



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høgskole i logistikk

1. Midt-semester repetisjon

Kapittel 1-5: Løsning

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 01

- Utlevering:
 - Mandag 5. okt.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - Inge innlevering
 - repetisjonen er frivillig (men svært anbefalt)
- **FORarbeid:**
 - Gå gjennom kapittel 1-5 (oversiktsmessig)
 - Les kompendiet.
 - Les gjennom øvingoppgavene for kapittel 1-5, dvs. øving 1-3.
- **ETTERarbeid:**
 - Gå gjennom løsning som legges ut fredag 9. okt. kl. 12:00.

Problem 1.1 — Kontinuasjoneksamen 2019 oppgave 1 25%

- a) (2.5%) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(3x - 2y)^2 \tag{1.1}$$

Løsning:

Distributive lov: ("pilmetoden") ¹

$$(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 3x2y - 3x2y + (-2y)^2 \tag{1.2}$$

$$= 9x^2 - 12xy + 4y^2 \tag{1.3}$$

- b) (2.5%) Skriv brøken på enklest mulig form:

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \tag{1.4}$$

Løsning:

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{5}{4} \tag{1.5}$$

¹Vi kunne også brukt 2. kvadratsetning.

- c) (2.5%) Regn ut uten bruk av kalkulator. Vis mellomregninger.

$$\frac{(16 \cdot 10^{-3})(5 \cdot 10^4)}{8 \cdot 10^{-6}} \quad (1.6)$$

Løsning:

$$\frac{(16 \cdot 10^{-3})(5 \cdot 10^4)}{8 \cdot 10^{-6}} = \frac{16 \cdot 5}{8} \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 \cdot 10^6 = 10 \cdot 10^{-3+4+6} = 10^{1+7} = 10^8$$

d) (7.5%) Gitt funksjonene:

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - x - 1 \quad (1.7)$$

Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene. ²

Løsning:

Skjæringspunkt(en) til funksjonene er bestemt av $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = g(x) \quad \text{skjæring} \quad (1.8)$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 + 3x + 2 = x^2 - x - 1 \quad \Big/ -x^2 + x + 1 \quad (1.9)$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 - x^2 + 3x + x + 2 + 1 = 0 \quad (1.10)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (1.11)$$

ABC-formelen:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \quad (1.12)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{2} \quad (1.13)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -3 \quad \vee \quad x = -1 \quad (1.14)$$

²Husk at skjæringspunkt(en) har både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. (x, y) .

Tilhørende funksjonsverdier er:

$$g(-3) = (-3)^2 - (-3) - 1 = 9 + 3 - 1 = 11 \quad (1.15)$$

$$g(-1) = (-1)^2 - (-1) - 1 = 1 + 1 - 1 = 1 \quad (1.16)$$

Skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$ er dermed:

$$(x, y) = (-3, 11) \quad \text{og} \quad (x, y) = (-1, 1) \quad (1.17)$$

- e) (10%) Løs ulikheten ved bruk av fortegnsskjema:

$$\frac{16-4x}{x-1} \leq 4x \quad (1.18)$$

Løsning:

Vi multipliserer **ikke** med $x-1$ siden vi ikke vet om $x-1$ er positivt eller negativt.
Vi flytter heller tallet 4 over på venstre side:

$$\frac{16-4x}{x-1} \leq 4x \quad \quad \quad / -4x \quad (1.19)$$

$\Downarrow$

$$\frac{16-4x}{x-1} - 4x \leq 0 \quad (1.20)$$

$\Downarrow$

$$\frac{16-4x}{x-1} - 4x \frac{x-1}{x-1} \leq 0 \quad \quad \quad \text{fellesnevner} \quad (1.21)$$

$\Downarrow$

$$\frac{16 - \cancel{4x} - 4x^2 + \cancel{4x}}{x-1} \leq 0 \quad (1.22)$$

$\Downarrow$

$$-\frac{4(x^2-4)}{x-1} \leq 0 \quad \quad \quad / \cdot (-1) \quad (1.23)$$

$\Downarrow$

$$\frac{4(x+2)(x-2)}{x-1} \geq 0 \quad \quad \quad \text{faktoriserer} \quad (1.24)$$

