



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

2. TESTeksamen

Løsning

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 01

- (Test)eksamensdag / øvingsdag:
 - tirsdag 10. nov. og torsdag 12. nov.
 - tirsdag 17. nov. og torsdag 19. nov.
- Tid:
 - kl. 12:15 - 16:00
- Hjelpemidler:
 - KD (kalkulator)
 - Kompendium del 1, del 2 og del 3
 - Generell ordbord (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)

Oppgave 1 — 25%

- a) (2.5%) Gitt funksjonen:

$$f(x) = e^x + x^2 \quad (2.1)$$

Løs ligningen $f(2x) = 4f(x)$.

Løsning:

Setter inn:

$$f(2x) = 4f(x) \quad (2.2)$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{2x} + (2x)^2 = 4(e^x + x^2) \quad (2.3)$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{2x} + 4x^2 = 4e^x + 4x^2 \quad (2.4)$$

$$\Updownarrow$$

$$(e^x)^2 - 4e^x = 0 \quad (2.5)$$

Vi forenkler denne ligningen ved å definere en ny variabel: $y = e^x$

$$(e^x)^2 - 4e^x = 0 \quad (2.6)$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2 - 4y = 0 \quad \text{faktoriserer} \quad (2.7)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(y - 4) = 0 \quad (2.8)$$

som har løsningene

$$y = 0 \quad \text{og} \quad y = 4 \quad (2.9)$$

Innsatt for $y = e^x$:

$$e^x = 0 \text{ og } e^x = 4 \quad (2.10)$$

Ligningen $e^x = 0$ har ingen løsning, mens $e^x = 4$ har løsningen

$$x = \ln 4 \quad (2.11)$$

- b) (2.5%) Skriv brøken så mye som mulig:

$$\frac{3(x+2)^2 - 6x(x+2)}{(x+2)^4} \quad (2.12)$$

Løsning:

$$\frac{3(x+2)^2 - 6x(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)(3(x+2) - 6x)}{(x+2)^4} \quad (2.13)$$

$$= \frac{3x+6-6x}{(x+2)^3} = \frac{6-3x}{(x+2)^3} = \frac{3(2-x)}{(x+2)^3} \quad (2.14)$$

c) (5%) Løs ligningsystemet

$$x - 2y = 4 \quad (2.15)$$

$$2x - y = 2 \quad (2.16)$$

Kontroller at svaret er rett ved å sette løsningen inn i lign.(2.15) og (2.16) og sjekk at begge ligningene er oppfylte.

Løsning:

Det er flere måter å løse et lineær ligningsystem på, blant annet via “innsetningsmetoden” eller “addisjonsmetoden.” I dette tilfellet velger vi “innsetningsmetoden”.

Løser m.h.p. x alene i lign.(2.15).

$$x = 2y + 4 \quad (2.17)$$

Setter dette uttrykket for x inn i lign.(2.16):

$$2x - y = 2 \quad \text{innsatt for } x \quad (2.18)$$

$$\Downarrow$$

$$2(2y + 4) - y = 2 \quad \text{“pilmetoden”} \quad (2.19)$$

$$\Downarrow$$

$$4y + 8 - y = 2 \quad (2.20)$$

$$\Downarrow$$

$$3y = -6 \quad / \frac{1}{3} \quad (2.21)$$

$$\Downarrow$$

$$y = -2 \quad (2.22)$$

Via lign.(2.17) finner vi da x :

$$x = 2y + 4 \quad \text{innsatt for } y = -2 \quad (2.23)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 2(-2) + 4 \quad (2.24)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \quad (2.25)$$

Løsningen til ligningsystemet er dermed: $(x, y) = (0, -2)$.

Setter inn $(x, y) = (0, -2)$ i lign.(2.15):

$$x - 2y = 4 \qquad (x, y) = (0, -2) \qquad (2.26)$$

$$\Downarrow$$

$$0 - 2(-2) = 4 \qquad (2.27)$$

$$\Downarrow$$

$$4 = 4 \qquad (2.28)$$

dvs. løsningen oppfyller lign.(2.15). Tilsvarende:

Setter inn $(x, y) = (0, -2)$ i lign.(2.16):

$$2x - y = 2 \qquad (x, y) = (0, -2) \qquad (2.29)$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot 0 - (-2) = 2 \qquad (2.30)$$

$$\Downarrow$$

$$2 = 2 \qquad (2.31)$$

dvs. løsningen oppfyller lign.(2.16).

