - 3)(x + 3) = 0 \quad (\text{faktorerer mer}) \quad (4.203)$$

Det er altså 3 løsninger av ligningen $\frac{df(x)}{dx} = 0$, dvs. 3 løsninger av lign.(4.203):

$$x = -3, \quad x = 0, \quad x = 3 \quad (4.204)$$

Tilhørende funksjonsverdier er:

$$f(-3) = 3 \cdot (-3)^5 - 45 \cdot (-3) + 100 = 586 \quad (4.205)$$

$$f(0) = 3 \cdot 0^5 - 45 \cdot 0 + 100 = 100 \quad (4.206)$$

$$f(3) = 3 \cdot 3^5 - 45 \cdot 3 + 100 = -386 \quad (4.207)$$

Kandidatene til ekstremalpunktene er dermed:

$$(x, y) = (-3, 586) \quad (4.208)$$

$$(x, y) = (0, 100) \quad (4.209)$$

$$(x, y) = (3, -386) \quad (4.210)$$

- c) For **kandidatene** til **lokale ekstremalpunkter** fra oppgave **b)** ovenfor, bruk 2. derivasjonstesten uten bruk av fortegnsskjema til å finne ut **hva slags type** lokale ekstremalpunkt de representerer. ¹⁴

Løsning:

2. deriverte:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df(x)}{dx} \quad (4.211)$$

$$= \frac{d}{dx} (15x^4 - 135x^2) \quad (4.212)$$

$$= 15 \cdot 4x^{4-1} - 135 \cdot 2x^{2-1} \quad (4.213)$$

$$= 60x^3 - 270x \quad (4.214)$$

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\frac{d^2 f(-3)}{dx^2} = 60 \cdot (-3)^3 - 270 \cdot (-3) = -810 \quad (\text{negativt}) \quad (4.215)$$

dvs.

$$x = -3 \text{ er et lokalt maksimum} \quad (4.216)$$

¹⁴Hva slags type, da tenker vi på om punktene representerer et maksimumpunkt, minimumpunkt eller ingen av delene. I sistnevnte tilfelle for vår funksjon $f(x)$ kalles punktet et "vendepunkt".

$$\frac{d^2 f(0)}{dx} = 60 \cdot 0^3 - 270 \cdot 0 = 0 \quad (\text{hverken negativt eller positivt}) \quad (4.217)$$

dvs. ¹⁵

$x = 0$ er hverken et lokalt maksimum eller lokalt minimum

$$\frac{d^2 f(3)}{dx^2} = 60 \cdot 3^3 - 270 \cdot 3 = 810 \quad (\text{positivt}) \quad (4.218)$$

dvs.

$x = 3$ er et lokalt minimum (4.219)

- d) Samme oppgave som c), men bruk denne gangen den andre formuleringen av 2. derivasjonstesten og sett opp et fortegnsskjema. ¹⁶

Løsning:

Faktoreriserer:

$$\frac{df(x)}{dx} = 15^4 - 135x^2 = 15x^2(x^2 - 9) = \underbrace{15x^2(x-3)(x+3)}_{\text{faktorisert form}} \quad (4.220)$$

¹⁵Siden $f''(0) = 0$ sier 2. derivasjonstesten at $x = 0$ er hverken et maksimumpunkt eller minimumpunkt. Man kan vise at $f''(x)$ skifte fortegn ved $x = 0$. Derfor representerer $x = 0$ et vendepunkt. Oppgaven ber oss ikke sjekke om noen av kandidatene er vendepunkter, derfor bare nevner vi det her i en fotnote.

¹⁶Dersom du tar en titt i kompendiet så ser du at det er to formuleringer av 2. derivasjonstesten.

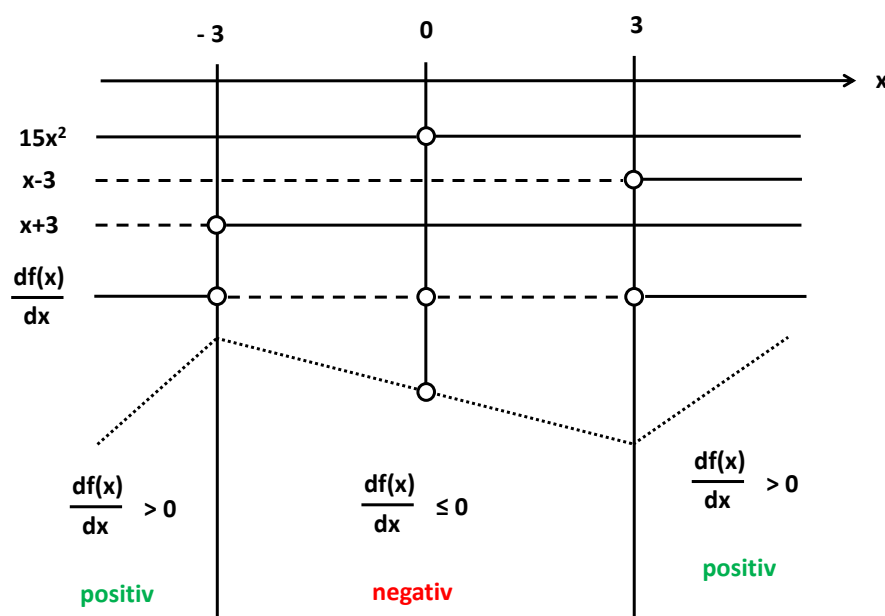


Figure 4.12: Fortegnsskjema for $\frac{df(x)}{dx} = 15x^4 - 135x^2 = 15x^2(x-3)(x+3)$.

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ skifter fra } + \text{ til } - \Rightarrow x = -3 \text{ lokalt maksimum} \quad (4.221)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ skifter fra } - \text{ til } + \Rightarrow x = 3 \text{ lokalt minimum} \quad (4.222)$$

Fra fortegnsskjemaet ser vi at $f'(x) = 0$ for $x = 0$, men at $f'(x)$ ikke skifter fortegn her.

Derfor representerer $x = 0$ hverken et lokalt maksimumpunkt eller minimumpunkt. Det er et vendepunkt.

- e) Punktet $x = 0$ representerer hverken lokalt maksimum eller lokalt minimum. På tross av det er den første deriverte lik null for $x = 0$.

Er det i konflikt med 1. derivasjonstesten?
Begrunn svaret.

Løsning:

1. derivasjonstesten finner alle kandidatene til ekstremalpunktene punktene.

1. derivasjonstesten sier ikke noe om hva slags type lokalt ekstremalpunkt det dreier seg om, eller om det i det hele tatt er et lokalt ekstremalpunkt.

Det er 2. derivasjonstesten som kan avsløre hva slags type lokalt ekstremalpunkt det dreier seg om, eller om det i det hele tatt er et lokalt ekstremalpunkt.

Så at punktet $x = 0$ er hverken lokalt maksimum eller lokalt minimum er ikke i konflikt med 1. derivasjonstesten.

■

Problem 4.15 — Kartellvirksomhet i Colombia på 80-tallet

I tidsrommet 1980 - 1995 regjerte narkokartellene i Colombia.

Narkotikaen de solgte var et hvitt melaktig pulver laget av kokaplantene som dessverre store deler av USA sin yngre befolkning raskt ble avhengig av.



Figure 4.13: Narkotika.

Narkobaronen Pablo Escobar var den store kongen på midten av 80-tallet.



Figure 4.14: Pablo Escobar.

Pablo Escobar styrte det såkalte Medellin-kartellet, som i [allianse](#) med bl.a. Cali-kartellet leverte 96 % av det totale narkotikamarkedet i USA på midten av 80-tallet. Kartellet tjente på den tiden grovt sett ca. 100 million dollar per dag i profitt (!).



Figure 4.15: [Allianse](#) mellom Medellin-kartellet og Cali-kartellet.

Som for de fleste kartellallianser varte ikke samarbeidet med Calikartellet. Brødrene Gilberto og Miguel Rodriguez Orejuela gikk sammen med Pacho Herrera **ut** av alliansen og var i **konkurranse** med Medellin-kartellet på slutten av 80-tallet.



Figure 4.16: Cali-kartellet gikk **ut** av alliansen med Medellin-kartellet.

Markedet i USA for hvitt pulver fra Colombia gjennomgikk derfor to faser ilt. perioden 1980-1995:

Fase 1: Tidlig 80-tall:

Medellin-kartellet hadde **monopol** sammen med Cali-kartellet. Begge kartellene tjente da ekstremt mye penger siden de fikk en "**optimal**" pris for produktet. ¹⁷

Fase 2: Slutten 80-tall:

Medellin-kartellet var i **duopol** sammen med Cali-kartellet. Begge kartellene tjente da **mindre** enn når de samarbeidet. ¹⁸

¹⁷Et marked hvor det kun er *én* aktør.

¹⁸Et marked hvor det kun er *to* aktører.

Vi skal i denne gruppeoppgaven bruke det vi har lært om å **derivere** og finne ekstremalpunkter samt økonomisk teori, for å forstå hvorfor aktørene gikk vekk fra en lukrativ allianse og inn i en konkurransetilstand hvor begge parter tjente mindre penger.

Kartellene vurderte hvor mange tonn hvitt pulver de skulle smugle til USA hver uke.

Definisjoner:

$$q_1 = \text{antall tonn hvitt pulver smuglet til USA av Medellin-kartellet per uke} \quad (4.223)$$

$$q_2 = \text{antall tonn hvitt pulver smuglet til USA av Cali-kartellet per uke} \quad (4.224)$$

$$\begin{aligned} Q &= q_1 + q_2 \\ &= \text{antall tonn hvitt pulver smuglet til USA totalt per uke} \end{aligned} \quad (4.225)$$

$$\pi_1 = \text{ukentlig profitt for Medellin-kartellet (i mill. dollar)} \quad (4.226)$$

$$\pi_2 = \text{ukentlig profitt for Cali-kartellet (i mill. dollar)} \quad (4.227)$$

Antagelser: (alle pris- og kostnadstall i millioner dollar)

1. Vi antar begge kartellene hadde samme kostnadsfunksjon:

$$c(q) = 30 + 16q \quad (\text{kostnaden å smugle } q \text{ tonn hvitt pulver til USA}) \quad (4.228)$$

Denne kostnaden innbærte alt fra råvarefangst, produksjon, lager og transport samt fastkostnader som lønning av ansatte, våpen, bestikklser, smøring, fester osv.