Med $c_1 = -2$, $c_2 = 1$ og $c_3 = 2$ setter vi opp fortegnsskjemaet:

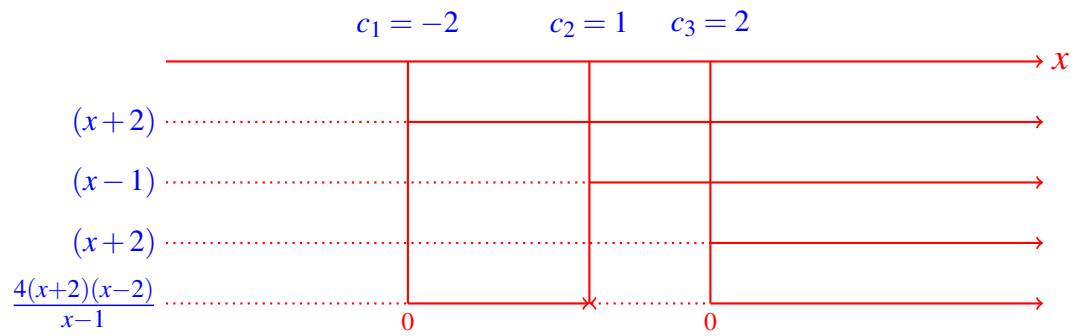


Figure 1.1: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra fortegnsskjemaet i figur 1.1:

$$-2 \leq x < 1 \quad \vee \quad 2 \leq x < \infty \quad (1.25)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = [-2, 1) \cup [2, \infty) \quad (1.26)$$

■

Problem 1.2 — Kontinuasjoneksamen 2019 oppgave 2a) og 2d) 25%

- a) (5%) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1.27)$$

i punktet $x = 1$.

Løsning:

Vi kan forenkle funksjonen ved hjelp av regelen $\ln x^n = n \ln x$:³

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = -1 \cdot \ln x = -\ln x \quad (1.28)$$

Dermed:⁴

$$f'(x) = -(\ln x)' = -\frac{1}{x} \quad (1.29)$$

Innsatt for $x = 1$ gir oss stigningstallet i punktet $x = 1$:

$$f'(1) = -\frac{1}{1} = -1 \quad (1.30)$$

³"Jekke ned"-regelen.

⁴Vi vet at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, se kompendiet.

b) (10%) Finn løsningen til ligningen ⁵

$$4^x + 6 \cdot 4^{-x} = 5 \quad (1.31)$$

Løsning:

Legg først merke til at vi kan sette

$$u = 4^x. \quad (1.32)$$

Innsatt i lign.(1.31):

$$u + 6u^{-1} = 5 \quad / \cdot u \quad (1.33)$$

$\Updownarrow$

$$u^2 + 6 = 5u \quad / - 5u \quad (1.34)$$

$\Updownarrow$

$$u^2 - 5u + 6 = 0 \quad / (\text{ABC-formel}) \quad (1.35)$$

$\Updownarrow$

$$u = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \quad (1.36)$$

$\Updownarrow$

$$u = \frac{5 \pm 1}{2} \quad (1.37)$$

$\Updownarrow$

$$u = 2 \vee u = 3 \quad / u = 4^x \quad (1.38)$$

$\Updownarrow$

$$4^x = 2 \vee 4^x = 3 \quad / \ln(-) \quad (1.39)$$

$\Updownarrow$

$$x \ln 4 = \ln 2 \vee x \ln 4 = \ln 3 \quad (1.40)$$

$\Updownarrow$

$$x = \frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{\ln 2}{2 \ln 2} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{\ln 3}{\ln 4} = \frac{\ln 3}{2 \ln 2} \quad (1.41)$$

⁵Dette er regnet som en A-oppgave. Denne oppgaven er litt vanskelig. Hopp over den dersom du bruker lang tid på den.

