



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

2. TESTeksamen

Løsning

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 02

- (Test)eksamensdag / øvingsdag:
 - tirsdag 10. nov. og torsdag 12. nov.
 - tirsdag 17. nov. og torsdag 19. nov.
- Tid:
 - kl. 12:15 - 16:00
- Hjelpemidler:
 - KD (kalkulator)
 - Kompendium del 1, del 2 og del 3
 - Generell ordbord (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)

Oppgave 1 — 25%

- a) (2.5%) Gitt funksjonen:

$$f(x) = e^x + x^2 \quad (2.1)$$

Løs ligningen $f(2x) = 4f(x)$.

Løsning:

Setter inn:

$$f(2x) = 4f(x) \quad (2.2)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{2x} + (2x)^2 = 4(e^x + x^2) \quad (2.3)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{2x} + 4x^2 = 4e^x + 4x^2 \quad (2.4)$$

$$\Downarrow$$

$$(e^x)^2 = 4e^x \quad \bigg/ \frac{1}{e^x} \quad (2.5)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(e^x) = \ln(4) \quad \bigg/ \ln \quad (2.6)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \ln(4) \quad (2.7)$$

Om man skriver svaret på formen som i lign.(2.7) eller ¹

$$x = 2 \ln(2) \quad (2.8)$$

er det samme. Begge er rett svar.

¹Husk at: $4 = 2^2$ og at $\ln(2^2) = 2\ln(2)$.

- b) (2.5%) Forkort brøken så mye som mulig:

$$\frac{3(x+2)^2 - 6x(x+2)}{(x+2)^4} \quad (2.9)$$

Løsning:

$$\frac{3(x+2)^2 - 6x(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)(3(x+2) - 6x)}{(x+2)^4} \quad (2.10)$$

$$= \frac{3x+6-6x}{(x+2)^3} = \frac{6-3x}{(x+2)^3} = \frac{3(2-x)}{(x+2)^3} \quad (2.11)$$

- c) (5%) Løs ligningsystemet

$$x - 2y = 4 \quad (2.12)$$

$$2x - y = 2 \quad (2.13)$$

Kontroller at svaret er rett ved å sette løsningen inn i lign.(2.12) og (2.13) og sjekk at begge ligningene er oppfylte.

Løsning:

Det er flere måter å løse et lineær ligningsystem på, blant annet via “innsetningsmetoden” eller “addisjonsmetoden.” I dette tilfellet velger vi “innsetningsmetoden”.

Løser m.h.p. x alene i lign.(2.12).

$$x = 2y + 4 \quad (2.14)$$

Setter dette uttrykket for x inn i lign.(2.13):

$$2x - y = 2 \quad \text{innsatt for } x \quad (2.15)$$

$$\Downarrow$$

$$2(2y + 4) - y = 2 \quad \text{“pilmetoden”} \quad (2.16)$$

$$\Downarrow$$

$$4y + 8 - y = 2 \quad (2.17)$$

$$\Downarrow$$

$$3y = -6 \quad \bigg/ \frac{1}{3} \quad (2.18)$$

$$\Downarrow$$

$$y = -2 \quad (2.19)$$

Via lign.(2.14) finner vi da x :

$$x = 2y + 4 \quad \text{innsatt for } y = -2 \quad (2.20)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 2(-2) + 4 \quad (2.21)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \quad (2.22)$$

Løsningen til ligningsystemet er dermed: $(x, y) = (0, -2)$.

Kontroll:

Setter inn $(x, y) = (0, -2)$ i lign.(2.12):

$$x - 2y = 4 \qquad (x, y) = (0, -2) \qquad (2.23)$$

$$\Downarrow$$
$$0 - 2(-2) = 4 \qquad (2.24)$$

$$\Downarrow$$
$$4 = 4 \qquad (2.25)$$

dvs. løsningen oppfyller lign.(2.12). Tilsvarende:

Setter inn $(x, y) = (0, -2)$ i lign.(2.13):

$$2x - y = 2 \qquad (x, y) = (0, -2) \qquad (2.26)$$

$$\Downarrow$$
$$2 \cdot 0 - (-2) = 2 \qquad (2.27)$$

$$\Downarrow$$
$$2 = 2 \qquad (2.28)$$

dvs. løsningen oppfyller lign.(2.13).

- d) (5%) Andregradspolynomet $2y^2 + 2y - 12$ har nullpunktene $c_1 = -3$ og $c_2 = 2$. Dette faktum skal du ikke vise. Bare ta det for gitt.

Bruk denne informasjonen og skriv følgende uttrykk på faktorisert form:

$$(2y^2 + 2y - 12)(6 - 3y) \quad (2.29)$$

Løsning:

Fra fundamentalsetningen for algebra vet vi at vi kan faktorisere et polynom dersom vi vet nullpunktene $c_1 = -3$ og $c_2 = 2$.