2. Pris-etterspørsel funksjonen var gitt ved:

$$p(Q) = 192 - 22Q \quad (\text{prisen dersom } Q \text{ tonn ble smuglet til USA}) \quad (4.229)$$

Fase 1: (monopol-allianse, tidlig 80-tall)

Når kartellene hadde en allianse, opererte de som én aktør med monopol på markedet. Målet var da å maksimere profitten totalt.

- a) Vis at den totale profitten π som alliansen fikk dersom de solgte totalt Q kilo var gitt ved ¹⁹

$$\pi(Q) = -22Q^2 + 176Q - 30 \quad (4.230)$$

Løsning:

Inntektene $i(Q)$:

$$i(Q) = p(Q)Q \quad (4.231)$$

Kostnadene var som gitt i lign.(4.228).
Den totale profitten til alliansen:

$$\pi(Q) = i(Q) - c(Q) \quad (\text{setter inn } i(Q) = p(Q)Q) \quad (4.232)$$

$$= p(Q)Q - (30 + 16Q) \quad (\text{setter inn } p(Q) = 192 - 22Q) \quad (4.233)$$

$$= (192 - 22Q)Q - 30 - 16Q \quad (4.234)$$

$$= 192Q - 22Q^2 - 30 - 16Q \quad (4.235)$$

$$= -22Q^2 + 176Q - 30, \quad (4.236)$$

som skulle vises.

¹⁹Profitt er lik inntekter minus kostnader. Inntekter er lik pris multiplisert med antall kilo solgt.

- b) Bestem antall tonn hvitt pulver Q^* som kartellene måtte smugle til USA per uke for å maksimerte profitten til alliansen.

Løsning:

Den deriverte av profitten:

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = \frac{d}{dQ}(-22Q^2 + 176Q - 30) = -44Q + 176 \quad (4.237)$$

1. derivasjonstesten:

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = 0 \quad (4.238)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ -44Q + 176 = 0 \end{array} \quad (4.239)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ Q = \frac{176}{44} = 4 \end{array} \quad (4.240)$$

2. derivasjonstesten:

$$\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}(-44Q + 176) = -44 \quad (\text{negativ}) \quad (4.241)$$

dvs.

$$Q^* = 4 \text{ representerer lokalt maksimum} \quad (4.242)$$

Den totale mengden som alliansen må smugle til USA for å maksimere profitten er $Q^* = 4$ tonn per uke.

- c) Bestem hvor mye alliansen hadde totalt i profitt π^* hver uke.

Løsning:

Siden optimalt antall tonn per uke var $Q^* = 4$, får vi:

$$\pi^* = \pi(Q^*) = -22Q^{*2} + 176Q^* - 30 \quad (4.243)$$

$$= -22 \cdot 4^2 + 176 \cdot 4 - 30 \quad (4.244)$$

$$= 322 \quad (4.245)$$

Alliansen hadde dermed totalt $\pi^* = 322$ millioner dollar i profitt hver uke.

- d) Anta kartellene hadde samme kapasitet og smuglet dermed like mye til USA hver uke.²⁰

Hvor mye smuglet kartellene hver for seg, dvs. hva var q_1^* og q_2^* ?

Hvor mye profitt hadde kartellene individuelt per uke, dvs. hva var π_1^* og π_2^* ?

²⁰Denne antagelsen er ikke helt rett og tatt med for enkelthetens skyld da Medellín-kartellet hadde langt større kapasitet enn Cali-kartellet på denne tiden. I virkeligheten styrte Medellín-kartellet alliansen med hard hånd hvor mye Cali-kartellet fikk levere, som sannsynligvis var svært lavt ift. Medellín-kartellet.

Løsning:

Siden kartellene smuglet like mye har vi at:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{Q^*}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ tonn per uke} \quad (4.246)$$

De hadde de samme profitt også:

$$\pi_1^* = \pi_2^* = \frac{\pi^*}{2} = \frac{322}{2} = 161 \text{ mill. dollar per uke} \quad (4.247)$$

Fase 2: (**duopol**-konkurranse, sent 80-tall)

Mot slutten av 80-tallet begynte DEA ("Drug Enforcement Administration") og de lokale myndighetene å presse Pablo Escobar. Medellin-kartellets makt ble svekket.

Cali-kartellet så da sitt snitt i å bryte alliansen, for dermed å oppnå høyere profitt på bekostning av Medellin-kartellet.

Vi skal nå begrunne hvordan Cali-kartellet kunne trekke ut mer profitt ved å bryte alliansen.

- e) Anta Medellin-kartellet forholder seg til avtalen og produserer $q_1 = 2$ tonn hvitt pulver per uke.

Anta videre at Cali-kartellet i det stille bestemmer seg for å bryte alliansen. De vil dermed maksimere sin *egen* profitt.

Vis at profittfunksjonen til Calikartellet er gitt ved

$$\pi_2(q_2) = -22q_2^2 + 132q_2 - 30 \quad (4.248)$$

under antagelsen at Medellin-kartellet smugler $q_1 = 2$ tonn i uken.

Løsning:

Siden $q_1 = 2$ tonn så er:

$$Q = q_1 + q_2 = 2 + q_2 \quad (4.249)$$

Pris-etterspørsel funksjon for Cali-kartellet:

$$p(Q) = 192 - 22Q \quad (Q = q_1 + q_2) \quad (4.250)$$

$$= 192 - 22(q_1 + q_2) \quad (q_1 = 2) \quad (4.251)$$

$$= 192 - 22(2 + q_2) \quad (4.252)$$

$$= 192 - 44 - 22q_2 \quad (4.253)$$

$$= 148 - 22q_2 \quad (4.254)$$

Med uendret kostnadsfunksjon $c(q) = 30 + 16q$, får Cali-kartellet følgende profittfunksjon:

$$\pi_2(q_2) = p(q_2)q_2 - c(q_2) \quad (p(q_2) = 148 - 22q_2) \quad (4.255)$$

$$= (148 - 22q_2)q_2 - 30 - 16q_2 \quad (4.256)$$

$$= 148q_2 - 22q_2^2 - 30 - 16q_2 \quad (4.257)$$

$$= -22q_2^2 + 132q_2 - 30 \quad (4.258)$$

- f) Bestem antall tonn q_2^* som Cali-kartellet i det stille vil smugle over grensen for å maksimere sin egen profitt under antagelsen at Medellin-kartellet smugler $q_1 = 2$ tonn i uken.

Løsning:

Den deriverte av profitten:

$$\frac{d\pi_2(q_2)}{dq_2} = \frac{d}{dq_2} (-22q_2^2 + 132q_2 - 30) = -44q_2 + 132 \quad (4.259)$$

1. derivasjonstestenn:

$$\frac{d\pi_2(q_2)}{dq_2} = 0 \quad (4.260)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ -44q_2 + 132 = 0 \end{array} \quad (4.261)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ q_2 = \frac{132}{44} = 3 \end{array} \quad (4.262)$$

2. derivasjonstesten (må teste at $q_2 = 3$ repr. et lokalt maksimum)

$$\frac{d^2\pi_2(q_2)}{dq_2^2} = \frac{d}{dq_2}(-44q_2 + 132) = -44 \quad (\text{negativ}) \quad (4.263)$$

dvs.

$$q_2^* = 3 \text{ representerer lokalt maksimum} \quad (4.264)$$

Det er dermed optimalt for Cali-kartellet å smugle totalt $q_2^* = 3$ tonn hvitt pulver per uke. De vil dermed smugle $q_2 - q_1 = 3 - 2 = 1$ tonn i det stille (bak ryggen til Medellin-kartellet).

g) Regn ut prisen i markedet for den nye situasjonen.

Løsning:

Medellin-kartellet holder seg til avtalen og smugler $q_1^* = 2$ tonn per uke.
Men Cali-kartellet bryter avtalen og leverer $q_2 = 3$ tonn per uke, dvs. totalt $Q = q_1 + q_2 = 2 + 3 = 5$ tonn pr uke.

Den nye markedsprisen blir da:

$$p(Q) = 192 - 22Q \quad (4.265)$$

$$= 192 - 22(2 + 3) \quad (4.266)$$

$$= 82 \quad (4.267)$$

Den nye markedsprisen er 82 mill. dollar per tonn.

- h)** Bestem hvor mye profitt Medellin- og Cali-kartellet får hver for seg når Cali-kartellet følger sin lumske plan, dvs. bestem π_1 og π_2 .

Hva blir den totale profitten for begge aktørene og hvor mye stjeler Cali-kartellet fra Medellin-kartellet hver uke?

Slikt blir det narkokrig av!

Løsning:

Profitt Cali-kartellet:

$$\pi_2 = pq_2 - c(q_2) = 82 \cdot 3 - (30 + 16 \cdot 3) = 168 \quad (4.268)$$

Profitt Medellin-kartellet:

$$\pi_1 = pq_1 - c(q_1) = 82 \cdot 2 - (30 + 16 \cdot 2) = 102 \quad (4.269)$$

Cali-kartellet tjener 168 millioner dollar per uke, mens Medellin-kartellet tjener 102 millioner dollar per uke.

Under monopol-aliansen tjenste hver av kartellene

$$\frac{\pi^*}{2} = \frac{322}{2} = 161 \quad (4.270)$$

millioner dollar per uke.

