



MAT100

Matematikk

Kompendium 2020, **del 3**

Per Kristian Rekdal og Bård-Inge Pettersen



Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høyskole i logistikk

Innholdsfortegnelse

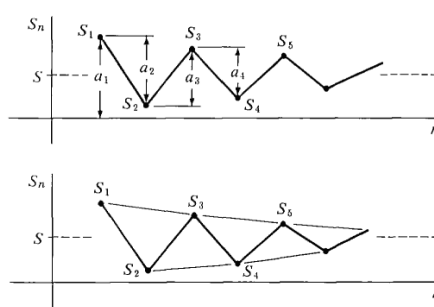
1	Grunnleggende emner	7
1.1	Logikk	8
1.1.1	Logiske utsagn	8
1.1.2	Logiske konnektiver	9
1.1.3	Logiske kvantorer	10
1.2	Mengdelære	11
1.2.1	Endelige mengder	11
1.2.2	Delmengder	16
1.2.3	Mengdeoperasjoner	18
1.2.4	Uendelige mengder	22
1.2.5	Fundamentale tallmengder	23
1.2.6	Intervaller	24
1.3	Addisjon og multiplikasjon	25
1.3.1	Addisjon og multiplikasjon	25
1.3.2	Subtraksjon og divisjon	26
1.3.3	Den kommutative lov	27
1.3.4	Den assosiative lov	29
1.3.5	Den distributive Lov ("pilmetoden")	30
1.3.6	Generell formel for å fjerne parenteser	32
1.3.7	Kvadratsetningene og konjugatsetningen	33
1.4	Brøkregning	34
1.4.1	Forkorte og utvide brøker	35
1.4.2	Algebraiske operasjoner: $+$, $\cdot$, $-$ og $/$	37
1.5	Prosent	42
1.5.1	Prosentregning	42
1.5.2	Prosentvis endring	47
1.6	Potenser	49
1.6.1	Potenser	50
1.6.2	Potensregler	51

1.6.3	Cobb-Douglas produktfunksjon	54
1.6.4	Standardform	56
1.6.5	Prefikser	57
1.7	Kvadratrot	58
1.7.1	Kvadratrot	58
1.7.2	Regneregler for kvadratrot	62
1.7.3	n 'te kvadratrot	65
1.7.4	Potenser med brøk i eksponenten	69
2	Ligninger og ulikheter	73
2.1	Algebraiske uttrykk	74
2.1.1	Variabler, parametre og konstanter	77
2.1.2	Forenkle algebraiske uttrykk	79
2.2	Algebraiske ligninger	83
2.2.1	Litt historie	83
2.2.2	Koordinatsystemer	84
2.2.3	Ligninger og geometri	88
2.2.4	Algebraiske ligninger og løsningsmengden $\mathcal{L}$	96
2.2.5	Klassifisering av algebraiske ligninger	98
2.2.6	Løsningsmetodikk: Transformasjoner	99
2.3	Linære ligninger (1. gradsligninger)	104
2.4	Linære ligningssystem	111
2.5	Kvadratiske ligninger (2. gradsligninger)	115
2.5.1	Kvadratiske ligninger med en variabel - ABC -formelen	115
2.5.2	Polynomer	120
2.6	Faktorisering	122
2.6.1	Fundamentalsetningen for aritmetikk	123
2.6.2	Fundamentalsetningen for algebra	124
2.7	Ulikheter	129
2.7.1	Transformasjoner for ulikheter	133
2.7.2	Polynomulikheter	138
2.7.3	Ulikheter med rasjonale uttrykk	143
2.8	Absoluttverdi	146
3	Funksjoner	151
3.1	Funksjoner	152
3.2	Lineære funksjoner (rette linjer)	155
3.2.1	Ett- og to-punktsformelen	159
3.3	Simplex-algoritmen	165
3.4	Kvadratiske funksjoner (parabler)	171
3.4.1	Noen egenskaper til kvadratiske funksjoner (parabler)	172
3.5	Rasjonale funksjoner	180
3.6	Asymptoter	191
3.6.1	Asymptoter for rasjonale funksjoner	193

4	Derivasjon	197
4.1	Derivasjon	198
4.2	Derivasjonsregler	200
4.2.1	Generell derivasjonsregler	200
4.2.2	Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner	218
4.2.3	Kjerneregelen	228
4.3	Globale og lokale ekstremalpunkt	231
4.3.1	Ekstremalpunkt eller ikke?	235
4.3.2	Lokale ekstremalpunkt: 1. derivasjonstesten	236
4.3.3	Lokale ekstremalpunkt: 2. derivasjonstesten	238
4.3.4	Globale ekstremalpunkt	243
5	Ekspontial- og logaritmefunksjoner	249
5.1	Ekspontialfunksjonen	250
5.2	Tallet e, Eulers tall	256
5.2.1	Ekspontialfunksjonen $f(x) = e^x$	259
5.2.2	Regneregler for e^x	262
5.2.3	Deriverte av e^x	263
5.3	Logaritmer	272
5.3.1	Definisjon	272
5.3.2	Regneregler	276
5.4	Deriverte av $\ln x$	282
6	Følger og rekker	287
6.1	Følger og rekker	288
6.1.1	Regneregler for summasjon	295
6.2	Aritmetiske følger og rekker	300
6.2.1	Sum av en aritmetiske rekke	304
6.3	Geometriske følger og rekker	318
6.3.1	Sum av en geometriske rekke	322
6.4	Konvergente og divergente rekker: $n \rightarrow \infty$	348
6.5	Geometriske rekker: $n \rightarrow \infty$	349
6.6	Oversikt finansmatematikk	355
7	Integrasjon	357
7.1	Motivasjon: Areal under graf	358
7.2	Definisjon av integral	364
7.3	Fundamentalsetningen for integral	367
7.4	Antideriverte og integral	372
7.4.1	Noen regneregler	377
7.5	Eksempler på integrasjon innen økonomi og logistikk	379
8	Funksjoner av flere variable	387
8.1	Funksjoner av to variable	388
8.2	Grafisk fremstilling av funksjoner av to variable	390
8.3	Grafisk fremstilling og nivåkurver	392

8.4	Partielle deriverte	394
8.5	Retningsderivert	398
8.6	Maksimum og minimum	400
8.7	Maksimering/minimering under bibetingelser	408

6. Følger og rekker



$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0 - (-1) = 1$$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
 Her de bruker b_n til $\frac{1}{n} = b_n + b_{n+1}$
 $n \in \mathbb{N}$ $n \in \{0, 1\}$
 År således $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$
 Altså $b_n = \frac{1}{n}$ i $b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ la serien
 summe ho es a_n la serien summe es.
 $\frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$

Figur 6.1: Følger og rekker.

6.1 Følger og rekker

Definisjon 6.1.1 — følge

En følge er en funksjon f :

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow M \quad (6.1)$$

fra mengden av positive naturlige tall $\mathbb{N}^+ = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$ til en vilkårlig mengde M .

 Følger kan bestå av tall, punkter, vektorer, funksjoner eller andre matematiske objekter.

■ Eksempel 6.1 — følger

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots \quad (6.2)$$

$$1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots \quad (6.3)$$

$$-2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots \quad (6.4)$$

$$x, 2x^2, 3x^3, 4x^4, 5x^5, 6x^6, \dots \quad (6.5)$$

$$1, -e^x, e^{2x}, -e^{3x}, e^{4x}, -e^{5x}, \dots \quad (6.6)$$

■

Definisjon 6.1.2 — rekke

En rekke er summen av leddene i en følge.

■ Eksempel 6.2 — rekke

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots \quad (6.7)$$

$$1 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \dots \quad (6.8)$$

$$-2 + 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + \dots \quad (6.9)$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \dots \quad (6.10)$$

$$1 - e^x + e^{2x} - e^{3x} + e^{4x} - e^{5x} + \dots \quad (6.11)$$

■

Vi bruker ofte det spesielle **summetegnet** Σ når vi summere leddene i en følge.¹
 Dersom vi har en sum S_n med n ledd:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (6.12)$$

så kan denne summen skrives på en mer kompakt måte:²

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (6.14)$$

¹Tegnet Σ er den greske bokstaven for S og uttales “*sigma*”.

²Legg merke til at S_n selv er en følge:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, \dots \quad (6.13)$$

■ Eksempel 6.3 — følger, rekker, sum

La:

$$a_i = \frac{i+1}{i^2} \quad (6.15)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

- a) Skriv ned de 4 første leddene i følgen.
- b) Skriv ned de 4 første leddene i rekken.
- c) Finn summen av rekken med 4 ledd.

Løsning:

- a) Følgen $a_i = \frac{i+1}{i^2}$:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \dots \quad (6.16)$$

- b) Rekken $a_i = \frac{i+1}{i^2}$:

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \dots \quad (6.17)$$

c) Summen av rekken med 4 ledd:

$$S_4 = \overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}^{= \sum_{i=1}^4 a_i} \quad (6.18)$$

$$= \sum_{i=1}^4 a_i \quad (6.19)$$

$$= \sum_{i=1}^4 \frac{i+1}{i^2} \quad (6.20)$$

$$= \frac{2}{1} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} = \frac{505}{144} \approx 3.507 \quad (6.21)$$

■

■ Eksempel 6.4 — følger, rekker, sum

La:

$$a_i = i \quad (6.22)$$

$$b_i = i^2 \quad (6.23)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

- a) Skriv ned de 3 første leddene i følgene a_i og b_i .
- b) Skriv ned de 3 første leddene i rekken a_i og b_i .
- c) Finn summen av rekken med 4 ledd.

Løsning:

- a) Følge $a_i = i$:

$$1, 2, 3, \dots \quad (6.24)$$

Følge $b_i = i^2$:

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots \quad (6.25)$$

b) Rekke $a_i = i$:

$$1 + 2 + 3 + \dots \quad (6.26)$$

Rekken $b_i = i^2$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots \quad (6.27)$$

c) Summen av rekken $a_i = i$ med 3 ledd.

$$S_3^a = \overbrace{a_1 + a_2 + a_3}^{= \sum_{i=1}^3 a_i} = \sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{i=1}^3 i \quad (6.28)$$

$$= 1 + 2 + 3 = 6 \quad (6.29)$$

Summen av rekken $b_i = i^2$ med 3 ledd.

$$S_3^b = \overbrace{b_1 + b_2 + b_3}^{= \sum_{i=1}^3 b_i} = \sum_{i=1}^3 b_i = \sum_{i=1}^3 i^2 \quad (6.30)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \quad (6.31)$$

■

6.1.1 Regneregler for summasjon

i) Sum av summer:

Vi ser at begge summene har samme start- og slutt punkt, $\sum_{i=1}^3$.
Da kan disse legges sammen:

$$\sum_{i=1}^3 a_i + \sum_{i=1}^3 b_i = \sum_{i=1}^3 i + \sum_{i=1}^3 i^2 \quad (6.32)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \quad (6.33)$$

$$= 6 + 14 = 20 \quad (6.34)$$

$$\sum_{i=1}^3 (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^3 (i + i^2) \quad (6.35)$$

$$= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) \quad (6.36)$$

$$= (1 + 1) + (2 + 4) + (3 + 9) = 20 \quad (6.37)$$

Dette er et eksempel på den generelle regneregelen:

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \quad (6.38)$$

ii) Multiplikasjon med en konstant:

La c være en konstant, f.eks. $c = 251$. Da er:

$$\sum_{i=1}^3 c a_i = \sum_{i=1}^3 c i \quad (6.39)$$

$$= 251 \cdot 1 + 251 \cdot 2 + 251 \cdot 3 = 251(1 + 2 + 3) \quad (6.40)$$

$$= c \sum_{i=1}^3 i \quad (6.41)$$

$$= c \sum_{i=1}^3 a_i \quad (6.42)$$

Dette er et eksempel på den generelle regneregelen:

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad (6.43)$$

iii) Addisjon av en konstant:

La c være en konstant, f.eks. $c = 251$. Da er:

$$\sum_{i=1}^3 (a_i + c) = \sum_{i=1}^3 (i + c) \quad (6.44)$$

$$= (1 + 251) + (2 + 251) + (3 + 251) \quad (6.45)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 3 \cdot 251 \quad (6.46)$$

$$= \sum_{i=1}^3 a_i + 3c \quad (6.47)$$

Dette er et eksempel på den generelle regneregelen:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + nc \quad (6.48)$$

Setning 6.1.1 — regneregler for summetegn

La a_i og b_i være to følger, med $i = 1, 2, 3, \dots$

Da gjelder følgende regneregler for summetegn:

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \quad (6.49)$$

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad (6.50)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + n c \quad (6.51)$$

hvor c er en konstant.

Ⓚ Legg merke til at: $(a_i = i \text{ og } b_i = i^2)$

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i = \sum_{i=1}^3 i \cdot i^2 = \sum_{i=1}^3 i^3 \quad (6.52)$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 \quad (6.53)$$

$$= 1 + 8 + 27 = 36 \quad (6.54)$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i \sum_{i=1}^3 b_i = \sum_{i=1}^3 i \sum_{i=1}^3 i^2 \quad (6.55)$$

$$= (1 + 2 + 3)(1^2 + 2^2 + 3^2) \quad (6.56)$$

$$= 6 \cdot 14 = 84 \quad (6.57)$$

som viser at: $\sum_{i=1}^n a_i b_i \neq \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i$.

6.2 Aritmetiske følger og rekker

Definisjon 6.2.1 — aritmetisk følge

En aritmetisk følge er en følge der differansen d mellom et tall a_i og det neste tallet a_{i+1} er konstant:

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (6.58)$$

$$a_{i+1} = a_i + d \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.59)$$

hvor $d = \text{konstant}$ og kalles *differens*.

K En aritmetisk rekke gjenspeiler en prosess som beveger seg fremover, typisk i tid.

K Definisjonen i lign.(6.59) viser at en aritmetisk følge er definert **rekursivt**.³

$a_n = 3n + 5$	
a_1	$3 \bullet 1 + 5 = 8$
a_2	$3 \bullet 2 + 5 = 11$
a_{30}	$3 \bullet 30 + 5 = 95$
a_{100}	$3 \bullet 100 + 5 = 305$

Figur 6.2: Aritmetisk følge.

³Rekursjon er en **gjentakende prosess** hvor en funksjon **kaller seg selv**.

Siden

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (6.60)$$

$$a_2 = a_1 + d = a + d \quad (6.61)$$

$$a_3 = a_2 + d = \underbrace{(a + d)}_{= a_2} + d = a + 2d \quad (6.62)$$

$$a_4 = a_3 + d = \underbrace{(a + 2d)}_{= a_3} + d = a + 3d \quad (6.63)$$

·
·

så innser at følgende sammenheng gjelder:

$$a_n = a + (n - 1)d \quad (6.64)$$

for en **aritmetisk** følge.

■ Eksempel 6.5 — sum av **aritmetisk** rekker

- a) Finn summen av de 4 første leddene i den aritmetiske rekken definert ved $a_{i+1} = a_i + d$ med:

$$a_1 = a = 1 \quad (\text{startledd}) \quad (6.65)$$

$$d = 7 \quad (\text{differens}) \quad (6.66)$$

- b) Finn summen av de 3 første leddene i den aritmetiske rekken definert ved $b_{i+1} = b_i + d$ med:

$$b_1 = b = 500 \quad (\text{startledd}) \quad (6.67)$$

$$d = -3 \quad (\text{differens}) \quad (6.68)$$

Løsning:

- a) Summen av de 4 første leddene i den aritmetiske rekken:

$$\sum_{i=1}^4 a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (6.69)$$

$$= 1 + (1 + 7) + (8 + 7) + (15 + 7) \quad (6.70)$$

$$= 1 + 8 + 15 + 22 = 46 \quad (6.71)$$

b) Summen av de 3 første leddene i den aritmetiske rekken

$$\sum_{i=1}^3 b_i = b_1 + b_2 + b_3 \quad (6.72)$$

$$= 500 + (500 - 3) + (497 - 3) \quad (6.73)$$

$$= 500 + 497 + 494 = 1491 \quad (6.74)$$

■

6.2.1 Sum av en aritmetiske rekke

Setning 6.2.1 — sum av ARITMETISK rekke

Anta at vi har den aritmetiske følgen

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (6.75)$$

$$a_{i+1} = a_i + d \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.76)$$

hvor $d = \text{konstant}$. Summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (6.77)$$

av den tilhørende aritmetiske rekken er da:

$$S_n = n \left(a + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (6.78)$$

Proof.

Vi ser på tilfellet med kun $n = 4$ ledd. Generaliseringen er åpenbar.

La oss se på **summen** S_4 av en **aritmetisk** rekke med 4 ledd:

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (6.79)$$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) \quad (6.80)$$

$$= 4a_1 + 6d \quad (6.81)$$

Men **summen** kan også skrives: ⁴

$$S_4 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \quad (6.84)$$

$$= a_4 + (a_4 - d) + (a_4 - 2d) + (a_4 - 3d) \quad (6.85)$$

$$= 4a_4 - 6d \quad (6.86)$$

La oss summere disse to:

$$S_4 + S_4 = 4a_1 + \cancel{6d} + 4a_4 - \cancel{6d} \quad (6.87)$$

$$\Updownarrow$$

$$2S_4 = 4(a_1 + a_4) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2} \quad (6.88)$$

$$\Updownarrow$$

$$\textcolor{red}{S}_4 = \frac{4(a_1 + a_4)}{2} \quad (6.89)$$

⁴Siden

$$a_{i+1} = \textcolor{red}{a}_i + d \quad (6.82)$$

så kan vi løse med hensyn på $\textcolor{red}{a}_i$ alene:

$$\textcolor{red}{a}_i = a_{i+1} - d \quad (6.83)$$

Fra lign.(6.64):

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (6.90)$$

Denne ligningen med $n = 4$ innsatt i lign.(6.89):

$$S_4 = \frac{4(a_1 + a_4)}{2} \quad (6.91)$$

$$= \frac{4\left(a_1 + (a_1 + (4-1)d)\right)}{2} \quad (6.92)$$

$$= \frac{4\left(2a_1 + (4-1)d\right)}{2} \quad (6.93)$$

$$= 4\left(a_1 + \frac{(4-1)d}{2}\right) \quad (6.94)$$

Istedet for en sum med kun 4 ledd så kan man gjerne ha n ledd.
Fremgangsmåten er den samme. ($4 \rightarrow n$)



■ Eksempel 6.6 — sum Σ

Anta at vi har den aritmetiske følgen:

$$a_1 = a = 1 \quad (\text{startledd}) \quad (6.95)$$

$$a_{i+1} = a_i + 1 \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.96)$$

Finn summen S_{100} .

Løsning:

Siden dette er en aritmetisk rekke så finner vi summen ved å bruke formelen i lign.(6.78): ($n = 100$)

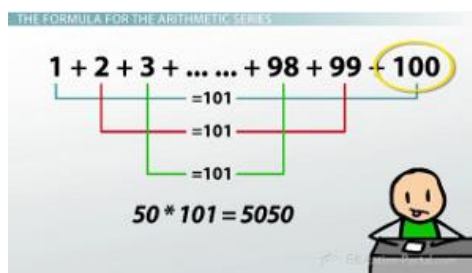
$$S_{100} \stackrel{\text{lign. (6.78)}}{=} n \left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) = 100 \left(1 + \frac{(100-1)1}{2} \right) = 5050 \quad (6.97)$$

K Dersom man skriver ut den aritmetiske rekken definert av lign.(6.95) og (6.96) så får man:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 \quad (6.98)$$

I dette kurset skal vi konsentrere oss om å bruke formelen i lign.(6.78), men vi nevner likevel at man kan finne summen til en aritmetisk rekke via smarte teknikker som f.eks. vist i figur 6.3.

■



Figur 6.3: Sum S_{100} .

■ Eksempel 6.7 — aritmetisk rekke , serielån

Et serielån tilbakebetales med *like store*, altså konstante, *avdrag* ved hver terminbetaling gjennom hele nedbetalingstiden. Etter hvert som avdragene reduserer lånet, blir rentebetalingen stadig mindre. Terminbeløpet blir derfor lavere for hver gang.

Dersom størrelsen på serielånet er K og det skal tilbakebetales på n terminer så er avdraget K/n :

$$\overbrace{\text{terminbeløp}}^{\text{avtar}} = \underbrace{\text{avdrag}}_{=\frac{K}{n}}^{\text{konstant}} + \overbrace{\text{renter}}^{\text{avtar}} \quad (6.99)$$

a) Vis at renten R_i for år nr. i utgjør en aritmetisk følge.

b) Finn et uttrykk for summen R_n^{serie} av rentene

$$R_n^{\text{serie}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad (6.100)$$

hvor

$$R_i = \text{renten for termin nr. } i \quad (6.101)$$

Anta at rentesatsen r er konstant alle n terminene.

Foto: Colourbox



Foto: Bjørn Brunvoll

Figur 6.4: Lån.

