



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høgskole i logistikk

8. Funksjoner av flere variabler

Øving 5: Løsning

“MAT100 Matematikk”, 2020

versjon 01

- Utlevering:
 - Mandag 26. okt. kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - senest kl. 12:00 mandag 23. nov.
 - dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- FORarbeid:
 - Se videoene for uke 10
 - Les kompendiet.
 - Les gjennom øvingoppgave 5
- ETTERarbeid:
 - Gå gjennom løsning 5 som legges ut fredag 13. nov. kl. 12:00.

Problem 8.1 — Partiellderivert

Finn de partiell deriverte til funksjonen $f(x, y)$.

Regn deretter ut stigningstallet til grafen i punktet $(1, 1)$ for x - og y -retningen.

Oppgi de numeriske svarene eksakt, ikke desimaltall.

a) $f(x, y) = x^2 y^5$

Løsning:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y^5) = 2x^{2-1} y^5 = 2xy^5 \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y^5) = x^2 5y^{5-1} = 5x^2 y^4 \quad (8.2)$$

og stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x - og y -retningen hhv.:

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = 2 \cdot 1 \cdot 1^5 = 2 \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 5 \cdot 1^2 \cdot 1^4 = 5 \quad (8.4)$$

b) $f(x, y) = \sqrt{x+y}$

Løsning:

Partiell deriverte: ¹

¹Her må vi egentlig bruke kjerneregelen siden det ikke er en "ren" x inne i kvadratrotten. Men den

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x+y} = \frac{\partial}{\partial x} (x+y)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x+y)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} (x+y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x+y} = \frac{\partial}{\partial y} (x+y)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x+y)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} (x+y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

og stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x - og y -retningen hhv.:

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (8.6)$$

c) $f(x, y) = y \ln(xy)$

Løsning:

Kjerne: $u = yx$. Kjernerregelen:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y \ln(xy)) = y \frac{\partial}{\partial u} (\ln u) \frac{\partial}{\partial x} (yx) = y \frac{1}{u} y = \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x}$$

Derivasjon av et produkt og kjernerregelen:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y \ln(xy)) \quad (\text{derivasjon av et produkt})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (y) \ln(xy) + y \frac{\partial}{\partial y} (\ln(xy)) \quad (8.7)$$

$$= 1 \cdot \ln(xy) + y \frac{\partial}{\partial u} (\ln u) \frac{\partial}{\partial y} (yx) \quad (8.8)$$

$$= \ln(xy) + y \frac{1}{u} x \quad (8.9)$$

$$= \ln(xy) + \frac{yx}{xy} \quad (8.10)$$

$$= \underline{\underline{\ln(xy) + 1}} \quad (8.11)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x - og y -retningen hhv.:

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \frac{1}{1} = \underline{1} \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \ln(1 \cdot 1) + 1 = 0 + 1 = \underline{1} \quad (8.13)$$

d) $f(x, y) = \frac{2x+3y-1}{x^2+y^2}$

Løsning:

Derivasjonsregelen for en brøk med: $u = 2x + 3y - 1$ og $v = x^2 + y^2$:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x+3y-1}{x^2+y^2} \right) \quad (8.14)$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (8.15)$$

$$= \frac{2(x^2+y^2) - (2x+3y-1)2x}{(x^2+y^2)^2} \quad (8.16)$$

$$= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2 - 6xy + 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad (8.17)$$

$$= \frac{-2x^2 + 2y^2 - 6xy + 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x+3y-1}{x^2+y^2} \right) \quad (8.19)$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (8.20)$$

$$= \frac{3(x^2+y^2) - (2x+3y-1)2y}{(x^2+y^2)^2} \quad (8.21)$$

$$= \frac{3x^2 + 3y^2 - 4xy - 6y^2 + 2y}{(x^2+y^2)^2} \quad (8.22)$$

$$= \frac{3x^2 - 3y^2 - 4xy + 2y}{(x^2+y^2)^2} \quad (8.23)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x - og y -retningen hhv.:

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \frac{-2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{(1^2 + 1^2)^2} = \frac{\cancel{2} + \cancel{2} - 6 + 2}{2^2} = -\frac{4}{4} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \frac{3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{(1^2 + 1^2)^2} = \frac{\cancel{3} - \cancel{3} - 4 + 2}{2^2} = \frac{-2}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

e) $f(x, y) = e^{-xy^2}$

Løsning:

Kjerne: $u = -xy^2$. Kjernerregelen:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{-xy^2}) = \frac{\partial}{\partial u} (e^u) \frac{\partial}{\partial x} (-xy^2) = e^u (-y^2) = \underline{\underline{-y^2 e^{-xy^2}}}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{-xy^2}) = \frac{\partial}{\partial u} (e^u) \frac{\partial}{\partial y} (-xy^2) = e^u (-x2y) = \underline{\underline{-2xy e^{-xy^2}}}$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x - og y -retningen hhv.:

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = -1^2 \cdot e^{-1 \cdot 1^2} = \underline{\underline{-e^{-1}}} \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = -2 \cdot 1 \cdot 1 e^{-1 \cdot 1^2} = \underline{\underline{-2e^{-1}}} \quad (8.25)$$

f) $f(x, y) = \frac{\ln x}{\sqrt{yx}}$

Løsning:

Derivasjonsregelen for en brøk med: $u = \ln x$ og $v = \sqrt{yx} = (yx)^{1/2}$:
Vi gjør noen mellomregninger: ²

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \frac{1}{x} \quad (8.26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v'_x = \frac{1}{2\sqrt{yx}} y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{yx}} \right) = \frac{u'_x v - u v'_x}{v^2} = \frac{\frac{1}{x} \sqrt{yx} - \ln x \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}}}{(\sqrt{yx})^2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{1}{2} \ln x \right)}{yx} = y^{\frac{1}{2}} y^{-1} x^{-\frac{1}{2}} x^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \ln x \right) = \underline{\underline{y^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \ln x \right)}} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Når man skal regne ut partiellderiverte med hensyn på y så trenger man ikke å bruke derivasjon av en brøk fordi man har kun en y -avhengighet i nevneren:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{yx}} \right) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{-1/2} \right) \quad (8.29)$$

$$= \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{2} \right) y^{-1/2-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} \ln x}} \quad (8.30)$$

²Når vi har regnet ut lign.(8.27) så har vi brukt kjerneregelen. Detaljene rundt dette behøver dere ikke ha med i innleveringen.

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x - og y -retningen hhv.:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}}} = 1^{-\frac{1}{2}} 1^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \ln 1\right) = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = \underline{\underline{1}} \quad (8.31)$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = -\frac{1}{2} 1^{-\frac{1}{2}} 1^{-\frac{3}{2}} \ln 1 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = \underline{\underline{0}} \quad (8.32)$$

■

Problem 8.2

Finn retningsderivert til funksjonen $f(x, y)$ langs den oppgitte retningen i det oppgitte punktet: ³

- a) $f(x, y) = x^2 y^5$ i punktet $(1, 1)$ langs retningen $a = 1$ og $b = 2$

Løsning:

Fra oppgave 7.1 a) fant vi at:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy^5 \quad (8.33)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 5x^2 y^4 \quad (8.34)$$

og

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = 2 \quad (8.35)$$

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 5 \quad (8.36)$$

Retningsderivert i punktet $(1, 1)$ hvor vi går $a = 1$ enheter langs x -aksen og $b = 2$ enheter langs y -aksen er gitt ved:

$$\underline{\underline{a \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} + b \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = \underline{\underline{12}}}} \quad (8.37)$$

³Bruk resultatene fra oppgave 1.

- b)** $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ i punktet $(1, 1)$ langs retningen $x = 1$ og $y = \frac{3}{2}$

Løsning:

Fra oppgave 7.1 **b)** fant vi at:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \quad (8.38)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \quad (8.39)$$

og

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (8.40)$$

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (8.41)$$

Retningsderivert i punktet $(1, 1)$ hvor vi går $a = 1$ enheter langs x -aksen og $b = \frac{3}{2}$ enheter langs y -aksen er gitt ved:

$$\underline{\underline{a \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} + b \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}}} \quad (8.42)$$

- c) $f(x, y) = e^{-xy^2}$ i punktet $(1, 1)$ langs retningen $x = 1$ og $y = -1$

Løsning:

Fra oppgave 1e fant vi at:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -y^2 e^{-xy^2} \quad (8.43)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2xy e^{-xy^2} \quad (8.44)$$

og

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = -e^{-1} \quad (8.45)$$

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = -2e^{-1} \quad (8.46)$$

Retningsderivert i punktet $(1, 1)$ hvor vi går $a = 1$ enheter langs x -aksen og $b = -1$ enheter langs y -aksen er gitt ved:

$$\underline{\underline{a \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} + b \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 1(-e^{-1}) + (-1)(-2e^{-1}) = e^{-1}(-1 + 2) = e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}}}$$

- d) $f(x, y) = \frac{\ln x}{\sqrt{yx}}$ parallelt langs x -aksen i punktet $(1, 1)$

Løsning:

Fra oppgave 7.1 f) fant vi at:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \ln x \right) \quad (8.47)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} \ln x \quad (8.48)$$

og

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = 1 \quad (8.49)$$

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 0 \quad (8.50)$$

Retningsderivert i punktet $(1, 1)$ hvor vi går $a = 1$ enheter langs x -aksen og $b = 0$ enheter langs y -aksen er gitt ved:

$$\underline{\underline{a \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} + b \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \underline{1}}} \quad (8.51)$$

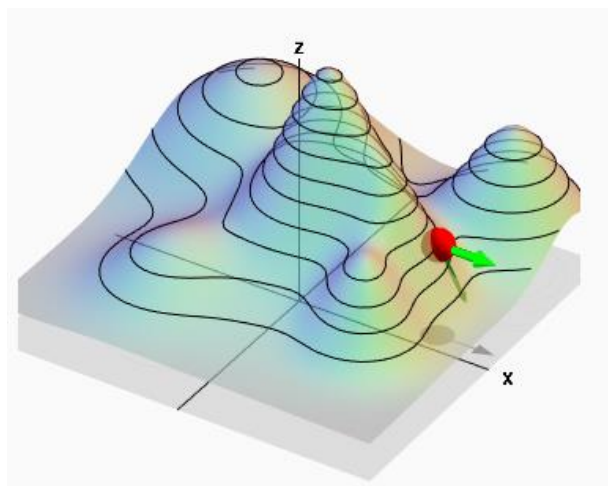


Figure 8.1: Retningsderivert.

■

Problem 8.3

Anta at temperaturen i et punkt (x, y) er gitt ved: ⁴

$$T(x, y) = x^2 y \quad (8.52)$$

Anta at vi står i punktet $(1, 1)$, se figur 8.2

Anta videre at vi ser i retningen $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ enheter langs x -aksen og $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ enheter langs y -aksen, dvs. den retningsderiverte i den retningen er:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \quad (8.53)$$

hvor $a \in \mathbb{R}$.

