

1.2 Mengdelære

Mengdelære er den matematiske teorien om mengder, som representerer samlinger av abstrakte objekter.

1.2.1 Endelige mengder

Definisjon 1.2.1 — Endelig mengde

En **endelig mengde** M er en samling av forskjellige elementer $a_1, a_2, \dots, a_n$ omringet av klammeparentes:

$$M = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \} \quad (1.23)$$

hvor n er antall elementer i mengden.

■ **Eksempel 1.3** Noen eksempler på **endelige** mengder:

$$\{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.24)$$

$$\{ a, b, c, d \} \quad (1.25)$$

$$\{ \text{rød, grønn, gul, blå} \} \quad (1.26)$$

$$\{ \pi, 5.32423, \text{bil}, x^2 \} \quad (1.27)$$

■

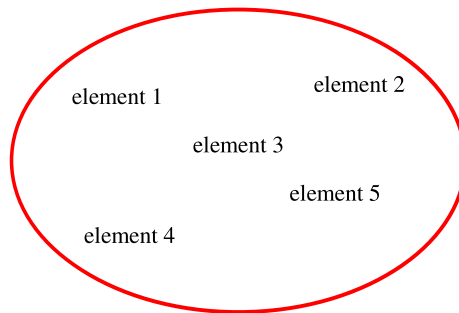
K Legg merke til at et element ikke kan forekomme to ganger i mengden, f.eks. har vi at

$$\{ 3, 6, 7, \textcolor{red}{9}, \textcolor{red}{9} \} = \{ 3, 6, 7, \textcolor{red}{9} \} \quad (1.28)$$

K Rekkefølgen til elementene spiller heller ingen rolle, f.eks. har vi at

$$\{ 7, 9, 3, 6 \} = \{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.29)$$

En mengde kan visualiseres som en sky med elementer i skyen, som vist i figur 1.1.



Figur 1.1: Visualisering av en mengde med 5 elementer.

Definisjon 1.2.2 — Den tomme mengden

Den **tomme mengden** $\emptyset$ er mengden med ingen elementer:

$$\emptyset = \{ \}$$

(1.30)

K Den tomme mengden $\emptyset$ er en svært viktig mengde, spesielt når vi ser på operasjoner mellom mengder som f.eks. snitt og union (mer om dette i kapittel 1.2.3).

I noen situasjoner kan rekkefølgen være viktig for oss.

I slike situasjoner er det ikke hensiktsmessig å bruke mengder siden rekkefølgen i elementene i en mengde ikke spiller noen rolle.

Vi trenger derfor en annen størrelse enn mengder - n -tuppler.

■ Eksempel 1.4 — rekkefølge

Vi må skille mellom koordinatene i et kart, hvor første element er *lengdegraden* og andre koordinat er *breddegraden*.

Anta vi oppgir posisjonen vår som to tall i en vanlig mengde:

$$\text{posisjon} = \{ 2345.3234, 45635.23453 \} \quad (1.31)$$

Siden rekkefølgen ikke har noe å si i en mengde, er det umulig for oss å vite hvilket tall er hvilken koordinat.

Hvordan vet vi hvilket tall er *breddegraden* og hvilket er *lengdegraden*?

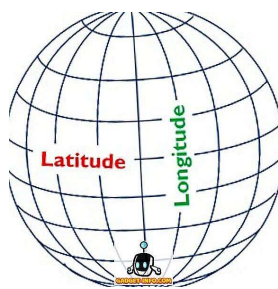
Løsning:

Løsningen er at vi bytter ut *klammetegnene* med *parenteser*:

$$\text{posisjon} = (2345.3234, 45635.23453) \quad (1.32)$$

altså

$$\text{posisjon} = (\text{lengdegrad}, \text{breddegrad}) \quad (1.33)$$



Figur 1.2: *Breddegrad* og *lengdegrad*.

■

Parentesene i lign.(1.32) kalles en 2-tupple, og er en endelig mengde hvor *rekkefølgen* faktisk spiller inn.