Nå skal vi bruke lign.(6.99) samt resultatene fra deloppgavene ovenfor til et løse følgende konkrete tilfelle: ⁵

Du har bestemt deg for å reservere en leilighet i Brunvollkvartalet. Du behøver 1 900 000 NOK i lån. Anta at du skal tilbakebetale dette via et **serielån**. Nedbetalingen skal skje hvert år i 30 år. Renten er 5 % over hele nedbetalingstiden.

- c) Hva er avdragene per år for dette serielånet?
- d) Hva er renten de 3 første årene?
- e) Hvor mye betaler du totalt i rente i løpet av disse 30 årene?



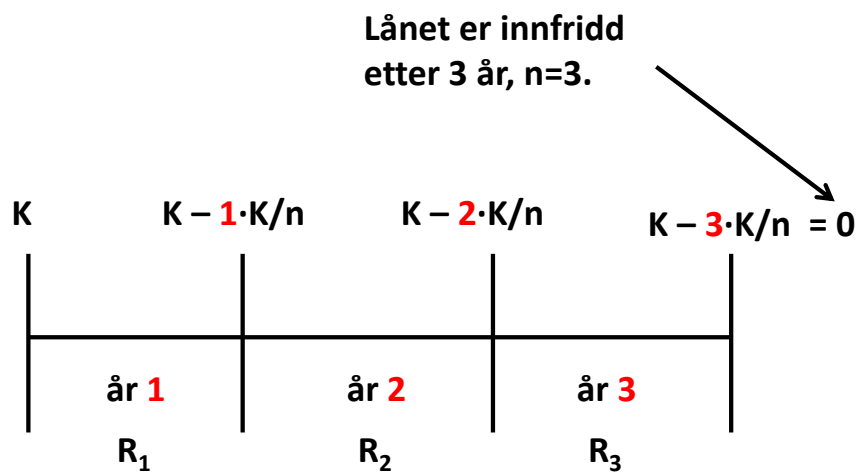
Figur 6.5: Brunvollkvartalet.

⁵Dette er den typiske situasjonen i både eksempler, øvinger og eksamensoppgaver: man bruker resultatene i tidligere deloppgaver. Deloppgavene henger altså svært ofte sammen.

Løsning:

- a) Anta at du tar opp et **serielån** K i banken.
For enkelhets skyld, la oss se på tilfellet når du skal betale tilbake dette lånet på $n = 3$ år ⁶.

La R_1 , R_2 og R_3 være **renten** du må betalte for hhv. år 1, 2 og 3 hhv., se figur 6.6:



Figur 6.6: Rentene R_1 , R_2 og R_3 er **rentene** for år 1, 2 og 3.

⁶Lånet er altså innfridd etter 3 år, se figur (6.6).

i) Etter 1 år må du betale rente av hele lånet. Renten du må betale er dermed:

$$R_1 = Kr \quad (6.102)$$

ii) Ved starten av år 2 har du tilbakebetalt 1 avdrag på $\frac{K}{n}$. Renten du må betale for perioden mellom år 1 og 2 er dermed:

$$R_2 = \left(K - 1 \frac{K}{n} \right) r \quad (6.103)$$

$$= Kr - \frac{Kr}{n} = R_1 - \frac{Kr}{n} \quad (6.104)$$

iii) Ved starten av år 3 har du tilbakebetalt 2 avdrag på $\frac{K}{n}$. Renten du må betale for perioden mellom år 2 og 3 er dermed:

$$R_3 = \left(K - 2 \frac{K}{n} \right) r \quad (6.105)$$

$$= \left(Kr - \frac{Kr}{n} \right) - \frac{Kr}{n} = R_2 - \frac{Kr}{n} \quad (6.106)$$

Vi ser dermed at renten følger mønsteret

$$R_{i+1} = R_i - \frac{Kr}{n} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.107)$$

som utgjør en **aritmetisk følge** med $d = -\frac{Kr}{n}$ og startledd $R_1 = Kr$, se lign.(6.102).

b) Den totale renten:

$$R_n^{\text{serie}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad (6.108)$$

er altså summen av en aritmetisk rekke og vi bruker formelen i lign.(6.78):

$$R_n^{\text{serie}} \stackrel{\text{lign.(6.78)}}{=} n \left(R_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (6.109)$$

$$= n \left(Kr + \frac{(n-1) \left(-\frac{Kr}{n} \right)}{2} \right) \quad (6.110)$$

$$= nKr \left(1 - \frac{n-1}{2n} \right) \quad (6.111)$$

$$= nKr \left(\frac{2n}{2n} - \frac{n-1}{2n} \right) \quad (6.112)$$

$$= \cancel{n}Kr \frac{2\cancel{n} - (n-1)}{2\cancel{n}} \quad (6.113)$$

$$= Kr \frac{\cancel{n} + 1}{2} \quad (6.114)$$

som altså er det totale rentebeløpet som må betales for et serielån over lånets løpetid.

- c) **Avdragene** for et serielån er **konstante**, se lign.(6.99).

I vårt tilfelle er disse konstanteavdragene gitt ved:

$$\text{avdrag per år} = \frac{K}{n} = \frac{1\,900\,000}{30} \text{ NOK} = 63\,333 \text{ NOK} \quad (6.115)$$

- d) Fra eksemplet på side 311 vet vi at renten R_i for år nr. i utgjør en aritmetisk følge.

$$R_1 = Kr \quad (\text{startledd}) \quad (6.116)$$

$$R_{i+1} = R_i - \frac{Kr}{n} \quad (6.117)$$

Dermed:

$$R_1 = Kr = 1\,900\,000 \cdot 0.05 \text{ NOK} = 95\,000 \text{ NOK} \quad (6.118)$$

$$R_2 = R_1 - \frac{Kr}{n} \quad (6.119)$$

$$= \left(95\,000 - \frac{1\,900\,000}{30} \right) = 91\,833 \text{ NOK} \quad (6.120)$$

$$R_3 = R_2 - \frac{Kr}{n} \quad (6.121)$$

$$= \left(91\,833 - \frac{1\,900\,000}{30} \right) = 88\,667 \text{ NOK} \quad (6.122)$$

- e) **Total rente** R_{30}^{serie} for et **serielån** i løpet av tilbakebetalingstiden på 30 år er gitt ved lign.(6.114) på side 312:

$$R_{30}^{\text{serie}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_{30} \quad (6.123)$$

$$\stackrel{\text{lign. (6.114)}}{=} K r \frac{30+1}{2} \quad (6.124)$$

$$= 1\,900\,000 \cdot 0.05 \cdot \frac{30+1}{2} \text{ NOK} \quad (6.125)$$

$$= 1\,472\,500 \text{ NOK} \quad (6.126)$$

■

■ Eksempel 6.8 — **serielån** , **aritmetisk følge**

Du bestemmer deg for å spare til bil. Bilen koster 144 000 NOK. Du starter med å sette inn 1000 NOK i banken. Deretter setter du inn et nytt beløp hver måned. Dette beløpet er slik at du setter inn 2000 NOK mer enn du satte inn forrige måned.

- a) Vis at spareprosessen beskrevet i teksten utgjør en **aritmetisk følge**.
- b) **Hvor mange måneder** går det før du har 144 000 NOK på konto?



Figur 6.7: Bil.

Løsning:

- a) Siden det settes inn 2000 NOK mer enn du satte inn forrige måned så betyr det at:

$$a_1 = 1000 \text{ NOK} \quad (6.127)$$

$$a_2 = 3000 \text{ NOK} \quad (6.128)$$

$$a_3 = 5000 \text{ NOK} \quad (6.129)$$

$$a_4 = 7000 \text{ NOK} \quad (6.130)$$

.

.

Det generelle mønsteret er:

$$a_1 = a = 1000 \quad (6.131)$$

$$a_{i+1} = a_i + 2000 \quad (6.132)$$

som utgjør en aritmetisk følge hvor $d = 2000$.

- b) La n være antall måneder du må spare for å få 144 000 NOK på konto, dvs.:

$$S_n = 144\,000 \text{ NOK} \quad (6.133)$$

hvor

$$S_n = n \left(a + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (6.134)$$

og setter inn tall:

$$144\,000 = n \left(1000 + \frac{(n-1)2000}{2} \right) \quad (6.135)$$

$$= \cancel{1000n} + 1000n^2 - \cancel{1000n} = 1000n^2 \quad (6.136)$$

og løser med hensyn på n

$$n = \pm\sqrt{144} = \pm 12 \quad (6.137)$$

Løsningen $n = -12$ måneder er umulig.

Med andre ord: Det tar **12 måneder** før du kan kjøpe bilen.

■

6.3 Geometriske følger og rekker

Definisjon 6.3.1 — geometrisk følge

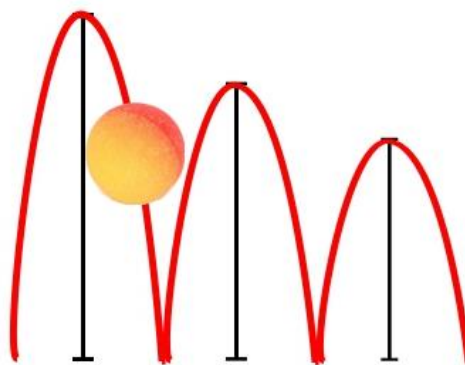
En følge er en **geometrisk** dersom et ledd er lik det foregående **multiplisert** med en *konstant*, dvs.:

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (6.138)$$

$$a_{i+1} = k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.139)$$

hvor k = konstant og kalles *kvotient*.

K Definisjonen i lign.(6.139) viser at en geometrisk følge er definert **rekursivt**.⁷



Figur 6.8: Geometrisk følge.

⁷Rekursjon er en **gjentakende prosess** hvor en funksjon **kaller seg selv**.

 Siden

$$a_2 = k a_1 \quad (6.140)$$

$$a_3 = k a_2 = k k a_1 = k^2 a_1 \quad (6.141)$$

$$a_4 = k a_3 = k (k^2 a_1) = k^3 a_1 \quad (6.142)$$

$$\cdot \quad (6.143)$$

$$\cdot \quad (6.144)$$

så innser at følgende sammenheng gjelder:

$$a_i = k^{i-1} a_1 \quad (6.145)$$

for en **geometrisk** rekke, hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

■ Eksempel 6.9 — geometriske rekker

- a) Finn summen av de 4 første leddene i den geometriske rekken definert ved $a_{i+1} = a_i k$ med:

$$a_1 = a = 1 \quad (\text{startledd}) \quad (6.146)$$

$$k = 3 \quad (\text{kvotient}) \quad (6.147)$$

- b) Finn summen av de 4 første leddene i den geometriske rekken definert ved $b_{i+1} = b_i k$ med:

$$b_1 = b = 1 \quad (\text{startledd}) \quad (6.148)$$

$$k = 1.1 \quad (\text{kvotient}) \quad (6.149)$$

Løsning:

- a) Summen av de 4 første leddene i den geometriske rekken:

$$S_4 = \sum_{i=1}^4 a_i \quad (6.150)$$

$$= \sum_{i=1}^4 3^{i-1} \quad (6.151)$$

$$= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 \quad (6.152)$$

$$= 1 + 3 + 9 + 27 \quad (6.153)$$

$$= 40 \quad (6.154)$$

b) Summen av de 4 første leddene i den geometriske rekken

$$S_4 = \sum_{i=1}^4 b_i \quad (6.155)$$

$$= \sum_{i=1}^4 1.1^{i-1} \quad (6.156)$$

$$= 1.1^0 + 1.1^1 + 1.1^2 + 1.1^3 \quad (6.157)$$

$$= 1 + 1.1 + 1.21 + 1.331 \quad (6.158)$$

$$= 4.641 \quad (6.159)$$

■

6.3.1 Sum av en geometriske rekke

Setning 6.3.1 — sum av **GEOMETRISK** rekke, **endelig** n ^a

Anta at vi har den geometriske følgen

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (6.160)$$

$$a_{i+1} = k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.161)$$

hvor $k = \text{konstant}$ og kalles kvotient. Summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (6.162)$$

av den tilhørende geometriske rekken er da: ^b

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (k \neq 1) \quad (6.164)$$

^aSammenlign denne setningen med den på side 349.

^bDersom $k = 1$, dvs. alle leddene er like, så er summen:

$$S_n = a_1 n \quad (k = 1) \quad (6.163)$$

Proof.

Vi ser på tilfellet med kun $n = 3$ ledd. Generaliseringen er åpenbar.

La oss se på **summen** S_3 av en geometrisk rekke med 3 ledd:

$$S_3 = \sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{i=1}^3 a k^{i-1} = a + a k + a k^2 \quad (6.165)$$

Multipliser denne ligningen med k :

$$S_3 k = (a + a k + a k^2) k = a k + a k^2 + a k^3 \quad (6.166)$$

La oss subtrahere disse to:

$$S_3 k - S_3 = \cancel{a k} + \cancel{a k^2} + a k^3 - (a + \cancel{a k} + \cancel{a k^2}) \quad (6.167)$$

$$= a k^3 - a \quad (6.168)$$

Denne ligningen kan vi løse mhp. **summen** S_3 :

$$S_3 k - S_3 = a k^3 - a \quad (6.169)$$

$\Updownarrow$

$$S_3(k-1) = a(k^3-1) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{k-1} \quad (k \neq 1) \quad (6.170)$$

$\Updownarrow$

$$S_3 = a \frac{k^3-1}{k-1} \quad (6.171)$$

Istedet for en sum med kun 3 ledd så kan man gjerne ha n ledd. Fremgangsmåten er den samme. Istedet for 3 så får man n i formelen i lign.(6.171): ($3 \rightarrow n$)



■ Eksempel 6.10 — **geometrisk** rekker , **sum**

La oss returnere til eksemplene på side 320.

Summen S_4 :

$$S_4 = \sum_{i=1}^4 3^{i-1} = 3^0 + 3 + 3^2 + 3^3 \quad (6.172)$$

er en **geometrisk** rekke siden $\frac{a_{i+1}}{a_i} = k = 3$, dvs. **konstant**. Videre er $a_1 = a = 3^0 = 1$.
Dermed kan vi bruke lign.(6.164):

$$S_4 \stackrel{\text{lign.(6.164)}}{=} a \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 40 \quad (6.173)$$

dvs. samme svar som i lign.(6.154) på side 320.

Summen S_4 :

$$S_4 = \sum_{i=1}^4 1.1^{i-1} = 1.1^0 + 1.1 + 1.1^2 + 1.1^3 \quad (6.174)$$

er en **geometrisk** rekke siden $\frac{b_{i+1}}{b_i} = k = 1.1$, dvs. **konstant**. Videre er $b_1 = 1.1^0 = 1$.
Dermed kan vi bruke lign.(6.164):

$$S_4 \stackrel{\text{lign.(6.164)}}{=} b_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{1.1^4 - 1}{1.1 - 1} = 4.641 \quad (6.175)$$

dvs. samme svar som i lign.(6.159) på side 320.

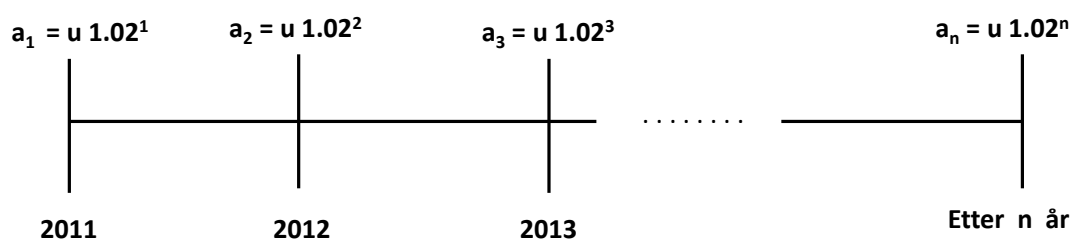
■

■ Eksempel 6.11 — petroleumslogistikk

I 2010 ble det totalt utvunnet

$$u = 31.2 \cdot 10^9 \text{ fat olje} \quad (2010) \quad (6.176)$$

Olje-analytikerne estimerer at antall fat som utvinnes hvert år øker med 2 % i forhold til året før. La oss i denne oppgaven kun se på utvunnet olje etter år 2010, dvs. fra og med år 2011, se figur 6.9:



Figur 6.9: Utvinning av olje.



Figur 6.10: Olje.

a) Via at antall tonn utvunnet olje i år nr. i er en **geometrisk følge**.

b) Vis at summen av produsert olje n år etter år 2010

$$S_n = \sum_{i=1}^n u \cdot 1.02^i \quad (6.177)$$

er gitt ved

$$S_n = 51u(1.02^n - 1) \quad (6.178)$$

Verdens kjente reserver R av olje var ved utgangen av 2010:

$$R = 1.33 \cdot 10^{12} \text{ fat olje} \quad (6.179)$$

c) Vis at antall år de kjente oljereservene vil rekke dersom man ikke finner mer olje etter år 2010: er gitt ved:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{51u} + 1\right)}{\ln 1.02} \quad (6.180)$$

d) Hvor lang tid tar det før man bruker opp oljereservene R dersom man ikke finner mer olje? ⁸

⁸Regn ut det numeriske svaret.

Løsning:

- a) Antall tonn utvunnet olje år 2010 er u . Antall tonn utvunnet olje øker med 2 % i året.
År 2011 blir dermed

$$a_1 = u 1.02 \quad (2011) \quad (6.181)$$

og år 2012

$$a_2 = a_1 1.02 \quad (2012) \quad (6.182)$$

og år 2013

$$a_3 = a_2 1.02 \quad (2013) \quad (6.183)$$

Det generelle mønsteret er:

$$a_1 = u 1.02 \quad (\text{startledd}) \quad (6.184)$$

$$a_{i+1} = 1.02 a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.185)$$

som utgjør en **geometrisk følge** med kvotient $k = 1.02$.

- b)** Summen av en geometrisk rekke er:

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (6.186)$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.02$ og $a_1 = 1.02u$. Dette setter vi inn i lign.(6.186):

$$S_n \stackrel{\text{lign.(6.186)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (6.187)$$

$$= 1.02u \frac{1.02^n - 1}{1.02 - 1} \quad (6.188)$$

$$= \frac{1.02}{1.02 - 1} u (1.02^n - 1) \quad (6.189)$$

$$= 51u (1.02^n - 1) \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (6.190)$$

- c)** Siden vi antar at man ikke finner mer olje etter år 2010 så må man tære på reservene R .
Altså, man fortsetter å utvinne olje i samme tempo som før i n antall år etter 2010,
helt til R brukt opp:

$$R = S_n \quad (6.191)$$

Vi bruker svaret fra oppgave **b**, dvs. lign.(6.190), og løser med hensyn på “ n ” alene:

$$R = 51u (1.02^n - 1) \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{51u} \quad (6.192)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \frac{R}{51u} = 1.02^n - 1 \end{array} \quad \bigg/ + 1 \quad (6.193)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \frac{R}{51u} + 1 = 1.02^n \end{array} \quad (6.194)$$

For å “jekke ned” eksponenten “ n ” så tar vi “ln” på begge sider av ligningen:

$$\ln\left(\frac{R}{51u} + 1\right) = \ln 1.02^n \quad \bigg/ \text{regnereglene } \ln a^n = n \ln a \quad (6.195)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(\frac{R}{51u} + 1\right) = n \ln 1.02 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{\ln 1.02} \quad (6.196)$$

$$\Downarrow$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{51u} + 1\right)}{\ln 1.02} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (6.197)$$

- d) For å finne ut hvor lang tid det tar det før man bruker opp oljereservene R så bruker vi bare resultatet fra oppgave c, dvs. lign.(6.197):

$$n \stackrel{\text{lign.(6.197)}}{=} \frac{\ln\left(\frac{R}{51u} + 1\right)}{\ln 1.02} \quad (6.198)$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{1.33 \cdot 10^{12}}{51 \cdot 31.2 \cdot 10^9} + 1\right)}{\ln 1.02} \approx 30.7 \quad (6.199)$$

Det tar 30.7 år før oljereservene er brukt opp.

■

■ Eksempel 6.12 — geometrisk rekke , annuitetslån

Et annuitetslån tilbakebetales med *like store*, altså konstante, **terminbeløp** ved hver terminbetaling gjennom hele nedbetalingstiden. Etter hvert som avdragene reduserer lånet, blir rentebetalingen stadig mindre:

$$\underbrace{\overbrace{\text{terminbeløp}}^{\text{konstant}}}_{=K} = \underbrace{\text{avdrag}}_{\text{øker}} + \underbrace{\text{renter}}_{\text{avtar}} \quad (6.200)$$

Sammenlign denne ligningen med den tilsvarende for serielån, se lign.(6.99).
Anta at man setter inn beløpet K_0 i banken.

- a) Vis at kapitalen K_n etter år nr. n utgjør en geometrisk følge.
- b) Finn et uttrykk for kapitalen K_n etter n år. ⁹
- c) Du setter 1000 NOK i banken. Renten er 6 %.
Hva er **sluttverdien** etter 10 år?
- d) Anta du ønsker å ha 10000 NOK på konto om 5 år.
Hvilket beløp må du sette inn i dag får å få til dette?