Bestem den retningen som gir raskest økning i temperatur. ⁵

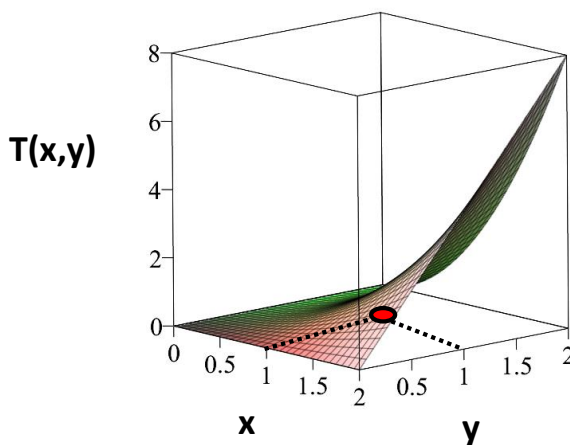
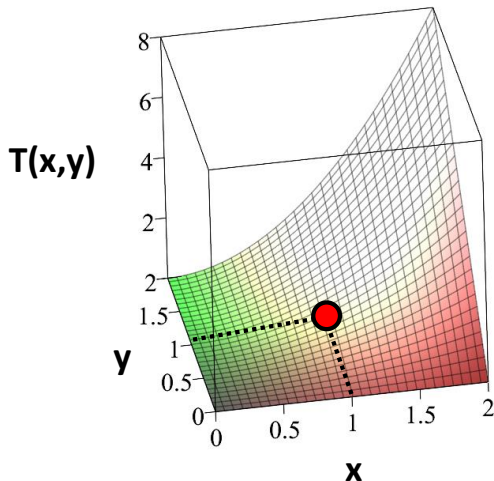


Figure 8.2: Temperatur $T(x, y) = x^2 y$.

Løsning:

Partiell deriverte:

⁴Denne oppgaven er vanskelig. Det er meningen at dere skal komme på øvingstimer å få hjelp til denne, dvs. vi løser dette ved et samarbeid.

⁵Dvs. bestem retningsderivert for den gitte retningen i punktet $(1, 1)$ og finn den verdien for a hvor retningsderivert blir størst. Her trengs både 1. og 2. derivasjonstesten.

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y) = 2x^{2-1}y = 2xy \quad (8.54)$$

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) = x^2 1y^{1-1} = x^2 \quad (8.55)$$

og

$$\frac{\partial T(1,1)}{\partial x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \quad (8.56)$$

$$\frac{\partial T(1,1)}{\partial y} = 1^2 = 1 \quad (8.57)$$

Retningsderivert i punktet $(1, 1)$ i retningen $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ enheter langs x -aksen og $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ enheter langs y -aksen er gitt ved:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\partial T(1,1)}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\partial T(1,1)}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \cdot 2 + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \cdot 1 \\ &= \frac{2+a}{\sqrt{1+a^2}} \end{aligned} \quad (8.58)$$

Den retningsderiverte er mao. en funksjon av a , si:

$$f(a) = \frac{2+a}{\sqrt{1+a^2}} \quad (8.59)$$

1. derivasjonstesten: (stasjonært punkt)

For å finne den verdien for a hvor retningsderivert er størst, deriverer vi $f(a)$ og setter lik null:

$$\frac{df(a)}{da} = 0 \quad (8.60)$$

Vi setter: $u(a) = 2 + a$ og $v(a) = \sqrt{1 + a^2}$. Derivasjon av en brøk:

$$\frac{df(a)}{da} = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (8.61)$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{1 + a^2} - \frac{2a}{\sqrt{1 + a^2}} \cdot (2 + a)}{(\sqrt{1 + a^2})^2} \quad (8.62)$$

$$= \frac{\sqrt{1 + a^2} \frac{\sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{1 + a^2}} - \frac{a(2 + a)}{\sqrt{1 + a^2}}}{1 + a^2} \quad (8.63)$$

$$= \frac{\frac{1 + a^2 - 2a - a^2}{\sqrt{1 + a^2}}}{1 + a^2} \quad (8.64)$$

$$= \frac{1 - 2a}{\sqrt{1 + a^2}(1 + a^2)} \quad (8.65)$$

$$= \frac{1 - 2a}{(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (8.66)$$

Vi finner stasjonære punkter ved å løse likningen:

$$\frac{df(a)}{da} = 0 \quad (8.67)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1-2a}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \Big/ \cdot (1+a^2)^{\frac{3}{2}} \quad (8.68)$$

$$\Downarrow$$

$$1-2a = 0 \quad \Big/ +2a \quad (8.69)$$

$$\Downarrow$$

$$1 = 2a \quad \Big/ :2 \quad (8.70)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} = a \quad (8.71)$$

2. derivasjonstesten:

Vi har dermed funnet et kritisk punkt for $a = \frac{1}{2}$. Vi må nå bruke 2. derivasjonstesten for å være sikker på at dette kritiske punktet er et *maksimum*:

$$\frac{d^2 f(a)}{da^2} = \frac{d}{da} \left(\frac{1-2a}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (8.72)$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (8.73)$$

$$= \frac{-2(1+a^2)^{\frac{3}{2}} - (1-2a) \frac{3}{2}(1+a^2)^{\frac{1}{2}} 2a}{\left((1+a^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \quad (8.74)$$

$$= \underbrace{\frac{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+a^2)^3}}_{> 0} \underbrace{\left(-2(1+a^2) - 3a(1-2a) \right)}_{?} \quad (8.75)$$

For at vi skal ha et maksimum, må $\frac{d^2 f(a)}{da^2} < 0$. Vi må derfor sjekke hvilket fortegn uttrykket med ”?” i lign. (8.75) har for $a = \frac{1}{2}$:

$$-2(1+a^2) - 3a(1-2a) = -2 \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) - 3 \frac{1}{2} \overbrace{\left(1 - 2 \frac{1}{2} \right)}^{=0} \quad (8.76)$$

$$= -2 \cdot \frac{5}{4} = -\frac{5}{2} < 0 \quad (8.77)$$

Fra 2. derivasjonstesten kan vi dermed konkludere at $a = \frac{1}{2}$ gir et **maksimum**.

Retningen er dermed bestemt ved:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{enheter langs } x\text{-aksen})$$

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{enheter langs } y\text{-aksen})$$

■

Problem 8.4 — Lagrangebetingelsene - Nyttmaksimering under bibetingelser

Du har fått jobb hos Molde Taxisentral. Du skal jobbe ei langhelg, fredag, lørdag og søndag, dvs. tre dager. Føringene du har fått fra din arbeidsgiver for denne arbeidshelgen er at de samlede konsumutgifter må være begrenset, maksimum m NOK. Konsumutgiftene skal dekke bensin- og matutgifter. La derfor:

$$p_x = \text{pris på bensin, NOK/liter} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (8.78)$$

$$p_y = \text{pris på pølsemeny, NOK} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (8.79)$$

Budsjettlikningen for arbeidshelgen blir dermed:

$$p_x x + p_y y \leq m \quad (8.80)$$

hvor $m = \text{samlet konsumutgift}$ og

$$x = \text{antall liter bensin} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (8.81)$$

$$y = \text{antall pølsemenyer} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (8.82)$$

Anta at nytten ved forbruk av bensin x (gode 1) og mat/drikke y (gode 2) er bestemt av nyttefunksjonen:

$$U(x, y) = 2x^2y \quad (8.83)$$



Foto: Per K. Rekdal



Figure 8.3: Taxi og Narvesen.

- a) Gjør om ulikheten i budsjettligningen til likhet og formuler kort dette som et maksimaliseringsproblem. ⁶

Løsning:

Nyttefunksjonen

$$U(x,y) = 2x^2y \quad (8.84)$$

skal maksimeres under bibetingelsen

$$g(x,y) = p_x x + p_y y - m = 0 \quad (8.85)$$

⁶Denne oppgaven er veldig kort. Svaret står egentlig oppgitt i teksten.

b) Vis at løsningen på maksimeringsproblemet i oppgave a) er:

$$x = \frac{2m}{3p_x}, \quad y = \frac{1m}{3p_y} \quad (8.86)$$

hvor x og y i lign.(8.86) er den optimale kombinasjonen av bensin og pølse som gir størst nytte. Bruk Lagrange multiplikator metoden. ⁷

Løsning:

Lagrange-funksjonen er:

$$L(x,y) = U(x,y) - \lambda g(x,y) \quad (8.87)$$

hvor m er en konstant. De stasjonære punktene til $L(x,y)$ er, sammen med bibetingelsen $g(x,y)$:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (8.88)$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (8.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2x^2y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(p_x x + p_y y \right) = 0 \quad (8.90)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(2x^2y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(p_x x + p_y y \right) = 0 \quad (8.91)$$

⁷For å være helt sikre på at lign.(8.86) gir maksimal nytte $U_{\max}$, og ikke et minimum, må man gjøre mer analyse. Men det finnes ingen *formell* test for maksimum eller minimum knyttet til Lagrange metoden. Man kan, som en svært enkel test, plukke ut tilfeldige punkt som oppfyller bibetingelsen $g(x,y) = m$, og sammeligne $U(x,y)$ verdier. Det trenger du ikke gjøre i denne oppgaven. Vi antar i denne oppgaven at det stasjonære punktet faktisk er maksimum. Da sparer du en del arbeid. Du trenger heller ikke å sjekke randen i denne oppgaven.

$$4xy - \lambda p_x = 0 \quad (8.92)$$

$$2x^2 - \lambda p_y = 0 \quad (8.93)$$

$$\frac{4xy}{p_x} = \lambda \quad (8.94)$$

$$\frac{2x^2}{p_y} = \lambda \quad (8.95)$$

De to ligningene i lign.(8.94) og (8.95) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsetningsmetoden”⁸. Eliminere λ ved å bruke lign.(8.94) og (8.95):

$$\lambda = \lambda \quad (8.96)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4xy}{p_x} = \frac{2x^2}{p_y} \quad (8.97)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2 \cdot 2y}{p_x} = \frac{2x}{p_y} \quad (8.98)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{p_x x}{2p_y} \quad (8.99)$$

Setter lign.(8.99) inn i bibetingelsen:

$$p_x x + p_y y = m \quad (8.100)$$

$$\Updownarrow$$

$$p_x x + p_y \left(\frac{p_x x}{2p_y} \right) = m \quad (8.101)$$

$$\Updownarrow$$

$$p_x x \frac{3}{2} = m \quad (8.102)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{2}{3} \frac{m}{p_x}, \quad \text{q.e.d.} \quad (8.103)$$

⁸Med “innsetningsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

Setter lign.(8.303) inn i (8.99):

$$\underline{y} = \frac{p_x x}{2p_y} \quad (8.104)$$

$$= \frac{\cancel{p_x} 2 m}{2 p_y 3 \cancel{p_x}} = \frac{1 m}{3 \underline{\underline{p_y}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (8.105)$$

Anta at prisen på bensin er $p_x = 10 \text{ NOK/liter}$ og at pølsemenyen på Narvesen koster $p_y = 40 \text{ NOK}$. Restriksjonen du får fra vakthavende ved Molde Taxisentral er $m = 1200 \text{ NOK}$ for den aktuelle helgen.