Men når Cali-kartell brøt ut av aliansen så tjener de bare 7 millioner dollar mer, mens Medellin-kartellets fortjeneste reduseres dramatisk, nemlig til bare 102 millioner dollar per uke.

Slikt blir det narkokrig av!

■



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

5. Eksponential- og logaritmefunksjoner

Problem 5.1 — Eksponentialfunksjon VS polynom

a) Funksjoner:

$$i) \quad f(x) = 3^x \qquad (5.1)$$

$$ii) \quad g(x) = x^3 \qquad (5.2)$$

Hva slags type funksjoner er dette?

Løsning:

$$i) \quad \text{Eksponentialfunksjon} \qquad (5.3)$$

$$ii) \quad \text{3. gradspolynom} \qquad (5.4)$$

b) Plott funksjonene i lign.(5.1) og (5.2).¹

Løsning:

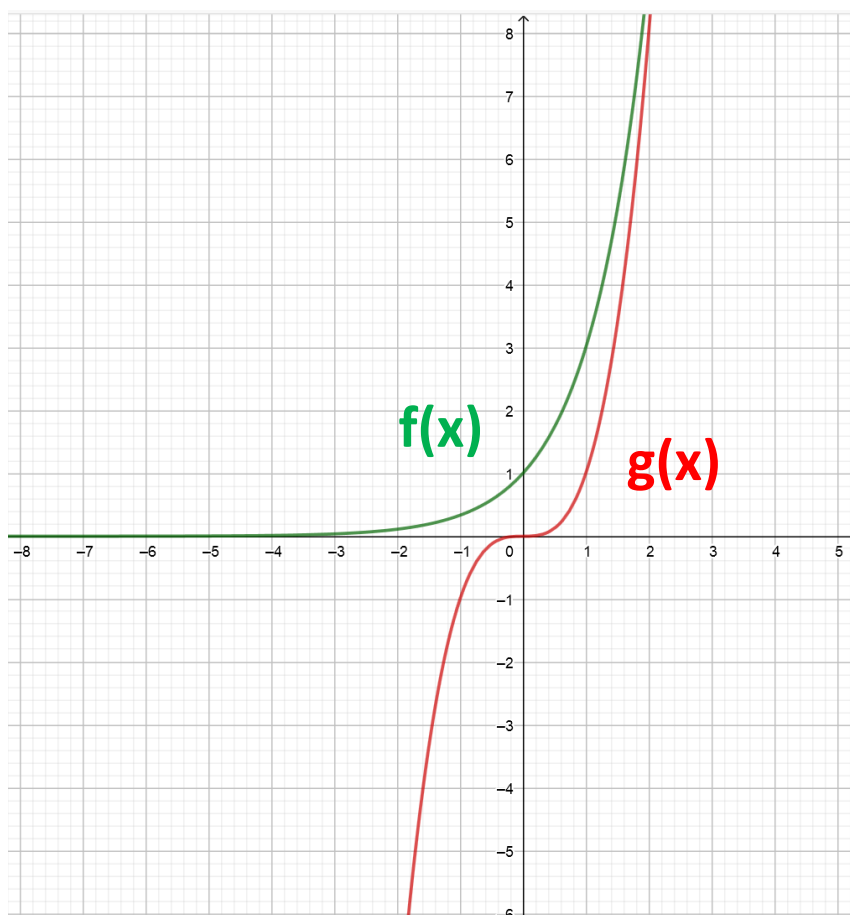


Figure 5.1: $f(x) = 3^x$ and $g(x) = x^3$.

■

¹Bruk gjerne GeoGebra.

Problem 5.2 — Renteformelen - rentes rente - diskret vekst

En størrelse som vokser eller avtar med en fast prosent per tidsenhet, vokser eller avtar **eksponentielt**.

Vi skiller mellom:

- diskret vekst
 - Når veksten skjer ved **bestemte** (tellbare) **tidspunkt**, f.eks. på slutten av hver tidsperiode, så er veksten **diskret**.
- kontinuerlig vekst
 - Når veksten skjer **jevnt** hele tiden, så er veksten **kontinuerlig**.

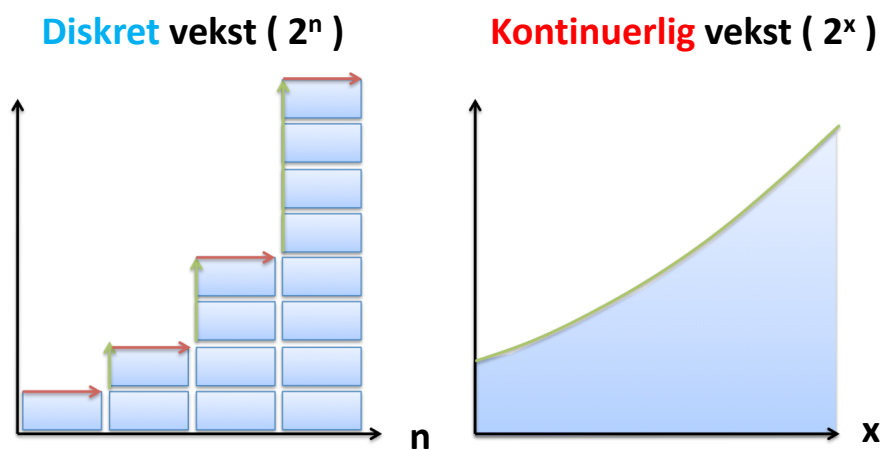


Figure 5.2: **Diskret** vekst og **kontinuerlig** vekst.

I kompendiet utledet vi renteformelen:

$$K(n) = K(0)(1 + r)^n \quad (5.5)$$

hvor

$$K(n) = \text{kapitalen etter } n \text{ år (eller } n \text{ terminer)} \quad (5.6)$$

$$K(0) = \text{startkapital, dvs. kapital etter 0 år (eller 0 terminer): nåverdi} \quad (5.7)$$

$$r = \frac{p}{100} = \text{rente med } p \% \text{ per termin} \quad (5.8)$$

$$n = \text{antall år (eller antall terminer)} \quad (5.9)$$

- a) Hva slags type funksjon er lign.(5.5)?

Løsning:

Lign.(5.5) er en eksponentialfunksjon.

- b) Hva er vekstfaktoren i lign.(5.5)?

Løsning:

Vekstfaktor:

$$\text{vekstfaktor} = 1 + r \quad (5.10)$$

- c) Du setter inn $K_0 = 150\,000$ NOK i starten av et år.
Anta at renten er 6 %, dvs. $r = \frac{6\%}{100\%} = 0.06$.

Hvor mye kapital har du i banken etter 8 år? ²

Løsning:

Renteformelen:

$$K(8) = K(0)(1 + r)^n \quad (5.11)$$

$$= 150\,000(1 + 0.06)^8 \text{ NOK} \quad (5.12)$$

$$= 239\,077 \text{ NOK} \quad (5.13)$$

Etter 8 år er kapitalen 239 077 NOK.



Figure 5.3: Bank.

■

²Rund av til nærmeste hele krone.

Problem 5.3 — Avskrivning - diskret nedgang

En bil koster 50 000 NOK.

Anta at bilens verdi taper seg med 12 % per år.

- a) Hva er vekstfaktoren? ³

Løsning:

Vekstfaktor:

$$\text{vekstfaktor} = 1 - r = 1 - 0.12 = 0.88 \quad (5.14)$$

- b) Hva er bilens verdi etter 5 år? ⁴

Her anbefales det at du introduserer en hensiktsmessig notasjon.

Prøv først å skriv ned den relevante formelen med bokstaver. ⁵

Sett så til slutt inn tallene.

³Vi kaller det vekstfaktor selv om vi har en funksjon som er avtagende.

⁴Rund av til nærmeste hele krone.

⁵Dersom renteformelen i lign.(5.15) representerer formelen for diskret vekst, hva tror du da formelen for diskret nedgang er?

Løsning:

Verdiforringelse: (her skal studentene selv velge en hensiktsmessig notasjon)

$$V(n) = V(0)(1 - r)^n \quad (5.15)$$

hvor

$$V(n) = \text{bilens verdi etter } n \text{ år} \quad (5.16)$$

$$V(0) = \text{startverdi} \quad (5.17)$$

$$r = \frac{p}{100} = \text{avskrivning per år} \quad (5.18)$$

$$n = \text{antall år} \quad (5.19)$$

Setter inn tall til slutt:

$$V(5) = V(0)(1 - r)^n \quad (5.20)$$

$$= 50\,000(1 - 0.12)^5 \text{ NOK} \quad (5.21)$$

$$= 26\,387 \text{ NOK} \quad (5.22)$$

Etter 5 år er verdien på bilen 26 387 NOK.



Figure 5.4: Bil.