Foto: Colourbox



Foto: Bjørn Brunvoll

Figur 6.11: Lån.

⁹Opgaven spør etter "renteformelen", altså formelen for rentesrente når renten er konstant.

Løsning:

a) Etter ett år vil kapitalen vokse til:

$$K_1 = K_0(1+r) \quad (6.201)$$

Etter to år vil kapitalen vokse til:

$$K_2 = K_1(1+r) \quad (6.202)$$

Etter tre år vil kapitalen vokse til:

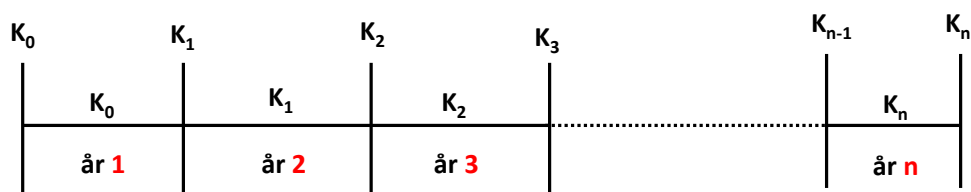
$$K_3 = K_2(1+r) \quad (6.203)$$

Det generelle mønsteret er:

$$a_1 = K_0(1+r) \quad (\text{startledd}) \quad (6.204)$$

$$a_{i+1} = a_i(1+r) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.205)$$

som utgjør en **geometrisk følge** med kvotient $k = 1 + r$.



Figur 6.12: Tidslinje.

b) Fra lign.(6.145) på side 319 vet vi at for en geometrisk følge gjelder:

$$a_n = k^{n-1} a_1 \quad (6.206)$$

Med $a_1 = K_0(1+r)$ og $k = 1+r$ så er da:

$$K_n = K_0(1+r)(1+r)^{n-1} = K_0(1+r)^n \quad (6.207)$$

som kalles **renteformelen**, dvs. **rentesrente**.

c) Renten $r = \frac{6}{100} = 0.06$ er konstant alle $n = 10$ årene.
Siden renten er konstant så gjelder lign.(6.207) .
Startkapitalen $K_0 = 1000$ NOK har da vokst til.

$$K_{10} \stackrel{\text{lign.(6.207)}}{=} K_0 (1+r)^{10} \quad (6.208)$$

$$= 1000(1+0.06)^{10} \text{ NOK} = 1790.85 \text{ NOK} \quad (6.209)$$

- d) Renten $r = \frac{5}{100} = 0.05$ er konstant alle $n = 5$ årene.
 Du ønsker å ha 10000 NOK på konto om $n = 5$ år, dvs. du ønsker $K_5 = 10000$ NOK.
 I dag er dette beløpet verdt, dvs. nåverdi K_0 . Vi skal altså i denne oppgaven finne K_0 .

Igjen bruker vi renteformelen fra lign.(6.207)

$$K_n = K_0(1 + r)^n \quad (6.210)$$

og løser med hensyn på K_0 alene:

$$K_0 = \frac{K_5}{(1 + r)^5} \quad (6.211)$$

$$= \frac{10000}{(1 + 0.05)^5} \text{ NOK} = 7835.26 \text{ NOK} \quad (6.212)$$

Altså:

For å få 10000 NOK på konto om 5 år så må vi sette $K_0 = 7835$ NOK i banken i dag. ¹⁰

■

¹⁰Med andre ord: $\overbrace{7835 \text{ NOK i dag}}^{= \text{nåverdi}} \Leftrightarrow 10000 \text{ NOK om 5 år}$

■ Eksempel 6.13 — oppsparingsannuitet , pensjon , geometrisk rekke

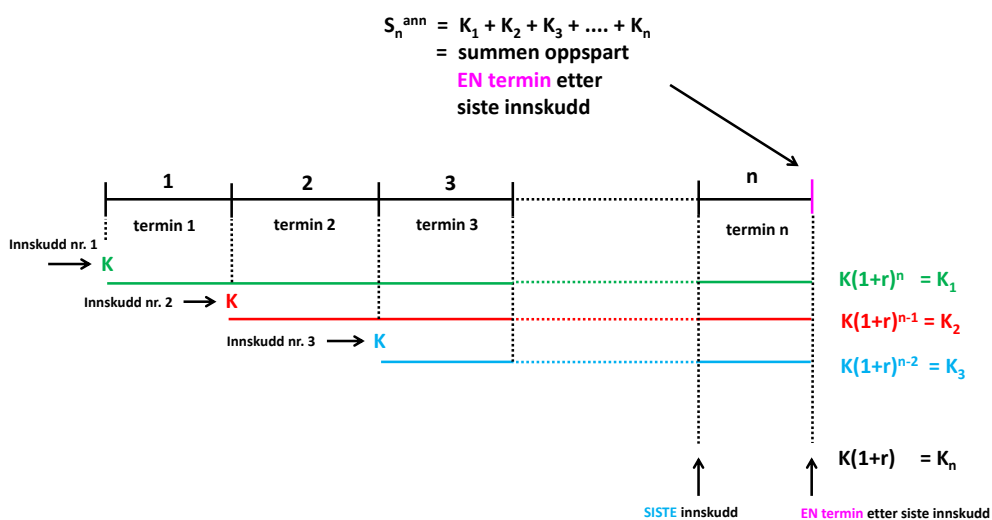
Ved oppsparingsannuitet så setter man av **samme** konstante kapitalen K i banken ved begynnelsen av hver termin, se figur 6.13. Anta at renten er $r = \frac{p}{100}$, hvor p % per termin.

La

$$K_i = \text{oppspart kapital etter } n \text{ terminer pga. innskudd } K \text{ i termin nr. } i \quad (6.213)$$

- a) Vis at kapitalen K_i utgjør en geometrisk følge.
- b) Finn en generell formel for oppspart kapital S_n^{ann} èn termin etter siste innskudd, se figur 6.13, og n terminer med annuitet.
- c) Du ønsker å spare opp kapital til din fremtidig pensjon. Oppsparingen skal skje ved at det settes av 15 000 NOK ved utgangen av hvert år i 20 år. Anta at renten er 3.5 % for hele perioden.

Hvor mye har du oppspart, med renter, **ett år** etter siste innskudd?



Figur 6.13: Oppsparingsannuitet.

a) Oppspart kapital etter n terminer pga. innskudd K i termin nr. 1: ¹¹

$$K_1 = K(1+r)^n \quad (6.214)$$

Oppspart kapital etter n terminer pga. innskudd K i termin nr. 2: ¹²

$$K_2 = K(1+r)^{n-1} = \underbrace{K(1+r)^n}_{K_1} (1+r)^{-1} = \frac{K_1}{1+r} \quad (6.215)$$

Oppspart kapital etter n terminer pga. innskudd K i termin nr. 3: ¹³

$$K_3 = K(1+r)^{n-2} = \underbrace{K(1+r)^{n-1}}_{K_2} (1+r)^{-1} = \frac{K_2}{1+r} \quad (6.216)$$

Det generelle mønsteret er:

$$K_1 = K(1+r)^n \quad (\text{startledd}) \quad (6.217)$$

$$K_{i+1} = \frac{K_i}{1+r} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.218)$$

som utgjør en **geometrisk følge** med $k = \frac{1}{1+r}$.

¹¹Hele grønne linjen i figur 6.13.

¹²Hele røde linjen i figur 6.13.

¹³Hele blå linjen i figur 6.13.

b) Siden K_i utgjør en geometrisk rekke så finner man summen

$$S_n^{\text{ann}} = \sum_{i=1}^n K_i \quad (6.219)$$

via lign.(6.164)

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (6.220)$$

Med $K_1 = K(1+r)^n$ fra lign.(6.217) og $k = \frac{1}{1+r}$ får vi:

$$S_n^{\text{ann}} = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (6.221)$$

$$= K(1+r)^n \frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+r} - 1} \quad (6.222)$$

$$= K \frac{1 - (1+r)^n}{\frac{1}{1+r} - \frac{1+r}{1+r}} \quad (6.223)$$

$$= K \frac{1 - (1+r)^n}{-\frac{r}{1+r}} \quad (6.224)$$

$$= K(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (6.225)$$

- c) Siden det settes av samme beløp $K = 15\,000$ NOK ved hver årlig termin, så er dette en situasjon beskrevet av [oppsparingsannuitet](#). Siden vi skal se på oppspart beløp [en termin](#) etter siste innskudd så må vi bruke lign.(6.225) med $n = 20$ og $r = 0.035$:

$$S_{20}^{\text{ann}} = K(1+r) \frac{(1+r)^{20} - 1}{r} \quad (6.226)$$

$$= 15\,000(1+0.035) \frac{(1+0.035)^{20} - 1}{0.035} \text{ NOK} \quad (6.227)$$

$$\approx 439\,042 \text{ NOK} \quad (6.228)$$

■



Figur 6.14: Sparing.

■ **Eksempel 6.14** — nåverdi K_0 av etterskuddsannuitet , pensjon , geometrisk rekke

Som nevnt i et eksempel foran:

Ved oppsparingsannuitet så settes en bestemt, altså konstant, kapital i banken ved begynnelsen av hver termin. Til slutt får man en oppspart kapital.

La oss nå **snu** på situasjonen og spørre:

hvor stort må startinnskuddet/nåverdien K_0 være for at vi skal få utbetalt et bestemt, dvs. konstant, **terminbeløpet** K hver termin over n terminer?

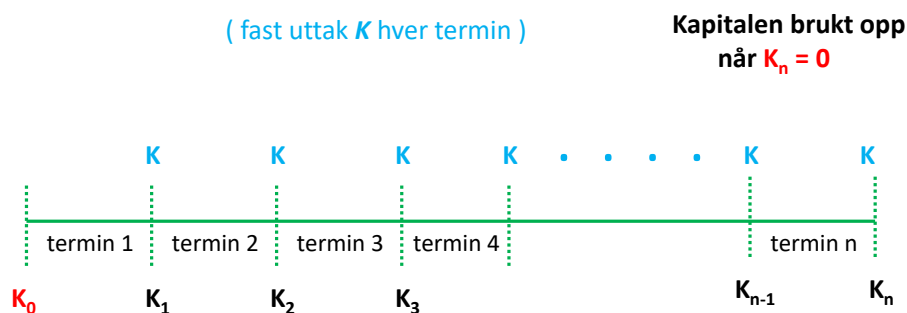
La:

$$K_i = \text{kapital ved slutten av termin nr. } i \quad (6.229)$$

hvor $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Spesielt, for $i = 0$, er K_0 = startinnskuddet/nåverdien som vi skal finne.

Anta at renten er $r = \frac{p}{100}$ hvor p % per termin.



Figur 6.15: Etterskuddsannuitet.

- a) Finn et generelt uttrykk for **nåverdien** K_0 av annuitet. ¹⁴
- b) Anta at du har en pensjon som gjør at du får utbetalt 100 000 NOK per år de 10 neste årene. Renten er 7 % hele perioden.
- Hva er pensjonens verdi **i dag**?
- c) Tolk svaret i en økonomisk sammenheng.



Figur 6.16: Pensjon.

¹⁴I “BØK300 Finansiell og økonomisk styring” brukes også K_0 som notasjon for **nåverdi**. Men i “BØK105 Finansregnskap I” brukes NV for **nåverdi** istedet for K_0 . I dette matematikkurset skal vi bruke K_0 . Vi har altså: $K_0 = NV$.

- a) I termin nr. 1 får man rente på kapitalen K_0 (se figur 6.15).
Ved slutten av termin 1 tar man ut et fast beløp K .
Dermed:

$$K_1 = K_0(1+r) - K \quad (6.230)$$

I termin nr. 2 får man rente på kapitalen K_1 (se figur 6.15).
Ved slutten av termin 2 tar man ut et fast beløp K .
Dermed: (setter inn for K_1 via lign.(6.230))

$$K_2 = K_1(1+r) - K \quad (6.231)$$

$$= K_0(1+r)^2 - K(1+r) - K \quad (6.232)$$

$$= K_0(1+r)^2 - \overbrace{\left(K(1+r) + K \right)}^{= S_2} \quad (6.233)$$

$$= K_0(1+r)^2 - S_2 \quad (6.234)$$

hvor

$$S_2 = K(1+r) + K \quad (6.235)$$

I termin nr. 3 får man rente på kapitalen K_2 (se figur 6.15).
Ved slutten av termin 3 tar man ut et fast beløp K .
Dermed: (setter inn for K_1 via lign.(6.234))

$$K_3 = K_2(1+r) - K \quad (6.236)$$

$$= K_0(1+r)^3 - K(1+r)^2 - K(1+r) - K \quad (6.237)$$

$$= K_0(1+r)^3 - \overbrace{\left(K(1+r)^2 + K(1+r) + K \right)}^{= S_3} \quad (6.238)$$

$$= K_0(1+r)^3 - S_3 \quad (6.239)$$

hvor

$$S_3 = K(1+r)^2 + K(1+r) + K \quad (6.240)$$

Det generelle mønsteret er:

$$K_n = K_0(1+r)^n - S_n \quad (6.241)$$

hvor

$$S_n = K(1+r)^{n-1} + \dots + K(1+r)^2 + K(1+r) + K \quad (6.242)$$

er summen av en geometrisk rekke med $a = K$ og $k = 1+r$ som kan regnes ut via lign.(6.164)

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (6.243)$$

Setter inn for $a = K$ og $k = 1+r$ i lign.(6.241):

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (6.244)$$

$$= K \frac{(1+r)^n - 1}{r+1-1} = K \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (6.245)$$

Setter dette inn i lign.(6.241):

$$K_n = K_0(1+r)^n - S_n \quad (6.246)$$

$$= K_0(1+r)^n - K \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (6.247)$$

Etter n terminer med uttak K hver termin så er innskuddet K_0 med tilhørende renter brukt opp, dvs.:

$$K_n = 0 \quad (6.248)$$

$$K_0(1+r)^n - K \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \quad (6.249)$$

og løser med hensyn på innskuddet K_0 alene:

$$K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \quad (6.250)$$

- b)** Terminbeløpet i denne oppgaven er $K = 100\,000$ NOK. Antall terminer er $n = 10$ og renten $r = \frac{p}{100} = 0.07$. Vi skal finne pensjonens verdi **i dag**, dvs. K_0 . Denne er gitt ved lign.(6.250):

$$K_0 \stackrel{\text{lign.(6.250)}}{=} K \underbrace{\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}}_{\text{annuitetsfaktor}} \quad (6.251)$$

$$= 100\,000 \frac{(1+0.07)^{10} - 1}{0.07(1+0.07)^{10}} \text{ NOK} \approx 702\,358 \text{ NOK} \quad (6.252)$$

- c)** Tolkning:

i) Halvmatematisk: $\overbrace{702\,358 \text{ NOK i dag}}^{= \text{nåverdi}} \Leftrightarrow 100\,000 \text{ NOK hver år i 10 år}$

- ii)** Med andre ord: Dersom du setter inn 702 358 NOK i banken **i dag** med 7 % rente, kunne du hvert år i 10 år fremover ta ut et beløp på 100 000 NOK

■

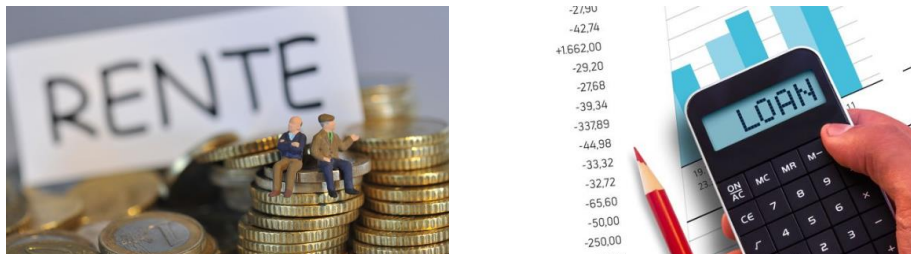
■ **Eksempel 6.15** — geometrisk rekke, annuitetslån, rente R_n^{ann}

La oss igjen se på et annuitetslån slik som vi gjorde på side 330.

Et annuitetslån tilbakebetales med *like store*, altså konstante, **terminbeløp** ved hver terminbetaling gjennom hele nedbetalingstiden. Etter hvert som avdragene reduserer lånet, blir rentebetalingen stadig mindre:

$$\underbrace{\text{terminbeløp}}_{=K}^{\text{konstant}} = \underbrace{\text{avdrag}}_{\text{øker}} + \underbrace{\text{renter}}_{\text{avtar}} \quad (6.253)$$

- a) Anta at du tar opp et lån K_0 . Du betaler tilbake dette lånet i løpet av n terminer. Finn et uttrykk for den totale renten R_n^{ann} uttrykt ved K_0 , n og renten r



Figur 6.17: Rente.

La oss se på eksemplet fra side 309 en gang til, dvs. eksemplet angående kjøp av leilighet ved Brunvollkvartalet. Men denne gangen skal lånet tilbakebetales via et **annuitetslån**. Ellers er betingelsene de samme, dvs. lånet er på 1 900 000 NOK. Nedbetalingen skal skje hvert år i 30 år. Renten er 5 % i hele nedbetalingstiden.

- b) Hva blir årlig **terminbeløp** K ? (dvs. avdrag + rente)
- c) Hvor mye betaler du totalt i **rente** i løpet av disse 30 årene?
- d) Sammenlign svaret i oppgave **c** med oppgave **c** på side 313. Kommenter svaret.



Figur 6.18: Opptak av **annuitetslån** for å finansiere kjøp av leilighet.

Løsning:

- a) Et annuitetslån tilbakebetales med *like store*, altså konstante, *terminbeløp*.
 Med n terminer så betales totalt nK tilbake til banken når annuitetslånet er innfridd.
 Ved innfridd lån er summen av avdragene lik lånet, dvs. K_0 . Resten er renteutgifter.
 Den totale renten R_n^{ann} som betales til banken er derfor:

$$nK = K_0 + R_n^{\text{ann}} \quad (6.254)$$

$$\Updownarrow \quad (6.255)$$

$$R_n^{\text{ann}} = nK - K_0 \quad (6.256)$$

hvor sammenhengen mellom størrelsen K_0 på lånet og terminbeløpet K gitt ved: lign.(6.250)

$$K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \quad (6.257)$$

Siden vi skal finne R_n^{ann} uttrykt ved K_0 så løser vi lign.(6.257) med hensyn på K alene og deretter skriver den litt om:

$$K = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad \Bigg| \cdot \frac{\frac{1}{(1+r)^n}}{\frac{1}{(1+r)^n}} \quad (6.258)$$

$$= K_0 \frac{r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (6.259)$$

Dette innsatt i lign.(6.256):

$$R_n^{\text{ann}} = nK - K_0 = n \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - K_0 \quad (6.260)$$

$$= K_0 \left(\frac{nr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right) \quad (6.261)$$

- b)** Denne oppgaven dreier seg om tilbakebetaling av et **annuitetslån** på $K_0 = 1\,900\,000$ NOK. Altså **banken** bidrar med **innskuddet** K_0 og du, som lånetaker, må betale tilbake de årlige terminbeløpene K til banken.

Fra lign.(6.259) fra oppgave **a** foran innser vi at:

$$K \stackrel{\text{lign.(6.259)}}{=} \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (6.262)$$

$$= \frac{900\,000 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{30}}} \text{ NOK} \approx 123\,598 \text{ NOK} \quad (6.263)$$

- c)** Dette er et **annuitetslån**.

De totale renteutgiftene i løpet av nedbetalingstiden på 30 år er da gitt ved lign.(6.261):

$$R_{30}^{\text{ann}} \stackrel{\text{lign.(6.261)}}{=} K_0 \left(\frac{nr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right) \quad (6.264)$$

$$= 1\,900\,000 \left(\frac{30 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{30}}} - 1 \right) \text{ NOK} \quad (6.265)$$

$$= 1\,807\,932 \text{ NOK} \quad (6.266)$$

- d)** Fra oppgave **c** på side 313 vet vi at de totale renteutgiftene ved serielånet var $R_{30}^{\text{serie}} \approx 1\,472\,500$ NOK. Sammenlignet med lign.(6.266) ser vi at:

serielånet er billigst

■

6.4 Konvergente og divergente rekker: $n \rightarrow \infty$

Når man summerer rekker så er det ikke alltid at det bare summeres over et endelig antall ledd. Det finnes også mange rekker som har uendelig antall ledd n .

Dersom summen av en rekke S_n går mot et fast tall, som vi kan kalle S , når $n \rightarrow \infty$, sier vi at rekken **KONVERGERER**.