Løsningsmengden er dermed gitt ved:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\ln 3}{2 \ln 2} \right\} \quad (1.42)$$

■

Problem 1.3 — Testeksamen 2019 oppgave 1 25%

- a) (2.5%) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(-1 + 2a)(1 + 2a) \tag{1.43}$$

Løsning:

$$(-1 + 2a)(1 + 2a) = -(1 - 2a)(1 + 2a) \stackrel{\text{konj.setn.}}{=} -(1 - (2a)^2) \tag{1.44}$$

$$= -1 + 4a^2 = 4a^2 - 1 \tag{1.45}$$

- b) (2.5%) Skriv brøken på enklest mulig form:

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \tag{1.46}$$

Løsning:

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \tag{1.47}$$

- c) (5%) Vis ved hjelp av ABC -formelen at løsningsmengden til ligningen

$$x^2 - 7x - 1 = 0 \quad (1.48)$$

er gitt ved:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{7 - \sqrt{53}}{2}, \frac{7 + \sqrt{53}}{2} \right\}. \quad (1.49)$$

Løsning:

Vi bruker ABC -formelen med $a = 1, b = -7$ og $c = -1$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \quad (1.50)$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \quad (1.51)$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4}}{2} \quad (1.52)$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{53}}{2} \quad (1.53)$$

Løsningsmengden er dermed gitt ved

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{7 - \sqrt{53}}{2}, \frac{7 + \sqrt{53}}{2} \right\} \quad (1.54)$$

som skulle vises (q.e.d.).

- d) (5%) Skriv følgende uttrykk på faktorisert form: ⁶

$$(4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) \quad (1.55)$$

Løsning:

Fra fundamentalsetningen for algebra vet vi at vi kan faktorisere et polynom dersom vi vet nullpunktene.

Fra oppgave c) har vi dermed at:

$$x^2 - 7x - 1 = \left(x - \frac{7 - \sqrt{53}}{2}\right) \left(x - \frac{7 + \sqrt{53}}{2}\right) \quad (1.56)$$

som innsatt i lign.(1.55) gir:

$$(4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) = -2(x - 2)(x^2 - 7x - 1) \quad (1.57)$$

$$= -2(x - 2) \left(x - \frac{7 - \sqrt{53}}{2}\right) \left(x - \frac{7 + \sqrt{53}}{2}\right) \quad (1.58)$$

⁶Bruk svaret fra oppgave c).

- e) (10%) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: ⁷

$$f(x) = (4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) \leq 0 \quad (1.59)$$

Løsning:

Fra oppgave d) fant vi faktoriseringen:

$$f(x) = (4 - 2x)(x^2 - 7x - 1) = -2(x - 2)\left(x - \frac{7 - \sqrt{53}}{2}\right)\left(x - \frac{7 + \sqrt{53}}{2}\right)$$

Med nullpunktene $c_1 = \overbrace{\left(x - \frac{7 - \sqrt{53}}{2}\right)}^{\approx -0.1401}$, $c_2 = 2$ og $c_3 = \overbrace{\left(x - \frac{7 + \sqrt{53}}{2}\right)}^{\approx 7.1401}$ setter vi opp fortegnsskjemaet:

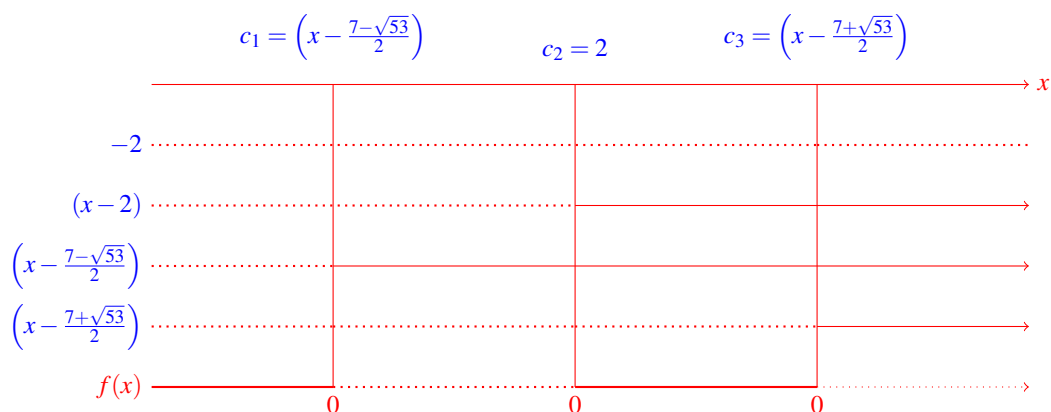


Figure 1.2: Fortegnsskjema.