Dermed:

$$\underbrace{(2y^2 + 2y - 12)}_{=2(x-c_1)(x-c_2)}(6 - 3y) = 2(y - c_1)(y - c_2)3(2 - y) \quad (2.30)$$

$$= 2(y - (-3))(y - 2)3(2 - y) \quad (2.31)$$

$$= 6(y + 3)(y - 2)(2 - y) \quad / \quad (2 - y) = -(y - 2)$$

$$= -6(y + 3)(y - 2)^2 \quad (2.32)$$

- e) (10%) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: ²

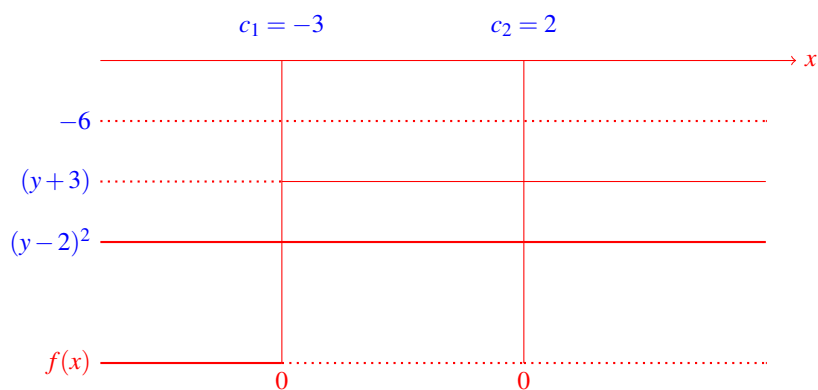
$$f(x) = (2y^2 + 2y - 12)(6 - 3y) > 0 \quad (2.33)$$

Løsning:

Fra oppgave d) fant vi faktoriseringen:

$$f(y) = -6(y + 3)(y - 2)^2 \quad (2.34)$$

Med nullpunktene $c_1 = -3$ og $c_2 = 2$ og setter vi opp fortegnsskjemaet:



Figur 2.1: Fortegnsskjema.

Løsningsmengden når $f(x) > 0$:

$$\mathcal{L} = \langle \leftarrow, -3 \rangle \quad (2.35)$$

■

²Bruk løsningen fra oppgave d)

Oppgave 2 — 25%

a) (5%) Gitt funksjonen

$$f(x) = \ln(7x^2) \quad (2.36)$$

i) Finn den deriverte $\frac{df(x)}{dx}$ ved å bruke kjerneregelen.ii) Finn den deriverte $\frac{df(x)}{dx}$ ved å bruke regneregler for ln-funksjoner.Løsning:i) Kjerneregelen, hvor $g(u) = \ln(u)$ og $u(x) = 7x^2$:

$$f'(x) = g'(u)u' \quad (2.37)$$

$$= (\ln u)'(7x^2)' = \frac{1}{u} \cdot 7 \cdot 2x = \frac{1}{7x^2} 14x = \frac{2}{x} \quad (2.38)$$

ii) Logaritmeregler:

$$f(x) = \ln(7x^2) \quad (2.39)$$

$$= \ln(7) + \ln(x^2) = \ln(7) + 2\ln(x) \quad (2.40)$$

Deriverer:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (\ln(7) + 2\ln(x)) = \frac{2}{x} \quad (2.41)$$

siden $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

b) (5%) Løs ligningen

$$3 \cdot 10^{2+x} = 75 \quad (2.42)$$

Skriv svaret på eksakt form.

Løsning:

Løser:

$$3 \cdot 10^{2+x} = 75 \quad / \frac{1}{3} \quad (2.43)$$

$$\Updownarrow \quad 10^{2+x} = 25 \quad \log \quad (2.44)$$

$$\Updownarrow \quad \log(10^{2+x}) = \log(25) \quad (2.45)$$

$$\Updownarrow \quad 2+x = \log(25) \quad / -2 \quad (2.46)$$

$$\Updownarrow \quad x = \log(25) - 2 \quad (2.47)$$

Om man skriver svaret på formen som i lign.(2.47) eller ³

$$x = 2\log(5) - 2 = 2(\log(5) - 1) \quad (2.48)$$

er det samme. Begge er rett svar.

³Husk at: $25 = 5^2$ og at $\log(5^2) = 2\log(5)$.

- c) (5%) Anta at vi setter inn kapitalen K_0 i banken år 0. Renten er r .
Anta videre at kapitalen K_i ved år nr. i , rente inkludert, følger mønsteret

$$K_1 = K_0(1 + r) \quad \text{startledd} \quad (2.49)$$

$$K_{i+1} = K_i(1 + r) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.50)$$

i) Hva slags type følge utgjør lign.(2.49) og (2.50)?

ii) Finn et uttrykk for det i 'te leddet K_i .

iii) Finn et uttrykk for summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n K_i \quad (2.51)$$

Løsning:

i) Siden

$$\frac{K_{i+1}}{K_i} = 1 + r \quad (2.52)$$

er en konstant så er dette en geometrisk rekke.

ii) For en geometrisk følge gjelder: (se kompendiet)

$$K_i = K_1 k^{i-1} \quad (2.53)$$

Med $K_1 = K_0(1 + r)$ og $k = 1 + r$:

$$K_i = K_0(1 + r)(1 + r)^{i-1} = K_0(1 + r)^i \quad (2.54)$$

iii) Summen av en geometrisk rekke: (se kompendiet)

$$S_n = K_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (2.55)$$

Med $K_1 = K_0(1+r)$ og $k = 1+r$:

$$S_n = K_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = K_0(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{1+r - 1} \quad (2.56)$$

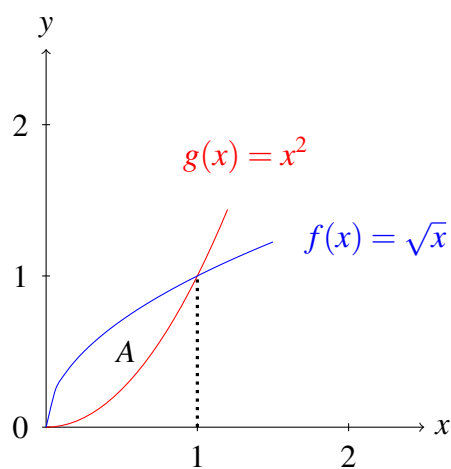
$$= K_0(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (2.57)$$

- d) (5%) Finn, ved hjelp av integrasjon, arealet A av området avgrenset av funksjonene

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (2.58)$$

$$g(x) = x^2 \quad (2.59)$$

som vist i figur 2.2.



