



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

2. TESTeksamen

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 01

- (Test)eksamensdag / øvingsdag:
 - tirsdag 10. nov. og torsdag 12. nov.
 - tirsdag 17. nov. og torsdag 19. nov.
- Tid:
 - kl. 12:15 - 16:00
- Hjelpemidler:
 - KD (kalkulator)
 - Kompendium del 1, del 2 og del 3
 - Generell ordbord (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)

Oppgave 1 — 25%

- a) (2.5%) Gitt funksjonen:

$$f(x) = e^x + x^2 \quad (2.1)$$

Løs ligningen $f(2x) = 4f(x)$.

- b) (2.5%) Forkort brøken så mye som mulig:

$$\frac{3(x+2)^2 - 6x(x+2)}{(x+2)^4} \quad (2.2)$$

- c) (5%) Løs ligningsystemet

$$x - 2y = 4 \quad (2.3)$$

$$2x - y = 2 \quad (2.4)$$

Kontroller at svaret er rett ved å sette løsningen inn i lign.(2.12) og (2.13) og sjekk at begge ligningene er oppfylte.

- d) (5%) Andregradspolynomet $2y^2 + 2y - 12$ har nullpunktene $c_1 = -3$ og $c_2 = 2$. Dette faktum skal du ikke vise. Bare ta det for gitt.

Bruk denne informasjonen og skriv følgende uttrykk på faktorisert form:

$$(2y^2 + 2y - 12)(6 - 3y) \quad (2.5)$$

- e) (10%) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: ¹

$$f(x) = (2y^2 + 2y - 12)(6 - 3y) > 0 \quad (2.6)$$

■

¹Bruk løsningen fra oppgave d)

Oppgave 2 — 25%

- a) (5%) Gitt funksjonen

$$f(x) = \ln(7x^2) \quad (2.7)$$

- i) Finn den deriverte $\frac{df(x)}{dx}$ ved å bruke kjerneregelen.
- ii) Finn den deriverte $\frac{df(x)}{dx}$ ved å bruke regneregler for ln-funksjoner.

- b) (5%) Løs ligningen

$$3 \cdot 10^{2+x} = 75 \quad (2.8)$$

Skriv svaret på eksakt form.

- c) (5%) Anta at vi setter inn kapitalen K_0 i banken år 0. Renten er r .
Anta videre at kapitalen K_i ved år nr. i , rente inkludert, følger mønsteret

$$K_1 = K_0(1 + r) \quad \text{startledd} \quad (2.9)$$

$$K_{i+1} = K_i(1 + r) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

- i) Hva slags type følge utgjør lign.(2.49) og (2.50)?
- ii) Finn et uttrykk for det i 'te leddet K_i .
- iii) Finn et uttrykk for summen

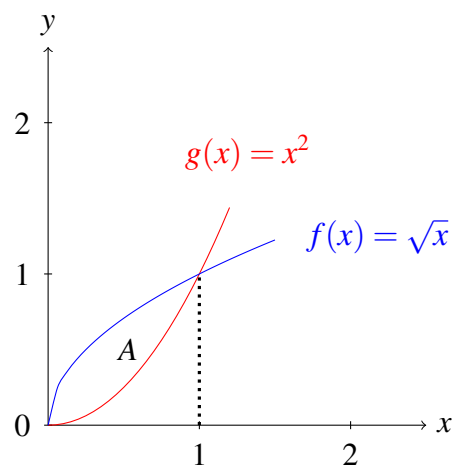
$$S_n = \sum_{i=1}^n K_i \quad (2.11)$$

- d) (5%) Finn, ved hjelp av integrasjon, arealet A av området avgrenset av funksjonene

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (2.12)$$

$$g(x) = x^2 \quad (2.13)$$

som vist i figur 2.2.



Figur 2.1: Arealet A .

e) (5%) Gitt funksjonen

$$f(x, y) = e^x \ln(y) \quad (2.14)$$

Finn de partiell deriverte til denne funksjonen.

■

Oppgave 3 — 30%

Nåværende president i USA, Donald Trump, har i 2020 hatt en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 2.2: Donald Trump.

Anta det er 30 dager igjen til valgdagen.

Valgledelsen vet at en av de viktigste vippestatene er Pennsylvania. De ønsker derfor å analysere hvor mye penger de skal investere i Pennsylvania den neste 30 dagene frem til valgdagen.

I Pennsylvania er det anslått at Donald Trump har 3 mill. sikre stemmer. Målet med investeringene er dermed å mobilisere flere stemmer utover de 3 mill. sikre stemmene.

For hver dag i de neste 30 dagene bestemmer et visst antall nye personer seg for å stemme på Donald Trump.



