



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

6. Følger og rekker

Øving 4: Oppgaver

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 01

- Utlevering:
 - Mandag 12. okt. kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - mandag 2. nov. kl. 12:00
 - dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- **FOR**arbeid:
 - Les kompendiet.
 - Se teori-videoer
 - Se eksempel-videoer
 - Les gjennom øvingoppgave
- **ETTER**arbeid:
 - Gå gjennom løsning 4 som legges ut fredag 30. okt. kl. 12:00.

Problem 6.1 — Følger

- a) Bestem n 'te ledd a_n til følgene.
La alle følgene starte med $n = 1$.

$$i) \quad 2, 4, 6, 8, 10, \dots \quad (6.1)$$

$$ii) \quad 0, 2, 6, 12, 20, \dots \quad (6.2)$$

$$iii) \quad 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots \quad (6.3)$$

$$iv) \quad 3, -5, 7, -9, 11, \dots \quad (6.4)$$

$$v) \quad \frac{2}{3}, \frac{3}{2 \cdot 4}, \frac{4}{3 \cdot 5}, \frac{5}{4 \cdot 6}, \frac{6}{5 \cdot 7}, \dots \quad (6.5)$$

$$vi) \quad 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots \quad (6.6)$$

b) Finn summen av de 3 første leddene av den oppgitte følgen (definert rekursivt).

$$i) \quad a_{n+1} = a_n - \frac{3}{2}, \quad a_1 = \frac{7}{2} \quad (6.7)$$

$$ii) \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - 1, \quad a_1 = 5 \quad (6.8)$$

$$iii) \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n^2}, \quad a_1 = 2 \quad (6.9)$$

$$iv) \quad a_{n+1} = 1 - |1 - a_n| - a_n, \quad a_1 = 2 \quad (6.10)$$

■

Problem 6.2 — Summasjonstegnet Σ

Uttrykk summene ved hjelp av summasjonstegnet Σ .¹

$$i) \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \quad (6.11)$$

$$ii) \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \quad (6.12)$$

$$iii) \quad 1 + 2 + \cdots + 10\,000\,000 \quad (6.13)$$

$$iv) \quad -3 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3 + 4 \quad (6.14)$$

$$v) \quad \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4} \quad (6.15)$$

$$vi) \quad \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10}{3} \quad (6.16)$$

■

¹Velg selv "indeksen", dvs hvilken bokstav du bruker i grensene over og under summasjonstegnet.

Problem 6.3 — Aritmetiske følger og rekker

- a) Hva er differensen d i følgende aritmetiske følge:

$$14, 19, 24, 29, \dots \quad (6.17)$$

- b) Hva er den rekursive definisjonen av den aritmetiske følgen

$$-4, -7, -10, -13, \dots \quad (6.18)$$

- c) Finn uttrykk for a_n for den gitte aritmetiske følgen:

$$21, 43, 65, \dots \quad (6.19)$$

- d) Finn a_{28} i den aritmetiske følgen

$$\frac{1}{7}, \frac{10}{21}, \frac{17}{21}, \dots \quad (6.20)$$

- e) Hvor mange ledd n har følgende aritmetiske følge:

$$88, 77, 66, 55, \dots, -88, -99 \quad (6.21)$$

- f) Anta vi er i en kino som rommer totalt 1 656 personer. Anta videre at øverste rad rommer 105 seter.

Vi observerer at hver rad i kinoen minker med 3 rader ift. til den over.

Hvor mange rader N har kinoen? ²

■

²Bruk i utregningene at den positive løsningen av 2. gradsligningen

$$-3N^2 + 213N - 3312 = 0 \quad (6.22)$$

er gitt ved $N = 23$. Hvilken formel har vi brukt for å finne denne løsningen?

Problem 6.4 — Fibonacci og det gyldne snitt

I denne oppgaven skal vi se på populasjonsveksten hos en kaninfarm.

Anta at farmen starter med ett kaninpar, dvs. en hann og en hunn. Vi skal forsøke å modellere hvordan antall kaninpar øker med tiden.

Tiden løper i antall fødesykluser, hvor en syklus er 4 uker.

Modell:

- Ingen kaniner dør.
- Fødesyklusen til hvert **voksne** kaninpar går som følger:
 - Hunnkaninen blir gravid første dag i syklusen.
 - Hunnkaninen føder i slutten av syklusen.
 - Hunnkaninen føder alltid kun ett nytt kaninpar.

Deretter starter en ny syklus (hvor hunnkaninen blir gravid første dag etc).

- Hvert nyfødte kaninpar bruker 4 uker, dvs. en syklus på å bli **voksne**.
- Farmen starter med ett nyfødt par (importert).

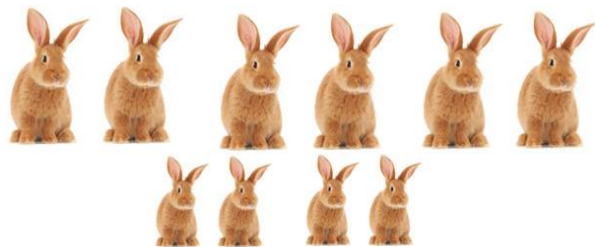


Figure 6.1: Kaniner.

Vi definerer følgen:

$$a_i = \text{antall kaninpar ved starten av syklus nr. } i \quad (6.23)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

Siden ”farmen starter med ett nyfødt par”:

$$a_1 = 0 + 1 = 1 \quad (0 \text{ fra forrige syklus, } 1 \text{ nyfødt}) \quad (6.24)$$

Siden paret er nyfødt fødes ingen nye kaninpar ved starten av syklus 2 (de blir voksne):

$$a_2 = 1 + 0 = 1 \quad (1 \text{ fra forrige syklus, } 0 \text{ nyfødt}) \quad (6.25)$$

Hunnkaninen har hatt en fødesyklus, og føder dermed et nytt kaninpar i slutten av syklus 2:

$$a_3 = 1 + 1 = 2 \quad (1 \text{ fra forrige syklus, } 1 \text{ nyfødt}) \quad (6.26)$$

- a) Bestem antall kaninpar ved $i = 4$, $i = 5$ og $i = 6$.