- c) Hva blir de numeriske verdiene av lign.(8.86)?

Løsning:

Numeriske verdier:

$$\underline{x} \stackrel{\text{lign. (8.303)}}{=} \frac{2}{3} \frac{m}{p_x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1200 \text{ NOK}}{10 \text{ NOK}} = \underline{80} \quad (8.106)$$

$$\underline{y} \stackrel{\text{lign. (8.105)}}{=} \frac{1}{3} \frac{m}{p_y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1200 \text{ NOK}}{40 \text{ NOK}} = \underline{10} \quad (8.107)$$

- d) Tolk svaret i oppgave c).

Løsning:

Med nyttefunksjonen $U(x, y) = 2x^2y$ så er det størst nytte ved å konsumere:

$$x = 80 \text{ liter bensin} \quad \text{og} \quad y = 10 \text{ pølsemenyer}$$

i løpet av ei lang helg.

■

Problem 8.5 — Økonomi og logistikk

NEAS, Nordmøre Energiverk AS, eier Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk, se figur 8.4. La x og y betegne antall megawatt timer, MWh , som produseres i disse to lokale kraftverkene per døgn:

$$x = \text{antall } MWh \text{ per døgn som produseres ved Reinset kraftverk} \quad (8.108)$$

$$y = \text{antall } MWh \text{ per døgn som produseres ved Ulvund kraftverk} \quad (8.109)$$

Anta at kostnadene per døgn ved kraftverkene på Reinset og Ulvund er henholdsvis: (i NOK)

$$K_R(x) = x^2 + 500x \quad (8.110)$$

$$K_U(y) = y^2 + 300y \quad (8.111)$$

Den samlede kostnaden per døgn for disse to kraftverkene $K(x, y) = K_R(x) + K_U(y)$, dvs.: (i NOK)

$$K(x, y) = x^2 + 500x + y^2 + 300y \quad (8.112)$$



Figure 8.4: Reinset kraftverk og Ulvund kraftverk.

Antall MWh som samlet produseres per døgn $g(x,y)$ for disse to kraftverkene er gitt ved

$$g(x,y) = x + y \quad (8.113)$$

NEAS har inngått en avtale med Norsk Hydro på Sunndalsøra om at de to aktuelle kraftverkene skal produsere og levere 500 MWh per døgn til en **fast pris**. Siden de har en fast pris på strømmen så ønsker de å minimere totalkostanden. NEAS ønsker altså å minimere $K(x,y)$ under bibetingelsen:

$$g(x,y) = x + y = 500 \quad (8.114)$$

I tillegg må selvsagt størrelsene x og y være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

- a) Hvordan må fordelingen av antall MWh være mellom de to kraftverkene for at NEAS skal minimere sin samlede kostnad $K(x,y)$?⁹ ¹⁰

Løsning:

Dette er et minimeringsproblem under en bibetingelse.
Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Av åpenbare grunner er $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Dessuten er bibetingelsen:

$$g(x,y) = x + y = 500 \quad (8.115)$$

⁹Dvs. finn x og y , si x^* og y^* , som gir minst $K(x,y)$. Bruk **Lagrange multiplikator** metoden.

¹⁰For å være helt sikre på at man finner minimum av lign.(8.112), og ikke et maksimum, må man gjøre mer analyse.

Men en slik analyse behøver du ikke å gjøre her. Du trenger heller ikke å sjekke randen.

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$L(x, y) = K(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (8.116)$$

hvor $K(x, y) = x^2 + 500x + y^2 + 300y$.

De stasjonære punktene til $L(x, y)$ er:

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (8.117)$$

$$\frac{\partial K(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (8.118)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 500x + y^2 + 300y) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (x + y) = 0 \quad (8.119)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 500x + y^2 + 300y) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (x + y) = 0 \quad (8.120)$$

$$2x + 500 - \lambda = 0 \quad (8.121)$$

$$2y + 300 - \lambda = 0 \quad (8.122)$$

$$2x + 500 = \lambda \quad (8.123)$$

$$2y + 300 = \lambda \quad (8.124)$$

De to ligningene i lign.(8.123) og (8.124) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “innsettingsmetoden”¹¹. Vi eliminerer λ i lign.(8.123) og (8.124):

$$\lambda = \lambda \quad (8.125)$$

$$2x + 500 = 2y + 300 \quad (8.126)$$

$$x = y - 100 \quad (8.127)$$

Setter lign.(8.127) inn i bibetingelsen:

$$x + y = 500 \quad (8.128)$$

$$y - 100 + y = 500 \quad (8.129)$$

$$2y = 600 \quad (8.130)$$

$$y = 300 \quad (8.131)$$

som gir, f.eks. via lign.(8.127), $x = y - 100 = 200$.

Minimal kostand for $K(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x^*, y^*) = (200, 300)$.
For å minimere utgiften $K_{\min}$ bør NEAS produsere og levere:

$$\underline{x^* = 200} \quad \text{antall } MWh \text{ per døgn ved Reinset kraftverk} \quad (8.132)$$

$$\underline{y^* = 300} \quad \text{antall } MWh \text{ per døgn ved Ulvund kraftverk} \quad (8.133)$$

når de skal levere 500 MWh per døgn til Norsk Hydro på Sunndalsøra.

¹¹Med “innsettingsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

- b) Hva er den minste samlede kostnaden $K_{\min}$ for NEAS i denne sammenheng?

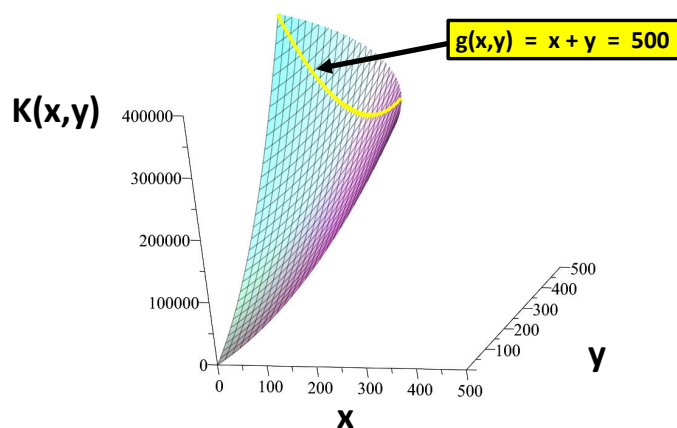


Figure 8.5: $K(x,y)$ og $g(x,y)$.

Løsning:

I oppgave 8.5 a) fant vi at $x^* = 200$ og $y^* = 300$ vil minimere kostnaden $K(x,y)$. Derfor:

$$\underline{K_{\min}} = K(x^*, y^*) \quad (8.134)$$

$$= K(200, 300) \quad (8.135)$$

$$= \left(200^2 + 500 \cdot 200 + 300^2 + 300 \cdot 300 \right) \text{ NOK} \quad (8.136)$$

$$= \underline{320000 \text{ NOK}} \quad (8.137)$$

Den minimale kostnaden for NEAS per døgn er 320000 NOK for de to kraftverkene.

NEAS opplever en økning i total etterspørsel av strøm per døgn.

Derfor vurderer de å produsere mer strøm. Ulvund kraftverket kan øke produksjonen med opptil 120 *MWh* per døgn. En slik økning av strømproduksjonen gir en økning i driftskostnadene på 10 *NOK/MWh* per døgn. Den nye, økte og samlede produksjonskostnaden blir da:

$$K_{\text{ny}}(x, y) = x^2 + 500x + y^2 + (300 + 10\varepsilon)y \quad (8.138)$$

hvor $0 \leq \varepsilon \leq 120$ med beslutningsvariabelen

$$\varepsilon = \text{antall } MWh \text{ per døgn som NEAS bestemmer seg for å øke} \quad (8.139)$$

strømproduksjonen med for Ulvund kraftverk

Den nye, optimale fordelingen av antall *MWh* mellom krafverkene blir da:

$$x_{\text{ny}}^* = x^* + \frac{10}{4}\varepsilon \quad (8.140)$$

$$y_{\text{ny}}^* = y^* - \frac{10}{4}\varepsilon \quad (8.141)$$

hvor x^* og y^* er løsningen som du fant i oppgave 8.5 a) foran.

Ny, minimal og samlet kostnad er da lik den gamle optimale kostnaden + et nytt ekstraledd:

$$K_{\text{ny}}(x_{\text{ny}}^*, y_{\text{ny}}^*) = \overbrace{K(x^*, y^*)}^{\text{gammel}} + \overbrace{3000\varepsilon - \frac{25}{2}\varepsilon^2}^{\text{ekstra}} \quad (8.142)$$

(Lign.(8.150)-(8.142) skal du ikke vise. Bare ta dem for gitt.)

- c) For å oppnå tilstrekkelig dekningsbidrag sier økonomiavdelingen til NEAS at ekstraavgiftene forbundet med en eventuell økning i strømproduksjonen ikke må overskride 55 000 NOK per døgn.

Vis at den nye, optimale fordelingen av antall MWh mellom de to kraftverkene er: ¹²

$$x_{ny}^* = 250 \text{ MWh} \quad , \quad y_{ny}^* = 250 \text{ MWh} \quad (8.143)$$

Løsning:

Økonomiavdelingen til NEAS sier at ekstraavgiftene kan være opptil 55 000 NOK derfor: ekstra per døgn:

$$3000\varepsilon - \frac{25}{2}\varepsilon^2 = 55\,000 \quad (8.144)$$

For å finne ε så må vi derfor løse 2. gradsligningen

$$-\varepsilon^2 \frac{25}{2} + 3000\varepsilon - 55\,000 = 0 \quad (8.145)$$

som gir

$$\varepsilon = \frac{-3000 \pm \sqrt{3000^2 - 4\left(-\frac{25}{2}\right)(-55\,000)}}{2\left(-\frac{25}{2}\right)} \quad (8.146)$$

$$\varepsilon = 20 \quad \text{eller} \quad \varepsilon = 220 \quad (8.147)$$

Siden $0 \leq \varepsilon \leq 120$ så må vi ha $\varepsilon = 20$.

¹²Denne oppgaven er litt vanskelig. Men det er ikke mye regning som skal til for å løse den.

Den nye fordelingen av antall MWh mellom krafverkene blir da:

$$\underline{x_{ny}^*} = x^* + \frac{10}{4}\varepsilon = \left(200 + \frac{10}{4}20\right) MWh = \underline{250 MWh} \quad (8.148)$$

$$\underline{y_{ny}^*} = y^* - \frac{10}{4}\varepsilon = \left(300 - \frac{10}{4}20\right) MWh = \underline{250 MWh} \quad (8.149)$$

- d) Hvorfor blir de nye, optimale verdiene i lign.(8.143) like?
Gi en *kort* begrunnelse.

Løsning:

Fra lign.(8.148) og (8.149) ser vi at x_{ny}^* og y_{ny}^* er like.