Vi leser av løsningsmengden når $f(x) \leq 0$:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{7 - \sqrt{53}}{2}, 2 \right] \cup \left[\frac{7 + \sqrt{53}}{2}, \rightarrow \right) \quad (1.60)$$

⁷Bruk løsningen fra oppgave d)

Problem 1.4 — Hovedeksamen 2018 oppgave 1

- a) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(x+y)(x-y) \tag{1.61}$$

Løsning:

Løser ut parentesene og samle like ledd: ⁸

$$(x+y)(x-y) = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} + y^2 = x^2 - y^2 \tag{1.62}$$

- b) Trekk sammen brøkene og gjør forenklinger:

$$\frac{3}{2a} - \frac{6}{3a} + \frac{1}{a} \tag{1.63}$$

Løsning:

Trekker sammen og forenkler mest mulig: (må finne fellesnevner)

$$\frac{3}{2a} - \frac{6}{3a} + \frac{1}{a} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 2a} - \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot 3a} + \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot a} \tag{1.64}$$

$$= \frac{9}{6a} - \frac{12}{6a} + \frac{6}{6a} \tag{1.65}$$

$$= \frac{9 - 12 + 6}{6a} = \frac{3}{6a} = \frac{1}{2a} \tag{1.66}$$

⁸Bruker “pilmetoden”.

- c) Forkort brøken:

$$\frac{x^3 - xy^2}{(x+y)^2} \quad (1.67)$$

Løsning:

Forkorter brøken: (bruker konjugatsetningen)

$$\frac{x^3 - xy^2}{(x+y)^2} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x+y)^2} = \frac{x(x-y)\cancel{(x+y)}}{(x+y)\cancel{(x+y)}} = \frac{x(x-y)}{x+y} \quad (1.68)$$

- d) Løs ligningen, dvs. finn x :

$$\frac{4}{x+1} + 2 = \frac{2x+6}{x-1} \quad (1.69)$$

Løsning:

Skriver alle leddene med *fellesnevneren* $(x+1)(x-1)$:

$$\frac{4}{x+1} + 2 = \frac{2x+6}{x-1} \quad (1.70)$$

$$\frac{4(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x-1)} + \frac{2(x+1)(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \frac{(2x+6)(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \quad (1.71)$$

$$4(x-1) + 2 \underbrace{(x+1)(x-1)}_{=x^2-1} = 2 \underbrace{(x+3)(x+1)}_{=x^2+4x+3} \quad (1.72)$$

$$4(x-1) + 2(x^2-1) = 2(x^2+4x+3) \quad (1.73)$$

$$4x-4+2\cancel{x^2}-2 = 2\cancel{x^2}+8x+6 \quad (1.74)$$

$$4x-8x = 6+4+2 \quad (1.75)$$

$$-4x = 12 \quad \left| \cdot \frac{1}{(-4)} \right.$$

$$x = -3 \quad (1.76)$$

En alternativ og minst like god måte å løse denne ligningen på er å multiplisere med faktorene $(x+1)(x-1)$ på begge sider:

$$\frac{4}{x+1} + 2 = \frac{2x+6}{x-1} \quad \Bigg/ \cdot (x+1)(x-1)$$

$$\frac{4}{\cancel{x+1}}(\cancel{x+1})(x-1) + 2(x+1)(x-1) = \frac{2x+6}{\cancel{x-1}}(x+1)(\cancel{x-1}) \quad (1.77)$$