Finn deretter et rekursivt uttrykk for a_i ved hjelp av a_{i-1} og a_{i-2} .³

Vi skal i de to neste oppgavene svare på følgende to spørsmål:

1. Hvor mange kaninpar har vi ved starten av syklus nr. $i = 13$?
2. Hva er **vekstfaktoren** i det lange løp (dvs. når antall sykluser går mot uendelig)?

Vekstfaktoren k_i er forholdet mellom antall kaninpar fra syklus nr. i til syklus nr. $i + 1$, dvs

$$k_i = \frac{a_{i+1}}{a_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.28)$$

Sentralt i svaret ligger *det gylne snitt*, som er tallet:⁴

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339... \quad (6.29)$$

³Ved syklus i , tenk på hvor mange **gravide** vi har fra forrige syklus pluss **hvor mange nyfødte vi får**?
Altså:

$a_i = \text{gravide fra forrige syklus} + \text{nyfødte}$	(6.27)
--	--------

⁴Det gylne snitt ble bl.a. brukt av Leonardo Da Vinci og Salvatore Dali i flere av deres mest kjente malerier, siden dette forholdet er blant mange ansett som et av de mest estetiske proporsjonene mellom sidene i kanvaset som maleriene baseres på. Det gylne snitt forekommer overraskende ofte i helt naturlige prosesser i naturen som skaper skjønnhet og harmoni.

Jacques Philippe Marie Binet oppdaget i 1812 at antall kaninpar a_i ved starten av syklus nr. i kunne uttrykkes som:

$$a_i = \frac{\phi^i - (-\phi)^{-i}}{\sqrt{5}} \quad (6.30)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

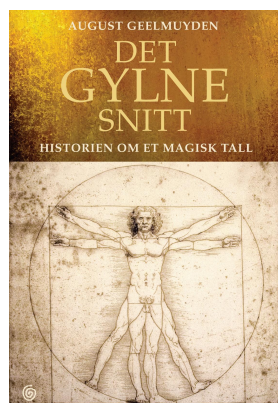


Figure 6.2: Det gylne snitt.

- b)** Bruk lign. 6.30 og regn ut antall kaninpar ved starten av syklus nr. $i = 13$.
- c)** Regn ut vekstfaktorene k_{12} og k_{13} og k_{14} .
Hvilket tall konvergerer vekstfaktoren mot når antall sykluser går mot uendelig? ⁵

■

⁵Bruk formelen i lign.(6.30) samt 6.29 og regn ut grenseverdien direkte. Bruk 6 desimalers nøyaktighet.

Problem 6.5 — Geometriske følger

Definisjon 6.0.1 — geometrisk følge

En følge er en **geometrisk** dersom et ledd er lik det foregående **multiplisert** med en *konstant*, dvs.:

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (6.31)$$

$$a_{i+1} = k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.32)$$

hvor k = konstant og kalles *kvotient*.

Setning 6.0.1 — sum av **GEOMETRISK** rekke, **endelig** n

Anta at vi har den geometriske følgen

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (6.33)$$

$$a_{i+1} = k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.34)$$

hvor k = konstant og kalles kvotient. Summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (6.35)$$

av den tilhørende geometriske rekken er da:

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (k \neq 1) \quad (6.36)$$

- a) Avgjør om den gitte følgen er en **geometrisk** følge, og hvis den er det, bestem kvotienten k og avgjør om følgen vokser eller minker.

$$i) \quad a_n = -5, \quad n \geq 1 \quad (6.37)$$

$$ii) \quad a_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \geq 1 \quad (6.38)$$

$$iii) \quad a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (6.39)$$

$$iv) \quad a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{1-n}, \quad n \geq 1 \quad (6.40)$$

$$v) \quad a_n = (n+1)^3, \quad n \geq 1 \quad (6.41)$$

$$v) \quad a_n = (-2)^n, \quad n \geq 1 \quad (6.42)$$

b) Finn leddene a_3 og a_8 av den gitte **geometriske** følgen når du vet at:

$$i) \quad a_1 = 8; \quad a_4 = 320 \quad (6.43)$$

$$ii) \quad a_7 = -2; \quad k = -\frac{1}{3} \quad (6.44)$$

$$iii) \quad a_5 - a_1 = \frac{15}{2}; \quad a_2 - a_4 = 3 \quad (\text{vanskelig}) \quad (6.45)$$

c) Finn summene S_3 og S_{10} av den **geometriske** følgen dersom du vet at

$$i) \quad S_n = 2^n \quad (6.46)$$

$$ii) \quad a_1 = 2; \quad k = 3 \quad (6.47)$$

$$iii) \quad a_1 = -3; \quad S_3 = -21 \quad (6.48)$$

■

6.1 Geometriske følger og rekker

Problem 6.6 — Finansmatematikk

Ved annuitetslån tilbakebetales lånet med *like store*, altså konstante, **terminbeløp**:

$$\underbrace{nK}_{\text{terminbeløp}} = \text{avdrag} + \text{rente} \quad (6.49)$$

= konstant for annuitetslån

Med n terminer betales totalt beløpet nK tilbake til banken når annuitetslånet er innfridd. Ved innfridd lån er **summen av avdragene** lik lånet, dvs. K_0 . Resten er renteutgifter.

La R_n^{ann} være den totale renten som betales til banken i løpet av låneperioden på n terminer.

