



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høgskole i logistikk

8. Funksjoner av flere variabler

Øving 5: Oppgaver

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 01

- Utlevering:
 - Mandag 26. okt. kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - senest kl. 12:00 mandag 23. nov.
 - dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- **FOR**arbeid:
 - Se videoene for uke 10
 - Les kompendiet.
 - Les gjennom øvingoppgave 5
- **ETTER**arbeid:
 - Gå gjennom løsning 5 som legges ut fredag 13. nov. kl. 12:00.

Problem 8.1 — Partiellderivert

Finn de partiell deriverte til funksjonen $f(x, y)$.

Regn deretter ut stigningstallet til grafen i punktet $(1, 1)$ for x - og y -retningen.

Oppgi de numeriske svarene eksakt, ikke desimaltall.

a) $f(x, y) = x^2y^5$

b) $f(x, y) = \sqrt{x+y}$

c) $f(x, y) = y \ln(xy)$

d) $f(x, y) = \frac{2x+3y-1}{x^2+y^2}$

e) $f(x, y) = e^{-xy^2}$

f) $f(x, y) = \frac{\ln x}{\sqrt{yx}}$

■

Problem 8.2

Finn retningsderivert til funksjonen $f(x, y)$ langs den oppgitte retningen i det oppgitte punktet: ¹

- a) $f(x, y) = x^2 y^5$ i punktet $(1, 1)$ langs retningen $a = 1$ og $b = 2$
- b) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ i punktet $(1, 1)$ langs retningen $x = 1$ og $y = \frac{3}{2}$
- c) $f(x, y) = e^{-xy^2}$ i punktet $(1, 1)$ langs retningen $x = 1$ og $y = -1$
- d) $f(x, y) = \frac{\ln x}{\sqrt{yx}}$ parallelt langs x -aksen i punktet $(1, 1)$

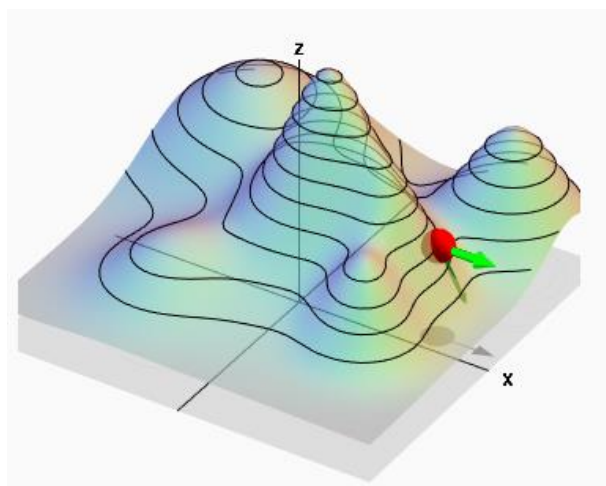


Figure 8.1: Retningsderivert.

■

¹Bruk resultatene fra oppgave 1.

Problem 8.3

Anta at temperaturen i et punkt (x, y) er gitt ved: ²

$$T(x, y) = x^2 y \quad (8.1)$$

Anta at vi står i punktet $(1, 1)$, se figur 8.2

Anta videre at vi ser i retningen $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ enheter langs x -aksen og $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ enheter langs y -aksen, dvs. den retningsderiverte i den retningen er:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \quad (8.2)$$

hvor $a \in \mathbb{R}$.

Bestem den retningen som gir raskest økning i temperatur. ³

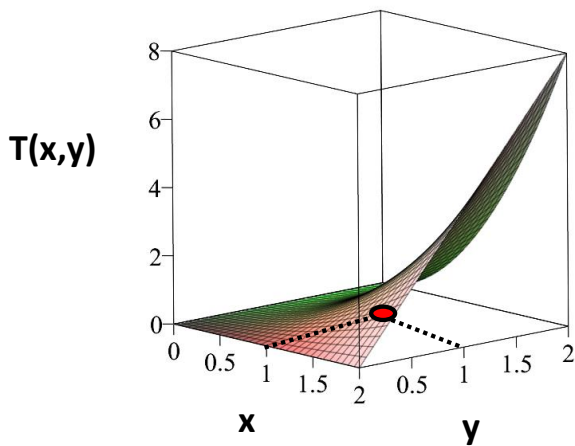
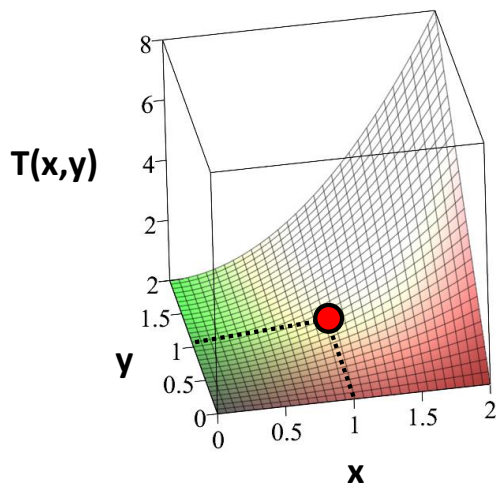