Dersom rekken ikke konvergerer, sier vi at den **DIVERGERER**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \text{rekken konvergerer} \quad (6.267)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ eksisterer ikke} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rekken divergerer} \quad (6.268)$$

6.5 Geometriske rekker: $n \rightarrow \infty$ **Setning 6.5.1** — sum av **GEOMETRISK** rekke, uendelig n ^a

Gitt en geometrisk følge

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (6.269)$$

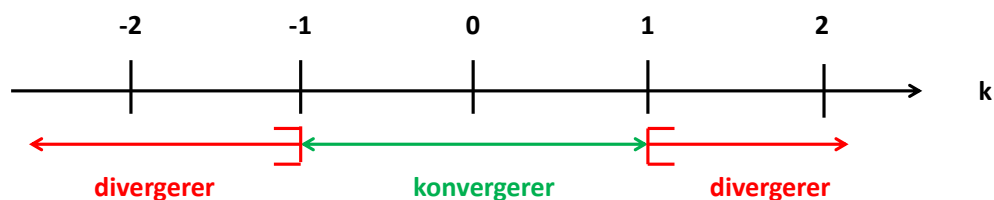
$$a_{i+1} = k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6.270)$$

Dersom $-1 < k < 1$ så er summen av rekken $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ gitt ved: ^b

$$S = \frac{a}{1-k}, \quad -1 < k < 1 \quad (6.271)$$

^aSammenlign denne setningen med den på side 322.

^bFor $k \leq -1$ eller $k \geq 1$ **DIVERGERER** den uendelige summen.



Figur 6.19: Divergens og konvergens.

Proof.

La oss se på den geometriske rekken:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_1 k^{i-1} = a_1 (k^0 + k^1 + k^2 + \dots + k^n) \quad (6.272)$$

Summen av denne rekken er gitt ved lign.(6.164):

$$S_n \stackrel{\text{lign. (6.164)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (6.273)$$

La oss ta med uendelig mange ledd i lign.(6.272), dvs. vi lar $n \rightarrow \infty$.

Siden $-1 < k < 1$ så er $k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dermed blir summen med uendelig mange ledd følgende: ¹⁵

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \stackrel{\text{lign. (6.273)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - k^n}{1 - k} = a_1 \frac{1 - 0}{1 - k} = \frac{a_1}{1 - k} \quad (6.274)$$

hvor $a_1 = a$.

■

¹⁵Prøv f.eks. med $k = 1/2$ så innser du at $k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

■ **Eksempel 6.16** — nåverdi K_0 ved utbetaling til evig tid, dvs. $n \rightarrow \infty$

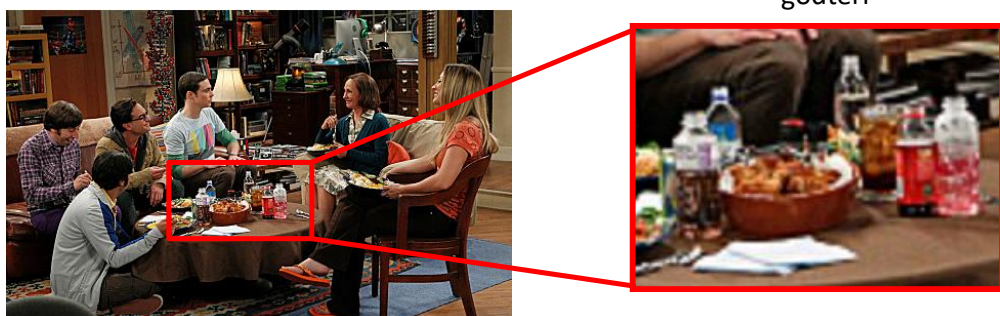
I et tidligere eksempel fant vi hvor stort må startinnskuddet/nåverdien K_0 være for at vi skal få utbetalt et bestemt, dvs. konstant, **terminbeløpet** K hver termin. Med n antall terminer fant vi at denne nåverdien K_0 var gitt ved lign.(6.257):

$$K_0 \stackrel{\text{lign.(6.257)}}{=} K \underbrace{\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}}_{\text{annuitetsfaktor}} \quad (6.275)$$

- a) Dersom vi ønsker å få utbetalt beløpet K hver termin til **evig tid**, hvor stort må startinnskuddet være da?

Du har 100 000 NOK som du kan avse og som du setter i banken på en høyrentekonto. Renten er 7 %. Du ønsker å bruke terminbeløpet du får utbetalt til godteri. Høyrentekontoen har en årlig kapitalisering av renten. Første utbetaling skal skje **ett år**, dvs. en termin, etter at beløpet på 100 000 NOK er satt inn på konto.

- b) Hvor mye kan du ta ut i fremtiden i hver termin, dvs. hvert år i all fremtid?



Figur 6.20: Godteri.

c) Kommenter svaret i oppgave b.

d) Istedet for å få ubetalt et fast beløp til evig tid så ønsker du heller å få utbetalt et bestemt terminbeløp de neste 20 årene.

Hva hvor mye kan du årlig bruke på snop de neste 20 årene?

e) Kommenter svaret i oppgave d.

Løsning:

- a) Dersom vi ønsker å få utbetalt beløpet K hver termin til **evig tid** må vi la $n \rightarrow \infty$.
Det er lettere å se hva startinnskuddet K_0 er dersom vi skriver om lign.(6.275):

$$K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \quad \left| \cdot \frac{\frac{1}{(1+r)^n}}{\frac{1}{(1+r)^n}} \right. \quad (6.276)$$

$$= K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad (6.277)$$

Med en rente $r > 0$ blir faktoren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+r)^n} = 0 \quad (6.278)$$

og tilhørende **annuitetsfaktor** blir redusert til $\frac{1}{r}$.
Dermed blir startinnskuddet/**nåverdien** K_0 :

$$K_0 = K \frac{1}{r} \quad (6.279)$$

som selvsagt også kan skrives $K_0 = K/r$.

- b) Du har 100 000 NOK disponibelt **i dag**, dvs. $K_0 = 100\,000$ NOK. Løser lign.(6.279) med hensyn på terminbeløpet K :

$$K \stackrel{\text{lign.(6.279)}}{=} K_0 r \quad (6.280)$$

Med renten $r = 0.07$ kan man **ta ut**:

$$K = K_0 r = 100\,000 \cdot 0.07 \text{ NOK} = 7\,000 \text{ NOK} \quad (6.281)$$

hvert år i **all fremtid**.

- c) Kommenter:

Siden dette skal være evigvarende så er det **kun renten** du kan ta ut hvert år. Terminbeløpet $K = 7\,000$ NOK er **kun rente**. Beløpet på 100 000 NOK er uberørt. Man lever kun på renten.

- d) Siden første utbetaling skal skje ett år, dvs. èn termin, etter at beløpet K_0 er satt inn så gjelder lign.(6.259). Med rente $r = 0.07$ blir dermed den faste årlige **utbetalingen**, dvs. terminbeløpet K :

$$K \stackrel{\text{lign.(6.259)}}{=} \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (6.282)$$

$$= \frac{100\,000 \cdot 0.07}{1 - \frac{1}{(1+0.07)^{20}}} \text{ NOK} \approx 9\,439 \text{ NOK} \quad (6.283)$$

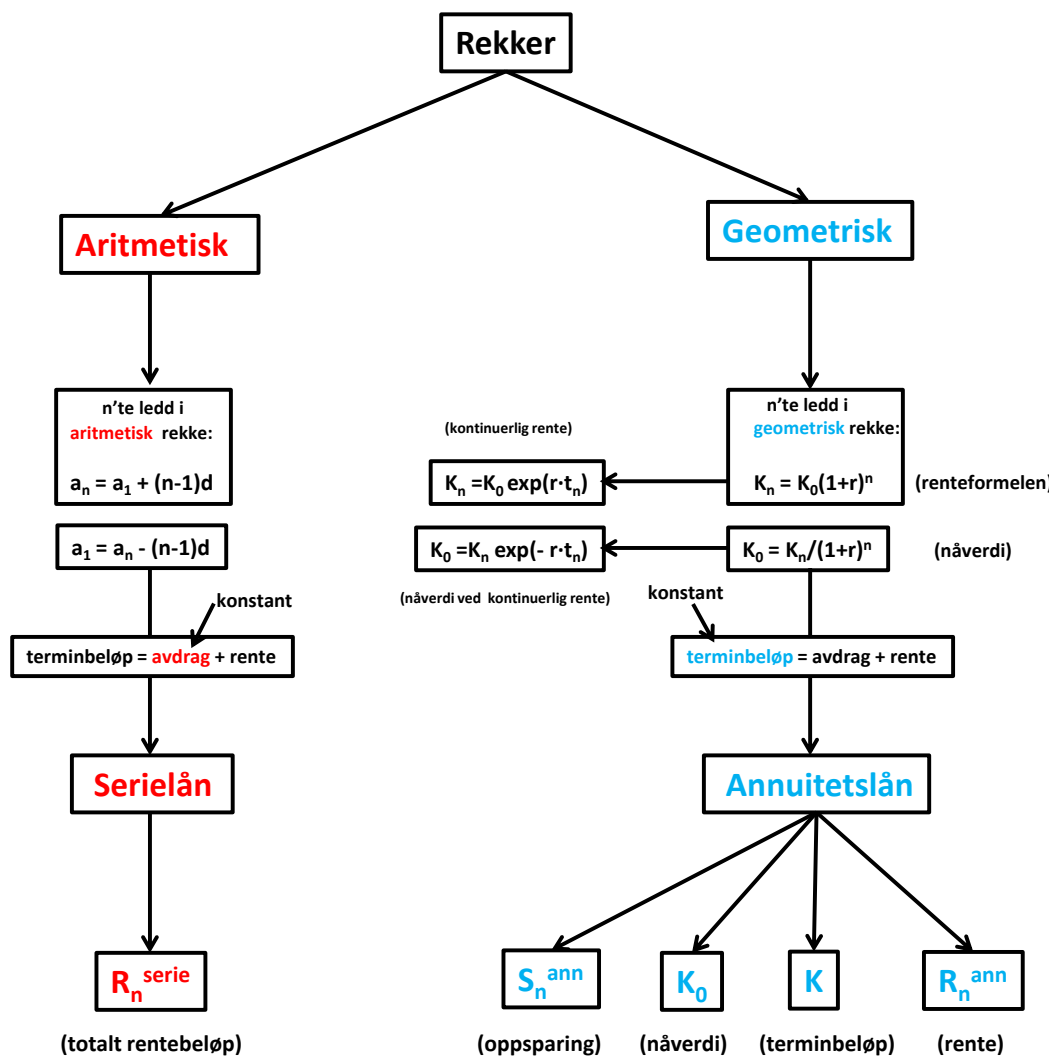
- e) Kommentar:

Siden du skal ta ut kapitalen i løpet av en endelig tid, i dette tilfellet 20 år, så består terminbeløpet K av både **rente** og utbetaling av deler av **startkapitalen** på 100 000 NOK. Etter 20 år har du tatt ut all renten og hele startkapitalen. Etter 20 år er du **blakk**!

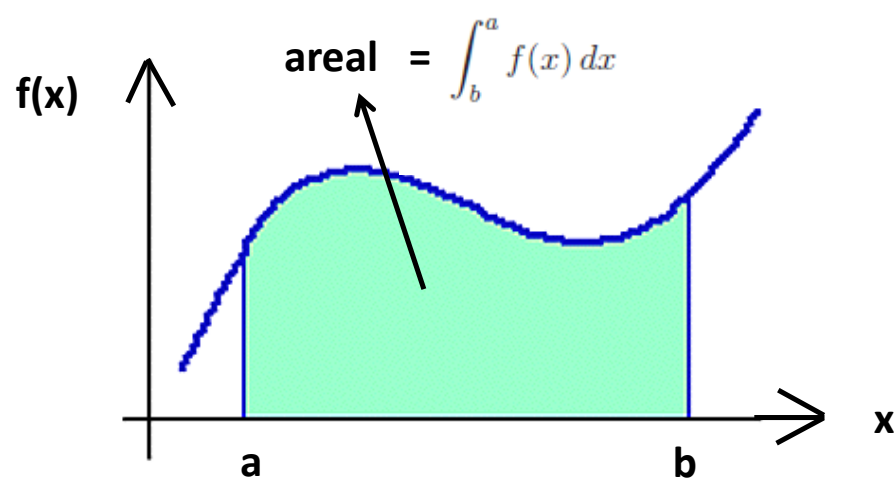
■

6.6 Oversikt finansmatematikk

Rekker og følger spiller en viktig rolle i finansmatematikk, dvs. pengenes tidsverdi. Figuren nedenfor viser en oversikt over hva vi skal ta opp som tema i dette avsnittet om finansmatematikk.



7. Integrasjon



Figur 7.1: Integral.

7.1 Motivasjon: Areal under graf

■ Eksempel 7.1 — areal under graf , BØK105 Finansregnskap 1

Glamox er en norsk produsent og leverandør av belysning og varmeovner.

Glamox lanserer en ny panelovn som oppfyller kravene i EUs økodesignforordning, se figur 7.2.

Anta at Glamox har en kapasitet på å produsere 1000 slike panelovner per dag.

Når Glamox starter med produksjon av en ny artikkel så er det en viss treghet i produksjonen i den forstand at det tar litt tid før antall panelover som produseres per dag når den maksimale kapasiteten $N_{\max} = 1000$.

Anta at den daglige produksjonen går etter modellen:

$$N(t) = N_{\max} \left(1 - e^{-at} \right) \quad (7.1)$$

hvor

$$N(t) = \text{antall produserte panelovner per dag, } t \text{ dager etter oppstart} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} N_{\max} &= 1000 \\ &= \text{produksjonskapasiteten (max antall produserte panelovner per dag)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$a = 0.8 \quad (7.4)$$

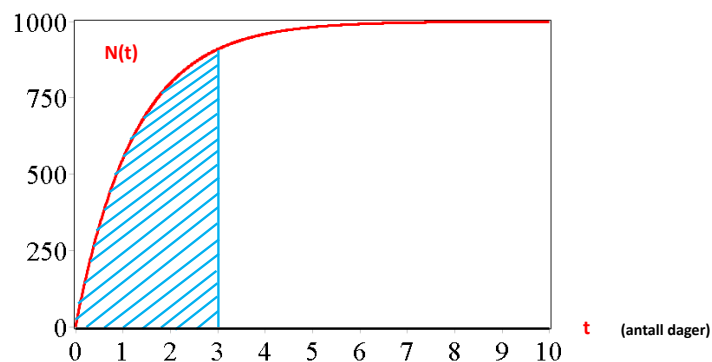
$$t = \text{antall dager etter oppstart} \quad (7.5)$$



Figur 7.2: Panelovn.

Lager verditabell og plotter $N(t)$ for $t \in [0..10]$:

t	0	2	4	6	8	10
$N(t)$	0	798	959	992	998	999.7



Figur 7.3: Antall produserte panelovner $N(t)$.

Spørsmål:

Hvor mange panelovner blir produsert i løpet av de 3 første dagene?

Svar:

antall panelovner som blir produsert ila. de 3 første dagene

=

det blå arealet under grafen til $N(t)$

■

■ **Eksempel 7.2** — (areal under graf , *SCM200 Lager- og produksjonsstyring*)

Hustadmarmor AS er en stor produksjonsfabrikk i Elnesvågen i Fræna kommune. Bedriften produserer og leverer “*slurry*”. Slurry er en flytende hvit væske produsert fra kalkstein og marmor som brukes i fyllmasseindustrien over hele verden, blant annet i papir og tannkrem, se figur 7.4.

Når slurryen er ferdigprodusert så lagres den i en stor lagertank.

I øving 2 så vi på hvordan vi kan styre **lagernivået** i tanken ved hjelp av enkle matematiske lineære modeller.

Hustadmarmor AS overvåker lagernivået kontinuerlig ved hjelp av høydemålere i tanken. Lagernivået kan beskrives av *balanselikningen* ved tiden t :¹

$$i(t) = \underbrace{q(t)}_{\text{inn}} - \underbrace{d(t)}_{\text{ut}} + i_0 \quad (7.6)$$

hvor (tiden t måles i antall timer)

$$i(t) = \text{antall tonn slurry på lager i tanken ved tiden } t, (\text{“inventory”}) \quad (7.7)$$

$$q(t) = \text{antall tonn slurry inn i tanken ved tiden } t, \text{ dvs. produksjon} \quad (7.8)$$

$$d(t) = \text{antall tonn slurry ut av tanken ved tiden } t, \text{ dvs. etterspørsel, (“demand”)} \quad (7.9)$$

$$i_0 = \text{lagernivået ved tiden } t = 0 \text{ (i tonn slurry)} \quad (7.10)$$



Figur 7.4: Hustadmarmor. Slurry.

¹Balanselikningen er svært sentral i all lagerstyring.

Anta at etterspørselsraten D av slurry er *konstant*, dvs. etterspørselen $d(t)$ er lineær i tid:

$$d(t) = Dt \quad (7.11)$$

hvor D altså er den konstante etterspørselsraten. Anta videre at produksjonshastigheten a av slurry hos Hustadmarmor også er konstant, dvs. produksjonen $q(t)$ er linær i tid:

$$q(t) = at \quad (7.12)$$

hvor a altså er produksjonshastigheten, antall tonn slurry produsert per time. Denne produksjonshastigheten a kan bestemmes av Hustadmarmor.

Via lign.(7.6) innser vi at lagernivået ved tiden t er:

$$i(t) = (a - D)t + i_0 \quad (7.13)$$

Det koster penger å ha slurry på lager. Anta at

$$h = 0.04 \frac{\text{NOK}}{\text{tonn time}} \quad (7.14)$$

altså det koster 0.04 NOK per tonn per time å ha slurry på lager i tanken. Dermed er:

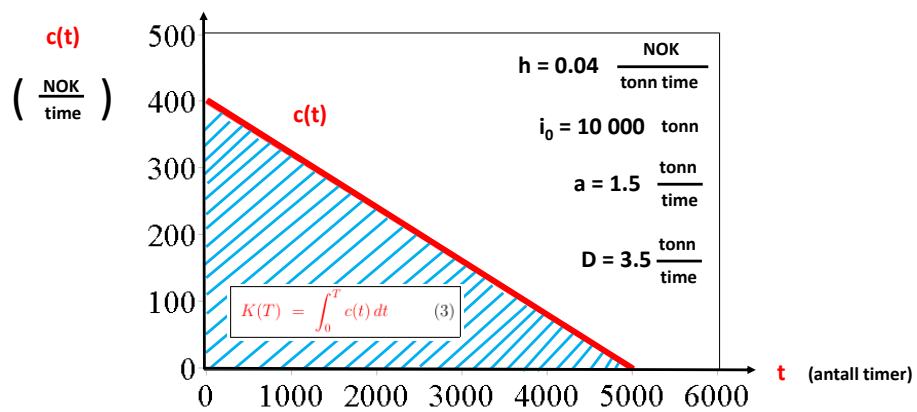
$$c(t) = hi(t) \quad (7.15)$$

kostnaden per time å ha slurry på lager i den aktuelle tanken.

Anta i tillegg at:

$$a = 1.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad D = 3.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad i_0 = 10000 \text{ tonn} \quad (7.16)$$

Da kan vi plotte kostnaden per time $c(t)$ for $t \in [0..10000]$:



Figur 7.5: Kostnad per time $c(t)$.

I ett år er det:

$$24 \cdot 365 = 8760 \text{ timer} \quad (7.17)$$

Spørsmål:

Hva er de totale lagerkostnadene etter ett år?

Svar:

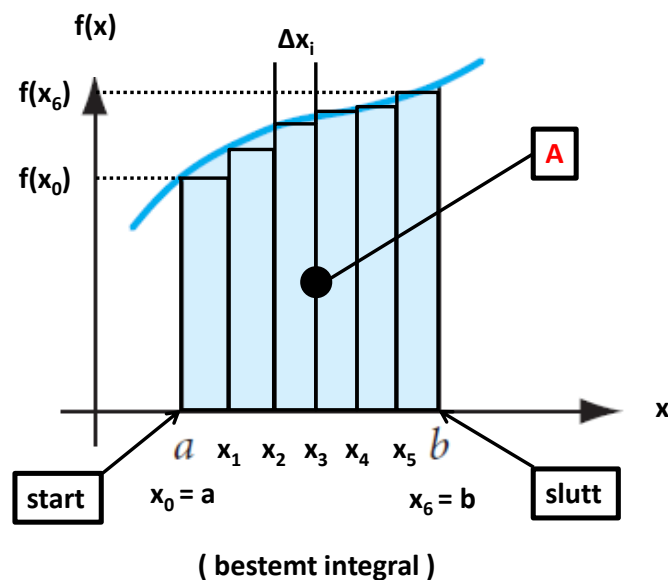
totale lagerkostnader etter ett år = det blå arealet under grafen til $c(t)$

■

I de neste avsnittene skal vi finne ut hvordan kan regner ut slike areal under grafer.

7.2 Definisjon av integral

De 6 rektanglene i figur (7.6) kan er nesten lik arealet under grafen fra a til b :



Figur 7.6: Arealet A .

La oss finne det totale arealet A :

$$A = \text{totale arealet under grafen } f(x) \text{ mellom } a \text{ og } b \quad (7.18)$$

som vist på figuren (7.6). La:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \Delta x_3 = x_3 - x_2, \quad \dots, \quad \Delta x_6 = x_6 - x_5 \quad (7.19)$$

hvor altså Δx_i er bredde nr. i , med $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Da er:

$$A \approx \sum_{i=0}^6 f(x_i) \Delta x_i \quad (7.20)$$

tilnærmet lik det totale arealet under grafen $f(x)$ mellom $x = a$ og $x = b$.