Fra lign.(6.49) får vi da:

$$nK = K_0 + R_n^{\text{ann}} \quad (6.50)$$

$$\Downarrow$$

$$R_n^{\text{ann}} = nK - K_0 \quad (6.51)$$



Foto: Colourbox

Figure 6.3: Lån.

Fra et eksempel i kompendiet fant at terminbeløpet K er gitt ved:

$$K = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (6.52)$$

dersom første terminbeløp betales inn en termin etter låneopptak.

Hardhaus-Per skal endelig få oppfylt sin drøm om å få sin egen motorsykkel. For å realisere denne drømmen må hardhaus-Per låne

$$K_0 = 210\,000 \text{ NOK} \quad (6.53)$$

i en bank. Anta at renten er $r = \frac{6.5\%}{100\%} = 0.065$ og at lånet er et **annuitetslån**. Lånet skal betales tilbake etter $n = 15$ år. Første terminbeløp betales inn ett år etter låneopptak.

- a) Hvor stort er det årlige terminbeløpet K ?
- b) Det første året må Per betalte rente av hele beløpet K_0 .
Hvor mye rente betaler han det første året?
- c) Hvor mye avdrag betaler han det første året? ⁶
Og hvor mye rente betaler han det andre året? ⁷
- d) Hvor mye betaler totalt i rente i løpet av låneperioden på 15 år?



Figure 6.4: Motorsykkel.

⁶Tips: Bruk lign.(6.49) samt svarene fra oppgave a) og b).

⁷Man skal ikke bruke lign.(6.51) for å løse denne oppgaven. Du trenger avdraget det første året som du nettopp har regnet ut.

Hardhaus-Per ønsker også å kjøpe seg en båt.

For å oppfylle drømmen om båt må han ta opp et nytt lån.

Siden dette er et forbrukslån så er renten høy, nemlig $r = \frac{9\%}{100\%} = 0.09$.

Men hardhaus-Per er usikker på hvor stort lån han greier å ta opp.

Anta at han har to mulige alternativ for tilbakebetaling av et slikt båtlån:

- A)** Han betaler faste terminbeløp $K = 25\,000$ hvert år i $n = 15$ år.
Første avbetaling skjer om ett år.
 - B)** Han betaler faste terminbeløp $K = 29\,000$ hvert år i $n = 15$ år.
Første avbetaling skjer om 4 år.
- e)** Hvor stort lån K_0 kan hardhaus-Per ta opp med alternativ **A**? ⁸



Figure 6.5: Båt.

⁸Finn hva slags nåverdi K_0 som alternativ **A** svarer til. Bruk formelen i lign.(6.52).

Dersom første avbetaling skjer etter 4 år, som i alternativ **B**, så er tidslinjen som beskriver nedbetalingen vist i figur 6.6. Det totale lånet som Per kan ta opp er da:

$$K_0 = K_{0,1} + K_{0,2} + K_{0,3} + \dots + K_{0,14} + K_{0,15} \quad (6.54)$$

- f) Bruk lign.(6.54) samt formlene for $K_{0,1}$, $K_{0,2}$ osv. fra figur 6.6 til å vise at det totale lånet K_0 som Per kan ta opp, for alternativ **B**, er gitt ved:

$$K_0 = \frac{K}{(1+r)^4} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{14}} + \frac{1}{(1+r)^{15}} \right)}^{\text{geometrisk rekke}} \quad (6.55)$$

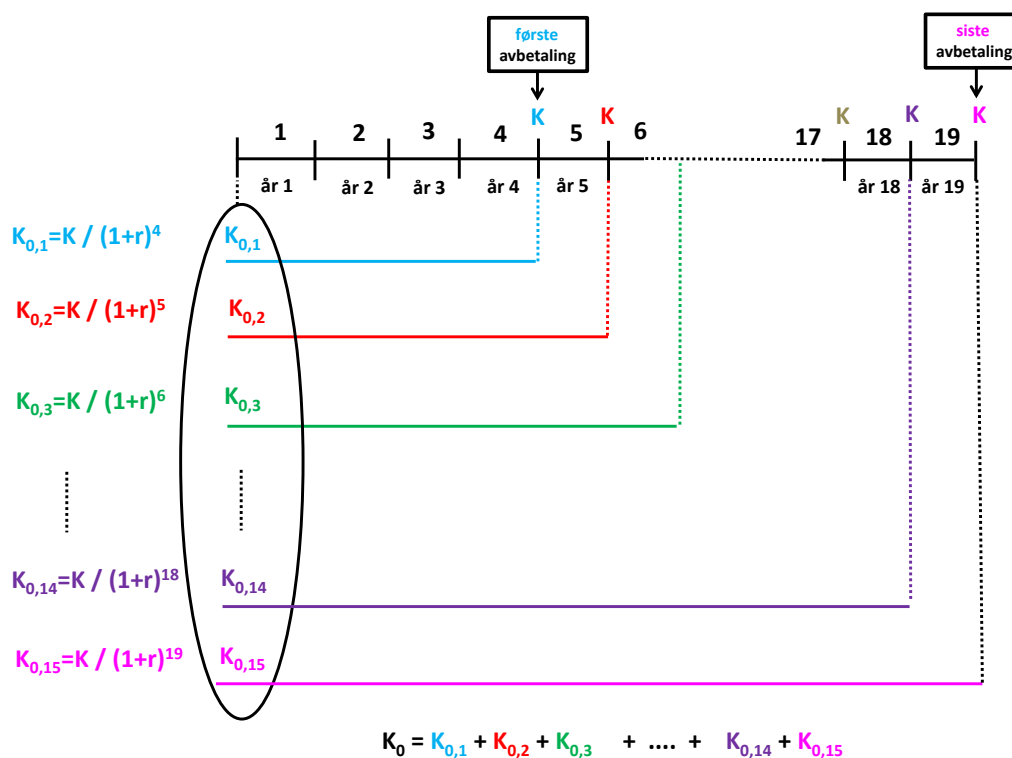


Figure 6.6: Tidslinje.