$$4(x-1) + 2(x+1)(x-1) = (2x+6)(x+1) \quad (1.78)$$

$$4x - 4 + 2(x^2 - 1) = 2x^2 + 2x + 6x + 6 \quad (1.79)$$

$$4x - 4 + \cancel{2x^2} - 2 = \cancel{2x^2} + 8x + 6 \quad (1.80)$$

$$4x - 8x = 6 + 4 + 2 \quad (1.81)$$

$$-4x = 12 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{(-4)}$$

$$x = -3 \quad (1.82)$$

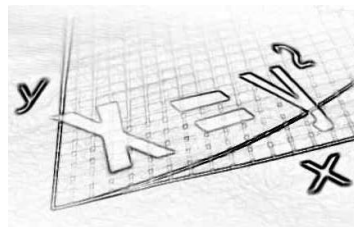


Figure 1.3: Algebra.

e) Løs ulikheten:

$$2x - (3 + 7x) > x + 9 \quad (1.83)$$

Løsning:

Løser ulikheten:

$$2x - (3 + 7x) > x + 9 \quad (1.84)$$

$$2x - 3 - 7x > x + 9 \text{ (løser opp parentesen)} \quad (1.85)$$

$$2x - 7x - x > 9 + 3 \quad (1.86)$$

$$-6x > 12 \quad (1.87)$$

Når vi deler på -6 (negativt) på begge sider så må vi SNU fortegnet:

$$\frac{-6x}{-6} < \frac{12}{-6} \quad (1.88)$$

$$x < -2 \quad (1.89)$$

f) Skriv tallet nedenfor på standardform:

$$570000000000 \quad (1.90)$$

Løsning:

Skriver på standardform:

$$570000000000 = 5,7 \cdot 10^{11} \quad (1.91)$$

Problem 1.5 — Hovedeksamen 2012 oppgave 1

Møretank AS er en produsent av varmtvannsberedere. De produserer både store og små beredere. De ansatte har funnet ut, uansett hva slags type varmtvannsbereder det dreier seg om, at den totale kostnaden forbundet med produksjon og salg av varmvannberedere med god tilnærming kan modelleres med en *kvadratisk* funksjon:

$$K(x) = ax^2 + bx + c \quad (1.92)$$

hvor x = antall beredere produsert og solgt **per år** og hvor a , b og c er konstanter. For en spesifikk type varmtvannsbereder, “*MT Standard bereder*”, gjelder følgende tall:

$$a = 1 \quad \text{NOK} \cdot (\text{år})^2 \quad (1.93)$$

$$b = 200 \quad \text{NOK} \cdot \text{år} \quad (1.94)$$

$$c = 250\,000 \text{ NOK} \quad (\text{faste kostnader}) \quad (1.95)$$

De ansatte har også funnet ut at det er en *lineær* sammenheng mellom pris p og etterspørsel x :

$$p(x) = Ax + B \quad (1.96)$$

hvor A og B er konstanter. For berederen “*MT Standard bereder*” gjelder følgende tall:

$$A = -4 \quad \text{NOK} \cdot \text{år} \quad (1.97)$$

$$B = 3\,200 \quad \text{NOK} \quad (1.98)$$



Figure 1.4: Møretank AS lokalisert i Vestnes kommune, Møre og Romsdal.

Kostnader

- a) Total **enhetskostnad**, dvs. kostnad per bereder, er definert ved: $TEK(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x}$.
Vis at denne er gitt ved: ⁹

$$TEK(x) = ax + b + \frac{c}{x} \quad (1.99)$$

Løsning:

Total enhetskostnad, dvs. kostnad per bereder:

$$TEK(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x} \quad (1.100)$$

$$= \frac{ax^2 + bx + c}{x} = ax + b + \frac{c}{x}, \quad \text{q.e.d.} \quad (1.101)$$

⁹Se side 12 i formelsamlingen, formelen for sum av brøker med samme nevner.