- d) (5%) Andregradspolynomet $2y^2 + 2y - 12$ har nullpunktene $c_1 = -3$ og $c_2 = 2$. Dette faktum skal du ikke vise. Bare ta det for gitt.

Bruk denne informasjonen og skriv følgende uttrykk på faktorisert form:

$$(2y^2 + 2y - 12)(6 - 3y) \quad (2.32)$$

Løsning:

Fra fundamentalsetningen for algebra vet vi at vi kan faktorisere et polynom dersom vi vet nullpunktene.

Dermed:

$$\underbrace{(2y^2 + 2y - 12)}_{=2(y-c_1)(y-c_2)}(6 - 3y) = 2(y - c_1)(y - c_2)3(3 - y) \quad (2.33)$$

$$= 2(y - (-3))(y - 2)3(3 - y) \quad (2.34)$$

$$= 6(y + 3)(y - 2)(3 - y) \quad (2.35)$$

- e) (10%) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: ¹

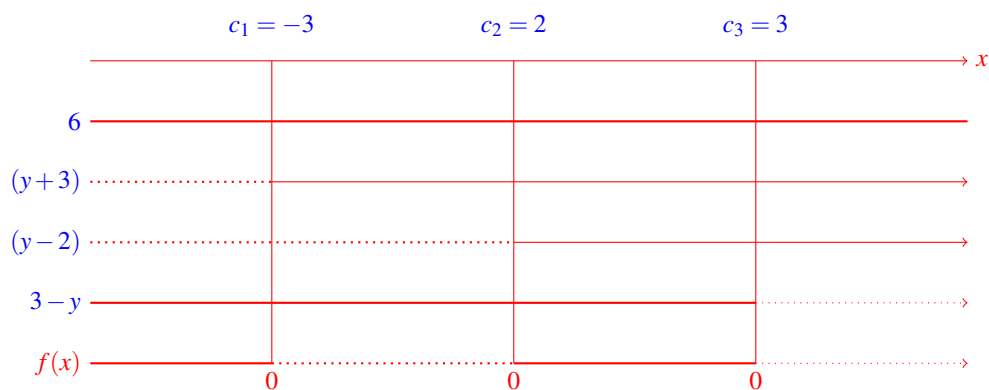
$$f(x) = (2y^2 + 2y - 12)(6 - 3y) > 0 \quad (2.36)$$

Løsning:

Fra oppgave d) fant vi faktoriseringen:

$$f(x) = 6(y+3)(y-2)(3-y) \quad (2.37)$$

Med nullpunktene $c_1 = -3$, $c_2 = 2$ og $c_3 = 3$ setter vi opp fortegnsskjemaet:



Figur 2.1: Fortegnsskjema.

Løsningsmengden når $f(x) > 0$:

$$\mathcal{L} = \langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle \quad (2.38)$$

■

¹Bruk løsningen fra oppgave d)

Oppgave 2 — 25%

a) (5%) Gitt funksjonen

$$f(x) = \ln(7x^2) \quad (2.39)$$

i) Finn den deriverte $\frac{df(x)}{dx}$ ved å bruke kjerneregelen.

ii) Finn den deriverte $\frac{df(x)}{dx}$ ved å bruke regneregler for ln-funksjoner.

Løsning:

i) Kjerneregelen, hvor $g(u) = \ln(u)$ og $u(x) = 7x^2$:

$$f'(x) = g'(u)u' \quad (2.40)$$

$$= (\ln u)'(7x^2)' = \frac{1}{u} \cdot 7 \cdot 2x = \frac{1}{7x^2} 14x = \frac{2}{x} \quad (2.41)$$

ii) Logaritmeregler:

$$f(x) = \ln(7x^2) \quad (2.42)$$

$$= 2\ln(7x) = 2(\ln(7) + \ln(x)) \quad (2.43)$$

$$= 2\ln(7) + 2\ln(x) \quad (2.44)$$

Deriverer:

$$f'(x) = (2\ln(7) + 2\ln(x))' = \frac{2}{x} \quad (2.45)$$

siden $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

b) (5%) Løs ligningen

$$3 \cdot 10^{2+x} = 75 \quad (2.46)$$

Skriv svaret på eksakt form.