Figur 2.2: Arealet A .

Løsning:

Anti-derivate: (Husk at: $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$)

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + c \quad (2.60)$$

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + \tilde{c} \quad (2.61)$$

Dermed: (integralsetningens fundamentalsats)

$$A = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \quad (2.62)$$

$$= \int_0^1 (f(x) - g(x))dx \quad (2.63)$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx \quad (2.64)$$

$$= F(1) - F(0) - (G(1) - G(0)) \quad (2.65)$$

$$= \left(\frac{2}{3}1^{3/2} + \textcolor{red}{c}\right) - \left(\frac{2}{3}0^{3/2} + \textcolor{red}{c}\right) - \left(\left(\frac{1}{3}1^3 + \textcolor{red}{c}\right) - \left(\frac{1}{3}0^2 + \textcolor{red}{c}\right) \right) \quad (2.66)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \quad (2.67)$$

$$= \frac{1}{3} \quad (2.68)$$

- e) (5%) Gitt funksjonen

$$f(x, y) = e^x \ln(y) \quad (2.69)$$

Finn de partiell deriverte til denne funksjonen.

Løsning:

Siden $\partial e^x / \partial x = e^x$ så er:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \ln(y)) = e^x \ln(y) \quad (2.70)$$

hvor vi har brukt at $(e^x)' = e^x$.

Siden $\partial \ln(y) / \partial y = 1/y$ så er:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \ln(y)) = \frac{e^x}{y} \quad (2.71)$$

hvor vi har brukt at $(\ln y)' = \frac{1}{y}$.

■

Oppgave 3 — 30%

Nåværende president i USA, Donald Trump, har i 2020 hatt en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 2.3: Donald Trump.

Anta det er 30 dager igjen til valgdagen.

Valgledelsen vet at en av de viktigste vippestatene er Pennsylvania. De ønsker derfor å analysere hvor mye penger de skal investere i Pennsylvania den neste 30 dagene frem til valgdagen.

I Pennsylvania er det anslått at Donald Trump har 3 mill. sikre stemmer. Målet med investeringene er dermed å mobilisere flere stemmer utover de 3 mill. sikre stemmene.

For hver dag i de neste 30 dagene bestemmer et visst antall nye personer seg for å stemme på Donald Trump.



Figur 2.4: Vippestaten Pennsylvania.

Anta antall nye stemmer Donald får ved tiden t er estimert av valganalytikerne ved funksjonen:

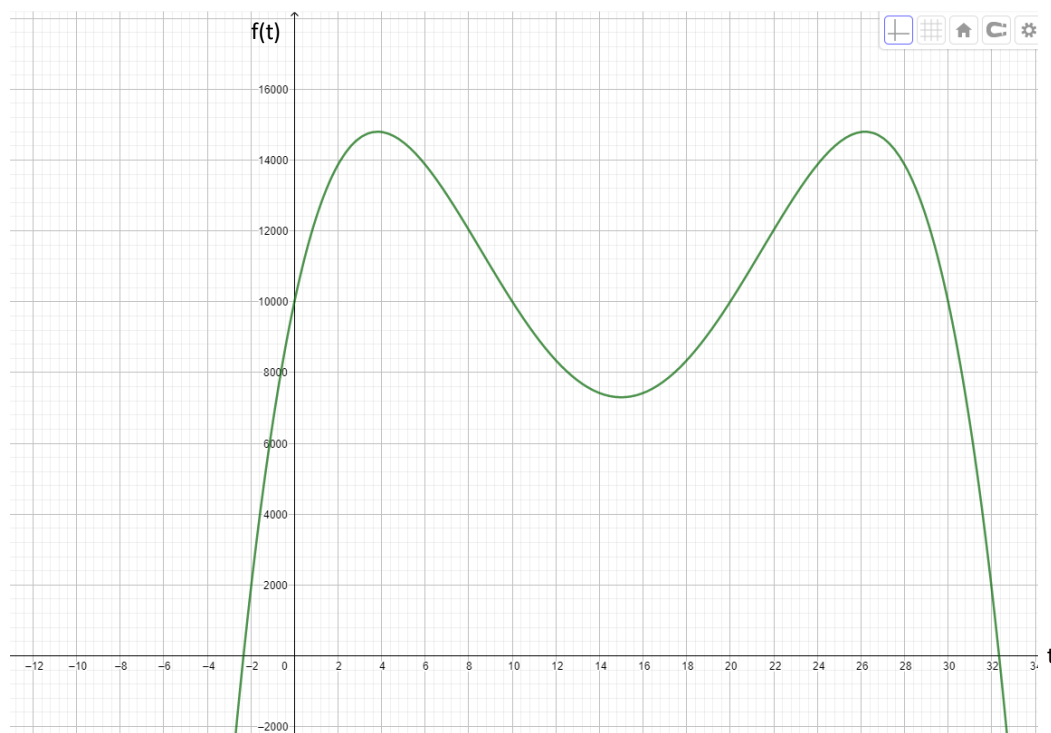
$$f(t) = 7300 - \frac{3}{100}(at - 30)^4 + 30(at - 30)^2 \quad t \in [0, 30] \quad (2.72)$$