- b) Vis at antall beredere som må produseres per år i bedriften for å *minimere* enhetskostnaden $TEK(x)$ er gitt ved:¹⁰

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (1.102)$$

Løsning:

Den deriverte av $TEK(x)$:

$$\frac{dTEK(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(ax + b + \frac{c}{x} \right) = a - \frac{c}{x^2} \quad (1.103)$$

Minimum til $TEK(x)$ finnes ved å derivere og deretter sette den deriverte lik null:

$$\frac{dTEK(x)}{dx} = 0 \quad (1.104)$$

$$a - \frac{c}{x^2} = 0 \quad \bigg/ \cdot x^2 \quad (1.105)$$

$$ax^2 - c = 0 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{a} \quad (1.106)$$

$$x^2 - \frac{c}{a} = 0 \quad (1.107)$$

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{q.e.d.} \quad (1.108)$$

¹⁰Anta at $\frac{d^2TEK(x)}{dx^2} > 0$ for $x > 0$, dvs. $TEK(x)$ er konveks slik at lign.(1.102) representerer et minimum, og ikke et maksimum. Med denne antagelsen behøver du altså ikke å utføre 2. derivasjonstesten eller lage fortegnsskjema i denne oppgaven.

- c) Bruk lign.(1.93) og (1.95) til å regne ut den numeriske verdien av x i lign.(1.102).¹¹

Løsning:

Setter inn numeriske verdier:

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{250\,000 \text{ NOK}}{1 \text{ NOK} \cdot (\text{år})^2}} = 500 \frac{1}{\text{år}} \quad (1.109)$$

- d) I vedlegg A er enhetskostnaden $TEK(x)$ plottet for intervallet $150 \leq x \leq 1000$ med de numeriske verdiene gitt ved lign.(1.93)-(1.95).

Markèr minimum av $TEK(x)$ på figuren i vedlegg A.

Stemmer det numeriske resultatet fra oppgave c med den blå grafen i vedlegg A?

¹¹Husk å bruke riktig benevnning. Benevnningen til x er per år, dvs. $\frac{1}{\text{år}}$.

Løsning:

Markører minimum av $TEK(x)$ på figuren fra vedlegg A:

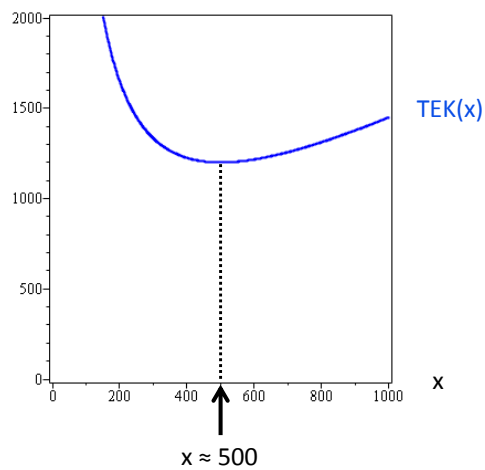


Figure 1.5: Minimum av $TEK(x)$ er markert på figuren.

Ved å sammenligne lign.(1.109) og fig.(1.5) ser vi at den analytiske og den grafiske løsningen er sammenfallende .

- e) Grensekostnaden er definert ved: $\frac{dK(x)}{dx}$.
Vis at denne er gitt ved:

$$\frac{dK(x)}{dx} = 2ax + b \quad (1.110)$$

Løsning:

Grensekostnaden finnes ved å derivere kostnaden $K(x)$:

$$\frac{dK(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (ax^2 + bx + c) \quad (1.111)$$

$$= 2ax + b, \quad \text{q.e.d.} \quad (1.112)$$

- f) I vedlegg A finner du en tom verditabell for grensekostnaden $\frac{dK(x)}{dx}$.

Bruk de numeriske verdiene i lign.(1.93)-(1.94) og fyll ut denne verditabellen i vedlegg A.