Det er rimelig fordi – med $\varepsilon = 20$ – så er leddene i kostnadsfunksjonen like:

$$\underline{K_{ny}(x,y)} = x^2 + \textcolor{blue}{500}x + y^2 + \overbrace{(300 + 10\varepsilon)}^{= 500}y \quad (8.150)$$

$$= \overbrace{x^2 + 500x}^{\text{ledd 1}} + \overbrace{y^2 + 500y}^{\text{ledd 2}} \quad (8.151)$$

hvor altså ledd 1 og ledd 2 er like.

■

Gamle eksamensoppgaver

Problem 8.6 — Grunnleggende emner

- a)** Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(3x - 7y)^2 \tag{8.152}$$

Løsning:

$$(3x - 7y)^2 = (3x)^2 - 3x7y - 7y3x + (7y)^2 = 9x^2 - 42xy + 49y^2$$

- b)** Regn ut:

i) -7^2

ii) $(-7)^2$

Løsning:

i) $-7^2 = -49$

ii) $(-7)^2 = 49$

- c) Trekk sammen brøkene og gjør forenklinger:

$$\frac{x-2}{5} - \frac{3x-7}{15} \quad (8.153)$$

Løsning:

$$\frac{x-2}{5} - \frac{3x-7}{15} = \frac{3(x-2)}{3 \cdot 5} - \frac{3x-7}{15} \quad (8.154)$$

$$= \frac{\cancel{3}x - 6 - \cancel{3}x + 7}{15} \quad (8.155)$$

$$= \frac{1}{15} \quad (8.156)$$

- d) Forkort brøken:

$$\frac{12b^2 - 12a^2}{4b - 4a} \quad (8.157)$$

Løsning:

$$\frac{12b^2 - 12a^2}{4b - 4a} = \frac{12(b^2 - a^2)}{4(b - a)} = \frac{3 \cdot \cancel{4}(b - a)(b + a)}{\cancel{4}(b - a)} = 3(a + b) \quad (8.158)$$

hvor vi har faktorisert og brukt konjugatsetningen.

- e) Regn ut. Vis gjerne litt mellomregning.

$$\frac{(3 \cdot 10^4)(8 \cdot 10^{-7})}{(6 \cdot 10^{-3})} \quad (8.159)$$

Løsning:

$$\frac{(3 \cdot 10^4)(8 \cdot 10^{-7})}{(6 \cdot 10^{-3})} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^{-3}} \quad (8.160)$$

$$= \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 4}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} 10^{4-7-(-3)} \quad (8.161)$$

$$= 4 \cdot 10^0 \quad (8.162)$$

$$= 4 \quad (8.163)$$

- f) Skriv tallet på standardform:

$$481\,000\,000 \quad (8.164)$$

Løsning:

$$481\,000\,000 = 4.81 \cdot 10^8 \quad (8.165)$$

g) Løs ligningen:

$$\frac{3x-6}{x+1} = 2 \quad (8.166)$$

Løsning:

$$\frac{3x-6}{x+1} = 2 \quad \quad \quad / \cdot (x+1) \quad (8.167)$$

$\Downarrow$

$$3x-6 = 2(x+1) \quad \quad \quad / +6 \quad (8.168)$$

$\Downarrow$

$$3x = 2x + 2 + 6 \quad \quad \quad / -2x \quad (8.169)$$

$\Downarrow$

$$x = 8 \quad (8.170)$$

h) Løs ulikheten:

$$\frac{3x-6}{x+1} < 2 \quad (8.171)$$

Løsning:

Vi multipliserer ikke med $x+2$ siden vi ikke vet om $x+2$ er positivt eller negativt. Vi flytter heller tallet 2 over på venstre side:

$$\frac{3x-6}{x+1} < 2 \quad \quad \quad / -2 \quad (8.172)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x-6}{x+1} - 2 < 0 \quad \quad \quad \text{fellesnevner} \quad (8.173)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x-6}{x+1} - 2 \frac{x+1}{x+1} < 0 \quad (8.174)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x-6-2x-2}{x+1} < 0 \quad (8.175)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x-8}{x+1} < 0 \quad (8.176)$$

Med nullpunktene $c_1 = -1$ og $c_2 = 8$ setter vi opp fortegnsskjemaet:

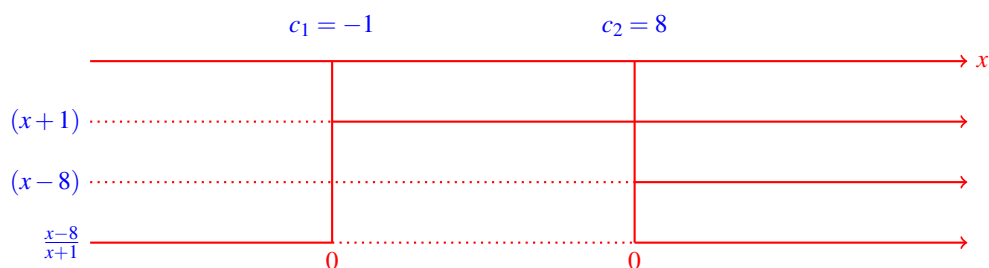


Figure 8.6: Fortegnsskjema.

Leser av løsningsmengden direkte fra figur 8.6:

$$-1 < x < 8 \qquad (8.177)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -1, 8 \rangle \qquad (8.178)$$

■

Problem 8.7 — Derivasjon og integrasjon

Deriver funksjonene nedenfor:

a) $f(x) = \frac{3}{x^7}$

Løsning:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(3^{-7} \right) = 3(-7)x^{-7-1} = -21x^{-8} = -\frac{21}{x^8}$$

b) $f(x) = 10^{\log(x^2)}$

Løsning:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(10^{\log(x^2)} \right) = \frac{d}{dx} \left(x^2 \right) = 2x$$

c) $f(x) = \sqrt{x}e^x$

Løsning:

Derivasjon av et produkt: ¹³

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\overbrace{\sqrt{x}}^{=u} \overbrace{e^x}^{=v} \right) \quad (8.179)$$

$$= (uv)' \quad (8.180)$$

$$= u'v + uv' \quad (8.181)$$

$$= (x^{1/2})'e^x + x^{1/2}(e^x)' \quad (8.182)$$

$$= \frac{1}{2}x^{1/2-1}e^x + x^{1/2}e^x \quad (8.183)$$

$$= \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^x \quad (8.184)$$

¹³Det er flere måter å skrive varet på. Løsningsforslaget viser én mulig måte.

d) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Løsning:

Derivasjon av en brøk: ¹⁴

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{x} \right) \quad (8.185)$$

$$= \left(\frac{u}{v} \right)' \quad (8.186)$$

$$= \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} \quad (8.187)$$

$$= \frac{\frac{1}{x}x - \ln x \cdot 1}{x^2} \quad (8.188)$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad (8.189)$$

¹⁴Det er flere måter å skrive varet på. Løsningsforslaget viser én mulig måte.

e) Løs ligningen:

$$5e^{0.2x} = 10 \quad (8.190)$$

Løsning:

$$5e^{0.2x} = 10 \quad / \cdot \frac{1}{5} \quad (8.191)$$

$$\Updownarrow \quad (8.192)$$

$$e^{0.2x} = 2 \quad / \cdot \ln \quad (8.193)$$

$$\Updownarrow \quad (8.194)$$

$$\ln(e^{0.2x}) = \ln 2 \quad (8.195)$$

$$\Updownarrow \quad (8.196)$$

$$0.2x = \ln 2 \quad / \cdot \frac{1}{0.2} \quad (8.197)$$

$$\Updownarrow \quad (8.198)$$

$$\frac{0.2x}{0.2} = \frac{\ln 2}{0.2} \quad (8.199)$$

$$\Updownarrow \quad (8.200)$$

$$x = 5 \ln 2 \quad (8.201)$$

- f) Finn arealet A avgrenset av funksjonen

$$f(x) = x - x^3 \quad (8.202)$$

og intervallet $[a, b] = [0, 1]$, dvs. finn:

$$I = \int_0^1 f(x) dx \quad (8.203)$$

Uten å gjøre noen utregninger, hva blir følgende integral?

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \quad (8.204)$$

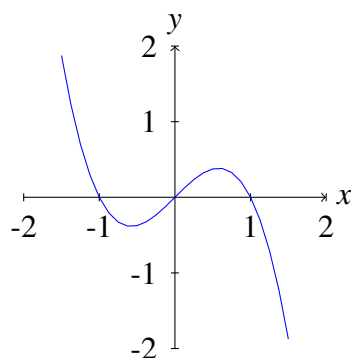


Figure 8.7: Funksjonen $f(x) = x - x^3$.

Løsning:

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx \quad (8.205)$$

$$= \int_0^1 (x - x^3) \, dx \quad (8.206)$$

$$= F(1) - F(0) \quad (8.207)$$

hvor

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + c \quad (8.208)$$

Dermed:

$$I = F(1) - F(0) \quad (8.209)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 + c - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 + c \right) \quad (8.210)$$

$$= \frac{1}{4} \quad (8.211)$$

Siden integranden

$$f(x) = x - x^3 \quad (8.212)$$

er **antisymmetrisk**, dvs. $f(-x) = -f(x)$, og siden integrasjonsgrensene $a = -1$ og $b = 1$ har samme absoluttverdi, så integralet lik null:

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx = 0 \quad (8.213)$$

■

Problem 8.8 — annuitetslån vs serielån

Du jobber som økonomiansvarlig hos “*Moldegaard Maritime Logistics*”. Dette firmaet skal investere i nytt datasystem. Dette nye datasystemet koster $K_0 = 300\,000$ NOK og skal finansieres ved låneopptak. Styret i firmaet har bestemt at lånet skal tilbakebetales i løpet av $n = 15$ år. Renten er $r = \frac{3\%}{100\%} = 0.03$ i hele perioden.

- a) Anta at lånet skal tilbakebetales som et annuitetslån.¹⁵
Hvor stort blir det årlige *terminbeløpet* K (rente+avdrag)?¹⁶

Løsning:

Terminbeløpet for annuitetslånet er: (se kompendium)

$$K = \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (8.214)$$

$$= \frac{300\,000 \cdot 0.03}{1 - \frac{1}{(1+0.03)^{15}}} \text{ NOK} \approx 25\,130 \text{ NOK} \quad (8.215)$$

¹⁵Ved annuitetslån er terminbeløpet det samme gjennom hele nedbetalingen.

¹⁶Se i kompendiet dersom du ikke husker uttrykket for terminbeløpet ved annuitetslån.

- b) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt **annuitetslån**?

Løsning:

For et annuitetslån gjelder:

$$nK = K_0 + R_n^{\text{ann}} \quad (8.216)$$

Denne ligningen kan vi løse med hensyn på R_n^{ann} :

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = nK - K_0 \quad (8.217)$$

$$= (15 \cdot \underbrace{25\,130}_{\text{oppg. a)}} - 300\,000) \text{ NOK} \quad (8.218)$$

$$= \underline{\underline{76\,950 \text{ NOK}}} \quad (8.219)$$

hvor svaret fra oppgave **a)** er benyttet.