hvor

$$a = \text{innsatsfaktoren til valgledelsen} \quad (2.73)$$

Innsatsfaktoren $a \in [1, 2]$ reflekterer f.eks. hvor mange ganger og når Donald Trump kommer på besøk og taler i Pennsylvania. I forkant av et annonsert møte begynner antall nye stemmer å øke, inntil det når en topp akkurat ved talen. Etter talen vil tallet synke til mer normale tilstander igjen - se figur 2.5.

Legg merke til at valgledelsen har restriktert innsatsfaktoren a til å ligge mellom 1 og 2, som reflekterer f.eks. at Donald enten kommer 1 gang eller 2 ganger og holder tale.



Figur 2.5: $f(t)$ med innsatsfaktor $a = 2$.

- a) (15%) Anta innsatsfaktoren er satt til $a = 2$.

Bestem når Donald Trump holder taler og bestem når antall nye stemmer er på sitt laveste.⁴

Bruk 1.derivasjonstesten for å finne de mulige kandidatene og bruk 2.derivasjonstesten til å avgjøre om kandidatene er topp- eller bunnpunkt hhv.

Etter at du har funnet svarene, trekk en *kort* konklusjon når Trump holder taler og når antall nye stemmer er på sitt laveste.

Løsning:

Mulige kandidater ved å derivere f og sette denne lik null:⁵

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \quad (2.74)$$

Kjerneregelen: (skriver f på kjerneform)

$$f(t) = 7300 - \frac{3}{100}(2t - 30)^4 + 30(2t - 30)^2 \quad (2.75)$$

$$= 7300 - \frac{3}{100}u^4 + 30u^2 \quad (2.76)$$

Definerer:

$$u(t) = 2t - 30 \quad \text{indre funksjon} \quad (2.77)$$

$$g(u) = 7300 - \frac{3}{100}u^4 + 30u^2 \quad \text{ytre funksjon} \quad (2.78)$$

⁴Dvs. finn topp- og bunnpunkter på grafen til f .

⁵Dvs. hvor stigningstallet til tangenten er flat.

Kjerneregelen for derivasjon:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{dg(u)}{du} \frac{du(t)}{dt} \quad (2.79)$$

$$= \frac{d}{du} \left(7300 - \frac{3}{100}u^4 + 30u^2 \right) \frac{d}{dt} (2t - 30) \quad (2.80)$$

$$= \left(0 - \frac{3}{100}4u^3 + 30 \cdot 2u \right) (2 - 0) \quad (2.81)$$

$$= -\frac{24}{100}(2t - 30)^3 + 120(2t - 30) \quad (2.82)$$

Deriverte like null:

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \quad (2.83)$$

$\Downarrow$

$$-\frac{24}{100}(2t - 30)^3 + 120(2t - 30) = 0 \quad \text{faktoriserer} \quad (2.84)$$

$\Downarrow$

$$\left(-\frac{24}{100}(2t - 30)^2 + 120 \right) (2t - 30) = 0 \quad (2.85)$$

Fra faktoriseringen ser vi at vi har en løsning ved

$$2t - 30 = 0 \quad (2.86)$$

$\Downarrow$

$$t = \frac{30}{2} = 15 \quad (2.87)$$

De andre løsningene finnes via ABC-formelen:

$$-\frac{24}{100}(2t - 30)^2 + 120 = 0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{100}{24} \quad (2.88)$$

$\Downarrow$

$$-(2t - 30)^2 + 500 = 0 \quad \Bigg/ \text{2.kvadratsetning} \quad (2.89)$$

$\Downarrow$

$$-4t^2 + 120t - 400 = 0 \quad (2.90)$$

ABC-formelen med $a = -4$, $b = 120$, $c = -400$:

$$t = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-400)}}{-4 \cdot 2} \quad (2.91)$$

$$= \frac{-120 \pm \sqrt{14400 - 6400}}{-8} \quad (2.92)$$

$$= \frac{-120 \pm 40\sqrt{5}}{-8} \quad \bigg/ \sqrt{8000} = 40\sqrt{5} \quad (2.93)$$

$$= 15 \pm 5\sqrt{5} \quad (2.94)$$

Tre kandidater:

$$t_1 = 15 - 5\sqrt{5}, \quad t_2 = 15, \quad t_3 = 15 + 5\sqrt{5} \quad (2.95)$$

For å bestemme om vi har topp- eller bunnpunkt, kan vi bruke 2.derivasjonstesten. Vi finner først 2. derivert av $f(t)$.