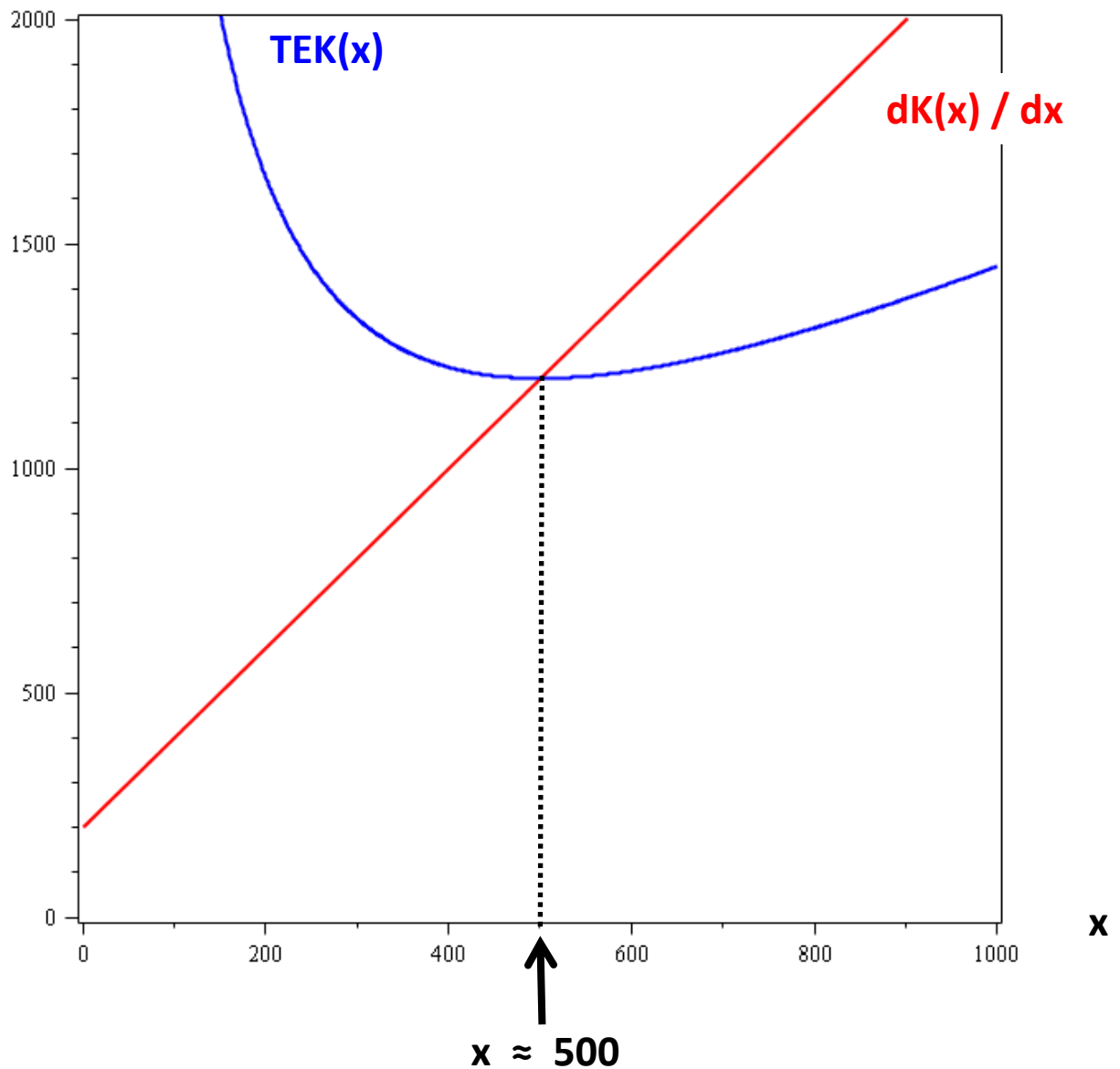
Tegn også inn grensekostnaden $\frac{dK(x)}{dx}$ i figuren i vedlegg A.

Løsning:

Se neste side!

Vedlegg A

x	0	400	800
$dK(x) / dx$	200	1000	1800



- g) For hvilken verdi av x skjærer grafen til $TEK(x)$ og grafen til $\frac{dK(x)}{dx}$ hverandre? ¹²

Løsning:

Av figuren i vedlegg A ser vi at grafen til $TEK(x)$ og grafen til $\frac{dK(x)}{dx}$ skjærer hverandre ved $x = 500 \text{ 1/år}$.