Alternativt kan man også bruke formelen fra kompendiet:

$$R_n^{\text{ann}} = K_0 \cdot \left[\frac{nr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right] \quad (8.220)$$

$$= 300\,000 \cdot \left[\frac{15 \cdot 0.03}{1 - \frac{1}{(1+0.03)^{15}}} - 1 \right] \text{ NOK} \quad (8.221)$$

$$= 76\,950 \text{ NOK} \quad (8.222)$$



Figure 8.8: Moldegaard Maritime Logistics.

- c) Anta at lånet istedet skal tilbakebetales som et **serielån**.
Hvor stort blir det årlige *avdraget*?

Løsning:

Avdragene for et serielån er konstante:

$$\text{avdrag} = \frac{K_0}{n} = \frac{300\,000}{15} \text{ NOK} = 20\,000 \text{ NOK} \quad (8.223)$$

- d) Hvor mye betales i renter i løpet av lånets løpetid for et slikt **serielån**? ¹⁷

Løsning:

Renten for serielånet er: (se kompendium)

$$\underline{\underline{R_n^{\text{serie}}}} = K_0 \cdot r \cdot \frac{n+1}{2} = 300\,000 \cdot 0.03 \cdot \frac{15+1}{2} \text{ NOK} = \underline{\underline{72\,000 \text{ NOK}}}$$

¹⁷Ved serielån er avdraget det samme gjennom hele nedbetalingen. Se i kompendiet dersom du ikke husker uttrykket for den totale renten ved serielån.

- e) Dersom du har regnet rett i oppgave **b)** og **d)**, så fant du at $R_n^{\text{ann}} > R_n^{\text{serie}}$. Forklar kort, uten regning, hvorfor firmaet betaler mer rente til banken ved **annuitet** enn ved **serie**.¹⁸

Løsning:

Forklaring på hvorfor $R_n^{\text{ann}} > R_n^{\text{serie}}$:

I starten av lånets tilbakebetalingstid betaler firmaet **mindre** tilbake til banken ved et annuitetslån enn et serielån. Dermed lånes pengene “**lenger**”. Renten blir derfor **større** for et annuitetslån.

■

¹⁸I starten av lånets tilbakebetalingstid, betaler firmaet mindre tilbake til banken ved et **annuitetslån** enn et **serielån**? Betyr det at firmaet låner pengene “lenger” i **annuitetslånet**? Dersom pengene lånes “lenger”, hva betyr det for renten? Større eller mindre?

Problem 8.9 — Lagrange multiplikatorer

Made By Mom A/S (MBM) er en klesbutikk i Molde som spesialdesigner klær. MBM har egne design og egne kolleksjoner. Et av plaggene som lages, er kåper. Av en bestemt type kåpe lages det to versjoner:

$$\mathbf{A} = \text{spesialversjon med ekstra lommer og ekstra dekor} \quad (8.224)$$

$$\mathbf{B} = \text{klassisk versjon} \quad (8.225)$$

Ut fra erfaring angående lønnsutgifter og priser på stoff og andre råvarer har man funnet ut at **kostnaden** forbundet med å produsere disse kåpene kan beskrives, med god tilnærming til virkeligheten, av følgende funksjon:

$$K(x, y) = 500x + 100y + 100xy + 1200 \quad (8.226)$$

hvor

$$x = \text{antall kåper som produseres og selges av type } \mathbf{A} \text{ (spesial)} \quad (8.227)$$

$$y = \text{antall kåper som produseres og selges av type } \mathbf{B} \text{ (klassisk)} \quad (8.228)$$

Kostnaden er i NOK.



Figure 8.9: Made By Mom A/S.

Det viser seg at det er en sammenheng mellom prisen på kåpene, og antall kåper som produseres og selges. Hun som driver MBM har funnet ut at følgende sammenhenger mellom pris og etterspørsel er en god tilnærming til virkeligheten:

$$p_{\mathbf{A}}(x,y) = 4000 - 100x + 200y \quad (8.229)$$

$$p_{\mathbf{B}}(x,y) = 2600 + 200x - 100y \quad (8.230)$$

hvor

$$p_{\mathbf{A}}(x,y) = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{A}, \text{ dvs. spesialversjon} \quad (8.231)$$

$$p_{\mathbf{B}}(x,y) = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{B}, \text{ dvs. klassisk versjon} \quad (8.232)$$

Alle priser er i NOK.

- a) Hva er den faste kostnaden forbundet med produksjon av kåpene? ¹⁹

Løsning:

Den faste kostnaden er den kostnaden som er uavhengig av produksjonen, dvs. $K(x,y)$ når $x = 0$ og $y = 0$:

$$K(0,0) = 500 \cdot 0 + 100 \cdot 0 + 100 \cdot 0 \cdot 0 + 1200 = 1200 \text{ NOK} \quad (8.233)$$

¹⁹Se lign.(8.226). Husk benevning.

b) Vis at inntekten $I(x, y)$ er gitt ved:

$$I(x, y) = -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y \quad (8.234)$$

Løsning:

Inntekten $I(x, y)$ er:

$$\underline{\underline{I(x, y)}} = p_A(x, y)x + p_B(x, y)y \quad (8.235)$$

$$= (4000 - 100x + 200y)x + (2600 + 200x - 100y) \cdot y \quad (8.236)$$

$$= 4000x - 100x^2 + 200xy + 2600y + 200xy - 100y^2 \quad (8.237)$$

$$= \underline{\underline{-100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y}} \quad (8.238)$$

som skulle vises (q.e.d).

- c) Vis at profittfunksjonen $P(x,y)$ er gitt ved:

$$P(x,y) = -100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y - 1200 \quad (8.239)$$

Løsning:

Profitten $P(x,y)$ er:

$$\underline{\underline{P(x,y)}} = I(x,y) - K(x,y) \quad (8.240)$$

$$= -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y \quad (8.241)$$

$$- (500x + 100y + 100xy + 1200) \quad (8.242)$$

$$= -100x^2 - 100y^2 + 400xy + 4000x + 2600y \quad (8.243)$$

$$- 500x - 100y - 100xy - 1200 \quad (8.244)$$

$$= \underline{\underline{-100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y - 1200}} \quad (8.245)$$

som skulle vises (q.e.d).

Når stoff kjøpes inn til kåpene så kjøpes stoffmengden i bestemte kvantum. Ut fra det kvantumet som er kjøpt inn kan man sy totalt 12 kåper. Matematisk betyr det:

$$x + y = 12 \quad (\text{bibetingelse}) \quad (8.246)$$

I tillegg må både x og y være positive størrelser.

Anta i denne oppgaven at:

- det stasjonære punktet til $P(x, y)$ under bibetingelsen i lign.(8.246) representerer et **maksimum** ²⁰
- verdien av randpunktene til $P(x, y)$ under bibetingelsen i lign.(8.246) er mindre enn verdien av $P(x, y)$ i det stasjonære punktet ²¹

d) Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper **maksimerer** profitten $P(x, y)$? ²²

Løsning:

Dette er et maksimeringsproblem under en bibetingelse. Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Bibetingelsen kan skrives:

$$g(x, y) = x + y - 12 \quad (8.247)$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\mathcal{L}(x, y) = P(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (8.248)$$

²⁰Med denne antagelsen slipper du å sjekke at det stasjonære punktet faktisk er et maksimum, og ikke et minimum.

²¹Med denne antagelsen slipper du å sjekke randpunktene.

²²Dvs. finn x og y som gir P_{maks} . Bruk **Lagrange multiplikator** metoden. Husk, du slipper å sjekke randen.

De stasjonære punktene til $\mathcal{L}(x, y)$ er:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (8.249)$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (8.250)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (x + y - 12) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-100x^2 - 100y^2 + 300xy + 3500x + 2500y \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (x + y - 12) = 0$$

som gir:

$$-200x + 300y + 3500 - \lambda = 0 \quad (8.251)$$

$$-200y + 300x + 2500 - \lambda = 0 \quad (8.252)$$

eller omskrevet:

$$-200x + 300y + 3500 = \lambda \quad (8.253)$$

$$-200y + 300x + 2500 = \lambda \quad (8.254)$$

De to ligningene i lign.(8.253) og (8.254) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning.

Vi kan nå bruke “innsettingsmetoden”²³. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(8.253) og (8.254):

$$\lambda = \lambda \quad (8.255)$$

$$\Downarrow$$

$$-200x + 300y + 3500 = -200y + 300x + 2500 \quad (8.256)$$

$$\Downarrow$$

$$300y + 200y = 300x + 200x + 3500 - 3500 \quad (8.257)$$

$$\Downarrow$$

$$500y = 500x - 1000 \quad (8.258)$$

$$\Downarrow$$

$$500y = 500x - 1000 \quad / : 500 \quad (8.259)$$

$$\Downarrow$$

$$y = x - 2 \quad (8.260)$$

og størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(8.260) inn i bibetingelsen:

$$x + y = 12 \quad (8.261)$$

$$\Downarrow$$

$$x + (x - 2) = 12 \quad (8.262)$$

$$\Downarrow$$

$$2x = 12 + 2 \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad (8.263)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 7 \quad (8.264)$$

som gir, f.eks. via lign.(8.260), $y = 7 - 2 = 5$.

Maksimum for profitten $P(x, y)$ inntreffer altså for punktet $(x, y) = (7, 5)$.

For å maksimere profitten bør MBM produsere:

$$\underline{x = 7} \quad \text{A kåper, spesialversjon} \quad (8.265)$$

$$\underline{y = 5} \quad \text{B kåper, klassisk versjon} \quad (8.266)$$

²³Med “innsettingsmetoden” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

- e) Hva er den **maks**imale profitten P_{maks} for MBM ved salg av disse kåpene?

Løsning:

Maksimal profitt P_{maks} for MBM:

$$\begin{aligned} P(7, 5) &\stackrel{\text{lin. (8.245)}}{=} -100 \cdot 7^2 - 100 \cdot 5^2 + 300 \cdot 7 \cdot 5 + 3500 \cdot 7 + 2500 \cdot 5 - 1200 \\ &= 38\,900 \text{ NOK} \end{aligned} \quad (8.267)$$

Den maksimale profitten til MBM, som fås ved å produsere $x = 7$ kåper av type **A** og $y = 5$ kåper av type **B**, er $P_{\text{maks}} = 38\,900 \text{ NOK}$.

- f) Hva slags pris må MBM sette på kåpene for å oppnå **maks**imum profitt P_{maks} ?

Løsning:

Prising for å oppnå P_{maks} :

$$\underline{p_{\text{A}}(7, 5)} = 4000 - 100 \cdot 7 + 200 \cdot 5 = 4300 \text{ NOK} \quad (8.268)$$

$$\underline{p_{\text{B}}(7, 5)} = 2600 + 200 \cdot 7 - 100 \cdot 5 = \underline{3500 \text{ NOK}} \quad (8.269)$$

Den største profitten oppnås dersom prisen på spesialkåper **A** settes til $p_{\text{A}}(7, 5) = 4300 \text{ NOK}$ og klassiske kåper **A** prises til $p_{\text{B}}(7, 5) = 3500 \text{ NOK}$.