Problem 5.4 — Derivasjon - eksponential funksjon

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = e^{3x} \quad (5.23)$$

$$ii) \quad f(x) = e^{-x} \quad (5.24)$$

$$iii) \quad f(x) = e^{x^2} e^{-7x} \quad (5.25)$$

$$iv) \quad f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{7x}} \quad (5.26)$$

Løsning:

i) Funksjonen: (sammensatt funksjon)

$$f(x) = e^{3x} \quad (5.27)$$

kan skrives

$$f(u) = e^{u(x)} \quad \text{ytre funksjon} \quad (5.28)$$

hvor

$$u(x) = 3x \quad \text{kjernen (indre funksjon)} \quad (5.29)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre} \right)' \left(\text{indre} \right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.30)$$

$$= f'(u) u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.31)$$

$$= \left(e^u \right)' (3x)' \quad (5.32)$$

$$= e^u \cdot 3 \quad \text{sett inn } u = 3x \quad (5.33)$$

$$= 3e^{3x} \quad (5.34)$$

ii) Funksjonen: (sammensatt funksjon)

$$f(x) = e^{-x} \quad (5.35)$$

kan skrives

$$f(u) = e^{u(x)} \quad \text{ytre funksjon} \quad (5.36)$$

kan skrives

$$u(x) = -x \quad \text{indre funksjon (kjernen)} \quad (5.37)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre} \right)' \left(\text{indre} \right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.38)$$

$$= f'(u) u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.39)$$

$$= \left(e^u \right)' (-x)' \quad (5.40)$$

$$= e^u \cdot (-1) \quad \text{sett inn } u = -x \quad (5.41)$$

$$= -e^{-x} \quad (5.42)$$

iii) Omskriving: (sammensatt funksjon)

$$f(x) = e^{x^2} e^{-7x} = e^{x^2-7x} \quad (5.43)$$

som er en sammensatt funksjon

$$f(u) = e^{u(x)} \quad (5.44)$$

hvor

$$u(x) = x^2 - 7x \quad (5.45)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre} \right)' \left(\text{indre} \right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.46)$$

$$= g'(u) u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.47)$$

$$= \left(e^u \right)' (x^2 - 7x)' \quad (5.48)$$

$$= e^u \cdot (2x - 7) \quad \text{sett inn } u = x^2 - 7x \quad (5.49)$$

$$= (2x - 7) e^{x^2-7x} \quad (5.50)$$

iv) Omskriving:

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{7x}} = e^{x^2-7x} \quad (5.51)$$

dvs. samme funksjon som i oppgave iii.

Problem 5.5 — Eulers tall

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (5.52)$$

Regn ut funksjonsverdiene. Bruk 4 desimalers nøyaktighet.

$$i) \quad f(0.01) \quad (5.53)$$

$$ii) \quad f(1) \quad (5.54)$$

$$iii) \quad f(10) \quad (5.55)$$

$$iv) \quad f(100) \quad (5.56)$$

Løsning:

$$i) \quad f(0.01) = \left(1 + \frac{1}{0.01}\right)^{0.01} = 1.0472 \quad (5.57)$$

$$ii) \quad f(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \quad (5.58)$$

$$iii) \quad f(10) = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.5937 \quad (5.59)$$

$$iv) \quad f(100) = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.7048 \quad (5.60)$$

- b) Mot hvilket tall konvergerer $f(x)$ når $x \rightarrow \infty$?

Løsning:

Funksjonen $f(x)$ konvergerer mot Eulers tall e når $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.7182818284590... \quad (5.61)$$

- c) Deriver funksjonene:

$$i) \quad F(x) = 1000e^{1+2x^{3/2}} \quad (5.62)$$

$$ii) \quad f(x) = \sqrt{e^x} \quad (5.63)$$

$$iii) \quad f(x) = \sqrt{e^{-x}} \quad (5.64)$$

$$iv) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}} \quad (5.65)$$

Løsning:

i) **Kjernereregelen:** (sammensatt funksjon)

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(1000e^{\overbrace{1+2x^{3/2}}^{=u(x)}} \right) \quad (5.66)$$

$$= \frac{dF(u)}{du} \frac{du}{dx} \quad (5.67)$$

$$= \frac{d}{du} \left(1000e^u \right) \frac{d}{dx} \left(1+2x^{3/2} \right) \quad (5.68)$$

$$= 1000e^u \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} \quad (5.69)$$

$$= 3000\sqrt{x}e^{1+2x^{3/2}} \quad (5.70)$$

$$ii) \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{e^x} \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{\overbrace{x/2}^{=u(x)}} \right) = \quad (5.71)$$

$$= \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} \left(e^u \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{x/2} \quad (5.72)$$

$$iii) \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{e^{-x}} \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{\overbrace{-x/2}^{=u(x)}} \right) = \quad (5.73)$$

$$= \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} \left(e^u \right) \frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{2} e^{-x/2} \quad (5.74)$$

iv) Siden

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}} = \sqrt{e^{-x}} \quad (5.75)$$

så innser vi at dette er samme oppgaven som *iii*). Dermed blir selvsagt også svaret det samme.

■

Problem 5.6 — Markedføring - Kahoot Plus

Kahoot er en sosial app hvor man kan lage spørrekonkurranser online. Kahoot brukes også mye i skolesammenheng for å gjøre læring artigere for elever og studenter.

Figur 5.8 viser selve grensesnittet for spillet, hvor et spørsmål dukker opp på en felles skjerm som alle spillerne ser. Man svarer via Kahoot-appen på mobil.

På den måten kan svært mange spillere delta på det samme spillet, f.eks. i et klasserom eller på en fest, hvor spørsmålene vises på en prosjektør eller TV.

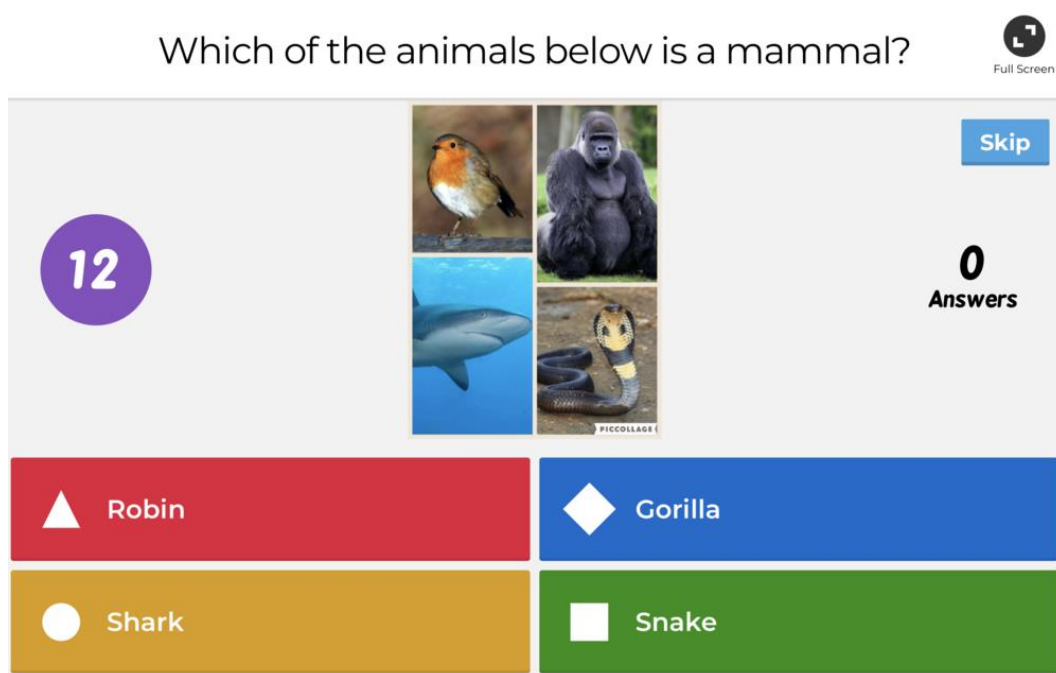


Figure 5.5: Kahoot.

Et av produktene til Kahoot er "*Kahoot Plus*", som gir muligheten for bedrifter å sette opp online Kahoot spill med opptil 20 spillere med mange gode fordeler, se figur 5.9.

Anta at markedsavdelingen til Kahoot, har estimert størrelsen på det totale markedet til Kahoot Plus til 10 millioner potensielle kunder, dvs. la $a = 10 \cdot 10^6$ kunder.

Kahoot har bestemt seg for å kjøre en **kontinuerlig reklamekampanje** for å verve nye brukere av *Kahoot Plus*.

Fra lignende kampanjer, ekspertuttalelser og spørreundersøkelser i markedet har et eksternt analyseselskap kommet frem til følgende responsfunksjon:

$$f(t) = 0.7(1 - e^{-0.2t}), \quad t \geq 0 \quad (5.76)$$

hvor

$$f(t) = \text{andel av det totale markedet} \quad (5.77)$$

som har respondert på reklamekampanjen etter t dager

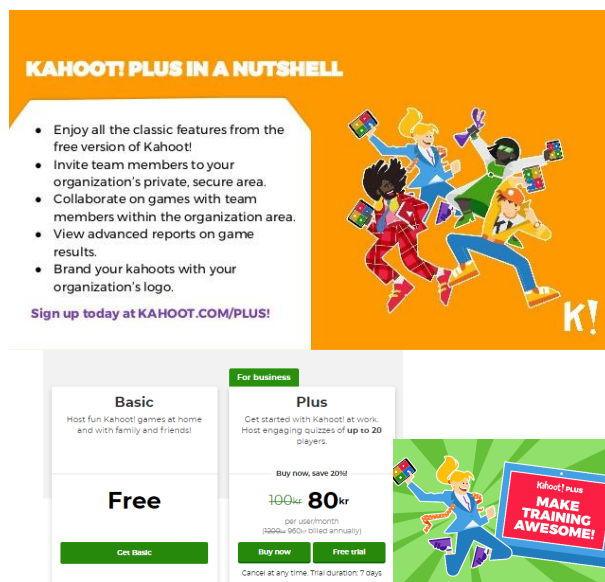


Figure 5.6: Kahoot Plus.

Anta at Kahoot tjener $i_0 = 20$ NOK i gjennomsnitt for hver respons de får fra kampanjen.

Anta videre at kampanjen kostet $c = 300\,000$ NOK å produsere og $k = 50\,000$ NOK å kjøre per dag.

- a) Hva er den horisontale asymptoten til $f(t)$, dvs. hva blir $f(t)$ når $t \rightarrow \infty$.
Gi en tolkning av asymptoten.

Løsning:

Store tider $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 0.7 \left(1 - \overbrace{e^{-0.2t}}^{\rightarrow 0} \right) = 0.7(1 - 0) = 0.7 \quad (5.78)$$

Den horisontale asymptoten er derfor gitt ved

$$y = 0.7 \quad (5.79)$$

Tolkning:

Dersom Kahoot kjører reklamekampanjen i **evig tid**, vil 0.7 av det totale markedet respondere på kampanjen, dvs. $0.7 = 7 \cdot 10^6$ brukere responder, dvs. 7 millioner brukere responderer. ($a = 10 \cdot 10^6$)

- b) Hvor stor prosent av markedet har respondert etter 7 dager?