Løsning:

Løser:

$$3 \cdot 10^{2+x} = 75 \quad \bigg/ \frac{1}{3} \quad (2.47)$$

$$\Updownarrow \\ 10^{2+x} = 25 \quad \log \quad (2.48)$$

$$\Updownarrow \\ \log(10^{2+x}) = \log(25) \quad (2.49)$$

$$\Updownarrow \\ 2+x = \log(25) \quad \bigg/ -2 \quad (2.50)$$

$$\Updownarrow \\ x = \log(25) - 2 \quad (2.51)$$

- c) (5%) Anta at vi setter inn kapitalen K_0 i banken år 0. Renten er r .
Anta videre at kapitalen K_i ved år nr. i , rente inkludert, følger mønsteret

$$K_1 = K_0(1+r) \quad \text{startledd} \quad (2.52)$$

$$K_{i+1} = K_i(1+r) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.53)$$

i) Hva slags type følge utgjør lign.(2.52) og (2.53)?

ii) Finn et uttrykk for det i 'te leddet K_i .

iii) Finn et uttrykk for summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n K_i \quad (2.54)$$

Løsning:

i) Siden

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1+r \quad (2.55)$$

er en konstant så er dette en geometrisk rekke.

ii) For en geometrisk følge gjelder: (se kompendiet)

$$K_i = K_1 k^{i-1} \quad (2.56)$$

Med $K_1 = K_0(1+r)$ og $k = 1+r$:

$$K_i = K_0(1+r)(1+r)^{i-1} = K_0(1+r)^i \quad (2.57)$$

iii) Summen av en geometrisk rekke: (se kompendiet)

$$S_n = K_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (2.58)$$

Med $K_1 = K_0(1+r)$ og $k = 1+r$:

$$S_n = K_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = K_0(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{1+r - 1} \quad (2.59)$$

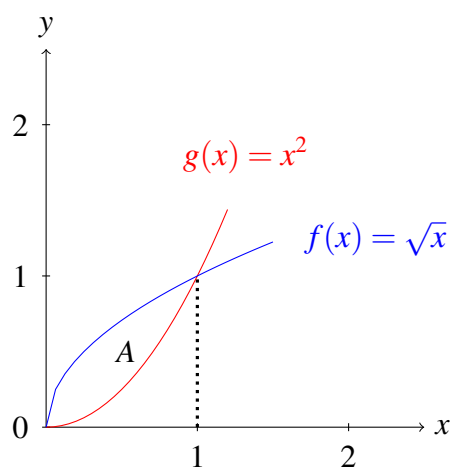
$$= K_0(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (2.60)$$

- d) (5%) Finn, ved hjelp av integrasjon, arealet A av området avgrenset av funksjonene

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (2.61)$$

$$g(x) = x^2 \quad (2.62)$$

som vist i figur 2.2.



Figur 2.2: Arealet A .

Løsning:

Anti-derivate: (Husk at: $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$)

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + c \quad (2.63)$$

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + \tilde{c} \quad (2.64)$$

Dermed: (integralsetningens fundamentalsats)

$$A = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \quad (2.65)$$

$$= \int_0^1 (f(x) - g(x))dx \quad (2.66)$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx \quad (2.67)$$

$$= F(1) - F(0) - (G(1) - G(0)) \quad (2.68)$$

$$= \left(\frac{2}{3}1^{3/2} + \textcolor{red}{c}\right) - \left(\frac{2}{3}0^{3/2} + \textcolor{red}{c}\right) - \left(\left(\frac{1}{3}1^3 + \textcolor{red}{c}\right) - \left(\frac{1}{3}0^2 + \textcolor{red}{c}\right) \right) \quad (2.69)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \quad (2.70)$$

$$= \frac{1}{3} \quad (2.71)$$

e) (5%) Gitt funksjonen

$$f(x, y) = e^x \ln(y) \quad (2.72)$$

Finn de partiell deriverte til denne funksjonen.

Løsning:

Siden $\partial e^x / \partial x = e^x$ så er:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \ln(y)) = e^x \ln(y) \quad (2.73)$$

Siden $\partial \ln(y) / \partial y = 1/y$ så er:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \ln(y)) = \frac{e^x}{y} \quad (2.74)$$

■