■

Problem 8.10 — Grunnleggende emner

- a) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(a^2 - b^3)(a^2 + b^3) \quad (8.270)$$

Løsning:

$$(a^2 - b^3)(a^2 + b^3) = (a^2)^2 + \cancel{a^2 b^3} - \cancel{b^3 a^2} + (b^3)^2 = a^4 - b^6 \quad (8.271)$$

- b) Anta at en kapital øker fra $K_0 = 5\,000$ \$ til $K_1 = 7\,500$ \$.

Hva er den prosentvise økningen?

Løsning:

%-vis endrin fra $K_0 = 5\,000$ \$ til $K_1 = 7\,500$ \$.

$$\text{\%-vis endring} = \frac{K_1 - K_0}{K_0} \cdot 100 \% \quad (8.272)$$

$$= \frac{5\,000 \$ - 7\,500 \$}{5\,000 \$} \cdot 100 \% = 50 \% \quad (8.273)$$

Kapitalen øker med 50 %.

- c) Trekk sammen brøkene og gjør forenklinger:

$$\frac{3}{2a} - \frac{6}{3a} + \frac{1}{a} \quad (8.274)$$

Løsning:

Fellesnevner er $6a$:

$$\frac{3}{2a} - \frac{6}{3a} + \frac{1}{a} = \frac{3 \cdot 3}{2a \cdot 3} - \frac{6 \cdot 2}{3a \cdot 2} + \frac{1 \cdot 6}{a \cdot 6} \quad (8.275)$$

$$= \frac{9 - 12 + 6}{6a} \quad (8.276)$$

$$= \frac{3}{6a} \quad (8.277)$$

$$= \frac{1}{2a} \quad (8.278)$$

- d) Forkort brøken:

$$\frac{b^2 - ab}{3a - 3b} \quad (8.279)$$

Løsning:

$$\frac{b^2 - ab}{3a - 3b} = \frac{b(b - a)}{3(a - b)} = -\frac{b(\cancel{a - b})}{3(\cancel{a - b})} = -\frac{b}{3} \quad (8.280)$$

e) Gitt funksjonene:

$$f(x) = 2x^2 - 12 \quad , \quad g(x) = x^2 + 4 \quad (8.281)$$

Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene.

Løsning:

Skjæringspunkt(en) til funksjonene er bestemt av $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = g(x) \quad \text{skjæring} \quad (8.282)$$

$$\Downarrow$$

$$2x^2 - 12 = x^2 + 4 \quad -x^2 + 12 \quad (8.283)$$

$$\Downarrow$$

$$2x^2 - x^2 = 4 + 12 \quad (8.284)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = 16 \quad \sqrt{VS} = \sqrt{HS} \quad (8.285)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm\sqrt{16} \quad (8.286)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm 4 \quad (8.287)$$

Tilhørende funksjonsverdier er:

$$f(\pm 4) = g(\pm 4) = (\pm 4)^2 + 4 = 16 + 4 = 20 \quad (8.288)$$

Skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$ er dermed:

$$(x, y) = (-4, 20) \quad \text{og} \quad (x, y) = (4, 20) \quad (8.289)$$

f) Løs ligningen, dvs. finn r :

$$4 = 2(1 + r)^4 \quad (8.290)$$

Løsning:

$$4 = 2(1 + r)^4 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{2} \quad (8.291)$$

$$\Updownarrow$$

$$2 = (1 + r)^4 \quad \bigg/ (VS)^{1/4} = (HS)^{1/4} \quad (8.292)$$

$$\Updownarrow$$

$$2^{\frac{1}{4}} = ((1 + r)^4)^{\frac{1}{4}} \quad (8.293)$$

$$\Updownarrow$$

$$2^{\frac{1}{4}} = (1 + r)^1 \quad (8.294)$$

$$\Updownarrow$$

$$2^{\frac{1}{4}} = 1 + r \quad (8.295)$$

$$\Updownarrow$$

$$2^{\frac{1}{4}} - 1 = r \quad (8.296)$$

altså

$$r = 2^{\frac{1}{4}} - 1 \quad (8.297)$$

g) Løs ligningssystemet

$$7x + 5y = -20 \quad (8.298)$$

$$2x + 6y = 8 \quad (8.299)$$

Ligningene er lineært uavhengige så du behøver ikke å sjekke at linjene er parallelle eller ei.

Løsning:

Løser først lign.(8.299) med hensyn på x :

$$2x + 6y = 8 \quad \quad \quad / - 6y \quad (8.300)$$

$$\Updownarrow$$

$$2x = 8 - 6y \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad (8.301)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{8 - 6y}{2} \quad (8.302)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 4 - 3y \quad (8.303)$$

Setter så lign.(8.303) inn i lign.(8.298):

$$7x + 5y = -20 \quad (8.304)$$

$$\Updownarrow$$

$$7(4 - 3y) + 5y = -20 \quad (8.305)$$

$$\Updownarrow$$

$$28 - 21y + 5y = -20 \quad \quad \quad / - 28 \quad (8.306)$$

$$\Updownarrow$$

$$-16y = -20 - 28 \quad (8.307)$$

$$\Updownarrow$$

$$-16y = -48 \quad \quad \quad / \left(-\frac{1}{16}\right) \quad (8.308)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = 3 \quad (8.309)$$

Setter så $y = 3$ inn i lign.(8.303):

$$x = 4 - 3y \tag{8.310}$$

$$= 4 - 3 \cdot 3 = 4 - 9 = -5 \tag{8.311}$$

Løsningen av ligningsystemet er

$$(x,y) = (-5,3) \tag{8.312}$$

- h)** Finn eventuelle nullpunkte(r) til funksjonen:

$$f(x) = x^2 + 4 \quad (8.313)$$

Løsning:

Nullpunktene er bestemt ved $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \quad (8.314)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad -4 \quad (8.315)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = -4 \quad / \sqrt{VS} = \sqrt{HS} \quad (8.316)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm\sqrt{-4} \quad (8.317)$$

Man kan ikke ta kvadratroten av et negativt tall.

(Komplekse tall er ikke pensum i MAT100).

Dermed: funksjonen $f(x)$ har **ingen nullpunkter**.

■

Problem 8.11 — Blandede oppgaver

- a) Faktoriser polynomet

$$y = x^2 - a^2 \tag{8.318}$$

Løsning:

Faktorisering:

$$y = x^2 - a^2 = (x + a)(x - a) \tag{8.319}$$

via konjugatsetningen.

- b) Bestem n 'te ledd a_n til følgen nedenfor.
La følgen starte med $n = 1$.

$$2, 6, 18, 54, 162, \dots \tag{8.320}$$

Løsning:

Vi ser at to på følgende ledd skilles med en faktor 3.
Det n 'te leddet i følgen er dermed: ²⁴

$$a_{n+1} = 3a_n \tag{8.321}$$

for alle $n = 1, 2, 3, \dots$ og $a_1 = 2$.

²⁴Lign.(8.320) er en geometrisk følge med $k = 3$ og $a_1 = 2$. Men oppgaven spør ikke etter hva slags type følge dette er, så det trenger vi ikke svare på.

- c) Gitt den geometriske rekken bestemt av:

$$a_i = a 1.1^{i-1} \quad (8.322)$$

hvor $a = 3$ og $i = 1, 2, 3, \dots$

Finn summen S_5 .

Løsning:

Siden dette er en **geometrisk** rekke så har vi en formel for dette: (se kompendiet)

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (8.323)$$

For den geometriske rekken bestemt av lign.(8.322) er:

$$k = 1.1 \quad \text{og} \quad a = 3 \quad (8.324)$$

Dermed:

$$S_5 = 3 \frac{1.1^5 - 1}{1.1 - 1} = 18.3153 \quad (8.325)$$

Gitt funksjonen:

$$f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3 \quad (8.326)$$

- d) Finn de partiellderiverte.

Løsning:

Partiell deriverte med hensyn på x :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{6}x^2y^3 \right) = \frac{1}{6}2xy^3 = \frac{1}{3}xy^3 \quad (8.327)$$

Partiell deriverte med hensyn på y :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{6}x^2y^3 \right) = \frac{1}{6}x^23y^2 = \frac{1}{2}x^2y^2 \quad (8.328)$$

- e) Regn ut stigningstallet til funksjonen $f(x, y)$ i punktet $(1, 1)$ i x -retning og y -retning.

Løsning:

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x -retning er: (bruker lign.(8.327))

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1^3 = \frac{1}{3} \quad (8.329)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i y -retning er: (bruker lign.(8.328))

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \quad (8.330)$$

- f) Regn ut den retningsderiverte til funksjonen $f(x, y)$ i punktet $(1, 1)$ i retningen $a = 2$ og $b = 3$.²⁵

Løsning:

Her er poenget at vi skal bruke resultatet fra oppgave .
Dermed: (se kompendium)

$$a \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} + b \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{2} \quad (8.331)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \quad (8.332)$$

$$= \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} \quad (8.333)$$

$$= \frac{4 + 9}{6} \quad (8.334)$$

$$= \frac{13}{6} \quad (8.335)$$

²⁵Bruke den retningsderiverte som definert i kompendiet. Oppgi svaret eksakt.

g) Finn arealet A avgrenset av funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (8.336)$$

og intervallet $[a, b] = [1, 2]$, dvs. finn:

$$A = \int_1^2 f(x) dx \quad (8.337)$$

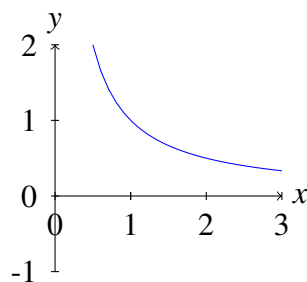


Figure 8.10: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$.

Løsning:

Den antiferiverte av $f(x) = \frac{1}{x}$ er:

$$F(x) = \ln x + c \quad (8.338)$$

hvor c er en konstant.

Dette innset vi ved å gå baklengs: $f'(x) = (\ln x + c)' = \frac{1}{x}$

Fundamentalsetningen for integral gir da:

$$A = \int_1^2 f(x) dx \quad (8.339)$$

$$= F(2) - F(1) \quad (8.340)$$

$$= (\ln 2 + c) - (\ln 1 + c) \quad (8.341)$$

$$= \ln 2 \quad (8.342)$$

■

Problem 8.12 — økonomi, kostnad, inntekt og fortjeneste

Jobbfrukt leverer frukt til bedrifter og andre som ønsker det. Den totale kostnaden $K(x)$ i NOK **per uke** er:

$$K(x) = ax^2 + bx + c, \quad (8.343)$$

hvor x = antall fruktfat produsert og solgt **per uke** og hvor a , b og c er konstanter. For det største og mest eksklusive fruktfatet gjelder følgende numeriske verdier:

$$a = 2 \text{ NOK} \cdot \text{uke} \quad (8.344)$$

$$b = 200 \text{ NOK} \quad (8.345)$$

$$c = 11\,200 \text{ NOK/uke} \quad (\text{faste kostnader per uke}) \quad (8.346)$$

Prisen på dette fruktfatet er $p = 560 \text{ NOK}$.