Løsning:

Vi regner ut $f(t)$ med $t = 7$ dager

$$f(7) = 0.7 \left(1 - e^{-0.2 \cdot 7} \right) = 0.53 \quad (5.80)$$

Etter 7 dager har 53% av markedet respondert.

- c) Skriv opp funksjonen for fortjenesten π som Kahoot har fått etter t dager.
Hva blir profitten etter 7 dager?
Avrund svaret til nærmeste heltall.

Løsning:

Fortjenesten er lik inntekter minus kostnader:

$$\pi(t) = \overbrace{i_0 a f(t)}^{\text{inntekter}} - \overbrace{(c + kt)}^{\text{kostnader}} \quad (5.81)$$

$$= i_0 a 0.7 \left(1 - e^{-0.2t}\right) - c - kt \quad (5.82)$$

Fortjenesten $\pi(t)$ etter $t = 7$ dager:

$$\pi(7) = i_0 a 0.7 \left(1 - e^{-0.2 \cdot 7}\right) - c - kt \quad (5.83)$$

$$= 20 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 0.7 \left(1 - e^{-0.2 \cdot 7}\right) - 300\,000 - 50\,000 \cdot 7 \quad (5.84)$$

$$= 104\,826\,425 \quad (5.85)$$

Etter 7 dager har Kahoot tjent 104 826 425 NOK.

- d) Skisser grafen for fortjenesten $\pi(t)$.⁶
Er det enkelt å lese av tiden hvor fortjenesten er maksimal?

Løsning:

Figur 5.7 viser grafen til fortjeneste π som funksjon av tiden t .

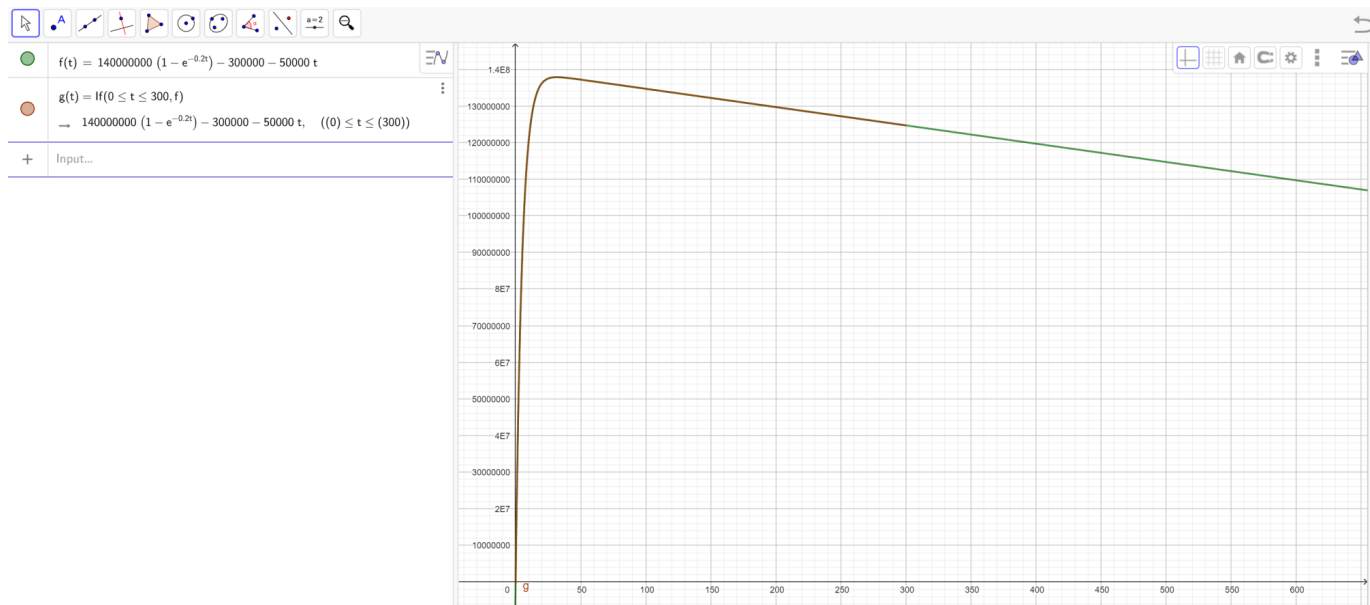


Figure 5.7: Fortjeneste.

⁶Husk at $D_\pi = [0, \rightarrow)$. Bruk gjerne Geogebra. Bare tegn av GeoGebra for hånd.

- e) Etter hvor mange dager t^* oppnår Kahoot maksimal fortjeneste π^* ?
Finn svaret ved regning og bruk 2. derivasjonstesten til å forsikre deg om at du har funnet et maksimum.⁷

Hva er den maksimale fortjenesten $\pi^* = \pi(t^*)$?
Avrund svaret til nærmeste heltall.

Løsning:

Deriverer fortjenesten:

$$\frac{\pi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(i_0 a 0.7 (1 - e^{-0.2t}) - c - kt \right) \quad (5.87)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(i_0 a 0.7 - i_0 a 0.7 e^{-0.2t} \right) - c - kt \quad (5.88)$$

$$= -i_0 a 0.7 \frac{d}{du} \left(e^u \right) \frac{d}{dt} (-0.2t) - k \quad (5.89)$$

$$= i_0 a 0.14 e^{-0.2t} - k \quad (5.90)$$

⁷Bruk at løsning av ligningen

$$e^{-0.2t} = \frac{k}{i_0 a 0.14} = \frac{5}{2800} \quad (5.86)$$

er gitt ved $t = 31.6$.

1. derivasjonstesten:

Kandidater til ekstremalpunkt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\pi}{dt} &= 0 & (5.91) \\
 \Downarrow \\
 i_0 a 0.14 e^{-0.2t} - k &= 0 & / +k \\
 \Downarrow \\
 i_0 a 0.14 e^{-0.2t} &= k & / \frac{1}{i_0 a 0.14} \\
 \Downarrow \\
 e^{-0.2t} &= \frac{k}{i_0 a 0.14} \\
 \Downarrow \\
 e^{-0.2t} &= \frac{5}{2800}
 \end{aligned}$$

Fra fotnoten i oppgaven har vi at $t = 31.6$ er en mulig kandidat.

Vi må sjekke om $t = 31.6$ er et maksimumspunkt ved hjelp av 2. derivasjonstesten. Den 2. deriverte av fortjenetsen π er gitt ved:

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d\pi}{dt} \quad (5.92)$$

$$= \frac{d}{dt} (i_0 a 0.14 e^{-0.2t} - k) \quad (5.93)$$

$$= i_0 a 0.14 \frac{d}{du} (e^u) \frac{d}{dt} (-0.2t) - 0 \quad (5.94)$$

$$= i_0 a 0.14 e^u (-0.2) \quad (5.95)$$

$$= -i_0 a 0.028 e^{-0.2t} \quad (5.96)$$

Siden $e^{-0.2t} > 0$ for alle mulige t , så må

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} = -i_0 a 0.028 e^{-0.2t} < 0 \quad (5.97)$$

Fra 2. derivasjonstesten kan vi dermed konkludere at $t = 31.6$ er et maksimumspunkt.

Dermed:

$$\pi(31.6) = i_0 a 0.7 \left(1 - e^{-0.2 \cdot 31.6}\right) - c - kt \quad (5.98)$$

$$= 20 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 0.7 \left(1 - e^{-0.2 \cdot 31.6}\right) - 300\,000 - 50\,000 \cdot 31.6$$

$$= 137\,868\,008 \text{ NOK} \quad (5.99)$$

Den optimale fortjenesten er 137 868 008 NOK.

■

Problem 5.7 — $\ln(x)$ og $\log(x)$

a) Regn ut **uten** bruk av kalkulator:

$$i) \quad 10^{\log(2.3)} \quad (5.100)$$

$$ii) \quad 10^{\log(5^2)} \quad (5.101)$$

$$iii) \quad 10^{\log(1.2 \cdot 10^3)} \quad (5.102)$$

Løsning:

$$i) \quad 10^{\log(2.3)} = 2.3 \quad (5.103)$$

$$ii) \quad 10^{\log(5^2)} = 5^2 = 25 \quad (5.104)$$

$$iii) \quad 10^{\log(1.2 \cdot 10^3)} = 1.2 \cdot 10^3 = 1200 \quad (5.105)$$

b) Regn ut **uten** bruk av kalkulator:

$$i) \quad e^{\ln(2.3)} \quad (5.106)$$

$$ii) \quad e^{\ln(5^2)} \quad (5.107)$$

$$iii) \quad e^{\ln(1.2 \cdot 10^3)} \quad (5.108)$$

Løsning:

$$i) \quad e^{\ln(2.3)} = 2.3 \quad (5.109)$$

$$ii) \quad e^{\ln(5^2)} = 5^2 = 25 \quad (5.110)$$

$$iii) \quad e^{\ln(1.2 \cdot 10^3)} = 1.2 \cdot 10^3 = 1200 \quad (5.111)$$

c) Regn ut.