1. deriverte: (fant tidligere, se lign.(2.82)

$$\frac{df}{dt} = -\frac{24}{100}(2t - 30)^3 + 120(2t - 30) \quad (2.96)$$

$$= -\frac{24}{100}u^3 + 120u \quad (2.97)$$

2. deriverte: (kjerneregelen)

$$u(t) = 2t - 30 \quad \text{indre funksjon} \quad (2.98)$$

$$g(u) = -\frac{24}{100}u^3 + 120u \quad \text{ytre funksjon} \quad (2.99)$$

2. deriverte: (kjerneregelen for derivasjon)

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{df}{dt} \quad (2.100)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(-\frac{24}{100} u^3 + 120u \right) \quad (2.101)$$

$$= \frac{dg}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d}{du} \left(-\frac{24}{100} u^3 + 120u \right) \frac{d}{dt} (2t - 30) \quad (2.102)$$

$$= \left(-\frac{24}{100} 3u^2 + 120 \right) (2 - 0) \quad (2.103)$$

$$= -\frac{36}{25} (2t - 30)^2 + 240 \quad (2.104)$$

Vi må nå sjekke fortegnet til f'' evaluert for de tre kandidatene i lign(2.95).

Kandidat: $t_1 = 15 - 5\sqrt{5}$ (bruker lign.(2.104))

$$f''(15 - 5\sqrt{5}) = -\frac{36}{25} \left(2(15 - 5\sqrt{5}) - 30 \right)^2 + 240 \quad (2.105)$$

$$= -\frac{36}{25} \left(30 - 10\sqrt{5} - 30 \right)^2 + 240 \quad (2.106)$$

$$= -\frac{36}{25} (-10\sqrt{5})^2 + 240 \quad (2.107)$$

$$= -\frac{36}{5^2} 100 \cdot 5 + 240 \quad (2.108)$$

$$= -480 \quad (2.109)$$

Siden $f''(15 - 5\sqrt{5}) < 0$ kan vi fra 2.derivasjonstesten konkludere at t_1 er et *toppunkt*.

Kandidat: $t_2 = 15$ (bruker lign.(2.104))

$$f''(15) = -\frac{36}{25} (2 \cdot 15 - 30)^2 + 240 \quad (2.110)$$

$$= -\frac{36}{25} (30 - 30)^2 + 240 \quad (2.111)$$

$$= 240 \quad (2.112)$$

Siden $f''(15) > 0$ kan vi fra 2.derivasjonstesten konkludere at t_2 er et *bunnpunkt*.

Kandidat: $t_3 = 15 + 5\sqrt{5}$ (bruker lign.(2.104))

$$f''(15 + 5\sqrt{5}) = -\frac{36}{25} \left(2(15 + 5\sqrt{5}) - 30 \right)^2 + 240 \quad (2.113)$$

$$= -\frac{36}{25} \left(30 + 10\sqrt{5} - 30 \right)^2 + 240 \quad (2.114)$$

$$= -\frac{36}{25} (10\sqrt{5})^2 + 240 \quad (2.115)$$

$$= -\frac{36}{5^2} 100 \cdot 5 + 240 \quad (2.116)$$

$$= -480 \quad (2.117)$$

Siden $f''(15 + 5\sqrt{5}) < 0$ kan vi fra 2.derivasjonstesten konkludere at t_3 er et toppunkt.

Konklusjon:

Donald Trump planlegger å holde tale to ganger ved tidspunktene:

$$t_1 = 15 - 5\sqrt{5} = 3.82 \text{ dager} \quad (2.118)$$

$$t_3 = 15 + 5\sqrt{5} = 26.18 \text{ dager} \quad (2.119)$$

Imellom talene vil Trump oppleve lavest antall nye stemmer ved

$$t_2 = 15 \text{ dager} \quad (2.120)$$

- b) (5%) Med $a = 2$, hvor mange nye stemmer N har Donald Trump fått i Pennsylvania totalt ila. de siste 30 dagene? ^{6 7}

Løsning:

Totalt antall nye stemmer N til Donald Trump i Pennsylvania ila. de siste 30 dagene er gitt ved integralet:

$$N = \int_0^{30} f(t) dt \quad (2.122)$$

For å beregne dette integralet må vi finne *anti-derivert* F til f :
(se fotnoten og bruker $a = 2$)

$$F(t) = 7300t - \frac{3}{500 \cdot 2} (2t - 30)^5 + \frac{10}{2} (2t - 30)^3 + C \quad (2.123)$$

$$= 7300t - \frac{3}{1000} (2t - 30)^5 + 5(2t - 30)^3 + C \quad (2.124)$$

Fundamentalsetningen for kalkulus:

$$N = \int_0^{30} f(t) dt \quad (2.125)$$

$$= F(30) - F(0) \quad (2.126)$$

$$= \left[7300 \cdot 30 - \frac{3}{1000} (2 \cdot 30 - 30)^5 + 5(2 \cdot 30 - 30)^3 + \emptyset \right] - \quad (2.127)$$

$$- \left[7300 \cdot 0 - \frac{3}{1000} (2 \cdot 0 - 30)^5 + 5(2 \cdot 0 - 30)^3 + \emptyset \right] \quad (2.128)$$

⁶Dere må finne arealet under grafen til f mellom 0 og 30.