Figure 8.2: Temperatur $T(x, y) = x^2 y$.

■

²Denne oppgaven er vanskelig. Det er meningen at dere skal komme på øvingstimer å få hjelp til denne, dvs. vi løser dette ved et samarbeid.

³Dvs. bestem retningsderivert for den gitte retningen i punktet $(1, 1)$ og finn den verdien for a hvor retningsderivert blir størst. Her trengs både 1. og 2. derivasjonstesten.

Problem 8.4 — Lagrangebetingelsene - Nyttmaksimering under bibetingelser

Du har fått jobb hos Molde Taxisentral. Du skal jobbe ei langhelg, fredag, lørdag og søndag, dvs. tre dager. Føringene du har fått fra din arbeidsgiver for denne arbeidshelgen er at de samlede konsumutgifter må være begrenset, maksimum m NOK. Konsumutgiftene skal dekke bensin- og matutgifter. La derfor:

$$p_x = \text{pris på bensin, NOK/liter} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (8.3)$$

$$p_y = \text{pris på pølsemeny, NOK} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (8.4)$$

Budsjettlikningen for arbeidshelgen blir dermed:

$$p_x x + p_y y \leq m \quad (8.5)$$

hvor $m = \text{samlet konsumutgift}$ og

$$x = \text{antall liter bensin} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (8.6)$$

$$y = \text{antall pølsemenyer} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (8.7)$$

Anta at nytten ved forbruk av bensin x (gode 1) og mat/drikke y (gode 2) er bestemt av nyttefunksjonen:

$$U(x, y) = 2x^2y \quad (8.8)$$



Foto: Per K. Rekdal



Figure 8.3: Taxi og Narvesen.

- a) Gjør om ulikheten i budsjettligningen til likhet og formuler kort dette som et maksimaliseringsproblem. ⁴

- b) Vis at løsningen på maksimeringsproblemet i oppgave a) er:

$$x = \frac{2}{3} \frac{m}{p_x}, \quad y = \frac{1}{3} \frac{m}{p_y} \quad (8.9)$$

hvor x og y i lign.(8.9) er den **optimale kombinasjonen** av bensin og pølse som gir størst nytte. Bruk Lagrange multiplikator metoden. ⁵

Anta at prisen på bensin er $p_x = 10$ NOK/liter og at pølsemenyen på Narvesen koster $p_y = 40$ NOK. Restriksjonen du får fra vakthavende ved Molde Taxisentral er $m = 1\,200$ NOK for den aktuelle helgen.

- c) Hva blir de numeriske verdiene av lign.(8.9)?

- d) Tolk svaret i oppgave c).

■

⁴Denne oppgaven er veldig kort. Svaret står egentlig oppgitt i teksten.

⁵For å være helt sikre på at lign.(8.9) gir maksimal nytte $U_{\max}$, og ikke et minimum, må man gjøre mer analyse. Men det finnes ingen *formell* test for maksimum eller minimum knyttet til Lagrange metoden. Man kan, som en svært enkel test, plukke ut tilfeldige punkt som oppfyller bibetingelen $g(x,y) = m$, og sammeligne $U(x,y)$ verdier. Det trenger du ikke gjøre i denne oppgaven. Vi antar i denne oppgaven at det stasjonære punktet **faktisk er maksimum**. Da sparer du en del arbeid. Du trenger heller ikke å sjekke randen i denne oppgaven.