- g) Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke og vis at lign.(6.55) kan skrives

$$K_0 = \frac{K}{(1+r)^4} \frac{\frac{1}{(1+r)^{15}} - 1}{\frac{1}{1+r} - 1} \quad (6.56)$$

- h) Bruk lign.(6.56) og regn ut hvor stort lån K_0 som Per kan ta opp med alternativ **B**.⁹

■

⁹Sett tallene for K og r inn i lign.(6.56) og regn ut tallsvaret.

Problem 6.7 — Logistikk - hovedeksamen desember 2018

Glamox er en norsk produsent og leverandør av belysning.

Anta at lampen C10-S1, se figur 6.7, skal fases ut på grunn av nye forskrifter. De nye forskriftene trer i kraft 1. juli 2019.

Anta videre at Glamox har 246 slike lamper på lager per 1. januar 2019. De ønsker derfor å selge alle disse lampene i løpet av de første $n = 6$ månedene i 2019.

Anta at det etterspørres 125 slike lamper i januar 2019, dvs.:

$$d_1 = 125 \text{ lamper} \quad (6.57)$$

Siden dette er lamper som fases ut så vil etterspørselen reduseres fra måned til måned. Anta at etterspørselen reduseres med en konstant faktor $k < 1$ per måned, dvs.:

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 k \\ d_3 &= d_1 k^2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ d_6 &= d_1 k^5 \end{aligned} \quad (6.58)$$

altså

$$d_i = d_1 k^{i-1} \quad (6.59)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ og d_i = etterspørselen av lampen C10-S1 i måned nr. i .

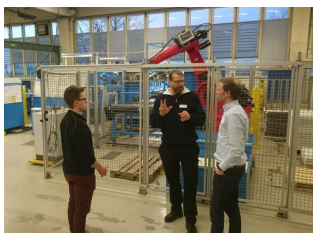


Figure 6.7: Lampen C10-S1.

- a) Anta at $k = 0.2472$.
Hvor stor vil etterspørselen av lampen i mars 2019 være, dvs. hva er d_3 ?
- b) Hva slags type rekke representerer d_i , hvor $i = 1, 2, \dots, 6$?
Gi en *kort* begrunnelse.

Den samlede etterspørselen av lampen de 6 første månedene i 2019 er:

$$S_6 = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_6 = \sum_{i=1}^6 d_i \quad (6.60)$$

- c) Med $k = 0.2472$, vis at: ¹⁰

$$S_6 = 166 \quad (6.61)$$

¹⁰I denne oppgaven er det meningen at du skal regne ut summen S_6 via en formel (se kompendium), **ikke** ved å ”for hånd” legge sammen de seks leddene i lign.(6.60).

Siden Glamox har

$$N = 246 \tag{6.62}$$

lamper på lager per 1. januar 2019 så vil $246 - 166 = 80$ lamper forbli usolgt. For å unngå å brenne inne med 80 lamper så vurderer Glamox å **sette ned prisen** på lampen.

- d) Ved å sette ned prisen p på lampen så får man en **ny og større** konstant faktor k . Dersom Glamox skal selge alle N lampene de første 6 månedene så betyr det at:

$$S_6 = N \tag{6.63}$$

Bruk lign.(6.63) og vis at den nye konstante faktoren k de da må ha er bestemt av ligningen: ¹¹

$$k^6 - \frac{N}{d_1} k + \frac{N}{d_1} - 1 = 0 \tag{6.64}$$

¹¹Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke.

Med

$$N = 246, \quad d_1 = 125 \quad (6.65)$$

er det to løsninger av 6. gradsligningen i lign.(6.64), nemlig $k = 0.5$ og $k = 1$. Siden etterspørselen reduseres fra måned til måned i 2019, dvs. $k < 1$, så må vi velge løsningen:

$$k = 0.5 \quad (6.66)$$

Anta videre at det er en sammenheng mellom pris og etterspørsel av den aktuelle lampen slik at den konstante faktoren k og prisen $p \geq 0$ har følgende sammenheng:

$$k = k_0 e^{-ap} \quad (6.67)$$

hvor

$$k_0 = 0.8 \quad (6.68)$$

$$a = 0.000783 \quad (6.69)$$

- e) Vis, ved å bruke lign.(6.67), at prisen p er gitt ved:

$$p = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right) \quad (6.70)$$

- f) Hva slags pris må Glamox sette på lampen dersom de skal selge alle $N = 246$ lampene i løpet av de første 6 månedene i 2019, og dersom etterspørselen i januar 2019 er $d_1 = 125$? ¹²

■

¹²Det viktige her er å forstå hva slags størrelser (tall) man skal bruke for å finne det oppgaven spør etter.



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

7. Integrasjon

Problem 7.1 — Antiderivert og fundamentalsetningen for integrasjon**Setning 7.0.1** — fundamentalsetningen for integral

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon. Da er:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad (7.1)$$

hvor

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (7.2)$$

altså $F(x) = \text{antideriverte av } f(x)$.

 Husk at:

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (7.3)$$

beregner **arealet** under grafen til funksjonen $f(x)$ i intervallet $[a, b]$ forutsatt at $f(x) \geq 0$.

Dersom $f(x)$ er både over og under x -aksen, så vil integralet i lign.(7.17) regne ut **differansen** av arealet over x -aksen og arealet under x -aksen.