$$i) \quad e^{\log(2.3)} \quad (5.112)$$

$$ii) \quad 10^{\ln(5^2)} \quad (5.113)$$

$$iii) \quad e^{\log(1.2 \cdot 10^3)} \quad (5.114)$$

Løsning:

$$i) \quad e^{\log(2.3)} = 1.4358 \quad (5.115)$$

$$ii) \quad 10^{\ln(5^2)} = 1655.2966 \quad (5.116)$$

$$iii) \quad e^{\log(1.2 \cdot 10^3)} = 21.7406 \quad (5.117)$$

■

Problem 5.8 — Regneregler

a) Forenkle funksjonene om mulig:

$$i) \quad f(x) = \ln(x^2 e^x) \quad (5.118)$$

$$ii) \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{e^{2x}}\right) \quad (5.119)$$

$$iii) \quad f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad (5.120)$$

$$iv) \quad f(x) = \log(x^2 - 1) \quad (5.121)$$

$$v) \quad f(x) = e^{\ln(x^2 - 1)} \quad (5.122)$$

Løsning:

$$i) \quad f(x) = \ln(x^2 e^x) = \ln(x^2) + \ln(e^x) = 2 \ln x + x \quad (5.123)$$

$$ii) \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{e^{2x}}\right) = \ln(x^2 + 1) - \ln(e^{2x}) \quad (5.124)$$

$$= \ln(x^2 + 1) - 2x \quad (5.125)$$

$$iii) \quad f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad \text{kan ikke forenkles} \quad (5.126)$$

$$iv) \quad f(x) = \log(x^2 - 1) \quad \text{kan ikke forenkles} \quad (5.127)$$

$$v) \quad f(x) = e^{\ln(x^2 - 1)} = x^2 - 1 \quad (5.128)$$

b) Regn ut.

$$i) \quad \ln 1 \quad (5.129)$$

$$ii) \quad \ln e \quad (5.130)$$

$$iii) \quad \log 10 \quad (5.131)$$

$$iv) \quad e^{\log 10} \quad (5.132)$$

$$v) \quad 10^{\log 2.8} \quad (5.133)$$

$$vi) \quad e^{\log 2.8} \quad (5.134)$$

$$vii) \quad \ln 10 \quad (5.135)$$

Løsning:

$$i) \quad \ln 1 = 0 \quad (5.136)$$

$$ii) \quad \ln e = 1 \quad (5.137)$$

$$iii) \quad \log 10 = 1 \quad (5.138)$$

$$iv) \quad e^{\log 10} = e^1 = e \quad (5.139)$$

$$v) \quad 10^{\log 2.8} = 2.8 \quad (5.140)$$

$$vi) \quad e^{\log 2.8} = 1.5639 \quad (5.141)$$

$$vii) \quad \ln 10 = 2.3026 \quad (5.142)$$

■

Problem 5.9 — Løse ligninger

a) Løs ligningene:

$$i) \quad 4^x = 550 \quad (5.143)$$

$$ii) \quad 128\,000 = 91\,000 \cdot 1.051^t \quad (5.144)$$

$$iii) \quad 6e^{0.2x} = 9 \quad (5.145)$$

$$iv) \quad 10^{-x/2} = 5 \quad (5.146)$$

$$v) \quad e^{-x/2} = 5 \quad (5.147)$$

Løsning:

i) Ta ln (eller log) på begge sider av ligningen:

$$4^x = 550 \quad \bigg/ \ln \quad (5.148)$$

 $\Updownarrow$

$$\ln(4^x) = \ln(550) \quad \bigg/ \ln(4^x) = x \ln 4 \quad (5.149)$$

 $\Updownarrow$

$$x \ln(4) = \ln(550) \quad \bigg/ \frac{1}{\ln 4} \quad (5.150)$$

 $\Updownarrow$

$$\frac{x \ln(4)}{\ln 4} = \frac{\ln(550)}{\ln 4} \quad (5.151)$$

 $\Updownarrow$

$$x = \frac{\ln(550)}{\ln 4} \quad (5.152)$$

Kalkulator gir:

$$x = 4.5516 \quad (5.153)$$

ii) Løser:

$$128\,000 = 91\,000 \cdot 1.051^t \quad \bigg/ \frac{1}{91\,000} \quad (5.154)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{128\,000}{91\,000} = 1.051^t \quad \bigg/ \ln \quad (5.155)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(\frac{128}{91}\right) = \ln(1.051^t) \quad \bigg/ \ln(1.051^t) = t \ln(1.051) \quad (5.156)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(\frac{128}{91}\right) = t \ln(1.051) \quad \bigg/ \frac{1}{\ln(1.051)} \quad (5.157)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(\frac{128}{91}\right) = t \ln(1.051) \quad (5.158)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\ln(128/91)}{\ln 1.051} = \frac{t \ln(1.051)}{\ln(1.051)} \quad (5.159)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\ln(128/91)}{\ln 1.051} = t \quad (5.160)$$

Kalkulator:

$$t = 6.8588 \quad (5.161)$$

iii) Løser:

$$6e^{0.2x} = 9 \quad \bigg/ \frac{1}{6} \quad (5.162)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \frac{\cancel{6}e^{0.2x}}{\cancel{6}} = \frac{9}{6} \end{array} \quad (5.163)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ e^{0.2x} = \frac{3}{2} \end{array} \quad \bigg/ \ln \quad (5.164)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \ln(e^{0.2x}) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{array} \quad \bigg/ \ln(e^{0.2x}) = 0.2x \quad (5.165)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ 0.2x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{array} \quad \bigg/ \frac{1}{0.2} \quad (5.166)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \frac{\cancel{0.2}x}{\cancel{0.2}} = \frac{\ln(3/2)}{0.2} \end{array} \quad \bigg/ \frac{1}{0.2} \quad (5.167)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ x = \frac{\ln(3/2)}{0.2} \end{array} \quad (5.168)$$

Kalkulator:

$$x = 2.0273 \quad (5.169)$$

iv) Ta log på begge sider av ligningen:

$$10^{-x/2} = 5 \quad \bigg/ \log \quad (5.170)$$

$$\Updownarrow$$

$$\log(10^{-x/2}) = \log(5) \quad \bigg/ \log 10^{-x/2} = x/2 \quad (5.171)$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{x}{2} = \log(5) \quad \bigg/ \cdot (-2) \quad (5.172)$$

$$\Updownarrow$$

$$(-2) \left(-\frac{x}{2} \right) = (-2) \log(5) \quad (5.173)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -2 \log(5) \quad (5.174)$$

Kalkulator gir:

$$x = -1.3979 \quad (5.175)$$

v) Ta ln på begge sider av ligningen:

$$e^{-x/2} = 5 \quad \quad \quad / \ln \quad \quad \quad (5.176)$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln(e^{-x/2}) = \ln(5) \quad \quad \quad / \ln e^{-x/2} = x/2 \quad \quad \quad (5.177)$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{x}{2} = \ln(5) \quad \quad \quad / \cdot (-2) \quad \quad \quad (5.178)$$

$$\Updownarrow$$

$$(-2) \left(-\frac{x}{2} \right) = (-2) \ln(5) \quad \quad \quad (5.179)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -2 \ln(5) \quad \quad \quad (5.180)$$

Kalkulator gir:

$$x = -3.2189 \quad \quad \quad (5.181)$$

b) Anta at folketallet i en kommune etter tiden t kan beskrives ved:

$$f(t) = 1500e^{-0.018t} \quad \quad \quad (5.182)$$

Hvor lang tid vil det tar før folketallet har blitt redusert til 1250?

Løsning:

Folketallet redusert til 1250:

$$f(t) = 1500e^{-0.018t} \quad / f(t) = 1250 \quad (5.183)$$

$$\Downarrow$$

$$1250 = 1500e^{-0.018t} \quad / \frac{1}{1500} \quad (5.184)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1250}{1500} = e^{-0.018t} \quad / \ln \quad (5.185)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(\frac{1250}{1500}\right) = \ln e^{-0.018t} \quad (5.186)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(\frac{1250}{1500}\right) = -0.018t \quad / \frac{1}{-0.018} \quad (5.187)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\ln(1250/1500)}{-0.018} = \frac{\cancel{-0.018t}}{\cancel{-0.018}} \quad / \frac{1}{-0.018} \quad (5.188)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\ln(1250/1500)}{-0.018} = t \quad (5.189)$$

altså

$$t = 10.1290 \quad (5.190)$$

Det tar 10.1 år før folketallet er redusert til 1250.

- c) Anta at prisen på en vare vokser med r % per år ihht. til funksjonen:

$$p(t) = p_0 e^{rt/100} \quad (5.191)$$

hvor $p_0 = 895$ NOK er prisen ved tidspunktet $t = 0$.

Anta at etter 5 år har prisen vokst til 1020 NOK.

Finn r .⁸

Løsning:

Løser med hensyn på x alene:

$$p(t) = p_0 e^{rt/100} \quad / \frac{1}{p_0} \quad (5.192)$$

$\Downarrow$

$$\frac{p(t)}{p_0} = e^{rt/100} \quad / \ln \quad (5.193)$$

$\Downarrow$

$$\ln\left(\frac{p(t)}{p_0}\right) = \ln e^{rt/100} \quad (5.194)$$

$\Downarrow$

$$\ln\left(\frac{p(t)}{p_0}\right) = \frac{rt}{100} \quad \frac{100}{t} \quad (5.195)$$

$\Downarrow$

$$\frac{100}{t} \ln\left(\frac{p(t)}{p_0}\right) = \frac{r\cancel{t}}{100} \cdot \frac{100}{\cancel{t}} \quad (5.196)$$

$\Downarrow$

$$\frac{100}{t} \ln\left(\frac{p(t)}{p_0}\right) = r \quad (5.197)$$

⁸Oppgi svaret med 1 desimals nøyaktighet.

Etter 5 år har prisen vokst til $p(5) = 1020$ NOK.

$$r = \frac{100}{5} \ln \left(\frac{p(5)}{p_0} \right) \quad (5.198)$$

Til slutt setter vi inn tall:

$$r = \frac{100}{5} \ln \left(\frac{1020}{895} \right) = 2.6 \quad (5.199)$$

Prisen vokser med $r = 2.6$ % per år.

■

Problem 5.10

Definisjon 5.0.1 — logaritmen m/e som grunntall

Logaritmen til et tall x er den eksponenten vi må opphøye Eulers tall e i for å få x :

$$e^{\ln x} = x \quad (5.200)$$

altså $\ln(x)$ = den naturlige logaritmen = $\underbrace{\text{det tallet vi må opphøye } e \text{ i for å få } x}_{\text{NB!}}$.