- a) Vis at den totale fortjenesten $F(x)$ per uke er gitt ved:

$$F(x) = (p - b)x - ax^2 - c \quad (8.347)$$

Løsning:

Den totale fortjenesten $F(x)$ per uke er:

$$\underline{\underline{F(x)}} = \underbrace{\text{inntekt}}_{= px} - \underbrace{\text{kostnad}}_{= K(x)} \quad (8.348)$$

$$= px - K(x) \quad (8.349)$$

$$= px - (ax^2 + bx + c) \quad (8.350)$$

$$= \underline{\underline{(p - b)x - ax^2 - c}}, \text{ q.e.d.} \quad (8.351)$$

- b) Finn hvilke produksjonsmengder som gir balanse mellom inntekt og den totale kostnaden.²⁶



Figure 8.11: Jobbfrukt.

Løsning:

Produksjonsmengden som gir balanse mellom inntekt og den totale kostnaden er bestemt av $F(x)$:

$$F(x) = 0 \quad (8.352)$$

$\Updownarrow$

$$(p - b)x - ax^2 - c = 0 \quad (8.353)$$

$\Updownarrow$

$$-2x^2 + (560 - 200)x - 11\,200 = 0 \quad (8.354)$$

$\Updownarrow$

$$-2x^2 + 360x - 11\,200 = 0 \quad (8.355)$$

som er en 2. gradsligning.

²⁶Dvs. finn de verdiene av x slik at $F(x) = 0$.

Løser 2. gradsligningen ved hjelp av ABC -formelen ($a = 2$, $b = 360$, $c = 11200$):

$$x = \frac{-360 \pm \sqrt{360^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-11200)}}{2 \cdot (-2)} \quad (8.356)$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ x = 40 \quad \vee \quad x = 140 \end{array} \quad (8.357)$$

Dersom Jobbfrukt produserer og selger 40 eller 140 fruktfat så er det balanse mellom inntekt og kostnad.

- c) Vis at antall fruktfat som må produseres og selges per uke for å *maksimere* fortjenesten $F(x)$ er gitt ved:

$$x = \frac{p-b}{2a} \quad (8.358)$$

Forsikre deg om at lign.(8.358) faktisk er et maksimum ved å betrakte $F''(x)$.

Løsning:

Fortjenesten $F(x)$ optimeres når $F'(x)$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad (8.359)$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dx} \left((p-b)x - ax^2 - c \right) = 0 \quad (8.360)$$

$\Downarrow$

$$p - b - 2ax = 0 \quad (8.361)$$

som gir, når man løser med hensyn på x :

$$\underline{\underline{x = \frac{p-b}{2a}}}, \text{ q.e.d.} \quad (8.362)$$

Den 2. deriverte:

$$\underline{\underline{F''(x)}} = \frac{d^2F(x)}{dx^2} \quad (8.363)$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} \left((p-b)x - ax^2 - c \right) \quad (8.364)$$

$$= \frac{d}{dx} (p - b - 2ax) = \underline{\underline{-2a}} \quad (8.365)$$

er negativ siden $a > 0$. Dermed representerer x i lign.(8.362) et *maksimum*.

- d) Sett inn tall og regn ut x i lign.(8.358).²⁷

Løsning:

Setter inn tall og regner ut x i lign.(8.362).

$$x = \frac{p - b}{2a} \quad (8.366)$$

$$= \frac{(560 - 200) \text{ NOK}}{2 \cdot 2 \text{ NOK} \cdot \text{uke}} = 90 \frac{1}{\text{uke}} \quad (8.367)$$

- e) Enhetskostnaden, dvs. kostnad per fruktfat, er definert ved: $E(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x}$.
Vis at denne er gitt ved:

$$E(x) = ax + b + \frac{c}{x} \quad (8.368)$$

Løsning:

Enhetskostnad, dvs. kostnad per fruktfat:

$$E(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{K(x)}{x} \quad (8.369)$$

$$= \frac{ax^2 + bx + c}{x} = ax + b + \frac{c}{x}, \quad \text{q.e.d.} \quad (8.370)$$

²⁷Husk rett benevning. Se i den sammenheng i starten av oppgaven, side 72, hva x er definert som.

- f) Vis at antall fruktfat som må produseres og selges for å minimere enhetskostnaden er gitt ved:

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (8.371)$$

Forsikre deg om at lign.(8.371) faktisk representerer et minimum, og ikke et maksimum, ved å betrakte $E''(x)$.

Løsning:

Den deriverte av $E(x)$:

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(ax + b + \frac{c}{x} \right) = \underline{a - \frac{c}{x^2}} \quad (8.372)$$

Optimum til $E(x)$ finnes ved å derivere og deretter sette den **deriverte** lik **null**:

$$\frac{dE(x)}{dx} = 0 \quad (8.373)$$

$\Updownarrow$

$$a - \frac{c}{x^2} = 0 \quad \Big/ \cdot x^2 \quad (8.374)$$

$\Updownarrow$

$$ax^2 - c = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{a} \quad (8.375)$$

$\Updownarrow$

$$x^2 - \frac{c}{a} = 0 \quad (8.376)$$

$\Updownarrow$

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (8.377)$$

Den 2. deriverte:

$$\underline{E''(x)} = \frac{d^2 E}{dx^2} \quad (8.378)$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} \left(ax + b + \frac{c}{x} \right) \quad (8.379)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(a - \frac{1}{x^2} \right) \quad (8.380)$$

$$= -\frac{(-2)}{x^3} = \underline{\underline{\frac{2}{x^3}}} \quad (8.381)$$

er positiv siden $x > 0$. Dermed representerer x i lign.(8.377) et **minimum**.

g) Sett inn tall og regn ut x i lign.(8.371).²⁸

Løsning:

Setter inn numeriske verdier:

$$\underline{\underline{x}} = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{11\,200 \text{ NOK}}{2 \text{ NOK} \cdot (\text{uke})^2}} \approx \underline{\underline{75 \frac{1}{\text{uke}}}} \quad (8.382)$$

²⁸Husk rett benevning.

- h) Sammenlign oppgave d) og g). Kommenter svaret.²⁹

Løsning:

Maksimum av fortjenesten $F(x)$ inntreffer for $x = 90 \frac{1}{\text{uke}}$, mens minimum av enhetskostnaden $E(x)$ inntreffer ved $x = 75 \frac{1}{\text{uke}}$. Disse er altså ikke sammenfallende.

Man skal ikke minimere enhetskostnadene for “enhver pris”.

■

²⁹Er maksimum av fortjenesten $F(x)$ sammenfallende med minimum av enhetskostnaden $E(x)$?

Problem 8.13 — økonomi, logistikk og *LP* optimalisering

Ekornes ASA er en norsk møbelf produsent med hovedkontor i Sykkylven i Møre og Romsdal. Selskapet er mest kjent for varemerket Stressless. Stressless blir brukt på firmaets kolleksjon av regulerbare stoler, se figur 8.12.

La oss forenkle situasjonen for Ekornes og anta at de kun produserer to typer stressless-stoler. En standard versjon, type 1, og en luksus versjon, type 2. I den sammenheng defineres følgende beslutningsvariabler:

x = antall produserte stresslesser per dag av type 1

y = antall produserte stresslesser per dag av type 2

Anta at avdelingen til Ekornes som driver med produksjon av disse stolene har begrenset med ressurser. Arbeidsstyrken de rår over har 24 timer disponibelt til produksjon av komponenter per dag, 16 timer til montering per dag og kun 9 timer til pakking per dag. Disse **restriksjonene** kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$3x + 2y \leq 24 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (8.383)$$

$$x + 2y \leq 16 \quad (\text{montering}) \quad (8.384)$$

$$x + y \leq 9 \quad (\text{pakking}) \quad (8.385)$$

I tillegg til dette må selvsagt også beslutningsvariablene være positive, dvs. $x \geq 0$ og $y \geq 0$.



Figure 8.12: Stressless.

Anta videre at fortjenesten $F(x, y)$ til Ekornes ved salg av slike stoler er gitt ved:

$$F(x, y) = 4000x + 3000y \quad (8.386)$$

Denne funksjonen er gitt i norske kroner (NOK).
Ekornes ønsker å **maksimere** denne fortjenesten.

- a) Hvor lang tid tar det å **produsere komponentene** til en stol av type 1? Og type 2?
Hvor lang tid tar det å **montere** en stol av type 1? Og type 2? ³⁰

Løsning:

Fra lign.(8.383) i oppgavesettet ser vi at det tar **3 timer** å produsere komponentene til en stol av type 1.

For type 2 tar det **2 timer**.

ra den midterste ligningen i lign.(8.384) i oppgavesettet ser vi at det tar **1 time** å montere en stol av type 1.

Det tar **2 timer** å montere en stol av type 2.

³⁰I denne oppgaven skal du ikke regne deg frem til svaret. Bare skriv svaret rett ned.

- b) Gjør om ulikhetene i lign.(8.383) - (8.385) til likheter og vis at restriksjonene kan skrives

$$y(x) = 12 - \frac{3}{2}x \quad (8.387)$$

$$y(x) = 8 - \frac{1}{2}x \quad (8.388)$$

$$y(x) = 9 - x \quad (8.389)$$

hvor y er en funksjon av x .

Løsning:

Gjør om ulikhetene til likheter:

$$3x + 2y = 24 \quad (\text{produksjon av komponenter}) \quad (8.390)$$

$$x + 2y = 16 \quad (\text{montering}) \quad (8.391)$$

$$x + y = 9 \quad (\text{pakking}) \quad (8.392)$$

Flytter over x på andre siden:

$$2y = 24 - 3x \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{2} \quad (8.393)$$

$$2y = 16 - x \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{2} \quad (8.394)$$

$$y = 9 - x \quad (8.395)$$

Løser ut y alene:

$$y(x) = 12 - \frac{3}{2}x \quad (8.396)$$

$$y(x) = 8 - \frac{1}{2}x \quad (8.397)$$

$$y(x) = 9 - x \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (8.398)$$

- c) I vedlegget helst bakerst i oppgavesettet finner du tre verditabeller og ett koordinatsystem. Fyll ut verditabellene og plott lign.(8.387), (8.388) og (8.389) i dette koordinatsystemet.³¹

Løsning:

Verditabell: ³²

x	0	2	4	8
y(x)	12	9	6	0

x	0	6	12	16
y(x)	8	5	2	0

x	0	4	6	9
y(x)	9	5	3	0

Figure 8.13: Verditabeller.

³¹Husk at vedlegget skal legges ved i din eksamensbesvarelse.

Husk også å skrive inn ditt kandidatnummer på vedlegget.

³²Strengt tatt behøver man ikke mer enn 2 punkter i en verditabell for å bestemme en rett linje.