- a) Finn først $\overbrace{\text{antiderivert } F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x)$.
 Regn deretter ut, ved hjelp av integrasjonens fundamentasetningen, integralet

$$\int_0^1 f(x) dx \quad (7.4)$$

Oppgi alle svar eksakt.

$$i) \quad f(x) = ax^n \quad \text{hvor } a \text{ og } n \text{ er konstanter} \quad (7.5)$$

$$ii) \quad f(x) = a(n+1)x^{(n-1)}, \quad \text{hvor } a \text{ og } n \text{ er konstanter} \quad (7.6)$$

$$iii) \quad f(x) = k, \quad \text{hvor } k \text{ er en konstant} \quad (7.7)$$

$$iv) \quad f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 \quad (7.8)$$

$$v) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad (7.9)$$

$$vi) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (7.10)$$

$$vii) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (7.11)$$

$$viii) \quad f(x) = e^{2x} \quad (7.12)$$

- b) Anta vi har gitt to funksjoner:

$$f(x) = 4 - x^2 \quad (7.13)$$

$$g(x) = 3x \quad (7.14)$$

hvor $x \geq 0$.

Regn ut arealet A av området hvor grafen til $f(x)$ ligger over grafen til $g(x)$.¹

- c) Regn ut arealet $A = A_1 + A_2$ av det skraverte området i figur 7.1.

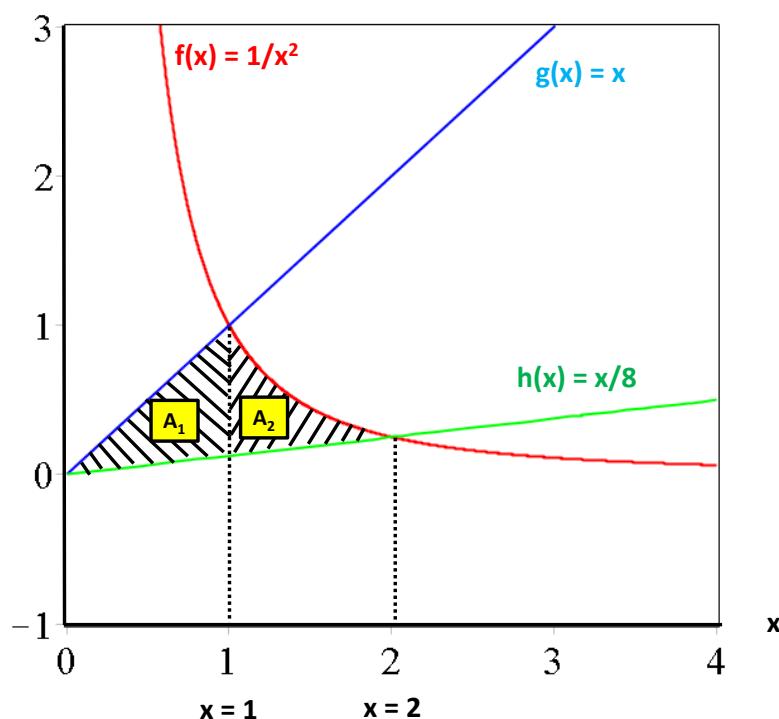


Figure 7.1: Areal.

¹Tegn funksjonene i et koordinatsystem for $x \in [0, 2]$. Du kan bruke GeoGebra dersom du ønsker. Da er det enklere å forstå hva som menes med "området hvor grafen til $f(x)$ ligger over grafen til $g(x)$ ". Regn ut krysningspunktet til $f(x)$ og $g(x)$ og regn til slutt ut arealet til differansen $f(x) - g(x)$ mellom disse punktene.

Problem 7.2 — Areal under grafen , SCM200 Lager- og produksjonsstyring
Setning 7.0.2 — fundamentalsetningen for integral

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon. Da er:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad (7.15)$$

hvor

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (7.16)$$

altså $F(x) = \text{anti} \text{deriverte av } f(x)$.

 Husk at:

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (7.17)$$

beregner **arealet** under grafen til funksjonen $f(x)$ i intervallet $[a, b]$ forutsatt at $f(x) \geq 0$.

Dersom $f(x)$ er både over og under x -aksen, så vil integralet i lign.(7.17) regne ut **differansen** av arealet over x -aksen og arealet under x -aksen.

Hustadmarmor AS er en stor produksjonsfabrikk i Elnesvågen i Fræna kommune. Bedriften produserer og leverer “*slurry*”. Slurry er en flytende hvit væske produsert fra kalkstein og marmor som brukes i fyllmasseindustrien over hele verden, blant annet i papir og tannkrem, se figur 7.2.

Slurry lagres i tanker, se figur 7.2. I kompendiet fant vi at den totale lagerkostnaden ved å ha slurry på lager i T timer, er gitt ved:

$$K(T) = \int_0^T c(t) dt \quad (7.18)$$

hvor

$$c(t) = hi(t) = \text{lagerkostnad per time \AA ha slurry p\AA lager i tanken} \quad (7.19)$$

og

$$h = \text{lagerkostnad i NOK per tonn per time} \quad (7.20)$$

$$i(t) = \text{antall tonn slurry p\AA lager i tanken ved tiden } t \text{ (“inventory”)} \quad (7.21)$$



Figure 7.2: Tank.

Anta at lagernivået kan beskrives av følgende ligning:

$$i(t) = (a - D)t + i_0 \quad (7.22)$$

hvor

$$a = \text{produksjonshastighet, dvs. antall tonn slurry produsert per time} \quad (7.23)$$

$$D = \text{etterspørsel av slurry, i antall tonn per time} \quad (7.24)$$

$$i_0 = \text{lagernivået ved tiden } t = 0 \text{ (i tonn slurry)} \quad (7.25)$$

- a) Vis at den totale lagerkostnaden $K(T)$ av å ha slurry på lager i T timer, er gitt ved: ²

$$K(T) = h(a - D)\frac{1}{2}T^2 + hi_0T \quad (7.26)$$

Tips: Start med lign.(7.18).



Figure 7.3: Hustadmarmor med tankene på rekke og rad.

²Man kan faktorisere lign.(7.26), men det har ingen stor hensikt her.