- a) Bruk definisjonen i lign.(5.200) og vis at:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad (5.201)$$

Tips:

Bruk kjerneregelen. Deriver lign.(5.200) på begge sider.

Løsning:

La oss derivere lign.(5.200).

Den derivate av høyre side av lign.(5.200) er 1. Vi deriver venstre side via kjerneregelen med kjernen $u(x) = \ln x$:

$$\underbrace{\frac{d}{du}(e^u)}_{= e^u} \frac{d}{dx}(\ln x) = 1 \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.202)$$

$$\Downarrow$$

$$e^u \frac{d}{dx}(\ln x) = 1 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{e^u} \quad (5.203)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (5.204)$$

■

Problem 5.11 — Derivasjon av $\ln$

a) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = \ln x \quad (5.205)$$

$$ii) \quad f(x) = \ln(x^2) \quad (5.206)$$

$$iii) \quad f(x) = \ln(e^{x^2}) \quad (5.207)$$

Løsning:

$$i) \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad (5.208)$$

$$ii) \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x^2)) \quad (5.209)$$

$$= f'(u)u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.210)$$

$$= (\ln u)'(x^2)' \quad u = x^2 \quad (5.211)$$

$$= \frac{1}{u} 2x \quad (5.212)$$

$$= \frac{2x}{x^2} \quad (5.213)$$

$$= \frac{2}{x} \quad (5.214)$$

$$iii) \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\ln \left(e^{x^2} \right) \right) \quad (5.215)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(x^2 \right) \quad (5.216)$$

$$= 2x \quad (5.217)$$

b) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = x \ln x \quad (5.218)$$

$$ii) \quad f(x) = x \ln(x^2) \quad (5.219)$$

$$iii) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (5.220)$$

Løsning:

i) Derivasjon:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x \ln x) \quad (5.221)$$

$$= \frac{d}{dx}(uv) \quad u = x, \quad v = \ln x \quad (5.222)$$

$$= u'v + uv' \quad (5.223)$$

$$= x' \ln x + x(\ln x)' \quad (5.224)$$

$$= 1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \quad (5.225)$$

$$= \ln x + 1 \quad (5.226)$$

ii) Derivasjon av et produkt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(x \ln(x^2) \right) \quad (5.227)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(x 2 \ln x \right) \quad \ln(x^2) = 2 \ln x \quad (5.228)$$

$$= 2 \frac{d}{dx} \left(x \ln x \right) \quad \text{bruker lign. (5.226)} \quad (5.229)$$

$$= 2 (\ln x + 1) \quad (5.230)$$

iii) Derivasjon av en brøk:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{x} \right) \quad (5.231)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) \quad u = \ln x, \quad v = x \quad (5.232)$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (5.233)$$

$$= \frac{(\ln x)'x - \ln x x'}{x^2} \quad (5.234)$$

$$= \frac{\frac{1}{x}x - \ln x \cdot 1}{x^2} \quad (5.235)$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad (5.236)$$

■

Problem 5.12 — Cobb-Douglas produktfunksjon - *Stabburet*

I 1928 publiserte Paul Douglas og Charles Cobb en studie om veksten til den amerikanske økonomien i perioden 1899 - 1922.

De så på en forenklet modell hvor de prøvde å beskrive den totale produksjonen i USA ved hjelp av to *produksjonsfaktorer*:⁹

- *Arbeidskraft*, som de ga symbolet L (for "Labour").
- *Realkapital*, som de ga symbolet K .
Realkapital var for eksempel gjenstander som bidro til produksjonen, og som kunne brukes over lengre tid, for eksempel bygninger, utstyr, maskiner, og lignende. Alt som ikke var arbeidskraft falt under denne kategorien.

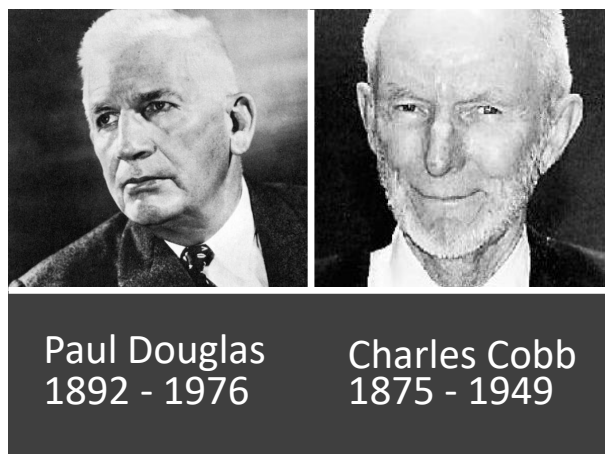


Figure 5.8: Charles Cobb og Paul Douglas.

⁹Denne oppgaven har hentet inspirasjon fra kompendiet til Erik Langelo i emnet "SØK200 Mikrøkonomi".

Funksjonen de brukte for å tilpasse dataene var på formen:

$$P = bL^{\alpha}K^{\beta} \quad (\text{Cobb-Douglas produktfunksjon}) \quad (5.237)$$

hvor

P = den totale produksjonen i antall enheter produsert (5.238)

L = arbeidskraften i antall timer (variabel) (5.239)

K = investert realkapital i antall 10 000 NOK (variabel) (5.240)

b = produktivitetsfaktoren (parameter) (5.241)

α = produksjonselastisiteten mhp. arbeidskraft (parameter) (5.242)

β = produksjonselastisiteten mhp. kapital (parameter) (5.243)

Produktfunksjonen i lign.(5.237) var en oppsiktsvekkende god tilnærming til de reelle dataene Paul Douglas og Charles Cobb hadde i 1928. Funksjonen ble dermed en suksess og blir derfor mye brukt i bedriftsøkonomien verden rundt.

La oss først prøve å forstå de tre parameterne b , α og β .

- a) Sett $L = 1$ og $K = 1$ inn i lign.(5.237) og gi en kort **tolkning** hva parameteren b står for.

Løsning:

Dersom vi setter inn $L = 1$ og $K = 1$ i lign.(5.237), får vi:

$$P = b1^{\alpha}1^{\beta} = b \quad (5.244)$$

Dersom vi bruker 1 time med arbeidskraft og 10000 NOK realkapital, så vil produksjonen gi b enheter produsert. ¹⁰

¹⁰Vi kaller derfor b for "produktivitetsfaktoren" siden den sier noe om produktiviteten til bedriften mhp. de to innsatsfaktorene.

- b) Vis at parameteren α er lik produksjonselastisiteten mhp. arbeidskraft, dvs. vis at: ¹¹

$$\frac{dP}{dL} \frac{L}{P} = \alpha \quad (5.245)$$

Løsning:

Deriverer lign.(5.237): (med hensyn på L)

$$\frac{dP}{dL} = \frac{d}{dL} (bL^\alpha K^\beta) \quad \text{hovedregel} \quad (5.246)$$

$$= b\alpha L^{\alpha-1} K^\beta \quad L^{\alpha-1} = \frac{L^\alpha}{L} \quad (5.247)$$

$$= \frac{\alpha}{L} bL^\alpha K^\beta \quad P = bL^\alpha K^\beta \quad (5.248)$$

$$= \frac{\alpha}{L} P \quad (5.249)$$

Løser med hensyn på α alene:

$$\frac{dP}{dL} = \frac{\alpha}{L} P \quad / \cdot \frac{L}{P} \quad (5.250)$$

$$\frac{dP}{dL} \frac{L}{P} = \frac{\alpha}{L} P \frac{L}{P} \quad / \text{kansellering} \quad (5.251)$$

$$\frac{dP}{dL} \frac{L}{P} = \alpha \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (5.252)$$

¹¹Begrepet "elastisitet" introduserte vi i øving 12.

- c) Vis at parameteren β er lik produksjonselastisiteten mhp. realkapital investert, dvs. vis at:

$$\frac{dP}{dK} \frac{K}{P} = \beta \quad (5.253)$$

Løsning:

Deriverer lign.(5.237): (med hensyn på K)

$$\frac{dP}{dK} = \frac{d}{dK} (bL^\alpha K^\beta) \quad \text{hovedregel} \quad (5.254)$$

$$= bL^\alpha \beta K^{\beta-1} \quad K^{\beta-1} = \frac{K^\beta}{K} \quad (5.255)$$

$$= \frac{\beta}{K} bL^\alpha K^\beta \quad P = bL^\alpha K^\beta \quad (5.256)$$

$$= \frac{\beta}{K} P \quad (5.257)$$

Løser med hensyn på β alene:

$$\frac{dP}{dK} = \frac{\beta}{K} P \quad / \cdot \frac{K}{P} \quad (5.258)$$

$$\frac{dP}{dK} \frac{K}{P} = \frac{\beta}{K} P \frac{K}{P} \quad / \text{ kansellering} \quad (5.259)$$

$$\frac{dP}{dK} \frac{K}{P} = \beta \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (5.260)$$

Nå som vi har etablert en forståelse av Cobb-Douglas produkfunksjon, la oss anvende den på et reelt case.

Anta at fabrikkene på Stranda på Sunnmøre, som produserer hele Norges kjente og kjære Grandiosa, har estimert følgende Cobb-Douglas produktfunksjon:

$$P = bL^{\alpha}K^{\beta} \quad (5.261)$$

hvor

$$b = 2\,000 \quad (5.262)$$

$$\alpha = 0.4 \quad (5.263)$$

$$\beta = 0.6 \quad (5.264)$$

Anta videre at fabrikkssjefen ved Stranda har fått et budsjett på $B = 40$ millioner NOK til produksjonen.

Kostnaden for arbeidskraft er $w = 1\,000$ NOK/time og at kostnaden per 10 000 investerte kroner er $r = 1\,000$ NOK.