Fra figur 7.7 ser vi at de **store** rektanglene er for store og de **små** rektanglene er for små sammenlignet med det eksakte arealet under grafen for det aktuelle rektanglet.

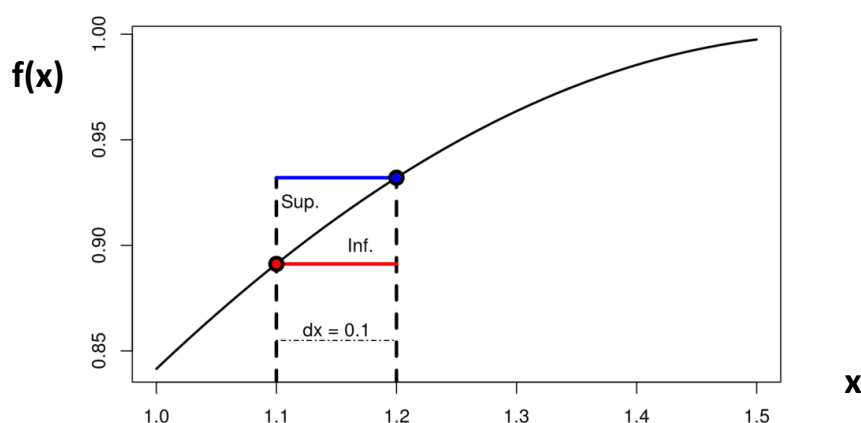
Arealet A_{stort} er litt for stort:

$$A_{\text{stort}} = \sup_{x_1, \dots, x_n} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (7.21)$$

mens arealet A_{stor} er litt for lite:

$$A_{\text{lite}} = \inf_{x_1, \dots, x_n} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (7.22)$$

hvor **supremum** $\sup$ indikerer ”stort areal” og **infimum** $\inf$ indikerer ”lite areal”.^{2 3}



Figur 7.7: Visualisering av ”sup” og ”inf”.

²”sup” og ”inf” skal vi ikke bruke andre plasser enn akkurat her i dette kurset.

³Her har vi generalisert fra 6 rektangler til et vilkårlig antall n rektangler: $6 \rightarrow n$.

Dersom $n \rightarrow \infty$ så blir rektanglene mindre og mindre.

$$A \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (7.23)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} A_{\text{stort}} = A_{\text{lite}} = \int_a^b f(x) dx \quad (7.24)$$

hvor vi som en enkel huskeregel kan skrive: $\sum_{i=0}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int$ og $\Delta x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} dx$.

Dermed:

$$A = \text{SUM av } \infty \text{ mange små rektangel under grafen } f(x) \text{ mellom } a \text{ og } b \quad (7.25)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (7.26)$$

$$= \int_a^b f(x) dx \quad (7.27)$$

hvor

$$f(x) = \text{integrand} \quad (7.28)$$

$$\int = \text{integraltegn} \quad (7.29)$$

hvor lign.(7.27) er på formen: $\int_{\text{start}}^{\text{slutt}}$.

Konklusjon:

Vi mangler en enkel måte å regne ut et areal under en graf på.

7.3 Fundamentalsetningen for integral

La oss finne det totale arealet A på en alternativ måte enn i forrige avsnitt. La:

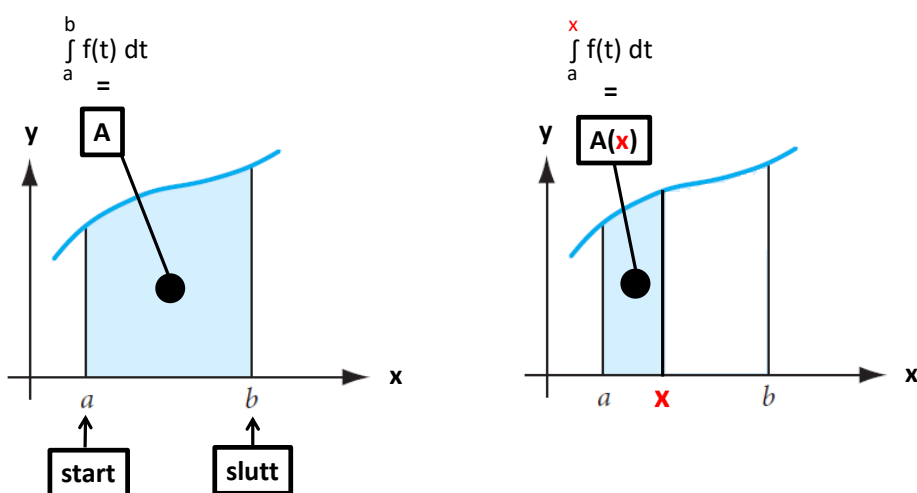
$$A = \text{totale arealet under grafen } f(x) \text{ mellom } a \text{ og } b \quad (7.30)$$

$$= \int_a^b f(x) dx \quad (7.31)$$

være arealet som vist på figuren til venstre i figur (7.8). For å finne dette arealet trenger vi et **hjelpeareal**, $A(x)$. Hjelpearealet, eller **arealfunksjonen**, er arealet mellom a og x :

$$A(x) = \text{arealet mellom } a \text{ og } x \quad (7.32)$$

$$= \int_a^x f(t) dt \quad (7.33)$$



Figur 7.8: Areal.

La Δx være en liten tilvekst til x . Rektanglet $f(x)\Delta x$ er litt **mindre** enn det eksakte arealet. Rektanglet $f(x + \Delta x)\Delta x$ er litt **større** enn det eksakte arealet. Det eksakte arealet er:

$$\text{eksakt areal} = A(x + \Delta x) - A(x) \quad (7.34)$$

Dermed kan vi sette opp ulikheten: ⁴

$$f(x)\Delta x \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq f(x + \Delta x)\Delta x \quad (7.35)$$

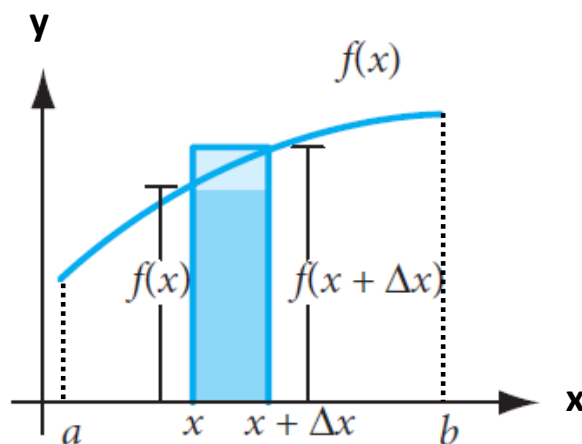
$$f(x) \leq \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x) \quad (7.36)$$

Via definisjonen av den deriverte i lign.(4.4) innser man at, i grensen når $\Delta x \rightarrow 0$, så er $\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dA(x)}{dx}$.

$$f(x) = \frac{dA(x)}{dx} \quad (7.37)$$

altså

$$A(x) = \text{antideriverte av } f(x) \quad (7.38)$$



Figur 7.9: Areal av rektangel.

⁴I dette kompendiet antar vi at grenseverdien i lign.(7.36) eksisterer.

Oppgaven er å finne $A(x)$, istedet har vi funnet et uttrykk for $\frac{dA(x)}{dx}$, se lign.(7.37).
Finnes det da en entydig $A(x)$?

Via eksemplene på side 372 så innser vi at alle funksjoner som er slik at

$$A(x) = F(x) + C \quad (7.39)$$

er en løsning til lign.(7.38), hvor $C = \text{konstant}$ og

$$F(x) = \text{anti} \text{derivert av } f(x) \quad \left(\text{bestemt av } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \right) \quad (7.40)$$

$$A(x) \stackrel{\text{lign.(7.33)}}{=} \int_a^x f(t) dt \quad (7.41)$$

Det $\overbrace{\text{totale arealet}}^{=A}$ under grafen $f(x)$ mellom a og b er dermed, se figur 7.8:

$$A = A(\text{slutt}) - A(\text{start}) \quad (7.42)$$

$$= A(b) - A(a) \quad (7.43)$$

$$= \int_a^b f(x) dx - \overbrace{\int_a^a f(x) dx}^{=0} \quad (7.44)$$

$$= (F(b) + \mathcal{C}) - (F(a) + \mathcal{C}) \quad (7.45)$$

$$= F(b) - F(a) \quad (7.46)$$

Setning 7.3.1 — fundamentalsetningen for integral

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon. Da er:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (7.47)$$

hvor

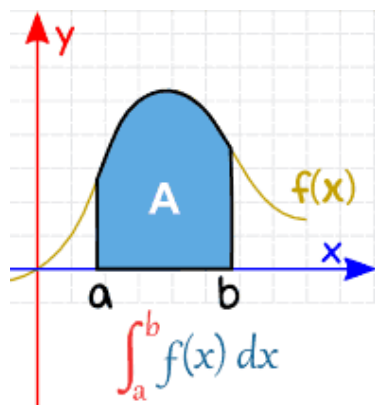
$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (7.48)$$

altså $F(x)$ = **anti**deriverte av $f(x)$.

Konklusjon:

Vi finner arealet under en graf dersom vi finner den **anti**deriverte til integranden $f(x)$.

Hvordan finner vi den **anti**deriverte til en funksjon? Se neste avsnitt.



Figur 7.10: Integral.

Siden $\overbrace{\text{integrasjon}}^{\text{antiderivasjon}}$ og derivasjon er inverse operasjoner så kan vi, som en uformell huskeregel, skrive:

$$\int_a^b \frac{d}{dx} (F(x)) dx = F(b) - F(a) \quad (7.49)$$

7.4 Antideriverte og integral

Definisjon 7.4.1 — antideriverte

La $f(x)$ være en funksjon. Hvis $F(x)$ er en funksjon slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (7.50)$$

sier vi at $\underbrace{F(x)}_{\text{antiderivert}}$ er en antideriverte til $f(x)$.

■ Eksempel 7.3 — antiderivert

$$\frac{d}{dx} \left(\overbrace{x^3 + 2x + C}^{= F(x)} \right) = \overbrace{3x^2 + 2}^{= f(x)} \quad (7.51)$$

$$F(x) = x^3 + 2x + C = \text{antiderivert} \left(\overbrace{3x^2 + 2}^{= f(x)} \right) \quad (7.52)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\overbrace{e^y + y^2 + C}^{= F(x)} \right) = \overbrace{e^y + 2y}^{= f(x)} \quad (7.53)$$

$$F(x) = e^y + y^2 + C = \text{antiderivert} \left(\overbrace{e^y + 2y}^{= f(x)} \right) \quad (7.54)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\overbrace{te^t - e^t + C}^{= F(x)} \right) = \overbrace{te^t}^{= f(x)} \quad (7.55)$$

$$F(x) = te^t - e^t + C = \text{antiderivert} \left(\overbrace{te^t}^{= f(x)} \right) \quad (7.56)$$

At de antideriverte blir som de blir innser man ved å gå [BAKLENGS](#).

■

■ Eksempel 7.4 — integrasjon

Finn arealet A avgrenset av den kvadratiske funksjonen: ⁵

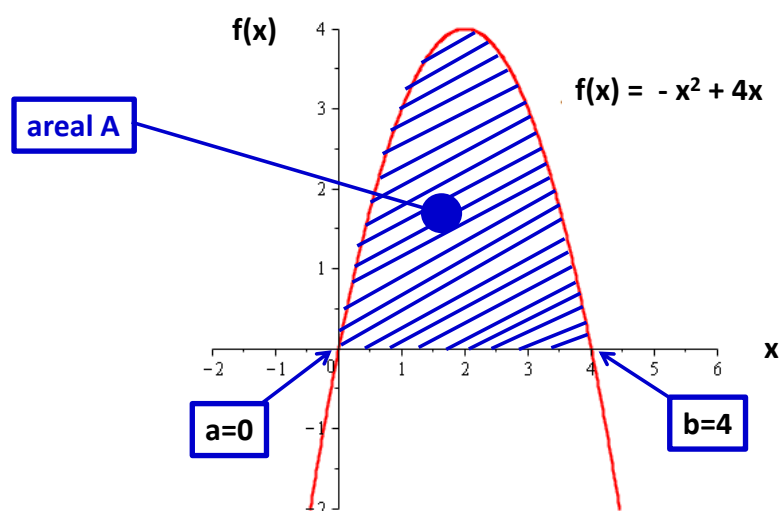
$$f(x) = -x^2 + 4x \quad (7.57)$$

og intervallet $[a, b] = [0, 4]$, dvs. finn:

$$A = \int_0^4 f(x) dx \quad (7.58)$$

Løsning:

For illustrasjonen sin del, la oss plote funksjonen:



Figur 7.11: Funksjon $f(x) = -x^2 + 4x$.

⁵Lign.(7.57) er en kvadratisk funksjon. I kapittel 3, side 171, lærte vi om kvadratiske funksjoner.

Fra lign.(7.58) får vi:

$$A \stackrel{\text{lign.(7.58)}}{=} \int_a^b f(x) \, dx \quad (7.59)$$

$$= \int_0^4 (-x^2 + 4x) \, dx \quad (7.60)$$

Funksjonen

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \quad (\text{antideriverte}) \quad (7.61)$$

er den **antideriverte** av $f(x)$. Bruker integralregningens fundamentalsats i lign.(7.47): ⁶

$$A = \int_0^4 f(x) \, dx \quad (7.62)$$

$$= F(4) - F(0) \quad (7.63)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 \right) \quad (7.64)$$

$$= \frac{32}{3} \quad (\approx 10.76) \quad (7.65)$$

■

⁶Husk: $A = \int_{\text{start}}^{\text{slutt}}$.

■ Eksempel 7.5 — integrasjon

Finn arealet A avgrenset av den kubiske funksjonen, dvs. 3. gradsligningen

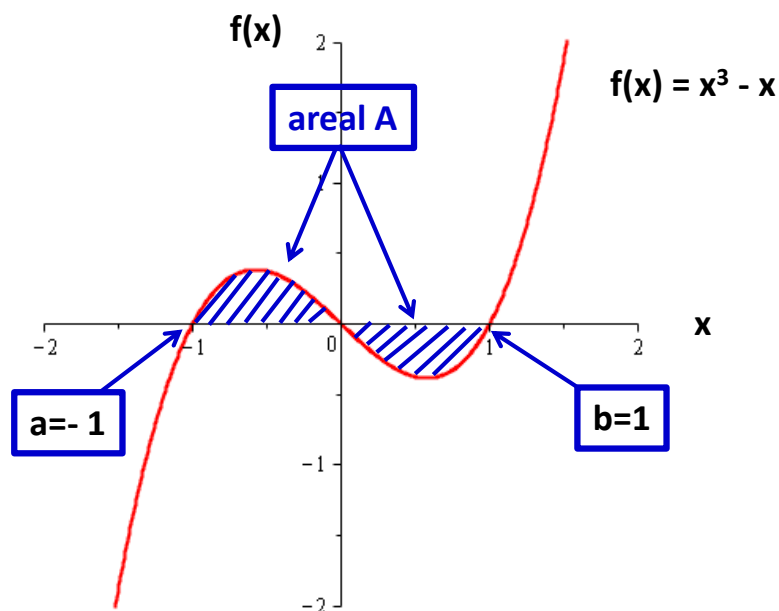
$$f(x) = x^3 - x \quad (7.66)$$

og intervallet $[a, b] = [-1, 1]$, dvs. finn:

$$A = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (7.67)$$

Løsning:

For illustrasjonen sin del, la oss plote funksjonen:



Figur 7.12: Funksjon $f(x) = x^3 - x$.

Fra lign.(7.58) får vi:

$$A \stackrel{\text{lign.(7.58)}}{=} \int_a^b f(x) dx \quad (7.68)$$

$$= \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx \quad (7.69)$$

Funksjonen

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{antideriverte}) \quad (7.70)$$

er den **antideriverte** av $f(x)$. Bruker integralregningens fundamentalsats i lign.(7.47): ⁷

$$A = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (7.71)$$

$$= F(1) - F(-1) \quad (7.72)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \right) \quad (7.73)$$

$$= 0 \quad (7.74)$$

Kommentar:

Ut fra figur (7.12) ser vi at arealet under x -aksen er **like stort** som over.

Disse **opphever** hverandre, og integralet er null.

Arealet under grafen representerer et **negativt areal**.

■

⁷Husk: $A = \int_{\text{start}}^{\text{slutt}}$.

7.4.1 Noen regneregler

Her setter vi opp noen **generelle regneregler** for integrasjon uten bevis. Stemmer disse reglene med din intuisjon?

Setning 7.4.1 — Regneregler - integrasjon

La a , b , c og k være konstanter.

For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ gjelder at:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a \leq c \leq b) \quad (7.75)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (7.76)$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (7.77)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k = \text{konstant}) \quad (7.78)$$

Noen regneregler for antiderivasjon:

Setning 7.4.2 — Regneregler - antiderivasjon

La a , C og K være konstanter.

For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ gjelder at:

$$\int k dx = kx + C \quad (7.79)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (7.80)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad x \neq 0 \quad (7.81)$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C \quad x+a \neq 0 \quad (7.82)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \quad (7.83)$$

7.5 Eksempler på integrasjon innen økonomi og logistikk

■ Eksempel 7.6 — areal under graf , integrasjon , *SCM200 Lager- og produksjonsstyring*

La oss fortsette på eksemplet fra side 360.

Siden

$$c(t) \stackrel{\text{lign. (7.15)}}{=} hi(t) \quad (7.84)$$

er kostnaden per time å ha slurry på lager i tanken så er

$$K(T) = \int_0^T c(t) dt = h \int_0^T i(t) dt \quad (7.85)$$

den totale kostnaden ved å ha slurry på lager i T timer.



Figur 7.13: Hustadmarmor. Slurry.

- a) Vis at den totale kostnaden $K(T)$ av å ha slurry på lagertanken i T timer er gitt ved: ⁸

$$K(T) = h(a - D)\frac{1}{2}T^2 + hi_0T \quad (7.86)$$

- b) Anta at:

$$a = 4 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad D = 3.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad i_0 = 10000 \text{ tonn} \quad (7.87)$$

Anta videre at det koster 4 øre per tonn per time å ha slurry på lager, dvs.

$$h = 0.04 \frac{\text{NOK}}{\text{tonn time}} \quad (7.88)$$

Hva er den totale lagerkostanden $K(T)$ etter ett år?

⁸Man kan faktorisere lign.(7.86), men det har ingen stor hensikt her.

Løsning:

a) Vi setter lagernivået $i(t) = (a - D)t + i_0$ fra lign.(7.13) inn i lign.(7.85):

$$K(T) \stackrel{\text{lign.(7.85)}}{=} h \int_0^T i(t) dt \quad (7.89)$$

$$= h \int_0^T ((a - D)t + i_0) dt \quad (7.90)$$

$$= h(a - D) \int_0^T t dt + hi_0 \int_0^T 1 dt \quad (7.91)$$

$$= h(a - D) \int_0^T t dt + hi_0 \int_0^T 1 dt \quad (7.92)$$

$$= h(a - D) \left(\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}0^2 \right) + hi_0 (T - 0) \quad (7.93)$$

$$= h(a - D) \frac{1}{2}T^2 + hi_0 T, \quad \text{q.e.d.} \quad (7.94)$$

fordi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}t^2 \right) = t \quad (7.95)$$

og

$$\frac{d}{dt} (t) = 1 \quad (7.96)$$

- b) Ett år tilsvarer $T = 24 \cdot 365$ timer $= 8760$ timer.
Bruker formelen i lign.(7.94):

$$K(8760) \stackrel{\text{lign.(7.94)}}{=} h(a-D) \frac{1}{2} T^2 + hi_0 T \quad (7.97)$$

$$= \left(0.04 \cdot (4 - 3.5) \frac{1}{2} 8760^2 + 0.04 \cdot 10000 \cdot 8760 \right) \text{ NOK} \quad (7.98)$$

$$= 4\,271\,376 \text{ NOK} \quad (7.99)$$

Den totale lagerkostanden etter ett år er $K(8760) = 4\,271\,376$ NOK,
altså litt over 4.2 millioner NOK.

■

■ Eksempel 7.7 — areal under graf , integrasjon , *BØK105 Finansregnskap 1*

La oss fortsette på eksemplet fra side 358.

Siden

$$N(t) = N_{\max} \left(1 - e^{-at} \right) \quad (7.100)$$

er antall produserte panelovner per dag, t dager etter oppstart, så er

$$N_{\text{total}}(T) = \int_0^T N(t) dt \quad (7.101)$$

det totale antall produserte panelovner produsert etter T dager.



Figur 7.14: Panelovn.