Anta videre at:

$$a = 1.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad D = 3.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad i_0 = 10000 \text{ tonn}, \quad h = 0.04 \frac{\text{NOK}}{\text{tonn time}} \quad (7.27)$$

Da kan vi plotte lagerkostnaden per time $c(t) = hi(t)$ for $t \in [0..5000]$:

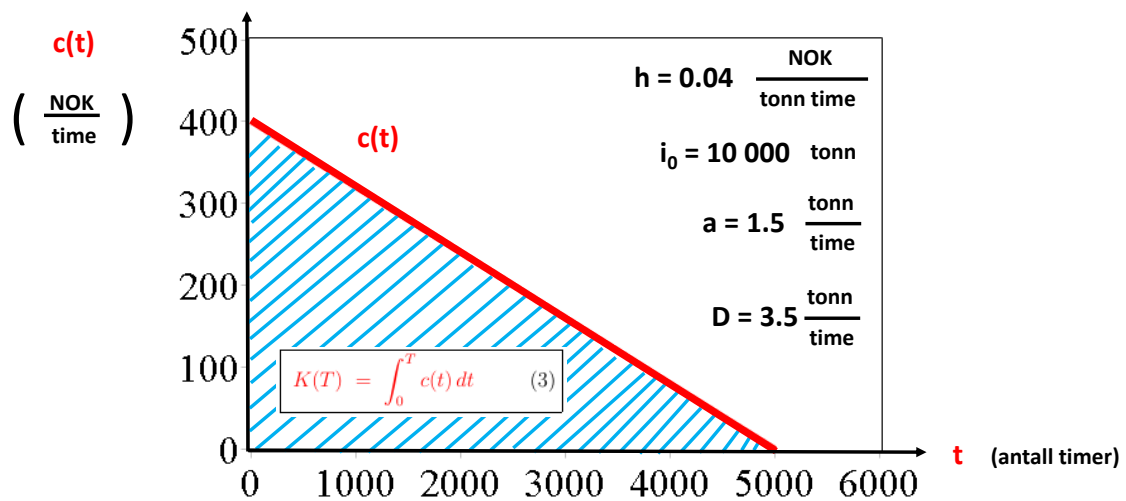


Figure 7.4: Lagerkostnad per time $c(t)$.

Tanken er tom når $i(T_0) = 0$.

Ved å bruke lign.(7.22), løse med hensyn på T_0 og sett inn tallene i lign.(7.27) så får vi:

$$T_0 = -\frac{i_0}{a-D} \quad (7.28)$$

$$= -\frac{10000}{1.5-3.5} \text{ timer} \quad (7.29)$$

$$= 5000 \text{ timer} \quad (7.30)$$

som er sammenfallende med nullpunktet til $c(t) = hi(t)$, se figur 7.4.

De totale lagerkostnadene som påløper frem til tanken er tom, dvs. som påløper etter $T_0 = 5000$ timer, er det blå arealet som vist i figur 7.4.

$$K(T_0) = \int_0^{T_0} c(t) dt \quad (= \text{det blå arealet som vist i figur 7.4}) \quad (7.31)$$

- b)** Finn de totale lagerkostnadene $K(T_0)$ som påløper frem til tanken er tom. Oppgi svaret i antall hele NOK. ³
- c)** Som nevnt i lign.(7.31), lagerkostnaden $K(T_0)$ er arealet under grafen i figur 7.4. Bruk geometri til å regne ut $K(T_0)$. ⁴

Stemmer dette svaret med oppgave **3b**?



Figure 7.5: Stor lagerkapasitet er viktig for Hustadmarmor.

³En del av poenget her er å bruke resultat fra den tidligere deloppgaven, dvs. bruke resultatet fra oppgave **3a**.

⁴Husk at arealet av en rettvinklet trekant er:

$$\text{areal} = \frac{1}{2} \cdot \text{bredde} \cdot \text{høyde} \quad (7.32)$$

Istedet for den lineære modellen i lign.(7.22), la oss nå heller anta at lagernivået i tanken sfa. tiden t kan beskrives av følgende ligning:

$$i(t) = i_0 e^{-bt} \quad (7.33)$$

hvor ⁵

$$b = 0.0005 \frac{1}{\text{time}} \quad (7.34)$$

Da kan vi igjen plotte lagerkostnaden per time $c(t) = hi(t)$ for $t \in [0..6000]$:

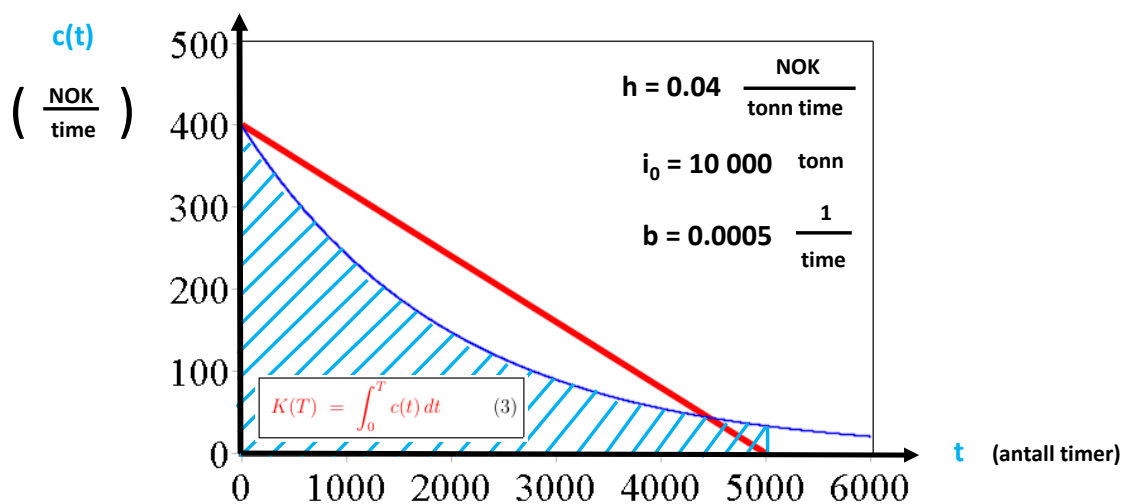


Figure 7.6: Lagerkostnad per time $c(t)$.