- h) Vis, ved å sette

$$TEK(x) = \frac{dK(x)}{dx}, \quad (1.113)$$

at $TEK(x)$ og $\frac{dK(x)}{dx}$ skjærer hverandre ved x -verdien gitt ved lign.(1.102).

Løsning:

Skjæringspunktet mellom $TEK(x)$ og $\frac{dK(x)}{dx}$ finnes analytisk ved å sette funksjonene lik hverandre:

¹²Her skal du løse oppgaven grafisk, dvs. lese svaret direkte fra figuren i oppgave f. Ingen utregninger behøves. Men husk å bruke **rett benevnning**.

$$TEK(x) = \frac{dK(x)}{dx} \quad (1.114)$$

$$ax + b + \frac{c}{x} = 2ax + b \quad (1.115)$$

$$-ax = -\frac{c}{x} \quad \quad \quad / \cdot (-x) \quad (1.116)$$

$$ax^2 = c \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{a} \quad (1.117)$$

$$x^2 = \frac{c}{a} \quad (1.118)$$

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (1.119)$$

Inntekter

- i) Vis at bedriftens totale resultat $TR(x)$ er gitt ved: ¹³

$$TR(x) = (A - a)x^2 + (B - b)x - c \quad (1.120)$$

Løsning:

Bedriftens totale resultat $TR(x)$:

$$TR(x) = I(x) - K(x) \quad (1.121)$$

$$= x \cdot p(x) - K(x) \quad (1.122)$$

$$= x \cdot (Ax + B) - (ax^2 + bx + c) \quad (1.123)$$

$$= (A - a)x^2 + (B - b)x - c, \quad \text{q.e.d.} \quad (1.124)$$

¹³Det totale resultatet $TR(x)$ er bedriftens *fortjeneste*, dvs. inntekt minus kostnad: $TR(x) = I(x) - K(x)$.

- j) Vis at antall beredere som må produseres per år i bedriften for å *maksimere* det totale resultatet $TR(x)$ er gitt ved: ¹⁴

$$x = \frac{b - B}{2(A - a)} \quad (1.125)$$

Løsning:

Den deriverte av $TEK(x)$:

$$\frac{dTR(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left((A - a)x^2 + (B - b)x - c \right) = 2(A - a)x + (B - b) \quad (1.126)$$

Maksimum til $TR(x)$ finnes ved å derivere og sette den deriverte lik null:

$$\frac{dTR(x)}{dx} = 0 \quad (1.127)$$

$$2(A - a)x + (B - b) = 0 \quad (1.128)$$

$$2(A - a)x = -(B - b) \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{2(A - a)} \quad (1.129)$$

$$x = \frac{b - B}{2(A - a)} \quad (1.130)$$

¹⁴Anta at $\frac{d^2TR(x)}{dx^2} < 0$, dvs. $TR(x)$ er konkav slik at lign.(1.102) representerer et maksimum, og ikke et minimum. Med denne antagelsen behøver du altså ikke å utføre 2. derivasjonstesten eller lage fortegnsskjema i denne oppgaven.

- k) Bruk de numeriske verdiene på side 20 til å regne ut den numeriske verdien av x i lign.(1.125).

Løsning:

Den numeriske verdien av lign.(1.130):

$$x = \frac{b - B}{2(A - a)} = \frac{(200 - 3\,200) \text{ NOK} \cdot \cancel{\text{år}}}{2(-4 - 1) \text{ NOK} \cdot (\text{år})^2} = 300 \text{ 1/år} \quad (1.131)$$

- l) Er produksjonskvantumet som *minimerer* enhetskostnaden $TEK(x)$ sammenfallende med produksjonskvantumet som *maksimerer* fortjenesten $TR(x)$ i dette tilfellet?

Løsning:

Nei, produksjonskvantumet som *minimerer* enhetskostnaden $TEK(x)$, $x = 500$, er ikke sammenfallende produksjonskvantumet som *maksimerer* fortjenesten $TR(x)$, $x = 300$.

■

Vedlegg A

Studentnummer: _____

(Lever inn dette arket sammen med resten av besvarelsen din.)

x	0	400	800
$dK(x) / dx$			