Figure 5.9: Pizza Grandiosa.

d) Forklar kort hva følgende ligning sier: ¹²

$$B = wL + rK \quad (\text{"budsjettligningen"}) \quad (5.265)$$

¹²Forklar gjerne hva hvert ledd i lign.(5.265) betyr.

Løsning:

Tolkning:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{totalt budsjett} & & \text{totale arbeidskraftskostn.} & & \text{totale realkapitalkostn.} & & \\ \underbrace{B} & = & \underbrace{wL} & + & \underbrace{rK} & & (5.266) \end{array}$$

Ligningen sier mao. at summen av de årlige kostnadene for arbeidskraft L og realkapital K må være lik det totale budsjettet.

Hovedmålet til fabrikkssjefen er å produsere **maksimalt antall pizzaer** i året med det budsjettet han har fått.

Han leier derfor inn flinke studenter ved Høgskolen i Molde til å bestemme hvor mye arbeidskraft L og realkapital K han skal bruke for å maksimere antall pizzaer.

Studentene bestemmer seg for følgende **strategi**:

1. Bruk **budsjettligningen** til å uttrykke variablen K som funksjon av L .
2. Sett inn uttrykket for K i Cobb-Douglas produktfunksjonen i lign.(5.261).
3. Ta **ln** av venstre og høyre side av Cobb-Douglas produktfunksjonen i lign.(5.261). Dette gjør derivasjonen enklere.
4. **1. derivasjonstesten**:
Deriver den nye funksjonen mhp. arbeidskraften L og finn alle kandidatene til lokale ekstremalpunkt.
5. **2. derivasjonstesten**:
Bestem eventuelle lokale maksima og minima.
6. Bestem det optimale mengden arbeidskraft L^* og bruk budsjettligningen til å finne tilhørende optimal realkapital K^* .
7. Bestem det optimale antallet pizzaer P^* fabrikkssjefen kan produsere ila. 1 år slik at budsjettet er oppfylt.

- e) Punkt 1 i strategien:
Vis at budsjettligningen gir følgende sammenheng mellom L og K :

$$K = \frac{1}{r}(B - wL) \quad (\text{"budsjettligningen" omskrevet}) \quad (5.267)$$

Løsning:

Budsjettligningen:

$$B = wL + rK \quad \bigg/ -wL \quad (5.268)$$

$\Updownarrow$

$$B - wL = rK \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{r} \quad (5.269)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{1}{r}(B - wL) = K, \quad \text{q.e.d.} \quad (5.270)$$

- f) Punkt 2 i strategien:
Vis, ved å sette inn lign.(5.267) i produktfunksjonen, at:

$$P = \frac{b}{r^\beta} L^\alpha (B - wL)^\beta \quad (5.271)$$

Løsning:

Produksjonsfunksjonen i lign.(5.261)

$$P = bL^\alpha K^\beta \quad \text{setter inn lign.(5.267)} \quad (5.272)$$

$$= bL^\alpha \left(\frac{1}{r}(B - wL) \right)^\beta \quad (5.273)$$

$$= \frac{b}{r^\beta} L^\alpha (B - wL)^\beta, \quad \text{q.e.d.} \quad (5.274)$$

g)

Punkt 3 i strategien:

Ta $\ln$ av høyre og venstre side av produktfunksjonen i lign.(5.300) og vis at:

$$\ln P = \ln \left(\frac{b}{r^\beta} \right) + \alpha \ln L + \beta \ln(B - wL) \quad (5.275)$$

Løsning:

Ta $\ln$ av lign.(5.300):

$$P = \frac{b}{r^\beta} L^\alpha (B - wL)^\beta \quad \Big/ \ln \quad (5.276)$$

$\Updownarrow$

$$\ln(P) = \ln \left(\frac{b}{r^\beta} L^\alpha (B - wL)^\beta \right) \quad \Big/ \ln(abc) = \ln a + \ln b + \ln c$$

$\Updownarrow$

$$\ln(P) = \ln \left(\frac{b}{r^\beta} \right) + \ln(L^\alpha) + \ln(B - wL)^\beta \quad (5.277)$$

$\Updownarrow$

$$\ln(P) = \ln \left(\frac{b}{r^\beta} \right) + \alpha \ln(L) + \beta \ln(B - wL), \quad \text{q.e.d.} \quad (5.278)$$

- h)** Punkt 4 i strategien:
Finn den deriverte av $\ln P$ i lign.(5.300) mhp. L og vis at den eneste kandidaten for ekstremalpunkt er gitt ved:

$$L^* = \frac{B}{w} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (5.279)$$

Regn ut verdien til L^* .

Løsning:

Deriverer mhp. L :

$$\frac{d}{dL}(\ln(P)) = \frac{d}{dL} \left(\ln\left(\frac{b}{r^\beta}\right) + \alpha \ln(L) + \beta \ln(B - wL) \right) \quad (5.280)$$

$$= 0 + \frac{\alpha}{L} + \frac{\beta}{B - wL}(-w) \quad \bigg/ \frac{d}{dL}(\ln(L)) = \frac{1}{L}$$

$$= \frac{\alpha}{L} - \frac{w\beta}{B - wL} \quad (5.281)$$

1. derivasjonstesten:

$$\frac{d}{dL}(\ln(P)) = 0 \quad (5.282)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\alpha}{L} - \frac{w\beta}{B - wL} = 0 \quad \bigg/ + \frac{w\beta}{B - wL} \quad (5.283)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{w\beta}{B - wL} \quad \bigg/ \text{snu brøk} \quad (5.284)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{L}{\alpha} = \frac{B - wL}{w\beta} \quad \bigg/ \text{splitt brøk} \quad (5.285)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{L}{\alpha} = \frac{B}{w\beta} - \frac{wL}{w\beta} \quad \bigg/ \text{kansellering} \quad (5.286)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{L}{\alpha} = \frac{B}{w\beta} - \frac{L}{\beta} \quad \bigg/ + \frac{L}{\beta} \quad (5.287)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{L}{\alpha} + \frac{L}{\beta} = \frac{B}{w\beta} \quad \bigg/ \cdot \alpha\beta \quad (5.288)$$

$$\frac{L}{\alpha} + \frac{L}{\beta} = \frac{B}{w\beta} \quad \bigg/ \cdot \alpha\beta \quad (5.289)$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\beta \frac{L}{\alpha} + \alpha\beta \frac{L}{\beta} = \alpha\beta \frac{B}{w\beta} \quad (5.290)$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta L + \alpha L = \alpha \frac{B}{w} \quad \bigg/ \text{faktoriserer} \quad (5.291)$$

$$\Leftrightarrow \quad L(\beta + \alpha) = \alpha \frac{B}{w} \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{\beta + \alpha} \quad (5.292)$$

$$\Leftrightarrow \quad L^* = \frac{B}{w} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (5.293)$$

Verdi:

$$L^* = \frac{B}{w} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (5.294)$$

$$= \frac{40 \cdot 10^6}{1000} \frac{0.4}{0.4 + 0.6} = 16\,000 \quad (5.295)$$

Verdien er $L^* = 16\,000$ timer.

- i) Punkt 5 i strategien:
Vis ved 2. derivasjonstesten at kandidaten funnet i oppgave h) faktisk er et lokalt maksimumspunkt, dvs. vis at:

$$\frac{d^2 \ln P}{dL^2} < 0 \quad (5.296)$$

når L er som gitt i lign.(5.299).

Løsning:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dL^2} (\ln(P)) &= \frac{d}{dL} \left(\frac{\alpha}{L} - \frac{w\beta}{B-wL} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{L^2} - \frac{w^2\beta}{(B-wL)^2} < 0 \end{aligned} \quad (5.297)$$

Dermed gir 2. derivasjonstesten at L^* er et lokalt maksimumspunkt. ¹³

- j) Punkt 6 i strategien:
Bruk budsjettlikningen til å vise at den tilhørende optimale realkapitalen K^* er gitt ved:

$$K^* = \frac{B}{r} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (5.299)$$

Regn ut verdien til K^* .

¹³Her beruker vi kjerneregelen: $u = B - wL$

$$\left(\frac{w\beta}{u} \right)' u' = -\frac{w\beta}{u^2} (-w) = \frac{w^2\beta}{(B-wL)^2} \quad (5.298)$$

Løsning:

Budsjettligningen i lign.(5.267 gir at:

$$K^* = \frac{1}{r}(B - wL^*) \qquad \left(L^* = \frac{B}{w} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) \quad (5.300)$$

$$= \frac{1}{r} \left(B - \cancel{w} \frac{B}{\cancel{w}} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) \quad (5.301)$$

$$= \frac{B}{r} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) \quad (5.302)$$

$$= \frac{B}{r} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) \quad (5.303)$$

$$= \frac{B}{r} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad , \quad \text{q.e.d} \quad (5.304)$$

Verdi:

$$K^* = \frac{B}{r} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (5.305)$$

$$= \frac{40 \cdot 10^6}{1000} \frac{0.6}{0.4 + 0.6} = 24\,000 \quad (5.306)$$

Verdien er $K^* = 24\,000$ enheter med realkapital.

- k) Punkt 7 i strategien:
Regn ut maksimalt antall pizzaer P^* fabrikkssjefen klarer å produsere under det fastsatte budsjettet.

Løsning:

Vi setter inn $L^* = 16\,000$ og $K^* = 24\,000$ i Cobb-Douglas produktfunksjonen i lign.(5.261):

$$P^* = bL^{*\alpha}K^{*\beta} \quad (5.307)$$

$$= 2\,000 \cdot 16\,000^{0.4} \cdot 24\,000^{0.6} \quad (5.308)$$

$$= 40\,813\,584 \quad (5.309)$$

Fabrikkssjefen klarer maksimalt å produsere drøyt 40.8 millioner pizzaer under det gitte budsjettet i løpet av et år.

■