PS:

Den røde linjen i figur 7.6 er den samme røde linjen fra figur 7.4.

⁵At konstanten b har benevnningen "1/time" er ikke noe du trenger å bry deg om i denne oppgaven.

- d) Vis nå at den totale lagerkostnaden $K(T)$ av å ha slurry på lagertanken i T timer, er gitt ved:

$$K(T) = \frac{hi_0}{b} \left(1 - e^{-bT} \right) \quad (7.35)$$

Tips: Start med lign.(7.18).

- e) Finn de totale lagerkostnadene $K(T_0)$ som påløper etter $T_0 = 5000$ timer. Oppgi svaret i antall hele NOK. ⁶

■

⁶Her er noe du kan tenke meg uten at du behøver å svare på det i innleveringen: Forventer du en større eller mindre kostnad sammenlignet med svaret i oppgave 3b? Ta en titt på figur 7.6.

Problem 7.3 — Dimensjonering av ambulanser - sannsynlighetsregning

Vi skal i denne oppgaven hjelpe Helse Midt-Norge med å dimensjonere ambulanseflåten sin. Spesifikt ser vi på kommunen Aukra utenfor Molde, som per i dag har kun én ambulansestasjon.

Anta at stasjonen ved Aukra hadde kun **en** operativ ambulanse i 2017.

Ved akutt hjertestans er den desidert viktigste faktoren for å overleve hvor raskt ambulansen kommer til vedkommende.⁷ Tiden fra man registrerer en akutt hjertestans til en ambulanse har kommet til stedet, kalles *responstiden*.

Helse Midt-Norge beregnet for 2017 at den gjennomsnittlige responstiden for stasjonen ved Aukra var 10 minutter. Dette var høyt over gjennomsnittet i Midt-Norge generelt, som lå på 6 minutter i 2017. Et analyseteam fra Høgskolen i Molde ble derfor leid inn for å finne ut hvorfor responstiden var så høy for Aukra i 2017.

Ambulansestasjonens beliggenhet er svært sentral. Gjennomsnittlig kjøretid fra stasjonen til de ulike områdene på Aukra er faktisk bare 7 minutter. Det er da besynderlig at responstiden er hele 10 minutter, dvs. 3 minutter *mer* enn selve kjøretiden. Hva bruker ambulanspersonellet disse 3 minuttene på?

Bruk noen minutter på reflektere over hvor disse 3 ekstra minutter kommer fra.⁸



Figure 7.7: Ambulanse.

⁷Dette kommer av at jo raskere man får gitt pasienten defibrillering og primær hjertekompresjon, desto større sjanse har pasienten for å overleve. Ambulansemannskapet gjennomfører dette umiddelbart når de ankommer situasjonen.

⁸Det kommer åpenbart *ikke* av at ambulanspersonellet somler når en akuttsituasjon inntreffer. Det kommer heller ikke av at stasjonen befinner seg på en øy med fergeforbinnelse. Dersom et akuttifelle forekommer på fastlandet, sendes ambulanse fra Molde istedet.

Etter litt refleksjon over saken kommer analyseteamet frem til at årsaken kommer av at det er tilfeller hvor et **nytt akutttilfelle forekommer mens ambulansen er opptatt** med et tidligere akutttilfelle, dvs. det forekommer to akutttilfeller med svært tett mellomrom. Responstiden faller da drastisk for det andre akutttilfellet. Det er nettopp disse responstidene som utgjør de 3 ekstra minuttene i den gjennomsnittlige responstiden.



Figure 7.8: **Nytt** akutttilfelle forekommer mens ambulansen er opptatt.

Dersom stasjonen nå hadde hatt **to eller flere** ambulanser, så hadde sannsynligvis responstiden blitt betraktelig bedre, siden de da kunne ha sendt ut den ledige bilen istedet. Men en ekstra bil i beredskap koster jo selvfølgelig penger, som Helse Midt-Norge har begrenset av. For at det skal være verdt investeringen, ønsker de å ha en mer analytisk tilnærming enn argumentasjonen vi har gjort så langt.

For å analysere problemstillingen nærmere, skal vi bruke *statistikk og sannsynlighetsregning* som hjelpemiddel. ⁹

⁹Denne oppgaven er ment som en liten smaksprøve på faget *MAT110 Statistikk 1* som de fleste av dere skal ha til våren 2019. Vi forventer at store deler av oppgaven kan virke litt vanskelig å forstå uten en skikkelig innføring i statistikk. Ha derfor fokus på hvordan *integrasjon* brukes i statistikk.

La oss først starte med beskrivelsen av selve problemstillingen.

I løpet av 2017 ble den gjennomsnittlige tiden fra akutttilfellet ble registrert til ambulansen hadde levert fra seg pasienten estimert til 40 minutter. Sammensetningen av de 40 minuttene var som følger: ¹⁰

- 10 minutter responstid
- 20 minutter behandlingstid
- 10 minutter retur til legekantor

Problemet med **overlappende** akutttilfeller skjer dermed hvis to påfølgende akutttilfeller skjer innen 40 minutter. Utfordringen er at tiden mellom to påfølgende akutttilfeller varierte kraftig i 2017, som hadde totalt 400 utrykninger. I gjennomsnitt hadde derfor Aukra en **akuttrate** på: ¹¹

$$\lambda = \frac{400}{365 \cdot 24 \cdot 60} \approx 0.00076 \quad (7.36)$$

hvor

$$\lambda = \underbrace{\text{antall akutttilfeller pr. minutt}}_{\text{akuttrate}} \quad (7.37)$$

Verdien $\lambda = 0.00076$ svarer til ca. 1.1 akutttilfelle pr. dag.