Problem 8.5 — Økonomi og logistikk

NEAS, Nordmøre Energiverk AS, eier Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk, se figur 8.4. La x og y betegne antall megawatt timer, MWh , som produseres i disse to lokale kraftverkene per døgn:

$$x = \text{antall } MWh \text{ per døgn som produseres ved Reinset kraftverk} \quad (8.10)$$

$$y = \text{antall } MWh \text{ per døgn som produseres ved Ulvund kraftverk} \quad (8.11)$$

Anta at kostnadene per døgn ved kraftverkene på Reinset og Ulvund er henholdsvis: (i NOK)

$$K_R(x) = x^2 + 500x \quad (8.12)$$

$$K_U(y) = y^2 + 300y \quad (8.13)$$

Den samlede kostnaden per døgn for disse to kraftverkene $K(x, y) = K_R(x) + K_U(y)$, dvs.: (i NOK)

$$K(x, y) = x^2 + 500x + y^2 + 300y \quad (8.14)$$



Figure 8.4: Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk.

Antall MWh som samlet produseres per døgn $g(x, y)$ for disse to kraftverkene er gitt ved

$$g(x, y) = x + y \quad (8.15)$$

NEAS har inngått en avtale med Norsk Hydro på Sunndalsøra om at de to aktuelle kraftverkene skal produsere og levere 500 MWh per døgn til en **fast pris**. Siden de har en fast pris på strømmen så ønsker de å minimere totalkostanden. NEAS ønsker altså å minimere $K(x, y)$ under bibetingelsen:

$$g(x, y) = x + y = 500 \quad (8.16)$$

I tillegg må selvsagt størrelsene x og y være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

- a) Hvordan må fordelingen av antall MWh være mellom de to kraftverkene for at NEAS skal minimere sin samlede kostnad $K(x, y)$? ⁶ ⁷
- b) Hva er den minste samlede kostnaden $K_{\min}$ for NEAS i denne sammenheng?

⁶Dvs. finn x og y , si x^* og y^* , som gir minst $K(x, y)$. Bruk **Lagrange multiplikator** metoden.

⁷For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(8.14), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse.

Men en slik analyse behøver du ikke å gjøre her. Du trenger heller ikke å sjekke randen.

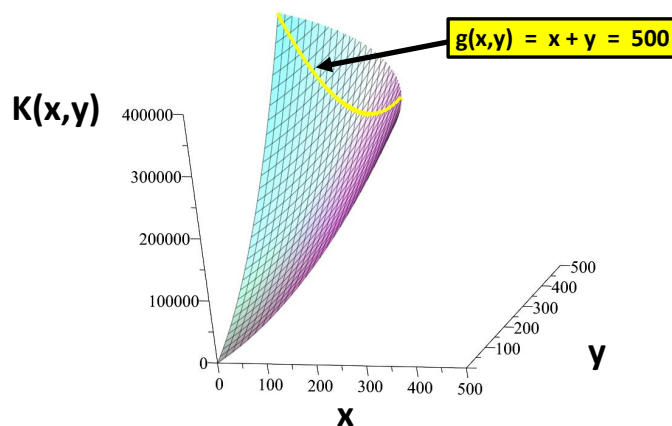


Figure 8.5: $K(x,y)$ og $g(x,y)$.

NEAS opplever en økning i total etterspørsel av strøm per døgn.

Derfor vurderer de å produsere mer strøm. Ulvund kraftverket kan øke produksjonen med opptil 120 MWh per døgn. En slik økning av strømproduksjonen gir en økning i driftskostnadene på 10 NOK/MWh per døgn. Den nye, økte og samlede produksjonskostnaden blir da:

$$K_{ny}(x,y) = x^2 + 500x + y^2 + (300 + 10\varepsilon)y \quad (8.17)$$

hvor $0 \leq \varepsilon \leq 120$ med beslutningsvariabelen

$$\varepsilon = \text{antall } MWh \text{ per døgn som NEAS bestemmer seg for å øke} \quad (8.18)$$

strømproduksjonen med for Ulvund kraftverk

Den nye, optimale fordelingen av antall MWh mellom krafverkene blir da:

$$x_{ny}^* = x^* + \frac{10}{4}\varepsilon \quad (8.19)$$

$$y_{ny}^* = y^* - \frac{10}{4}\varepsilon \quad (8.20)$$

hvor x^* og y^* er løsningen som du fant i oppgave 8.5 a) foran.

Ny, minimal og samlet kostnad er da lik den gamle optimale kostnaden + et nytt ekstraadd:

$$K_{ny}(x_{ny}^*, y_{ny}^*) = \overbrace{K(x^*, y^*)}^{\text{gammel}} + \overbrace{3000\varepsilon - \frac{25}{2}\varepsilon^2}^{\text{ekstra}} \quad (8.21)$$

(Lign.(8.17)-(8.21) skal du ikke vise. Bare ta dem for gitt.)