Figur 2.3: Vippestaten Pennsylvania.

Anta antall nye stemmer Donald får ved tiden t er estimert av valganalytikerne ved funksjonen:

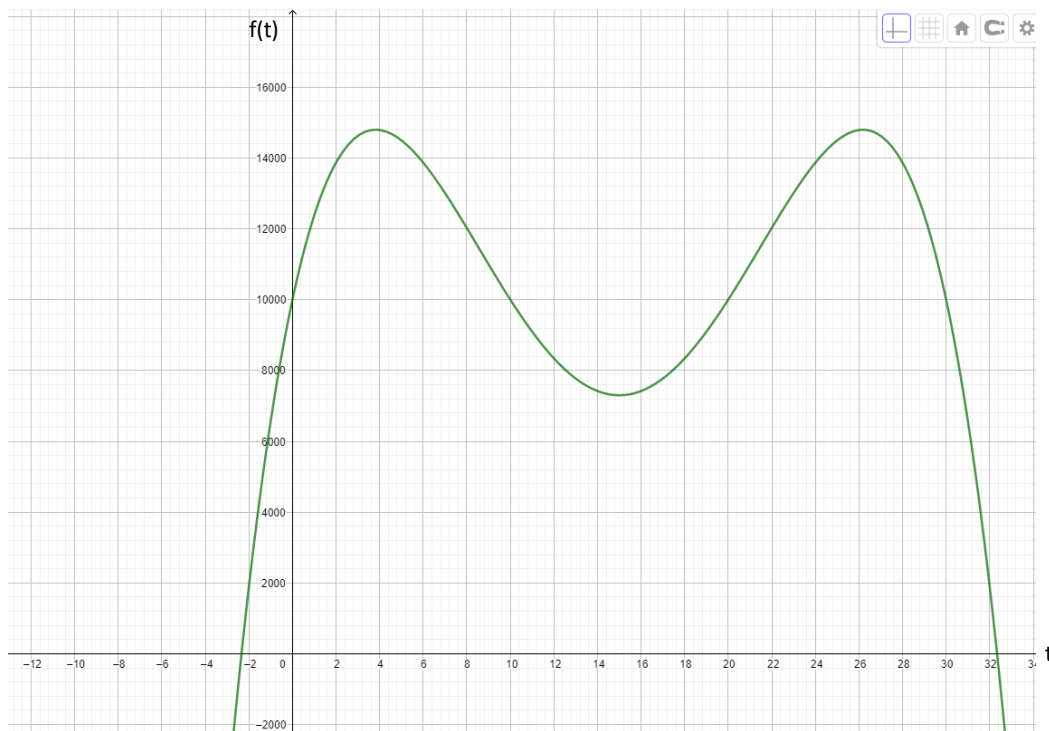
$$f(t) = 7300 - \frac{3}{100}(at - 30)^4 + 30(at - 30)^2 \quad t \in [0, 30] \quad (2.15)$$

hvor

$$a = \text{innsatsfaktoren til valgledelsen} \quad (2.16)$$

Innsatsfaktoren $a \in [1, 2]$ reflekterer f.eks. hvor mange ganger og når Donald Trump kommer på besøk og taler i Pennsylvania. I forkant av et annonsert møte begynner antall nye stemmer å øke, inntil det når en topp akkurat ved talen. Etter talen vil tallet synke til mer normale tilstander igjen - se figur 2.5.

Legg merke til at valgledelsen har restriktert innsatsfaktoren a til å ligge mellom 1 og 2, som reflekterer f.eks. at Donald enten kommer 1 gang eller 2 ganger og holder tale.



Figur 2.4: $f(t)$ med innsatsfaktor $a = 2$.

- a) (15%) Anta innsatsfaktoren er satt til $a = 2$.

Bestem når Donald Trump holder taler og bestem når antall nye stemmer er på sitt laveste.²

Bruk 1.derivasjonstesten for å finne de mulige kandidatene og bruk 2.derivasjonstesten til å avgjøre om kandidatene er topp- eller bunnpunkt hhv.

Etter at du har funnet svarene, trekk en *kort* konklusjon når Trump holder taler og når antall nye stemmer er på sitt laveste.

- b) (5%) Med $a = 2$, hvor mange nye stemmer N har Donald Trump fått i Pennsylvania totalt ila. de siste 30 dagene?^{3 4}

²Dvs. finn topp- og bunnpunkter på grafen til f .

³Dere må finne arealet under grafen til f mellom 0 og 30.

⁴Bruk at antiderivert F til f er gitt ved

$$F(t) = 7300t - \frac{3}{500a}(at - 30)^5 + \frac{10}{a}(at - 30)^3 + C \quad (2.17)$$

for vilkårlig valgt innsatsfaktor a , hvor C er en konstant.