Vi skal nå bruke statistikk og *sannsynligheter* for å gi en analytisk tilnærming til problemet. Problemstillingen kan dermed reformuleres slik:

Problemstilling 1:

Hva er sannsynligheten for at to påfølgende akutttilfeller skjer innen 40 minutter?

¹⁰Tallet 40 minutter er viktig, men sammensetningen er med kun for forståelsen av oppgaven.

¹¹Vi måler akuttraten i antall akutttilfeller *pr. minutt* for å kunne sammenlikne med 40 minutter. Tallet 0.00076 akutttilfeller pr. minutt svarer til ca. 1.1 akutttilfeller pr. dag.

For å kunne beregne denne sannsynligheten definerer vi følgende variabel: ¹²

$$\tau_2 = \overbrace{\text{tidsrommet mellom to}}^{\text{antall minutter}} \text{ påfølgende akutttilfeller} \quad (7.38)$$

Rent statistisk formuleres problemstilling 1 slik:

$$\text{Prob}(\tau_2 \leq 40) = \text{sannsynligheten for at tidsrommet } \tau_2 \text{ mellom to} \quad (7.39)$$

påfølgende akutttilfeller er **mindre enn 40 minutter**

hvor

$$\text{Prob} = \underbrace{\text{Probability}}_{\text{sannsynlighet}} \quad (7.40)$$

De 400 akutttilfellene fra 2017 viser at sannsynligheten definert i lign. (7.39) kan regnes ut ved hjelp av følgende integral:

$$\text{Prob}(\tau_2 \leq 40) = \int_0^{40} \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau \quad (7.41)$$

¹²I statistikken kalles dette en *stokastisk variabel* og er svært sentralt i emnet *MAT110 Statistikk 1*.

a) Vis at

$$\text{Prob}(\tau_2 \leq 40) = 0.03 \quad (7.42)$$

ved å regne ut integralet i lign.(7.41).

b) Tolk svaret fra oppgave **a**), dvs. tolk lign.(7.42). ¹³

¹³Svaret i denne oppgaven er nesten oppgitt i lign.(7.39).

Lign. 7.42 sier at sannsynligheten for at to påfølgende akuttsituasjoner skjer innen 40 minutter er 3%, som er ganske høyt. Dersom det var 400 akuttsituasjoner ila. 2017 ved Aukra, var det med andre ord $400 \cdot 0.03 = 12$ akuttsituasjoner hvor ambulansen var opptatt med en annen akuttsituasjon. For disse 12 uheldige sjelene, var sannsynligheten for overlevelse dessverre svært lav, siden responstiden økte drastisk for disse akuttillfellene.

Helse Midt-Norge vurderer derfor å bemanne en ekstra ambulanse slik at det er *to* operative ambulanser ved Aukra. De ønsker derfor å kunne regne ut sannsynligheten for at det inntreffer **3** akuttsituasjoner innen 40 minutter, gitt at de har to operative ambulanser. Dette gir mening, siden den tredje akuttsituasjonen da vil bli forsinket, siden begge ambulansene er opptatte med to andre tilfeller.

Målet for Helse Midt-Norge er at denne sannsynligheten blir lavere enn 0.001, dvs. mindre en en promille.

Problemstilling 2:

*Er **sannsynligheten** for at tre påfølgende akuttillfeller skjer innen 40 minutter?
mindre enn 0.001?*

For å kunne beregne denne sannsynligheten definerer vi følgende variabel:

$$\tau_3 = \overbrace{\text{tidsrommet mellom tre}}^{\text{antall minutter}} \text{ påfølgende akuttillfeller} \quad (7.43)$$

Ved hjelp av denne variabelen kan vi beskrive sannsynligheten vi er ute etter ved integralet: ¹⁴

$$\text{Prob}(\tau_3 \leq 40) = \int_0^{40} \lambda^2 \tau e^{-\lambda \tau} d\tau \quad (7.44)$$

¹⁴Bare ta integralet i lign.(7.44) for gitt. Du skal ikke vise at sannsynligheten er gitt ved dette integralet.

c) Regn ut $\text{Prob}(\tau_3 \leq 40)$ ved å regne ut integralet i lign.(7.44).¹⁵

d) Tolk svaret fra oppgave c).¹⁶

Oppnår Helse Midt-Norge målet sitt ved å bemanne en ekstra ambulanse?
Begrunn svaret kort.

■

¹⁵For å finne antiderivert $\overbrace{F}^{\text{anti}}(\tau)$ til funksjonen $f(\tau) = \lambda^2 \tau e^{-\lambda \tau}$, kan produktregelen for derivasjon benyttes:

La

$$u(\tau) = \lambda^2 \tau \tag{7.45}$$

$$v'(\tau) = e^{-\lambda \tau} \tag{7.46}$$

slik at

$$f(\tau) = u(\tau) v'(\tau) = \lambda^2 \tau e^{-\lambda \tau} \tag{7.47}$$

Da sier produktregelen for derivasjon at: (dette kalles også ”delvis integrasjon”)

$$\text{Prob}(\tau_3 \leq 40) = \int_0^{40} \lambda^2 \tau e^{-\lambda \tau} d\tau = u(40)v(40) - u(0)v(0) - \int_0^{40} u'(\tau)v(\tau) d\tau \tag{7.48}$$

hvor du må finne $v(\tau)$ ved å antiderivere lign.(7.46) samt den deriverte $u'(\tau)$ ved å derivere lign.(7.45).

¹⁶Hva er sannsynligheten for at tre påfølgende akutsituasjoner skjer innen 40 minutter?