- c) For å oppnå tilstrekkelig dekningsbidrag sier økonomiavdelingen til NEAS at ekstraavgiftene forbundet med en eventuell økning i strømproduksjonen ikke må overskride 55 000 NOK per døgn.

Vis at den nye, optimale fordelingen av antall MWh mellom de to kraftverkene er: ⁸

$$x_{ny}^* = 250 \text{ MWh} \quad , \quad y_{ny}^* = 250 \text{ MWh} \quad (8.22)$$

- d) Hvorfor blir de nye, optimale verdiene i lign.(8.22) like?
Gi en *kort* begrunnelse.

■

⁸Denne oppgaven er litt vanskelig. Men det er ikke mye regning som skal til for å løse den.

Gamle eksamensoppgaver

Problem 8.6 — Grunnleggende emner

- a)** Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(3x - 7y)^2 \quad (8.23)$$

- b)** Regn ut:

i) -7^2

ii) $(-7)^2$

- c)** Trekk sammen brøkene og gjør forenklinger:

$$\frac{x-2}{5} - \frac{3x-7}{15} \quad (8.24)$$

- d)** Forkort brøken:

$$\frac{12b^2 - 12a^2}{4b - 4a} \quad (8.25)$$

- e)** Regn ut. Vis gjerne litt mellomregning.

$$\frac{(3 \cdot 10^4)(8 \cdot 10^{-7})}{(6 \cdot 10^{-3})} \quad (8.26)$$

- f)** Skriv tallet på standardform:

$$481\,000\,000 \quad (8.27)$$

g) Løs ligningen:

$$\frac{3x-6}{x+1} = 2 \quad (8.28)$$

h) Løs ulikheten:

$$\frac{3x-6}{x+1} < 2 \quad (8.29)$$

■

Problem 8.7 — Derivasjon og integrasjon

Deriver funksjonene nedenfor:

a) $f(x) = \frac{3}{x^7}$

b) $f(x) = 10^{\log(x^2)}$

c) $f(x) = \sqrt{x}e^x$

d) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

e) Løs ligningen:

$$5e^{0.2x} = 10 \tag{8.30}$$

- f) Finn arealet A avgrenset av funksjonen

$$f(x) = x - x^3 \quad (8.31)$$

og intervallet $[a, b] = [0, 1]$, dvs. finn:

$$I = \int_0^1 f(x) dx \quad (8.32)$$

Uten å gjøre noen utregninger, hva blir følgende integral?

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \quad (8.33)$$

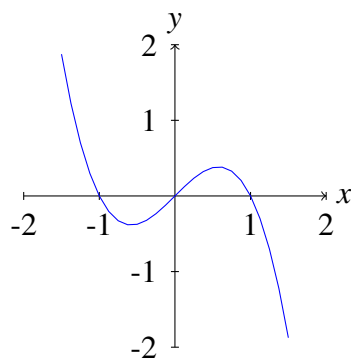


Figure 8.6: Funksjonen $f(x) = x - x^3$.

■

Problem 8.8 — annuitetslån vs serielån

Du jobber som økonomiansvarlig hos “*Moldegaard Maritime Logistics*”. Dette firmaet skal investere i nytt datasystem. Dette nye datasystemet koster $K_0 = 300\,000$ NOK og skal finansieres ved låneopptak. Styret i firmaet har bestemt at lånet skal tilbakebetales i løpet av $n = 15$ år. Renten er $r = \frac{3\%}{100\%} = 0.03$ i hele perioden.

- a) Anta at lånet skal tilbakebetales som et annuitetslån.⁹
Hvor stort blir det årlige terminbeløpet K (rente+avdrag)?¹⁰
- b) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt annuitetslån?



Figure 8.7: Moldegaard Maritime Logistics.

⁹Ved annuitetslån er terminbeløpet det samme gjennom hele nedbetalingen.

¹⁰Se i kompendiet dersom du ikke husker uttrykket for terminbeløpet ved annuitetslån.