⁷Bruk at antiderivert F til f er gitt ved

$$F(t) = 7300t - \frac{3}{500a} (at - 30)^5 + \frac{10}{a} (at - 30)^3 + C \quad (2.121)$$

for vilkårlig valgt innsatsfaktor a , hvor C er en konstant.

$$= \left[219\,000 - \frac{3}{1000}30^5 + 5 \cdot 30^3 \right] - \left[-\frac{3}{1000}(-30)^5 + 5 \cdot (-30)^3 \right] \quad (2.129)$$

$$= \left[219\,000 - \frac{3}{1000}30^5 + 5 \cdot 30^3 \right] - \left[\frac{3}{1000}30^5 - 5 \cdot 30^3 \right] \quad (2.130)$$

$$= 219\,000 - \frac{3}{1000}30^5 + 5 \cdot 30^3 - \frac{3}{1000}(30)^5 + 5 \cdot 30^3 \quad (2.131)$$

$$= 219\,000 - 2\frac{3}{1000}30^5 + 2 \cdot 5 \cdot 30^3 \quad (2.132)$$

$$= 219\,000 - \frac{3}{500}30^5 + 10 \cdot 30^3 \quad (2.133)$$

$$= 343\,200 \quad (2.134)$$

Konklusjon

Med den valgte innsatsfaktoren $a = 2$ vinner Donald Trump totalt $N = 343\,200$ nye stemmer de siste 30 dagene.

Valgkomiteen til Donald Trump er ikke helt fornøyd med valget av innsatsfaktoren a (dvs. at $a = 2$). De mener den kan forbedres innen intervallet $[1, 2]$.

Det ultimate målet er å vinne flest mulige nye stemmer $N(a)$ i løpet av de siste 30 dagene av valgkampanjen.

- c) (10%) Bestem innsatsfaktoren a^* som gir maksimalt antall $N^* = N(a^*)$ nye stemmer i løpet av de neste 30 dagene.^{8 9 10}

Bestem også tallverdien til N^* .

Avrund svaret opp til nærmeste heltall.

⁸Dette er en A-oppgave. Hopp gjerne over denne oppgaven og gjør den til slutt.

⁹Bruk følgende derivasjonsformler: (derivasjon av en brøk)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(x-1)^5}{x} \right) = \frac{5x(x-1)^4 - (x-1)^5}{x^2} \quad (2.135)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(x-1)^3}{x} \right) = \frac{3x(x-1)^2 - (x-1)^3}{x^2} \quad (2.136)$$

¹⁰Hvis dere gjør en fornuftig transformasjon av variabler og deretter noen forenklinger, så kommer dere frem til følgende funksjon:

$$g(x) = 108x^5 + 135x^4 - 100x^3 - 150x^2 + 23 \quad (2.137)$$

Bruk at $g(x)$ har følgende 4 nullpunkter:

$$c_1 = -1, \quad c_2 = -0.59, \quad c_3 = 0.38, \quad c_4 = 0.96 \quad (2.138)$$

og at den 2.deriverte N'' oppfyller:

$$N''(0) = 0, \quad N''(0.41) < 0, \quad N''(1.38) > 0, \quad N''(1.96) < 0 \quad (2.139)$$

Løsning:

For en vilkårlig innsatsfaktor a har vi at totalt antall nye stemmer $N(a)$ i løpet av de siste 30 dagene av valgkampanjen er gitt ved arealet under grafen til f , dvs. et integral.

Integral:

$$N(a) = \int_0^{30} f(t) dt \quad (2.140)$$

$$= \int_0^{30} \left(7300 - \frac{3}{100} (at - 30)^4 + 30(at - 30)^2 \right) dt \quad (2.141)$$

$$= F(30) - F(0) \quad (2.142)$$

Anti-derivert: ¹¹

$$F(30) = 7300 \cdot 30 - \frac{3}{500a} (a30 - 30)^5 + \frac{10}{a} (a30 - 30)^3 + C \quad (2.143)$$

$$= 219\,000 - \frac{3}{500a} 30^5 (a - 1)^5 + \frac{10}{a} 30^3 (a - 1)^3 \quad (2.144)$$

$$= 219\,000 - 145\,800 \frac{(a - 1)^5}{a} + 270\,000 \frac{(a - 1)^3}{a} \quad (2.145)$$

$$F(0) = 7300 \cdot 0 - \frac{3}{500a} (a \cdot 0 - 30)^5 + \frac{10}{a} (a \cdot 0 - 30)^3 + C \quad (2.146)$$

$$= -\frac{3}{500a} (-30)^5 + \frac{10}{a} (-30)^3 \quad (2.147)$$

$$= \frac{145\,800}{a} - \frac{270\,000}{a} \quad (2.148)$$

$$= -\frac{124\,200}{a} \quad (2.149)$$

¹¹Vi bruker formelen oppgitt i fotnoten for oppgave 3b) med en generell a .

Dermed:

$$N(a) = F(30) - F(0) \quad (2.150)$$

$$\begin{aligned} &= \left[219\,000 - 145\,800 \frac{(a-1)^5}{a} + 270\,000 \frac{(a-1)^3}{a} \right] - \left[-\frac{124\,200}{a} \right] \\ &= 219\,000 - 145\,800 \frac{(a-1)^5}{a} + 270\,000 \frac{(a-1)^3}{a} + \frac{124\,200}{a} \quad (2.151) \end{aligned}$$

For å finne mulige kandidater for a deriverer vi N og setter lik null:

$$\frac{dN}{da} = 0 \quad (2.152)$$

hvor

$$\begin{aligned} \frac{dN}{da} &= \frac{d}{da} \left(219\,000 - 145\,800 \frac{(a-1)^5}{a} + 270\,000 \frac{(a-1)^3}{a} + \frac{124\,200}{a} \right) \\ &= -145\,800 \frac{d}{da} \left(\frac{(a-1)^5}{a} \right) + 270\,000 \frac{d}{da} \left(\frac{(a-1)^3}{a} \right) - \frac{124\,200}{a^2} \end{aligned}$$