Valgkomiteen til Donald Trump er ikke helt fornøyd med valget av innsatsfaktoren a (dvs. at $a = 2$). De mener den kan forbedres innen intervallet $[1, 2]$.

Det ultimate målet er å vinne flest mulige nye stemmer $N(a)$ i løpet av de siste 30 dagene av valgkampanjen.

- c) (10%) Bestem innsatsfaktoren a^* som gir maksimalt antall $N^* = N(a^*)$ nye stemmer i løpet av de neste 30 dagene.^{5 6 7}

Bestem også tallverdien til N^* .

Avrund svaret opp til nærmeste heltall.

■

⁵Dette er en A-oppgave. Hopp gjerne over denne oppgaven og gjør den til slutt.

⁶Bruk følgende derivasjonsformler: (derivasjon av en brøk)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(x-1)^5}{x} \right) = \frac{5x(x-1)^4 - (x-1)^5}{x^2} \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(x-1)^3}{x} \right) = \frac{3x(x-1)^2 - (x-1)^3}{x^2} \quad (2.19)$$

⁷Hvis dere gjør en fornuftig transformasjon av variabler og deretter noen forenklinger, så kommer dere frem til følgende funksjon:

$$g(x) = 108x^5 + 135x^4 - 100x^3 - 150x^2 + 23 \quad (2.20)$$

Bruk at $g(x)$ har følgende 4 nullpunkter:

$$c_1 = -1, \quad c_2 = -0.59, \quad c_3 = 0.38, \quad c_4 = 0.96 \quad (2.21)$$

og at den andrederiverte N'' oppfyller:

$$N''(0) = 0, \quad N''(0.41) < 0, \quad N''(1.38) > 0, \quad N''(1.96) < 0 \quad (2.22)$$

Oppgave 4 — 20%

Påtroppende president i USA, Joe Biden, har hatt en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 2.5: Joe Biden.

Anta i løpet av de siste 30 dagene av valgkampen, er det bestemt at Biden skal tilbringe totalt 12 timer i Pennsylvania. Hensikten med disse 12 timene er å vinne nye stemmer.

I Pennsylvania er det anslått at Joe Biden har 3 mill. sikre stemmer. Valgkomiteen til Biden må avgjøre hvordan han skal benytte de 12 timene for å vinne nye stemmer. Valgkomiteen deler inn de 12 timene mellom to typer *aktiviteter*:

$$x = \text{antall timer Biden taler i Pennsylvania} \quad (\text{taletimer}) \quad (2.23)$$

$$y = \text{antall timer Biden hilser på folket i Pennsylvania} \quad (\text{hilsetimer}) \quad (2.24)$$



Figur 2.6: Vippestaten Pennsylvania.

Valgkomiteen vet at begge aktivitetene er vesentlige og at de ikke kan utelukke den ene fremfor den andre. Ved hjelp av data fra tidligere valgkampanjer har de kommet frem til følgende sammenheng:

$$N(x, y) = Bx^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}} \quad (2.25)$$

hvor $N(x, y)$ er antall nye stemmer som Biden vinner.

For hver time Biden taler, går det med totalt 4 timer siden før- og etter forberedelser må inkluderes. Tilsvarende for hver time Biden hilser på folket går det med totalt 2 timer.

Siden det allerede er bestemt at Biden ikke skal opptre mer enn 12 timer totalt i Pennsylvania, fås følgende krav som må være oppfylt:

$$4x + 2y = 12 \quad (2.26)$$

Valgkomiteen ønsker å bestemme antall taletimer x og antall hilsetimer y slik at antall nye stemmer $N(x, y)$ maksimeres under bibetingelsen i lign.(2.164).

a) (2.5%) Skriv opp Langrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(2.164).⁸

b) (12.5%) Vis, ved hjelp av Langrange-metoden, at $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(2.164) har følgende kritiske punkt, nemlig:

$$x^* = \frac{12}{5}, \quad y^* = \frac{6}{5} \quad (2.27)$$

som maksimerer antall nye stemmer.⁹

c) (2.5%) Vis at maksimalt antall nye stemmer N^* Biden kan få er gitt ved

$$N^* = N(x^*, y^*) = \frac{6\sqrt[5]{16}}{5}B \quad (2.28)$$

⁸Altså her kreves ingen regning.

⁹Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

- d) (2.5%) Anta at $B = 170\,000$. Regn ut antall nye stemmer Biden får med sin optimale strategi, dvs regn ut tallverdien til N^* . Avrund svaret opp til nærmeste heltall.

Sammenlign svaret med svaret du fikk i oppgave 3c). Hvem hadde best valgkampanje i Pennsylvania?

■