- c) Anta at lånet istedet skal tilbakebetales som et **serielån**.
Hvor stort blir det årlige *avdraget*?
- d) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt **serielån**? ¹¹
- e) Dersom du har regnet rett i oppgave b) og d), så fant du at $R_n^{\text{ann}} > R_n^{\text{serie}}$.
Forklar kort, uten regning, hvorfor firmaet betaler mer rente til banken ved **annuitet** enn ved **serie**. ¹²
-

¹¹Ved serielån er avdraget det samme gjennom hele nedbetalingen. Se i kompendiet dersom du ikke husker uttrykket for den totale renten ved serielån.

¹²I starten av lånets tilbakebetalingstid, betaler firmaet mindre tilbake til banken ved et **annuitetslån** enn et **serielån**? Betyr det at firmaet låner pengene “lenger” i **annuitetslånet**? Dersom pengene lånes “lenger”, hva betyr det for renten? Større eller mindre?

Problem 8.9 — Lagrange multiplikatorer

Made By Mom A/S (MBM) er en klesbutikk i Molde som spesialdesigner klær. MBM har egne design og egne kolleksjoner. Et av plaggene som lages, er kåper. Av en bestemt type kåpe lages det to versjoner:

$$\mathbf{A} = \text{spesialversjon med ekstra lommer og ekstra dekor} \quad (8.34)$$

$$\mathbf{B} = \text{klassisk versjon} \quad (8.35)$$

Ut fra erfaring angående lønnsutgifter og priser på stoff og andre råvarer har man funnet ut at **kostnaden** forbundet med å produsere disse kåpene kan beskrives, med god tilnærming til virkeligheten, av følgende funksjon:

$$K(x, y) = 500x + 100y + 100xy + 1200 \quad (8.36)$$

hvor

$$x = \text{antall kåper som produseres og selges av type } \mathbf{A} \text{ (spesial)} \quad (8.37)$$

$$y = \text{antall kåper som produseres og selges av type } \mathbf{B} \text{ (klassisk)} \quad (8.38)$$

Kostnaden er i NOK.



Figure 8.8: Made By Mom A/S.

Det viser seg at det er en sammenheng mellom prisen på kåpene, og antall kåper som produseres og selges. Hun som driver MBM har funnet ut at følgende sammenhenger mellom pris og etterspørsel er en god tilnærming til virkeligheten:

$$p_{\mathbf{A}}(x,y) = 4000 - 100x + 200y \quad (8.39)$$

$$p_{\mathbf{B}}(x,y) = 2600 + 200x - 100y \quad (8.40)$$

hvor

$$p_{\mathbf{A}}(x,y) = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{A}, \text{ dvs. spesialversjon} \quad (8.41)$$

$$p_{\mathbf{B}}(x,y) = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{B}, \text{ dvs. klassisk versjon} \quad (8.42)$$

Alle priser er i NOK.

a) Hva er den faste kostnaden forbundet med produksjon av kåpene? ¹³

b) Vis at inntekten $I(x,y)$ er gitt ved:

$$I(x,y) = -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y \quad (8.43)$$

c) Vis at profittfunksjonen $P(x,y)$ er gitt ved:

$$P(x,y) = -100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y - 1200 \quad (8.44)$$

¹³Se lign.(8.36). Husk benevning.

Når stoff kjøpes inn til kåpene så kjøpes stoffmengden i bestemte kvantum. Ut fra det kvantumet som er kjøpt inn kan man sy totalt 12 kåper. Matematisk betyr det:

$$x + y = 12 \quad (\text{bibetingelse}) \quad (8.45)$$

I tillegg må både x og y være positive størrelser.

Anta i denne oppgaven at:

- det stasjonære punktet til $P(x, y)$ under bibetingelsen i lign.(8.45) representerer et **maksimum** ¹⁴
 - verdien av randpunktene til $P(x, y)$ under bibetingelsen i lign.(8.45) er mindre enn verdien av $P(x, y)$ i det stasjonære punktet ¹⁵
- d)** Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper **maksimerer** profitten $P(x, y)$? ¹⁶
- e)** Hva er den **maksimale** profitten P_{maks} for MBM ved salg av disse kåpene?
- f)** Hva slags pris må MBM sette på kåpene for å oppnå **maksimum** profitt P_{maks} ?

■

¹⁴Med denne antagelsen slipper du å sjekke at det stasjonære punktet faktisk er et maksimum, og ikke et minimum.

¹⁵Med denne antagelsen slipper du å sjekke randpunktene.

¹⁶Dvs. finn x og y som gir P_{maks} . Bruk **Lagrange multiplikator** metoden. Husk, du slipper å sjekke randen.