- a) Vis at det totale antall produserte panelovner produsert etter T dager er gitt ved: ⁹

$$N_{\text{total}}(T) = N_{\text{max}}T + \frac{N_{\text{max}}}{a} \left(e^{-aT} - 1 \right) \quad (7.102)$$

- b) Anta at:

$$N_{\text{max}} = 1000 \quad , \quad a = 0.8 \quad (7.103)$$

Hva er det totale antall produserte panelovner produsert etter 3 dager?

⁹Man kan faktorisere lign.(7.86), men det har ingen stor hensikt her.

Løsning:

a) Vi setter $N(t) = N_{\max} (1 - e^{-at})$ fra lign.(7.100) inn i lign.(7.101):

$$N_{\text{total}}(T) \stackrel{\text{lign.(7.101)}}{=} \int_0^T N(t) dt \quad (7.104)$$

$$= \int_0^T N_{\max} (1 - e^{-at}) dt \quad (7.105)$$

$$= N_{\max} \int_0^T 1 dt - N_{\max} \int_0^T e^{-at} dt \quad (7.106)$$

$$= N_{\max} (T - 0) + \frac{N_{\max}}{a} (e^{-aT} - e^{-a \cdot 0}) \quad (7.107)$$

$$= N_{\max} T + \frac{N_{\max}}{a} (e^{-aT} - 1) \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (7.108)$$

fordi

$$\frac{d}{dt}(t) = 1 \quad (7.109)$$

og

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{a} e^{-at} \right) = e^{-at} \quad (7.110)$$

b) Bruker formelen i lign.(7.108):

$$N_{\text{total}}(3) \stackrel{\text{lign.(7.108)}}{=} N_{\text{max}}T + \frac{N_{\text{max}}}{a} \left(e^{-aT} - 1 \right) \quad (7.111)$$

og setter inn tall med $T = 3$ dager:

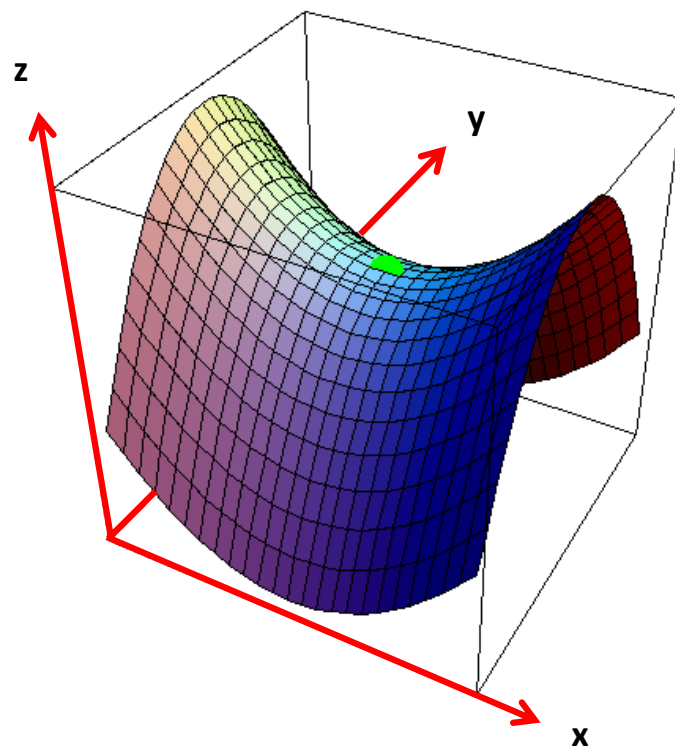
$$N_{\text{total}}(3) = 1000 \cdot 3 + \frac{1000}{0.8} \left(e^{-0.8 \cdot 3} - 1 \right) \quad (7.112)$$

$$= 1863 \quad (7.113)$$

Det totale antall produserte panelovner produsert etter 3 dager er $N_{\text{total}}(3) = 1863$.

■

8. Funksjoner av flere variabler



Figur 8.1: Sadelpunkt.

8.1 Funksjoner av to variable

Definisjon 8.1.1 — funksjon av **to** variable

$$z = f(x, y) = \text{funksjon av } x \text{ og } y \text{ hvor det for hver verdi av tallparet } (x, y) \text{ kun finnes} \\ \text{en og bare en verdi for } f(x, y) \quad (8.1)$$

hvor x og y ofte kalles de *uavhengige variabelene* eller bare *argumentet* og $z = f(x, y)$ kalles ofte funksjonsverdien.

Definisjon 8.1.2 — **definisjonsmengde** og **verdimengde**

$$\text{definisjonsmengde} = \text{alle mulige } \underline{\text{tillatte}} \text{ verdier av } x \text{ og } y \quad (8.2)$$

$$\text{verdimengde} = \text{alle mulige funksjonsverdier til } z = f(x, y) \text{ tilhørende alle} \\ \underline{\text{tillatte}} \text{ verdier av } x \text{ og } y \quad (8.3)$$

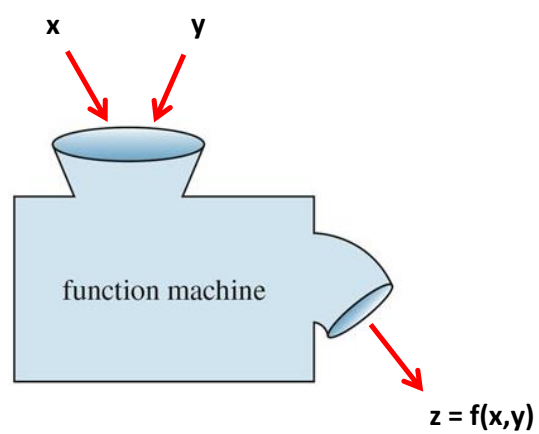
■ Eksempel 8.1 — funksjon av **to** variable

$$z = f(x, y) = 2x^2y + 3y \quad (8.4)$$

$$z = g(x, y) = x^2 + y^2 \quad (8.5)$$

$$z = h(x, y) = \ln x + \ln y \quad (8.6)$$

■



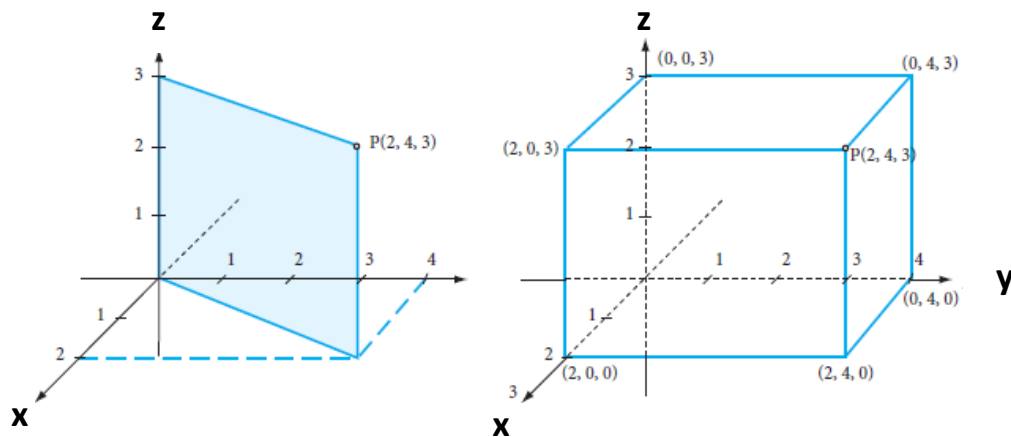
Figur 8.2: Skjematisk illustrasjon av en funksjon med to variable, $z = f(x, y)$.

8.2 Grafisk fremstilling av funksjoner av to variable

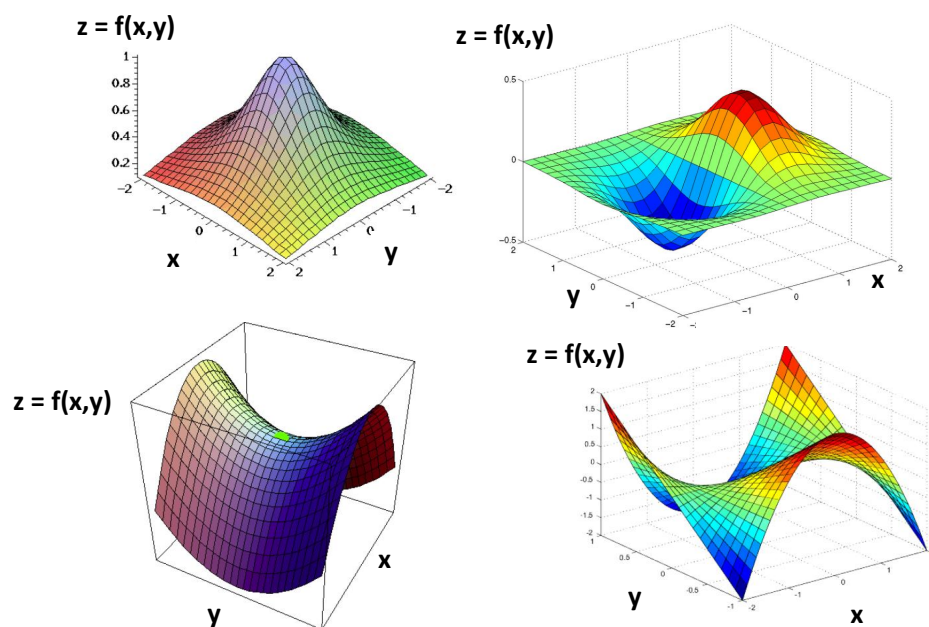
Det er vanlig å si at:

- rett linje: en dimensjon, **1D**
- et plan: to dimensjoner, **2D**
- et “rom”: tre dimensjoner, **3D**

Ordet “rom” brukes ofte i matematikken i en mer generell betydning. Matematikere opererer både i 4-dimensjonale og 5-dimensjonale rom. Generelt **n -dimensjonale rom**. Det er svært vanskelig, for ikke å si umulig, å visualisere rom med mer enn 3 dimensjoner. Men det går fint an å regne med n dimensjoner.



Figur 8.3: Man trenger et **3D** rom for å illustrere funksjoner av to variable, $z = f(x, y)$.

Figur 8.4: Funksjoner med to variable, $z = f(x, y)$.

8.3 Grafisk fremstilling og nivåkurver

Det kan fort bli komplisert å tegne grafen til en funksjon $z = f(x, y)$ i 3D rom. Derfor tar man ofte 2D snitt av 3D kurver og plotter dem i en 2D graf. Det er samme prinsipp som man finner i kart: der tegnes kurver gjennom punkter med samme høyde over havet. Disse kurvene kalles *koter* eller *nivåkurver*.

Definisjon 8.3.1 — nivåkurve

Gitt funksjonen $z = f(x, y)$ av to variable x og y . **Nivåkurven** i høyde c over (eller under) xy -planet kan da skrives:

$$c = f(x, y) \tag{8.7}$$

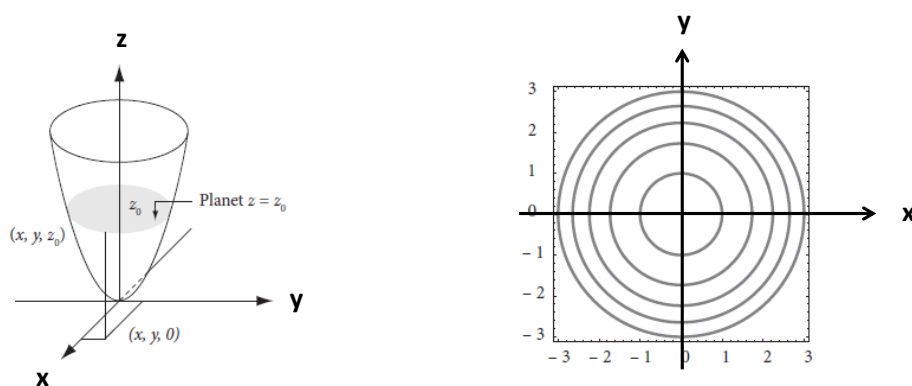
Dette er skjæringskurven mellom grafen f og det horisontale planet $z = c$.

■ Eksempel 8.2 — nivåkurve

Paraboloiden

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad (8.8)$$

og tilhørende nivåkurver er plottet i figur (8.5):



Figur 8.5: Venstre: paraboloiden $f(x,y) = x^2 + y^2$. Høyre: nivåkurver for $f(x,y)$.

■

8.4 Partielle deriverte

I kapittel 4 lærte vi om den deriverte, eller stigningstallet, til en funksjon med en variabel $f(x)$. For en funksjon $f(x, y)$ med to variable kan vi tilsvarende regne ut den deriverte med **hensyn på x eller med hensyn på y** . Når man deriverer med hensyn på x så holdes y konstant. Og omvendt. Det meste av det som vi lærte om i kapittel 4 kan derfor enkelt utvides til to dimensjoner:

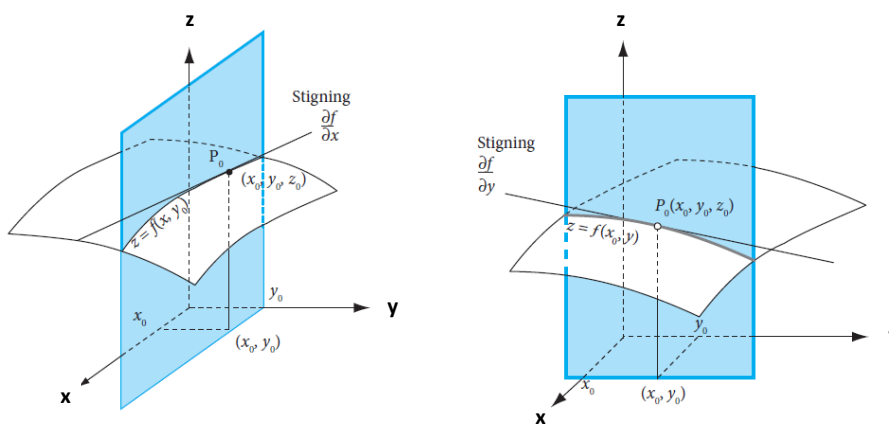
Definisjon 8.4.1 — **partiell deriverte**, deriverte med to variabler, med ord ^a

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \text{den deriverte til funksjonen } z = f(x, y) \text{ mhp. } x \quad (8.9)$$

$$\text{i punktet } x = x_0 \text{ og } y = y_0 \quad (8.10)$$

$$= \text{stigningstallet til tangenten til grafen i punktet } x = x_0 \text{ og } y = y_0 \\ \text{i } x\text{-retning} \quad (8.11)$$

^amhp. = med hensyn på



Figur 8.6: Venstre: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. Høyre: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Definisjon 8.4.2 — partiell deriverte, teknisk

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (8.13)$$

Kommentarer:

- den deriverte = en grenseverdi
- den deriverte = **stigningstall** (i en retning)
- Dersom grenseverdien eksisterer i et punkt $x = x_0$ og $y = y_0$ sies funksjonen å være deriverbar i punktet.
- Tolkning: - et mål for hvor raskt funksjonen endrer seg i punktet
- et mål på “**bratthet**”

■ Eksempel 8.3 — partiell deriverte

Finn de partiell deriverte av funksjonen:

$$z = f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 11y^2 \quad (8.14)$$

Hva er stigningstallet i punktet $(1, 1)$ for x og y - retningen hhv.?

Løsning:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 6x + 4y \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4x + 22y \quad (8.16)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x -retningen er:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 10 \quad (8.17)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i y -retningen er:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 4 \cdot 1 + 22 \cdot 1 = 26 \quad (8.18)$$

■

■ **Eksempel 8.4 — partiell deriverte**

Finn de partiell deriverte av funksjonen:

$$z = f(x, y) = \ln(xy^2) \quad (8.19)$$

Hva er stigningstallet i punktet $(1, 2)$ for x og y - retningen hhv.?

Løsning:

Kjerneregelen med $g(u) = \ln u$ og kjernene $u(x) = y^2x$ og $v(y) = xy^2$ gir hhv.:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial g(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}(\ln u) \frac{\partial}{\partial x}(y^2x) = \frac{1}{u}y = \frac{1}{xy^2}y^2 = \frac{1}{x} \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial v}(\ln v) \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = \frac{1}{v}2xy = \frac{1}{xy^2}2xy = \frac{2}{y} \quad (8.21)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x -retningen er:

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \frac{1}{1} = 1 \quad (8.22)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i y -retningen er:

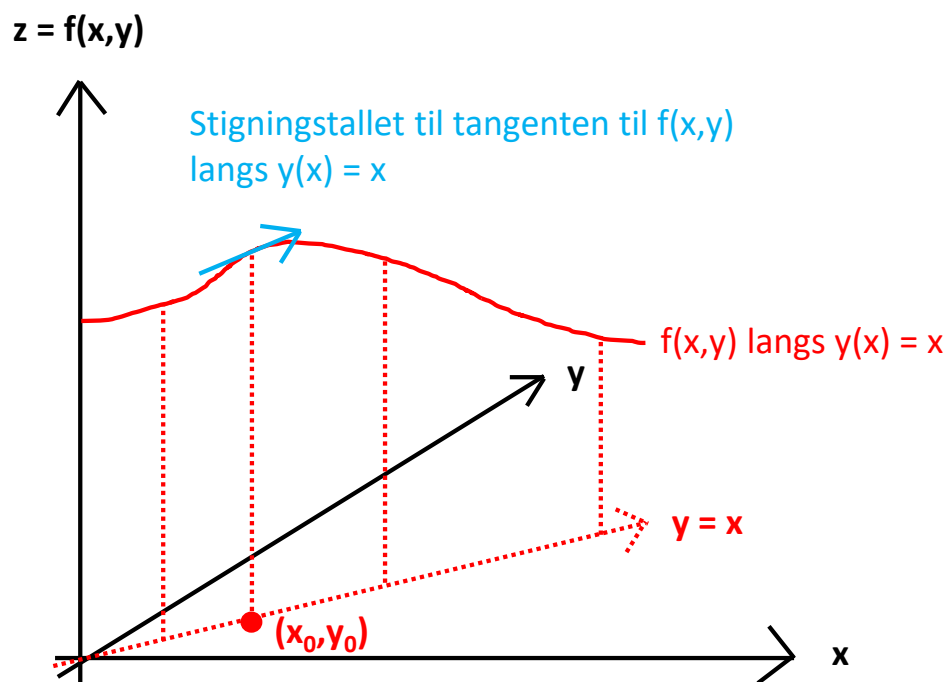
$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \frac{2}{1} = 2 \quad (8.23)$$

■

8.5 Retningsderivert

I avsnitt 8.4 lærte vi hvordan vi kunne regne ut stigningstallet i x -retningen og i y -retningen ved hjelp av partiell deriverte for x og y hhv.

Hva om vi ønsker å finne stigningstallet i en vilkårlig retning, f.eks. langs linjen $y = x$, se figur 8.7?



Figur 8.7: Retningsderivert.

Definisjon 8.5.1 — retningsderivate a

Den **retningsderivate**, dvs. stigningstallet, til en funksjon $f = f(x, y)$ i retningen a enheter langs x -aksen og b enheter langs y -aksen er definert ved:

$$\text{retningsderivert} = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} \quad (8.24)$$

^aRetningsderivert er ofte definert via en enhetsvektor, dvs. i retningen beskrevet av en vektor som har lengden 1. Den retningsderivate som definert i lign.(8.24) er derimot ikke definert via en enhetsvektor. Dersom den hadde vært det så måtte vi ha multiplisert lign.(8.24) med $1/\sqrt{a^2 + b^2}$. Formelen for den retningsderivate hadde dermed blitt litt mer komplisert, men dette aspektet ved den retningsderivate er ikke viktig for oss i dette kurset. Derfor har vi utelatt faktoren " $1/\sqrt{a^2 + b^2}$ " i definisjonen i lign.(8.24).

■ Eksempel 8.5 — retningsderivert

Finn stigningstallet i punktet $(1, 1)$ til funksjonen fra eksempelet på side 397 langs linjen $y = x$.

Løsning:

Retningen definert av ligningen $y = x$ fås ved å gå 1 enhet langs x -aksen og 1 enhet langs y -aksen, dvs. $a = 1$ og $b = 1$. Stigningstallet langs denne retningen er:

$$a \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} + b \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 \quad (8.25)$$

■

8.6 Maksimum og minimum

Definisjon 8.6.1 — stasjonært punkt

Punktet (x_0, y_0) til funksjonen $f(x, y)$ med to variabler kalles **stasjonært** dersom følgende betingelser er oppfylt:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad (8.26)$$

Lign.(8.26) tilsvarer at tangentplanet i punktet (x_0, y_0) er **horisontalt**, altså flatt.