Fra fotnoten i oppgaven:

$$\frac{d}{da} \left(\frac{(a-1)^5}{a} \right) = \frac{5a(a-1)^4 - (a-1)^5}{a^2} \quad (2.153)$$

$$\frac{d}{da} \left(\frac{(a-1)^3}{a} \right) = \frac{3a(a-1)^2 - (a-1)^3}{a^2} \quad (2.154)$$

Dermed:

$$\frac{dN}{da} = -145\,800 \frac{3a(a-1)^4 - (a-1)^5}{a^2} + 270\,000 \frac{3a(a-1)^2 - (a-1)^3}{a^2} - \frac{124\,200}{a^2}$$

Setter derivert lik null:

$$0 = \frac{dN}{da}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = -145\,800 \frac{5a(a-1)^4 - (a-1)^5}{a^2} + 270\,000 \frac{3a(a-1)^2 - (a-1)^3}{a^2} - \frac{124\,200}{a^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = -1458 \left(5a(a-1)^4 - (a-1)^5 \right) + 2700 \left(3a(a-1)^2 - (a-1)^3 \right) - 1242$$

Ny variabel $x = a - 1$: (og dermed $a = x + 1$)

Innsatt:

$$-1458 \left(5(x+1)x^4 - x^5 \right) + 2700 \left(3(x+1)x^2 - x^3 \right) - 1242 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-1458(5x^5 + 5x^4 - x^5) + 2700(3x^3 + 3x^2 - x^3) - 1242 = 0 \quad (2.155)$$

$$\Updownarrow$$

$$-1458(4x^5 + 5x^4) + 2700(2x^3 + 3x^2) - 1242 = 0 \quad / : -54$$

$$\Updownarrow$$

$$27(4x^5 + 5x^4) - 50(2x^3 + 3x^2) + 23 = 0 \quad (2.156)$$

$$\Updownarrow$$

$$108x^5 + 135x^4 - 100x^3 - 150x^2 + 23 = 0 \quad (2.157)$$

Vi gjenkjenner lign.(2.157) som funksjonen $g(x)$ oppgitt i fotnoten i oppgaven. Vi har dermed fra fotnoten følgende løsninger av ligningen:

$$c_1 = -1, \quad c_2 = -0.59, \quad c_3 = 0.38, \quad c_4 = 0.96 \quad (2.158)$$

Siden $x = a - 1$ som betyr at $a = x + 1$, så får vi følgende kandidater for optimal innsatsfaktor a :

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0.41, \quad a_3 = 1.38, \quad a_4 = 1.96 \quad (2.159)$$

Siden $a \in [1, 2]$, innser vi at de aktuelle løsningene er $a_3 = c_3 + 1$ og $a_4 = c_4 + 1$. Siden fra fotnoten $N''(c_3 + 1) = N''(1.38) > 0$ og $N''(c_4 + 1) = N''(1.96) < 0$, kan vi konkludere fra 2.derivasjonstesten at a_3 gir et minimum, mens a_4 gir et maksimum. Vi velger dermed $x^* = a_4 = 1.96$.

Innsatt i lign.(2.151):

$$\begin{aligned}
 N^* &= N(a^*) \\
 &= N(1.96) \\
 &= 219\,000 - 145\,800 \frac{(1.96 - 1)^5}{1.96} + 270\,000 \frac{(1.96 - 1)^3}{1.96} + \frac{124\,200}{1.96} \\
 &= 219\,000 - 145\,800 \frac{0.96^5}{1.96} + 270\,000 \frac{0.96^3}{1.96} + \frac{124\,200}{1.96} \\
 &\approx 343\,593 \qquad (2.160)
 \end{aligned}$$

Med innsatsfaktor $a^* = 1.96$ vil estimert antall nye stemmer ila. de 30 siste dagene bli $N^* = 343\,593$ (som er *litt* flere stemmer enn med innsatsfaktor $a = 2$).

■

Oppgave 4 — 20%

Påtroppende president i USA, Joe Biden, har hatt en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 2.6: Joe Biden.

Anta i løpet av de siste 30 dagene av valgkampen, er det bestemt at Biden skal tilbringe totalt 12 timer i Pennsylvania. Hensikten med disse 12 timene er å vinne nye stemmer.

I Pennsylvania er det anslått at Joe Biden har 3 mill. sikre stemmer. Valgkomiteen til Biden må avgjøre hvordan han skal benytte de 12 timene for å vinne nye stemmer. Valgkomiteen deler inn de 12 timene mellom to typer *aktiviteter*:

$$x = \text{antall timer Biden taler i Pennsylvania} \quad (\text{taletimer}) \quad (2.161)$$

$$y = \text{antall timer Biden hilser på folket i Pennsylvania} \quad (\text{hilsetimer}) \quad (2.162)$$



Figur 2.7: Vippestaten Pennsylvania.

Valgkomiteen vet at begge aktivitetene er vesentlige og at de ikke kan utelukke den ene fremfor den andre. Ved hjelp av data fra tidligere valgkampanjer har de kommet frem til følgende sammenheng:

$$N(x, y) = Bx^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}} \quad (2.163)$$

hvor $N(x, y)$ er antall *nye* stemmer som Biden vinner.

For hver time Biden taler, går det med totalt 4 timer siden før- og etter forberedelser må inkluderes. Tilsvarende for hver time Biden hilser på folket går det med totalt 2 timer.