Problem 8.10 — Grunnleggende emner

- a)** Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(a^2 - b^3)(a^2 + b^3) \quad (8.46)$$

- b)** Anta at en kapital øker fra $K_0 = 5\,000$ \$ til $K_1 = 7\,500$ \$.

Hva er den prosentvise økningen?

- c)** Trekk sammen brøkene og gjør forenklinger:

$$\frac{3}{2a} - \frac{6}{3a} + \frac{1}{a} \quad (8.47)$$

- d)** Forkort brøken:

$$\frac{b^2 - ab}{3a - 3b} \quad (8.48)$$

- e)** Gitt funksjonene:

$$f(x) = 2x^2 - 12 \quad , \quad g(x) = x^2 + 4 \quad (8.49)$$

Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene.

- f)** Løs ligningen, dvs. finn r :

$$4 = 2(1 + r)^4 \quad (8.50)$$

g) Løs ligningssystemet

$$7x + 5y = -20 \quad (8.51)$$

$$2x + 6y = 8 \quad (8.52)$$

Ligningene er lineært uavhengige så du behøver ikke å sjekke at linjene parallelle eller ei.

h) Finn eventuelle nullpunkte(r) til funksjonen:

$$f(x) = x^2 + 4 \quad (8.53)$$

■

Problem 8.11 — Blandede oppgaver

- a) Faktoriser polynomet

$$y = x^2 - a^2 \quad (8.54)$$

- b) Bestem n 'te ledd a_n til følgen nedenfor.
La følgen starte med $n = 1$.

$$2, 6, 18, 54, 162, \dots \quad (8.55)$$

- c) Gitt den geometriske rekken bestemt av:

$$a_i = a \cdot 1.1^{i-1} \quad (8.56)$$

hvor $a = 3$ og $i = 1, 2, 3, \dots$

Finn summen S_5 .

Gitt funksjonen:

$$f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3 \quad (8.57)$$

- d) Finn de partiellderivate.
- e) Regn ut stigningstallet til funksjonen $f(x, y)$ i punktet $(1, 1)$ i x -retning og y -retning.
- f) Regn ut den retningsderivate til funksjonen $f(x, y)$ i punktet $(1, 1)$ i retningen $a = 2$ og $b = 3$.¹⁷

¹⁷Bruke den retningsderivate som definert i kompendiet. Oppgi svaret eksakt.

- g) Finn arealet A avgrenset av funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (8.58)$$

og intervallet $[a, b] = [1, 2]$, dvs. finn:

$$A = \int_1^2 f(x) \, dx \quad (8.59)$$

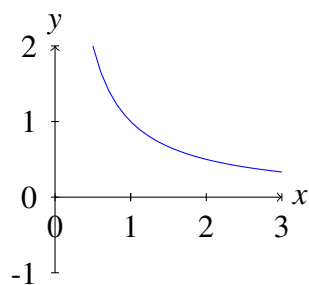


Figure 8.9: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$.

■

Problem 8.12 — økonomi, kostnad, inntekt og fortjeneste

Jobbfrukt leverer frukt til bedrifter og andre som ønsker det. Den totale kostnaden $K(x)$ i NOK **per uke** er:

$$K(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad (8.60)$$

hvor x = antall fruktfat produsert og solgt **per uke** og hvor a , b og c er konstanter. For det største og mest eksklusive fruktfatet gjelder følgende numeriske verdier:

$$a = 2 \text{ NOK} \cdot \text{uke} \quad (8.61)$$

$$b = 200 \text{ NOK} \quad (8.62)$$

$$c = 11\,200 \text{ NOK/uke} \quad (\text{faste kostnader per uke}) \quad (8.63)$$

Prisen på dette fruktfatet er $p = 560$ NOK.

- a) Vis at den totale fortjenesten $F(x)$ per uke er gitt ved:

$$F(x) = (p - b)x - ax^2 - c \quad (8.64)$$

- b) Finn hvilke produksjonsmengder som gir balanse mellom inntekt og den totale kostnaden.¹⁸



Figure 8.10: Jobbfrukt.

¹⁸Dvs. finn de verdiene av x slik at $F(x) = 0$.

- c) Vis at antall fruktfat som må produseres og selges per uke for å *maksimere* fortjenesten $F(x)$ er gitt ved:

$$x = \frac{p-b}{2a} \quad (8.65)$$

Forsikre deg om at lign.(8.65) faktisk er et maksimum ved å betrakte $F''(x)$.