Setning 8.6.1 — klassifisering av stasjonære punkter

La $f(x, y)$ være en funksjon som har kontinuerlige 1. og 2. ordens deriverte i hele sitt definisjonsområde D_f . La videre:

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad (8.27)$$

$$B \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (8.28)$$

$$C \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \quad (8.29)$$

Det stasjonære punktet (x_0, y_0) bestemt av:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad (8.30)$$

er da klassifisert på følgende måte:

$$AC - B^2 > 0 \text{ og } A > 0: \quad (x_0, y_0) \text{ er et minimumspunkt} \quad (8.31)$$

$$AC - B^2 > 0 \text{ og } A < 0: \quad (x_0, y_0) \text{ er et maksimumspunkt} \quad (8.32)$$

$$AC - B^2 < 0 \text{ og } A < 0: \quad (x_0, y_0) \text{ er et sadelpunkt} \quad (8.33)$$

$$AC - B^2 = 0 \text{ og } A < 0: \quad \text{testen fungerer ikke} \quad (8.34)$$

■ Eksempel 8.6 — maksimum og minimum

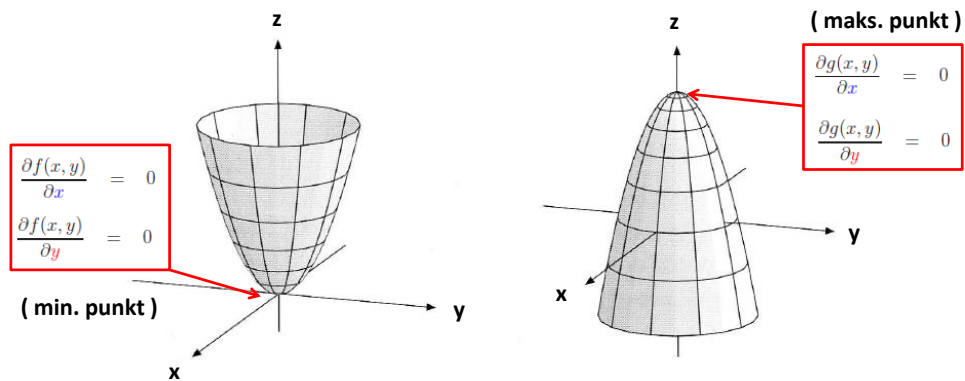
a) Plott funksjonene:

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (8.35)$$

$$z = g(x, y) = 9 - x^2 - y^2 \quad (8.36)$$

b) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y)$ og $g(x, y)$.Løsning:

a) Plott av funksjonene:

Figur 8.8: Funksjonene $f(x, y) = x^2 + y^2$ og $g(x, y) = 9 - x^2 - y^2$.

b) i) 1. ordens deriverte til $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \quad (8.37)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 0 / \quad \text{"hovedregelen"} \quad (8.38)$$

$$\Downarrow$$

$$2x = 0 \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad (8.39)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \quad (8.40)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (8.41)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = 0 \quad \text{"hovedregelen"} \quad (8.42)$$

$$\Downarrow$$

$$2y = 0 \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad (8.43)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 0 \quad (8.44)$$

$(x,y) = (0,0)$ er et stasjonært punkt for $f(x,y)$.

ii) 1. ordens deriverte til $g(x,y)$:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \quad (8.45)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (9 - x^2 - y^2) = 0 \quad \text{"hovedregelen"} \quad (8.46)$$

$$\Downarrow$$

$$-2x = 0 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (8.47)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \quad (8.48)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (8.49)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (9 - x^2 - y^2) = 0 \quad \text{"hovedregelen"} \quad (8.50)$$

$$\Updownarrow$$

$$-2y = 0 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (8.51)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = 0 \quad (8.52)$$

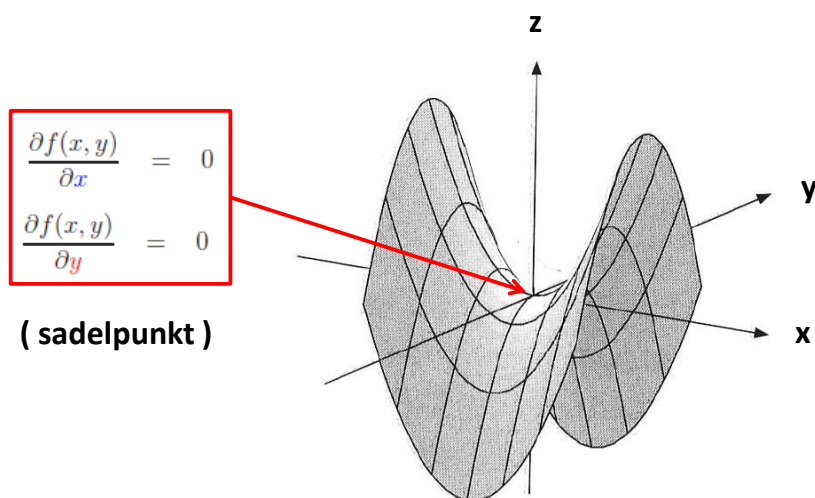
$(x,y) = (0,0)$ er et stasjonært punkt for $g(x,y)$.

■

■ Eksempel 8.7 — sadelpunkt

a) Plott funksjonen:

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (8.53)$$

b) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y)$ og $g(x, y)$.Løsning:a) Plott av funksjonen $z = f(x, y) = x^2 - y^2$:Figur 8.9: Funksjonen $f(x, y) = x^2 - y^2$.

b) 1. ordens deriverte til $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (8.54)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) = 0 \quad \text{"hovedregelen"} \quad (8.55)$$

$$\Updownarrow$$

$$2x = 0 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{2} \quad (8.56)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \quad (8.57)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (8.58)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2) = 0 \quad \text{"hovedregelen"} \quad (8.59)$$

$$\Updownarrow$$

$$-2y = 0 \quad \bigg/ \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad (8.60)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = 0 \quad (8.61)$$

$(x, y) = (0, 0)$ er et **stasjonært** punkt for $f(x, y)$.

■

Som vi ser av de to foregående eksemplene: de [stasjonære](#) punktene bestemt av:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (8.62)$$

dvs. stingingstallet er null både i x -retning og y -retning, kan svare til forskjellige typer situasjoner, f.eks.:

- det absolutt høyeste punkt, dette er et globalt maksimum
- det absolutt laveste punkt, dette er et globalt minimum
- et lokalt toppunkt
- et lokalt bunnpunkt
- et “fjellpass”
- en flat “fjellhulle”
- osv.

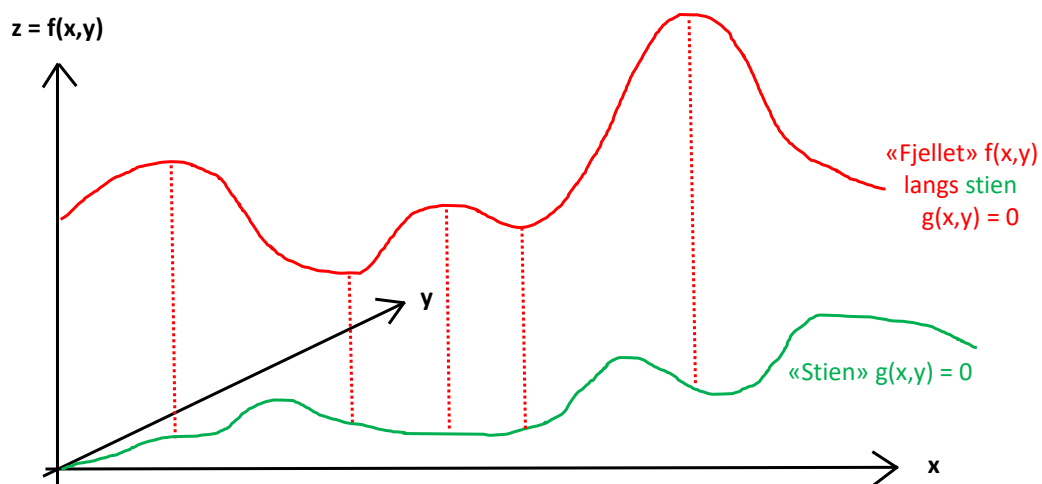
8.7 Maksimering/minimering under bibetingelser

Anta at vi skal maksimere $z = f(x, y)$ når vi samtidig krever at $g(x, y) = 0$.

Noen eksempel:

Hvis $f(x, y)$ representerer fjellhøyden i et kart, kan f.eks. $g(x, y) = 0$ representere en **sti** som vi må gå langs. Hva er da det høyeste punktet langs denne stien, se figur 8.10?

Hvis $f(x, y)$ representerer fortjenesten ved innsatsfaktorene x og y , kan $g(x, y) = 0$ representere budsjettet vi må følge, dvs. en **budsjettbetingelse**. Hva er da den største fortjenesten vi kan oppnå?



Figur 8.10: Vi går langs en sti $g(x, y) = 0$ i fjellet $f(x, y)$.

Spørsmål:

Hvordan skal vi finne lokale maksima til $f(x,y)$ under betingelsen at $g(x,y) = 0$?

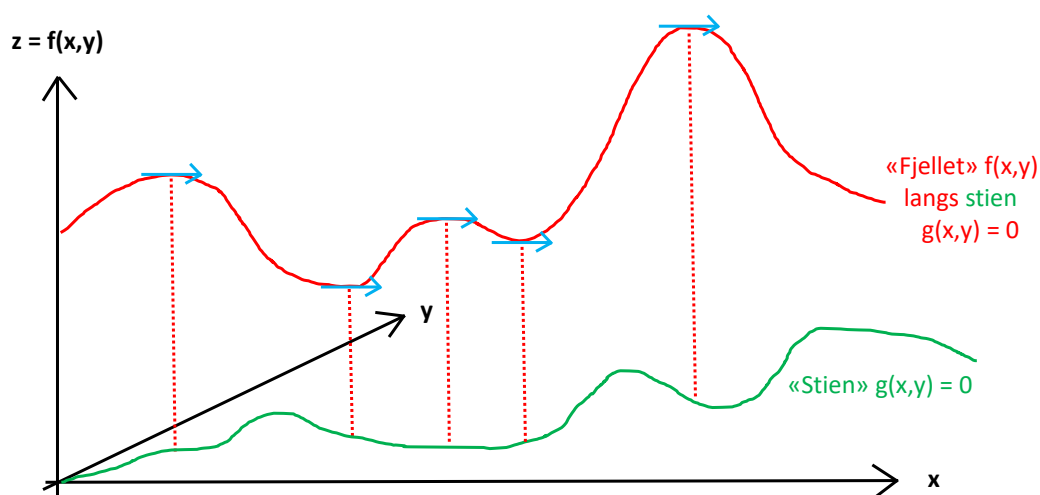
Hovedide:

Vi går langs stien $g(x,y) = 0$ og sjekker når stigningstallet til $f(x,y)$ er lik null.

Dvs. vi finner de *stasjonære punktene* til f langs stien $g(x,y) = 0$. Sagt på en annen måte:

Vi setter den **retningsderivate** av $f(x,y)$ i **retning** av stien $g(x,y) = 0$ lik null.

Figur 8.11 viser at de lokale maksimaene til $f(x,y)$ langs stien $g(x,y) = 0$ har stigningstall lik 0, dvs den retningsderivate i retning av stien er lik null.



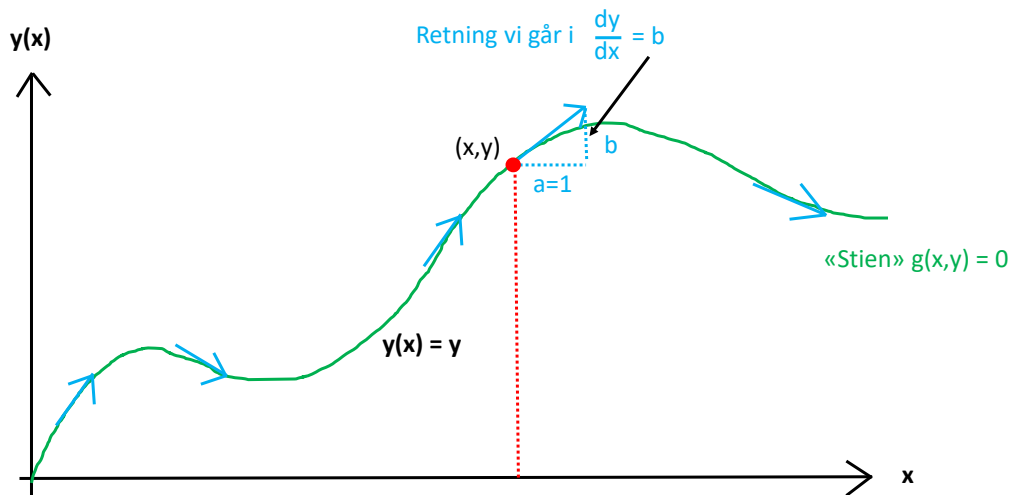
Figur 8.11: De stasjonære punktene (kandidatene) til $f(x,y)$ langs stien $g(x,y) = 0$.

Anta vi står i punktet (x, y) . Fra avsnitt 8.5 husker vi at den retningsderiverte av $f(x, y)$ langs retningen hvor vi går a enheter langs x -aksen og b enheter langs y -aksen var gitt ved:

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} \quad (8.63)$$

Figur 8.12 viser kun stien $g(x, y) = 0$ som vi går langs i xy -planet. Anta nå at vi kan beskrive stien ved $y = y(x)$, dvs. som en funksjon av x .¹

Retningen til stien i punktet (x, y) er gitt ved **tangenten** til grafen i punktet (x, y) . Dvs. dersom vi går en enhet langs x -aksen, går vi $\frac{dy}{dx}$ enheter langs y -aksen.² Vi har mao. argumentert for at $a = 1$ og $b = \frac{dy}{dx}$.



Figur 8.12: Stien $g(x, y) = 0$ uttrykt som en funksjon $y = y(x)$

¹Dette steget er helt vesentlig for denne fremgangsmetoden. La f.eks. stien være gitt som $g(x, y) = 2x - y + 1 = 0$ Vi kan da skrive y som en funksjon av x :

$$g(x, y) = 0 \quad (8.64)$$

$$\Updownarrow \quad (8.65)$$

$$2x - y + 1 = 0$$

$$\Updownarrow \quad (8.66)$$

$$y = 2x + 1$$

Dvs. vi kan beskrive stien ved $y(x) = 2x + 1$.

²Husk at $\frac{dy}{dx}$ er stigningstallet til tangenten i punktet (x, y) .

Retningsderivert av $f(x, y)$ langs stien $g(x, y) = 0$ i punktet (x, y) er dermed gitt ved:

$$1 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (8.67)$$

De **stasjonære punktene** langs stien $g(x, y) = 0$ finner vi når den retningsderiverte er lik null, dvs. når:

$$1 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (8.68)$$

Dersom vi løser lign.(8.68) mhp. $\frac{dy}{dx}$, får vi:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \stackrel{\text{kort-notasjon}}{=} -\frac{f_x}{f_y} \quad (8.69)$$

Dersom stien $g(x, y) = 0$ er en enkel funksjon slik at vi kan enkelt beskrive den som en funksjon $y = y(x)$, så er alt vel. Problemet er at dette sjeldent lar seg gjøre i praksis - kun i teorien. Vi må derfor uttrykke $\frac{dy}{dx}$ ved hjelp av funksjonen $g(x, y)$ i stedet.

Heldigvis kan vi gjøre dette ved hjelp av den såkalte [kjerneregelen for to deriverte](#), som sier at dersom vi har gitt en funksjon $g = g(x, y)$, hvor $y = y(x)$, så er

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (8.70)$$

Siden vi krever at $g(x, y) = 0$, så er også $\frac{dg(x, y)}{dx} = 0$, som gir at

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (8.71)$$

Dersom vi løser lign.(8.71) mhp. $\frac{dy}{dx}$, får vi:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \stackrel{\text{kort-notasjon}}{=} -\frac{g_x}{g_y} \quad (8.72)$$

Via lign.(8.69) og (8.72) har man da:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_f = \left. \frac{dy}{dx} \right|_g \quad (8.73)$$

$$-\frac{f_x}{f_y} = -\frac{g_x}{g_y} \quad (8.74)$$

Siden forholdet mellom de deriverte til $f(x,y)$ og $g(x,y)$ er det samme, jfr. lign.(8.74), så må tellerne i lign.(8.74) være proporsjonale. Det samme gjelder for nevnerne. La oss kalle denne proporsjonalitetsfaktoren, eller multiplikatoren, for λ . Lign.(8.74) impliserer dermed: ³

$$f_x = \lambda g_x \quad (8.78)$$

$$f_y = \lambda g_y \quad (8.79)$$

eller

$$f_x - \lambda g_x = 0 \quad (8.80)$$

$$f_y - \lambda g_y = 0 \quad (8.81)$$

som altså bestemmer ekstremalpunktet til $f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = 0$.

³En analogi til lign.(8.78) og (8.79), la oss se på brøken:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (8.75)$$

Siden forholdet mellom tallene er like så må telleren 2 være *proporsjonal* til telleren 1, og tilsvarende for nevneren:

$$2 = \lambda \cdot 1 \quad (8.76)$$

$$4 = \lambda \cdot 2 \quad (8.77)$$

At den numeriske verdien på denne proporsjonalitetsfaktoren, eller multiplikatoren, er $\lambda = 2$ er egentlig ikke så interessant for oss her.

La oss **definere** funksjonen:

$$L(x, y; \lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (8.82)$$

De **stasjonære** punktene til $L(x, y; \lambda)$ er bestemt av $\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0$ og $\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0$, dvs.: ⁴

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \\ &= f_x - \lambda g_x = 0 \end{aligned} \quad (8.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \\ &= f_y - \lambda g_y = 0 \end{aligned} \quad (8.84)$$

er

$$\text{de samme som lign. (8.78) og (8.79)} \quad (8.85)$$

Med andre ord: å finne de stasjonære punktene til $L(x, y)$, dvs.:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \quad (8.86)$$

er det samme som å **bestemme ekstremal**punktene til $f(x, y)$ under bibetingelsen $\underbrace{g(x, y) = 0}_{!}$.

⁴Nå går vi tilbake fra kortnotasjonen f_x til differensialnotasjonen $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.

Setning 8.7.1 — maks/min med Lagrange multiplikatorer

Funksjonen $f(x,y)$ skal maksimeres/minimeres under bibetingelsen $g(x,y) = 0$.

Dette optimaliseringsproblemet kan løses på følgende måte:

- 1) Skriv opp **Lagrange-funksjonen**:

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) \quad (8.87)$$

hvor λ = Lagrange-multiplikatoren, en ukjent konstant.

- 2) Finn de **stasjonære punktene** til $L(x,y;\lambda)$, dvs. regn ut:

$$\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial y} = 0 \quad (8.88)$$

- 3) De 3 ligningene:

$$\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial x} = 0 \quad (8.89)$$

$$\frac{\partial L(x,y;\lambda)}{\partial y} = 0 \quad (8.90)$$

$$g(x,y) = 0 \quad (8.91)$$

danner et ligningssystem som kan løses mhp. x og y .

■ **Eksempel 8.8 — maks/min med Lagrange multiplikatorer**, *BØK105 Finansanalyse 1*

Bedriften Rofi i Molde produserer telt til ulike formål. Teltet som Rofi selger mest av kommer i to versjoner. En standardversjon og en forsterket versjon. Den forsterkede versjonen er mye kraftigere enn standardversjonen slik at den tåler mer vær og vind. Blant annet er vinduene i disse teltene betydelig forsterket i forhold til standardversjonen, se figur 8.13. Til disse vinduene trengs det 5 ganger mer material enn til standardversjonen.

Anta at det **totale resultatet** til Rofi ved produksjon og salg av disse teltene er gitt ved:

$$TR(x,y) = 100(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - 1000 \quad (8.92)$$

hvor

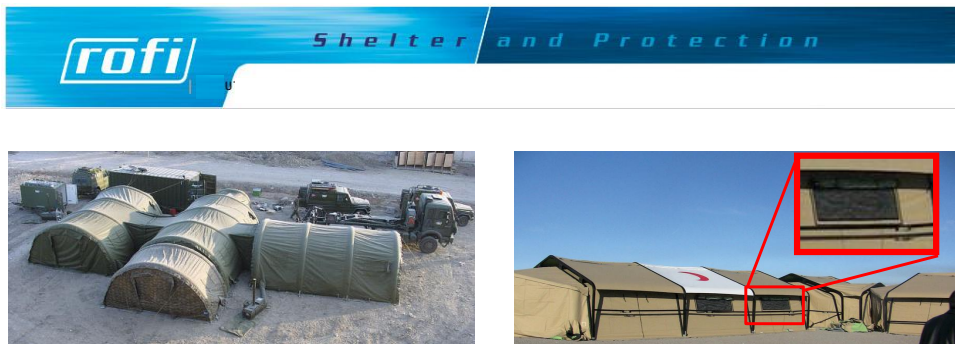
$$x = \text{antall telt produsert og solgt av standardversjonen} \quad (8.93)$$

$$y = \text{antall telt produsert og solgt av den forsterkede versjonen} \quad (8.94)$$

Rofi kjøper inn totalt 3000 m² av det materialet som brukes til vinduer i disse teltene. Derfor har Rofi følgende restriksjon:

$$x + 5y - 3000 \leq 0 \quad (8.95)$$

Hvor mange standardtelt x og hvor mange forsterkede telt y bør Rofi produsere og selge for at det totale resultatet $TR(x,y)$ skal bli **størst** mulig?