Men av “sikkerhetsmessige” grunner er det svært lurt å ta flere enn to punkt, f.eks. 4 punkter slik som i verditabellene ovenfor.

Plott:

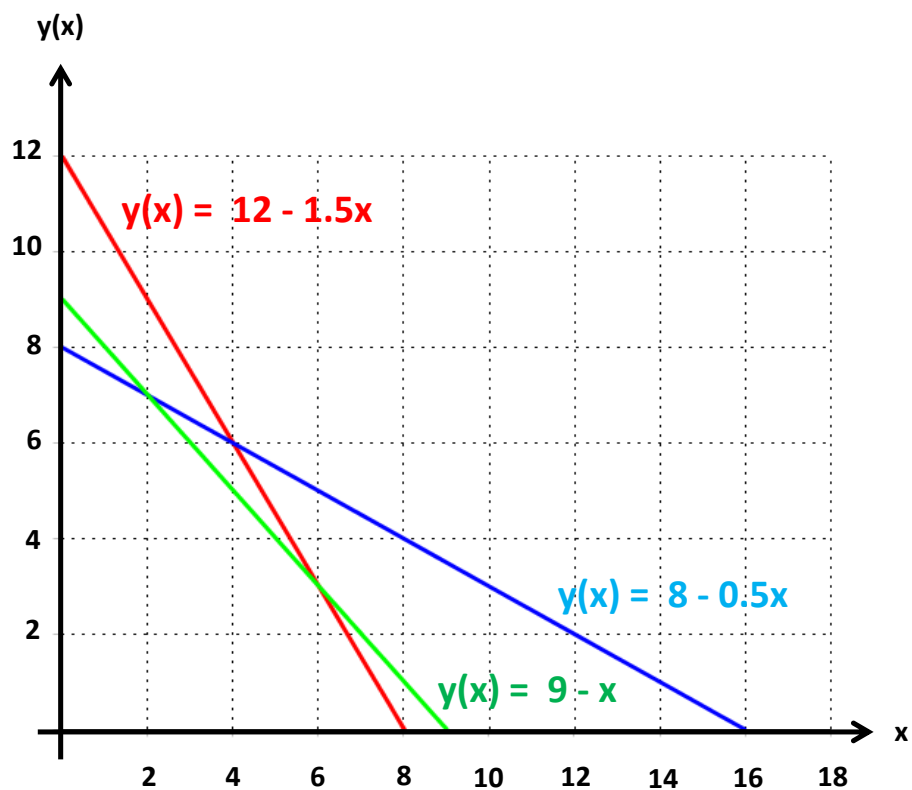


Figure 8.14: Plott av de lineære lign.(8.396), (8.397) og (8.398).

- d) Skriver det området i figuren som tilfredsstiller alle restriksjonene.

Løsning:

Området i figuren som oppfyller alle restriksjonene:

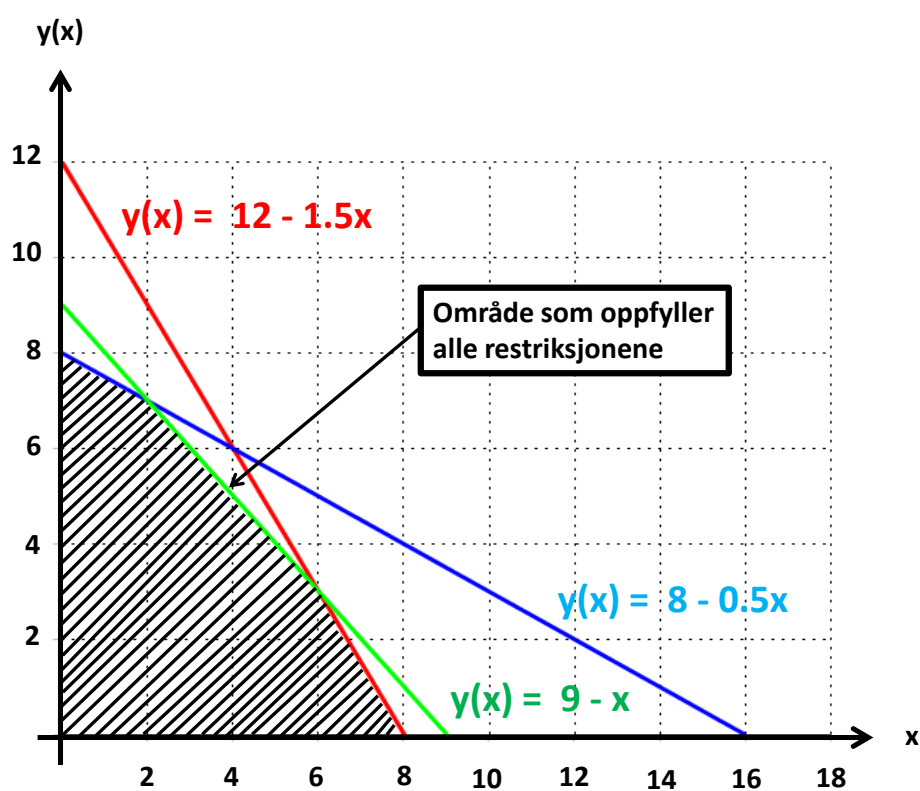


Figure 8.15: Området som oppfyller alle ulikhetene.

- e) Er det noen av de tre ressursene som ikke er en begrensende ressurs for noen mulige kombinasjoner av x og y ? Gi en *kort* begrunnelse.

Løsning:

Alle tre linjene beskrevet at ressursrestriksjonene i lign.(8.396), (8.397) og (8.398) grenser mot det skraverte området, se figur 8.15.

Derfor:

Alle tre ressursene er en begrenset ressurs for noen mulige kombinasjoner x og y .

33

³³Med **mulige** kombinasjoner av x og y menes da alle mulige kombinasjoner innen det **skraverte** området.

Fortjenesten i lign.(8.386) skal **maksimeres** under restriksjonene beskrevet av lign.(8.383). Dette er et LP optimaliseringsproblem som kan løses grafisk.

- f) Indiker alle *hjørneløsninger* på figuren fra oppgave c).

Løsning:

Indikerer alle “hjørneløsninger”:

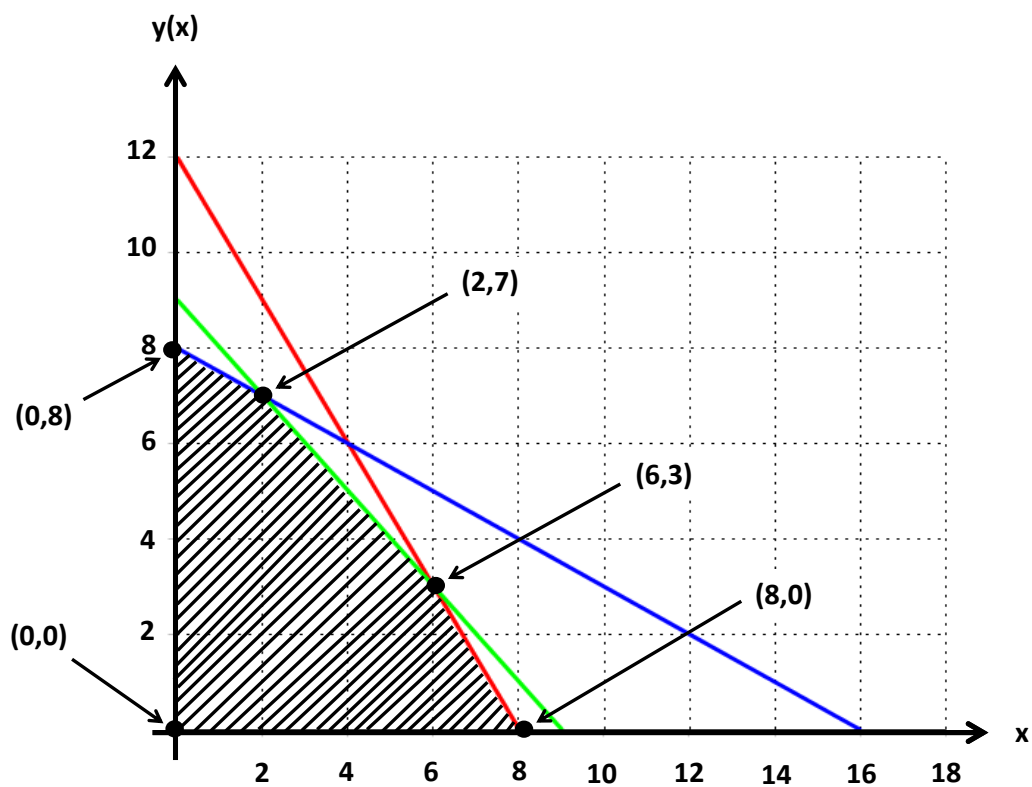


Figure 8.16: Hjørneløsninger.

- g) Les av alle hjørneløsninger ³⁴ fra grafen og regn ut tilhørende fortjenester $F(x, y)$.

Løsning:

Fortjenesten $F(x, y)$ ved hjørnepunktene: ³⁵

$$\underline{\underline{F(0,0)}} = (4000 \cdot 0 + 3000 \cdot 0) \text{ NOK} = \underline{\underline{0 \text{ NOK}}} \quad (8.399)$$

$$\underline{\underline{F(0,8)}} = (4000 \cdot 0 + 3000 \cdot 8) \text{ NOK} = \underline{\underline{24\,000 \text{ NOK}}} \quad (8.400)$$

$$\underline{\underline{F(2,7)}} = (4000 \cdot 2 + 3000 \cdot 7) \text{ NOK} = \underline{\underline{29\,000 \text{ NOK}}} \quad (8.401)$$

$$\underline{\underline{F(6,3)}} = (4000 \cdot 6 + 3000 \cdot 3) \text{ NOK} = \underline{\underline{33\,000 \text{ NOK}}} \quad (8.402)$$

$$\underline{\underline{F(8,0)}} = (4000 \cdot 8 + 3000 \cdot 0) \text{ NOK} = \underline{\underline{32\,000 \text{ NOK}}} \quad (8.403)$$

- h) Hvilken kombinasjon av x og y gir *maksimal* fortjeneste $F(x, y)$?

Løsning:

Maksimal fortjeneste $F(x, y)$ når $x = 6$ og $y = 3$: $F(6, 3) = 33\,000 \text{ NOK}$

PS:

Legg merke til at selv om det er 5 hjørneløsninger så er det kun **èn** av dem som gir maksimal fortjeneste $F(x, y)$ i dette tilfellet.

■

³⁴Dvs. les av koordinatene (x, y) for alle hjørneløsninger.

³⁵Hjørnepunktene er ikke alltid enkelt å finne eksakt eksakt når man bare leser av figuren. Derfor godtas svar som er i nærheten.

Vedlegg

Kandidatnummer: _____

(skriv inn ditt kandidatnummer her)

x	0	2	4	8
y(x)				

x	0	6	12	16
y(x)				

x	0	4	6	9
y(x)				