- d) Sett inn tall og regn ut x i lign.(8.65).¹⁹

- e) Enhetskostnaden, dvs. kostnad per fruktfat, er definert ved: $E(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x}$.
Vis at denne er gitt ved:

$$E(x) = ax + b + \frac{c}{x} \quad (8.66)$$

- f) Vis at antall fruktfat som må produseres og selges for å minimere enhetskostnaden er gitt ved:

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (8.67)$$

Forsikre deg om at lign.(8.67) faktisk representerer et minimum, og ikke et maksimum, ved å betrakte $E''(x)$.

- g) Sett inn tall og regn ut x i lign.(8.67).²⁰

- h) Sammenlign oppgave d) og g). Kommenter svaret.²¹

■

¹⁹Husk rett benevning. Se i den sammenheng i starten av oppgaven, side 27, hva x er definert som.

²⁰Husk rett benevning.

²¹Er maksimum av fortjenesten $F(x)$ sammenfallende med minimum av enhetskostnaden $E(x)$?

Problem 8.13 — økonomi, logistikk og LP optimalisering

Ekornes ASA er en norsk møbelprodusent med hovedkontor i Sykkylven i Møre og Romsdal. Selskapet er mest kjent for varemerket Stressless. Stressless blir brukt på firmaets kolleksjon av regulerbare stoler, se figur 8.11.

La oss forenkle situasjonen for Ekornes og anta at de kun produserer to typer stressless-stoler. En standard versjon, type 1, og en luksus versjon, type 2. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

x = antall produserte stresslesser per dag av type 1

y = antall produserte stresslesser per dag av type 2

Anta at avdelingen til Ekornes som driver med produksjon av disse stolene har begrenset med ressurser. Arbeidsstyrken de rår over har 24 timer disponibelt til produksjon av komponenter per dag, 16 timer til montering per dag og kun 9 timer til pakking per dag. Disse **restriksjonene** kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$3x + 2y \leq 24 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (8.68)$$

$$x + 2y \leq 16 \quad (\text{montering}) \quad (8.69)$$

$$x + y \leq 9 \quad (\text{pakking}) \quad (8.70)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.



Figure 8.11: Stressless.

Anta videre at fortjenesten $F(x, y)$ til Ekornes ved salg av slike stoler er gitt ved:

$$F(x, y) = 4000x + 3000y \quad (8.71)$$

Denne funksjonen er gitt i norske kroner (NOK).
Ekornes ønsker å **maksimere** denne fortjenesten.

- a) Hvor lang tid tar det å **produsere komponentene** til en stol av type 1? Og type 2?
Hvor lang tid tar det å **montere** en stol av type 1? Og type 2? ²²
- b) Gjør om ulikhetene i lign.(8.68) - (8.70) til likheter og vis at restriksjonene kan skrives

$$y(x) = 12 - \frac{3}{2}x \quad (8.72)$$

$$y(x) = 8 - \frac{1}{2}x \quad (8.73)$$

$$y(x) = 9 - x \quad (8.74)$$

hvor y er en funksjon av x .

- c) I vedlegget helst bakerst i oppgavesettet finner du tre verditabeller og ett koordinatsystem. Fyll ut verditabellene og plott lign.(8.72), (8.73) og (8.74) i dette koordinatsystemet. ²³
- d) Skraver det området i figuren som tilfredsstiller alle restriksjonene.

²²I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

²³Husk at vedlegget skal legges ved i din eksamensbesvarelse.

Husk også å skrive inn ditt kandidatnummer på vedlegget.

- e) Er det noen av de tre ressursene som ikke er en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av x og y ? Gi en *kort* begrunnelse.

Fortjenesten i lign.(8.71) skal **maksimeres** under restriksjonene beskrevet av lign.(8.68). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.

- f) Indiker alle *hjørneløsninger* på figuren fra oppgave c).
- g) Les av alle hjørneløsninger ²⁴ fra grafen og regn ut tilhørende fortjenester $F(x,y)$.
- h) Hvilken kombinasjon av x og y gir *maksimal* fortjeneste $F(x,y)$?

■

²⁴Dvs. les av koordinatene (x,y) for alle hjørneløsninger.

Vedlegg

Kandidatnummer: _____

(skriv inn ditt kandidatnummer her)

x	0	2	4	8
y(x)				

x	0	6	12	16
y(x)				

x	0	4	6	9
y(x)				