Figur 8.13: Vindu i telt.

Løsning:

Av åpenbare grunner er må $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Betingelsen i lign.(8.95) gir videre at x kan maksimalt være $x = 3000$. Tilsvarende, den største verdien av y er $y = 600$. Betingelsen i lign.(8.95) er derfor ekvivalent med:

$$g(x, y) = x + 5y - 3000 = 0 \quad (8.96)$$

dersom $0 \leq x \leq 3000$ og $0 \leq y \leq 600$.

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$L(x, y; \lambda) = TR(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (8.97)$$

De [stasjonære punktene](#) til $L(x, y)$ er:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \quad (8.98)$$

$$\frac{\partial TR(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial TR(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (8.99)$$

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + 0 \right) - \lambda (1 + 0) = 0 \quad , \quad 100 \cdot \left(0 + \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} \right) - \lambda (0 + 5) = 0 \quad (8.100)$$

$$\frac{50}{\sqrt{x}} - \lambda = 0 \quad , \quad \frac{50}{\sqrt{y}} - 5\lambda = 0 \quad (8.101)$$

De to ligningene i lign.(8.101) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “*innsettingsmetoden*”⁵. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ ved å løse lign.(8.101) med hensyn på denne:

$$\frac{50}{\sqrt{x}} = \lambda, \quad \frac{10}{\sqrt{y}} = \lambda \quad (8.102)$$

Disse er like, eller trivielt $\lambda = \lambda$ om du vil:

$$\frac{50}{\sqrt{x}} = \frac{10}{\sqrt{y}} \quad (8.103)$$

$$x = 25y \quad (8.104)$$

Dette setter vi inn i bibetingelsen $g(x, y) = x + 5y = 3000$, løser, og får:

$$(x, y) = (2500, 100) \quad (8.105)$$

Med begrensningen på 3000 m² av det materialet som brukes til vinduer så vil Rofi sitt totale resultat maksimeres dersom det produseres $x = 2500$ og $y = 100$.

■

⁵Med “*innsettingsmetoden*” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

■ Eksempel 8.9 — optimalisering , innsettingsmetoden VS Lagrange multiplikatorer

“Trude Nistad” er et varmemerke innen design av klær.

Et av plaggene som lages, er kåper. Av en bestemt type kåpe lages det to versjoner:

- A** spesialversjon, type A
- B** klassisk versjon, type B

Anta at de totale produksjonskostnadene forbunder med produksjon av slike kåper er:

$$K(x,y) = 9x + 12y + 50\,000 \quad (8.106)$$

hvor

$$x = \text{antall kåper som produseres og selges av type A, dvs. spesialversjon} \quad (8.107)$$

$$y = \text{antall kåper som produseres og selges av type B, dvs. klassisk versjon} \quad (8.108)$$

Kostnaden er i NOK.



Figur 8.14: Trude Nistad.

Det viser seg at det er en sammenheng mellom prisen på kåpene, og antall kåper som produseres og selges. Anta at Trude Nistad har funnet ut at følgende sammenhenger mellom pris og etterspørsel er en god tilnærming til virkeligheten:

$$p_{\mathbf{A}} = 1200 - 3x + y \quad (8.109)$$

$$p_{\mathbf{B}} = 1500 - 2x - 5y \quad (8.110)$$

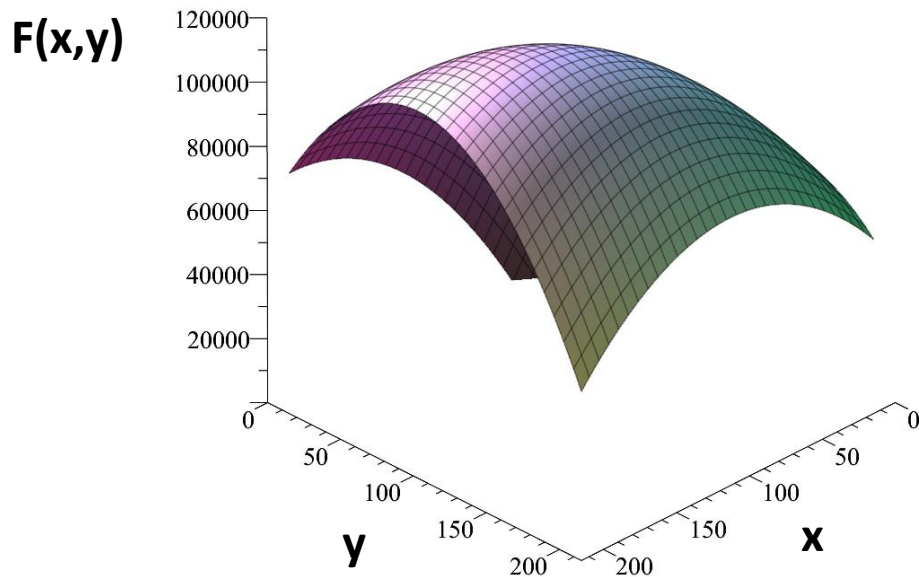
hvor

$$p_{\mathbf{A}} = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{A}, \text{ dvs. spesialversjon} \quad (8.111)$$

$$p_{\mathbf{B}} = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{B}, \text{ dvs. klassisk versjon} \quad (8.112)$$

Fortjenesten som $F(x, y) = p_{\mathbf{A}}x + p_{\mathbf{B}}y - K(x + y)$ er da gitt ved:
(Du skal ikke vise lign.(8.113). Bare ta den for gitt.)

$$F(x, y) = -3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \quad (8.113)$$



Figur 8.15: $F(x, y)$ i lign.(8.113), 3d plott.

- a) Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper maksimerer fortjenetsen $F(x,y)$?
Legg merke til at vi her ikke har noen bibetingelse her. ⁶
- b) Hvilke priser må Trude Nistad sette på kåpene for å oppnå størst mulig fortjeneste $F(x,y)$? ⁷
- c) Hva blir den maksimale fortjenesten?

⁶Anta i denne oppgaven at det stasjonære punktet til $F(x,y)$ representerer et maksimum. Med denne antagelsen slipper du å sjekke at det stasjonære punktet faktisk er et maksimum, og ikke et minimum.

⁷Alts  finne p_x og p_y som gir maksimal $F(x,y)$.

Det viser seg at fabrikken som Trude Nistad bruker må produsere dobbelt så mange av kåper av type A som type B , dvs.

$$g(x,y) = y - 2x = 0 \quad (\text{bibetingelse}) \quad (8.114)$$

Anta i denne oppgaven at:

- det stasjonære punktet til $F(x,y)$ under bibetingelsen i lign.(8.114) representerer et maksimum⁸
- verdien av randpunktene til $F(x,y)$ under bibetingelsen i lign.(8.114) er mindre enn verdien av $P(x,y)$ i det stasjonære punktet⁹

- d) Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper maksimerer fortjenesten $F(x,y)$ nå, med bibetingelsen?¹⁰

Bruk innsettingsmetoden.

- e) Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper maksimerer fortjenesten $F(x,y)$, med bibetingelsen?

Bruk Lagrange multiplikator metoden.

⁸Med denne antagelsen slipper du å sjekke at det stasjonære punktet faktisk er et maksimum, og ikke et minimum.

⁹Med denne antagelsen slipper du å sjekke randpunktene.

¹⁰Dvs. finn x og y som gir F_{maks} .

f) Hva slags pris bør Trude Nistad sette på kåpene for å maksimere sin fortjeneste?

g) Hva er fortjenetsten da?

Løsning:

- a) Det stasjonære punktet til $F(x, y)$ finnes ved at både $\partial F(x, y)/\partial x$ og $\partial F(x, y)/\partial y$ er null, see lign.(8.26) på side 400:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (8.115)$$

Partiell deriverte mhp. x :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (8.116)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) = 0 \quad (8.117)$$

$$\Downarrow$$

$$-6x - 3y + 1191 = 0 \quad (8.118)$$

Partiell deriverte mhp. y :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (8.119)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) = 0 \quad (8.120)$$

$$\Downarrow$$

$$-3x - 10y + 1488 = 0 \quad (8.121)$$

Lign.(8.118) og (8.121) utgjør et ligningssystem med 2 ukjent og 2 ligninger. Dette systemet kan løses ved “innsetningsmetoden”¹¹.

¹¹“Innsetningsmetoden” betyr her at man setter den ene ligningen inn i den andre.

Løser med hensyn på y alene i lign.(8.118):

$$-6x - 3y + 1191 = 0 \quad (8.122)$$

$$\Updownarrow$$

$$-3y = 6x - 1191 \quad \Big/ \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \quad (8.123)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = -2x + 397 \quad (8.124)$$

Setter f.eks. lign.(8.124) inn i (8.121):

$$-3x - 10y + 1488 = 0 \quad (8.125)$$

$$\Updownarrow$$

$$-3x - 10(-2x + 397) + 1488 = 0 \quad (8.126)$$

$$\Updownarrow$$

$$-3x + 20x - 3970 + 1488 = 0 \quad (8.127)$$

$$\Updownarrow$$

$$17x = 2482 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{17} \quad (8.128)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 146 \quad (8.129)$$

Og dette resultatet $x = 146$ innsatt i lign.(8.124) gir:

$$y = \left(-2x + 397\right)\Big|_{x=146} = -2 \cdot 146 + 397 = 105 \quad (8.130)$$

Alt i alt: Trude Nistad må produsere

$$x = 146 \tag{8.131}$$

kåper av type A og

$$y = 105 \tag{8.132}$$

kåper av type B dersom hun skal maksimere fortjenesten $F(x, y)$ når hun ikke har noen bibetingelser.

b) Prisen på kåpe A:

$$p_x = 1200 - 3x + y \Big|_{x=146, y=105} \quad (8.133)$$

$$= 1200 - 3 \cdot 146 + 105 = 867 \quad (8.134)$$

Trude Nistad må sette prisen på kåpe A til 867 NOK for å maksimere fortjenesten sin.

Prisen på kåpe B:

$$p_y = 1500 - 2x - 5y \Big|_{x=146, y=105} \quad (8.135)$$

$$= 1500 - 2 \cdot 146 - 5 \cdot 105 = 683 \quad (8.136)$$

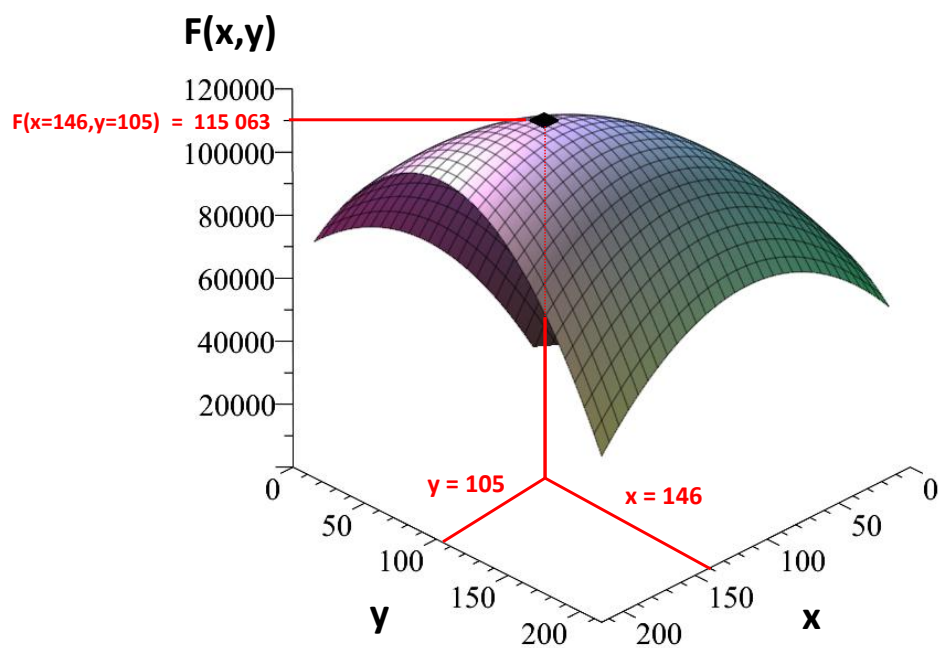
Trude Nistad må sette prisen på kåpe B til 683 NOK for å maksimere fortjenesten sin.

c) Maksimale fortjeneste: (se lign.(8.113))

$$\begin{aligned} F(x=146, y=105) &= \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) \Big|_{x=146, y=105} \\ &= \left(-3 \cdot 146^2 - 3 \cdot 146 \cdot 105 - 5 \cdot 105^2 + 1191 \cdot 146 + 1488 \cdot 105 - 50000 \right) \text{ NOK} \\ &= 115063 \text{ NOK} \end{aligned} \quad (8.137)$$

Plott av fortjenesten $F(x,y)$, hvor:

$$F(x,y) = -3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \quad (8.138)$$



Figur 8.16: Maksfortjeneste når vi ikke har noen bibetingelse.

d) Innsettingsmetoden:

Fortjenesten til Trude Nistad er gitt i lign.(8.113):

$$F(x, y) = -3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \quad (8.139)$$

Ved å sette bibteingelsen $g(x, y) = y - 2x = 0$, dvs.

$$y = 2x \quad (8.140)$$

inn i lign.(8.139) så blir fortjenesten en funksjon av bare en variabel, nemlig $F(x)$:

$$F(x) = -3x^2 - 3x \cdot (2x) - 5 \cdot (2x)^2 + 1191x + 1488 \cdot (2x) - 50000 \quad (8.141)$$

$$= -3x^2 - 6x^2 - 20x^2 + 1191x + 2976x - 50000 \quad (8.142)$$

$$= -29x^2 + 4167x - 50000 \quad (8.143)$$

Dermed har vi fått en funksjon $F(x)$ med en variabel istedet for to.

Bibetingelsen er “innebygd” i $F(x)$. Derfor trenger vi bare å derivere på “vanlig måte”, uten bruk av Lagrange-metoden.

“Vanlig måte”, dvs. i optimum er den derivate av fortjenesten null:

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad (8.144)$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dx}(-29x^2 + 4167x - 50000) = 0 \quad (8.145)$$

$\Downarrow$

$$-58x + 4167 = 0 \quad (8.146)$$

Løser med hensyn på x og får:

$$x = \frac{4167}{58} \approx 72 \quad (8.147)$$

med tilhørende: $y = 2x = 2 \cdot 72 = 144$.

Den 2. deriverte av $F(x)$ er:

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(-29x^2 + 4167x - 50000 \right) \quad (8.148)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(-58x + 4167 \right) = -58 \quad (8.149)$$

altså negativ. Ifølge 2. derivasjonstesten så tilsvarer da $x = 72$ og $y = 144$ et maksimum av fortjenesten $F(x)$.

Alt i alt: Trude Nistad må produsere

$$x = 72 \quad (8.150)$$

kåper av type A og

$$y = 144 \quad (8.151)$$

kåper av type B dersom hun skal maksimere fortjenesten $F(x, y)$ MED bibetingelsen.

e) Lagrange-metoden:

Et optimaliseringsproblem under en bibetingelse under en bibetingelse kan også løses via Lagranges multiplikatormetode.

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$L(x, y; \lambda) = F(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (8.152)$$

De stasjonære punktene til $F(x, y)$ er:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 & \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 & \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \end{array} \quad (8.153)$$

Som gir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (y - 2x) = 0 \quad (8.154)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (y - 2x) = 0 \quad (8.155)$$

$$-6x - 3y + 1191 + 2\lambda = 0 \quad (8.156)$$

$$-3x - 10y + 1488 - \lambda = 0 \quad (8.157)$$

$$3x + 1.5y - 595.5 = \lambda \quad (8.158)$$

$$-3x - 10y + 1488 = \lambda \quad (8.159)$$

De to ligningene i lign.(8.158) og (8.159) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsetningsmetoden”¹². Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(8.158) og (8.159):

$$\lambda = \lambda \quad (8.160)$$

$$\Downarrow$$

$$3x + 1.5y - 595.5 = -3x - 10y + 1488 \quad \Bigg/ + 595.5 + 10y - 3x \quad (8.161)$$

$$\Downarrow$$

$$1.5y + 10y = -3x - 3x + 1488 + 595.5 \quad (8.162)$$

$$\Downarrow$$

$$11.5y = -6x + 2083.5 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{11.5} \quad (8.163)$$

$$\Downarrow$$

$$y = -0.52x + 181.17 \quad (8.164)$$

og størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(8.164) inn i bibetingelsen:

$$y - 2x = 0 \quad \Bigg/ + 2x \quad (8.165)$$

$$\Downarrow$$

$$y = 2x \quad \Bigg/ \text{bruker lign.(8.164)} \quad (8.166)$$

$$\Downarrow$$

$$-0.52x + 181.17 = 2x \quad \Bigg/ + 0.52x \quad (8.167)$$

$$\Downarrow$$

$$181.17 = 2.52x \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{2.52} \quad (8.168)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 72 \quad (8.169)$$

som gir, f.eks. via lign.(8.164), $y = 2x = 144$.

¹²Med “innsetningsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

Alt i alt: Trude Nistad må produsere

$$x = 72 \quad (8.170)$$

kåper av type A og

$$y = 144 \quad (8.171)$$

kåper av type B dersom hun skal maksimere fortjenesten $F(x, y)$ MED bibetingelsen.
Selvfølgelig, samme svar som da vi brukte “innsettingsmetoden” i oppgave [d](#).

f) Prisen på kåpe A:

$$p_x = 1200 - 3x + y, \Big|_{x=72, y=144} \quad (8.172)$$

$$= 1200 - 3 \cdot 72 + 144 = 1128 \quad (8.173)$$

Trude Nistad må sette prisen på kåpe A til 1128 NOK for å maksimere fortjenesten sin.

Prisen på kåpe B:

$$p_y = 1500 - 2x - 5y \Big|_{x=72, y=144} \quad (8.174)$$

$$= 1500 - 2 \cdot 72 - 5 \cdot 144 = 636 \quad (8.175)$$

Trude Nistad må sette prisen på kåpe B til 636 NOK for å maksimere fortjenesten sin.

g) Maksimale fortjeneste: (se lign.(8.113))

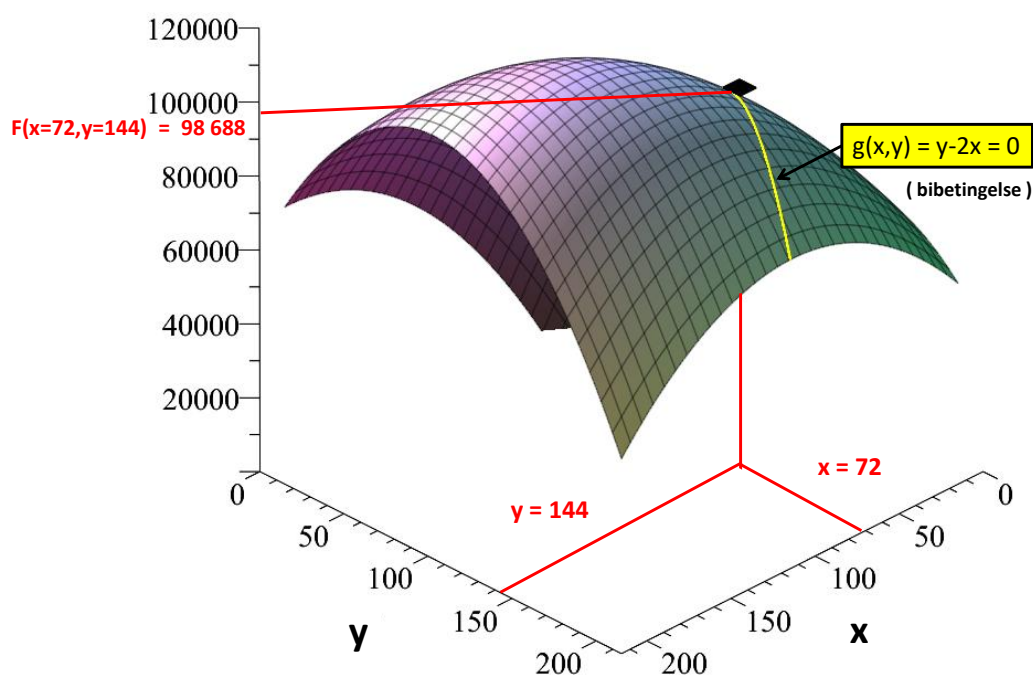
$$F(x=72, y=144) = \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) \Big|_{x=72, y=144} \quad (8.176)$$

$$= \left(-3 \cdot 72^2 - 3 \cdot 72 \cdot 144 - 5 \cdot 144^2 + 1191 \cdot 72 + 1488 \cdot 146 - 50000 \right) \text{ NOK}$$

$$= 98\,688 \text{ NOK} \quad (8.177)$$

Plott av fortjenesten $F(x,y)$, hvor:

$$F(x,y) = -3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \quad (8.178)$$



Figur 8.17: Maksfortjeneste når vi har bibetingelsen $g(x,y) = y - 2x = 0$ (gul kurve).

■