Siden det allerede er bestemt at Biden ikke skal opptre mer enn 12 timer totalt i Pennsylvania, fås følgende krav som må være oppfylt:

$$4x + 2y = 12 \quad (2.164)$$

Valgkomiteen ønsker å bestemme antall taletimer x og antall hilsetimer y slik at antall nye stemmer $N(x, y)$ maksimeres under bibetingelsen i lign.(2.164).

- a) (2.5%) Skriv opp Lagrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(2.164).¹²

Løsning:

Lagrangefunksjonen:

$$L(x, y, \lambda) = N(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (2.165)$$

hvor $g(x, y) = 0$ er bibetingelsen, som i vårt tilfelle er

$$g(x, y) = 4x + 2y - 12 \quad (2.166)$$

¹²Altså her kreves ingen regning.

Dette gir:

$$L(x, y, \lambda) = N(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (2.167)$$

$$= Bx^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}} - \lambda (4x + 2y - 12) \quad (2.168)$$

- b) (12.5%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(2.164) har følgende kritiske punkt, nemlig:

$$x^* = \frac{12}{5} \quad , \quad y^* = \frac{6}{5} \quad (2.169)$$

som maksimerer antall nye stemmer.¹³

Løsning:

De kritiske punktene for $f(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = 0$ oppfyller ligningssystemet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.170)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2.171)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (2.172)$$

hvor

$$\lambda = \text{Lagrange-multiplikatoren} \quad (2.173)$$

¹³Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

Partiellderiverte:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Bx^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}} - \lambda(4x + 2y - 12) \right) \quad (2.174)$$

$$= B\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}y^{\frac{1}{5}} - 4\lambda \quad (2.175)$$

$$= \frac{4B}{5}x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} - 4\lambda \quad (2.176)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(Bx^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}} - \lambda(4x + 2y - 12) \right) \quad (2.177)$$

$$= Bx^{\frac{4}{5}}\frac{1}{5}y^{\frac{1}{5}-1} - 2\lambda \quad (2.178)$$

$$= \frac{B}{5}x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{5}} - 2\lambda \quad (2.179)$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ med hensyn på λ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.180)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{4B}{5}x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} - 4\lambda = 0 \quad (2.181)$$

$$\Downarrow$$

$$4\lambda = \frac{4B}{5}x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} \quad (2.182)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{B}{5}x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} \quad (2.183)$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ med hensyn på λ :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2.184)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{B}{5}x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{5}} - 2\lambda = 0 \quad (2.185)$$

$$\Downarrow$$

$$2\lambda = \frac{B}{5}x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{5}} \quad (2.186)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{B}{5 \cdot 2}x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{5}} \quad (2.187)$$

Eliminerer λ :

$$\lambda = \lambda \quad (2.188)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{B}{5}x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} = \frac{B}{5 \cdot 2}x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{5}} \quad (2.189)$$

$$\Downarrow$$

$$x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{5}} \quad \Big/ \cdot x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}} \quad (2.190)$$

$$\Downarrow$$

$$y^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}x^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} \quad (2.191)$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{1}{2}x \quad (2.192)$$

Innsatt i bibetingelsen: (setter inn at $y = \frac{1}{2}x$)

$$4x + 2y = 12 \quad (2.193)$$

$$\Downarrow$$

$$4x + 2 \cdot \frac{1}{2}x = 12 \quad (2.194)$$

$$\Downarrow$$

$$5x = 12 \quad (2.195)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{12}{5} \quad (2.196)$$

Siden $y = \frac{1}{2}x$ så er:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{6}{5} \quad (2.197)$$

For å maksimere antall nye stemmer $N(x, y)$ så må Biden bruke $x^* = \frac{12}{5}$ taletimer og $y^* = \frac{6}{5}$ hilsetimer, som skulle vises.

- c) (2.5%) Vis at maksimalt antall nye stemmer N^* Biden kan få er gitt ved

$$N^* = N(x^*, y^*) = \frac{6\sqrt[5]{16}}{5}B \quad (2.198)$$

Løsning:

Vi setter inn $x^* = \frac{12}{5}$ og $y^* = \frac{6}{5}$ inn i N :

$$N(x^*, y^*) = N\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right) = B\left(\frac{12}{5}\right)^{\frac{4}{5}}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = B2^{\frac{4}{5}}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{4}{5}}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{5}} \quad (2.199)$$

$$= B2^{\frac{4}{5}}\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} = B2^{\frac{4}{5}}\left(\frac{6}{5}\right)^1 = \frac{6\sqrt[5]{2^4}}{5}B = \frac{6\sqrt[5]{16}}{5}B \quad (2.200)$$

som skulle vises.

- d) (2.5%) Anta at $B = 170\,000$. Regn ut antall nye stemmer Biden får med sin optimale strategi, dvs regn ut tallverdien til N^* . Avrund svaret opp til nærmeste heltall.

Sammenlign svaret med svaret du fikk i oppgave 3c). Hvem hadde best valgkampanje i Pennsylvania?

Løsning:

Vi setter inn $B = 170\,000$ inn i lign.(2.198):

$$N(x^*, y^*) = \frac{6\sqrt[5]{16}}{5}B = \frac{6\sqrt[5]{16}}{5}170\,000 \approx 355\,185 \quad (2.201)$$

Biden har dermed den beste strategien i Pennsylvania siden hans strategi vil gi 3 355 185 stemmer mens Trumps strategi kun gir 3 343 593 stemmer.

■