Definisjon 1.2.3 — n -tupple

En **n -tupple** er en mengde T av n elementer $a_1, a_2, \dots, a_n$ hvor element a_k kommer før element a_{k+1} for alle $k = 1, 2, \dots, n-1$. En n -tupple T skrives

$$T = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1.34)$$

dvs. klammeparenteser er byttet ut med vanlige parenteser.

K Vi sier ofte bare en *tupple* dersom n er underforstått fra konteksten eller at det er ikke viktig for konteksten.

K **Rekkefølgen** til elementene i en tupple spiller en rolle:

$$(7, 9, 3, 6) \neq (3, 6, 7, 9) \quad (1.35)$$

K Elementet a_k på plass nr. k i en tupple kalles **koordinaten** på plass nr. k :

$$(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) \quad (1.36)$$

$\uparrow$
 koordinat nr. k

Definisjon 1.2.4 — Endelig **kardinalitet - antall elementer i en mengde**

La mengde M være

$$M = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \} \quad (1.37)$$

hvor n er antall elementer i mengden. **Antall elementer** n i mengden M kalles **kardinaliteten** til M . Vi skriver

$$|M| = n \quad (1.38)$$

dersom kardinaliteten til M er n .

■ **Eksempel 1.5** Eksempel på **kardinaliteten** til mengder:

$$|\{ 3, 6, 7, 9 \}| = 4 \quad (1.39)$$

$$|\{ a, b, c, d, e \}| = 5 \quad (1.40)$$

$$|\emptyset| = 0 \quad (1.41)$$

$$|\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \}| = 11 \quad (1.42)$$

$$|(x, y, z)| = 3 \quad (1.43)$$

■

For å si om et element a er i en gitt mengde M eller ikke, bruker vi symbolet $\in$ som uttales ”**er element av**”.

Definisjon 1.2.5 — Er element av - $\in$

La M være en vilkårlig mengde. Dersom a er **et element av** mengden M skriver vi

$$a \in M \quad (1.44)$$

(K) Dersom et element a **ikke** er i mengden M , skriver vi $a \notin M$.

(K) Vi bruker ofte $\in$ dersom vi skal referere til et **vilkårlig** element i en mengde. Vi sier ofte:

$$\text{”La } a \in M \text{ være et vilkårlig element i mengden } M\text{...”} \quad (1.45)$$

■ **Eksempel 1.6** Eksempel på bruk av $\in$:

$$3 \in \{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.46)$$

$$1 \notin \{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.47)$$

■

1.2.2 Delmengder

Delmengder av mengder er en svært viktig måte å konstruere nye mengder på ved hjelp av eksisterende mengder.

Definisjon 1.2.6 — Delmengde - $\subseteq$

La M være en vilkårlig mengde. En mengde N er en **delmengde** av M dersom ethvert element i N også er et element i M . Vi skriver

$$N \subseteq M \tag{1.48}$$

dersom N er en delmengde av M .

■ Eksempel 1.7 Eksempel på **delmengder**:

$$\{ 3, 6 \} \subseteq \{ 3, 6, 7, 9 \} \tag{1.49}$$

$$\{ x \} \subseteq \{ x, y, z \} \tag{1.50}$$

$$\emptyset \subseteq M \quad \text{for alle mengder } M. \tag{1.51}$$

$$M \subseteq M \quad \text{for alle mengder } M. \tag{1.52}$$

■



Legg merke til at den tomme mengden $\emptyset$ er alltid en delmengde av enhver mengde og at en mengde er alltid en delmengde av seg selv.

Vi skal nå introdusere en måte å konstruere delmengder av en gitt mengde M , ved å bruke et *logisk utsagn* som *restrikerer* hvilke elementer som tilhører delmengden. La f.eks. M være gitt ved:

$$M = \{ 3, 6, 7, 9 \} \quad (1.53)$$

Vi ønsker å lage delmengden N hvis elementer oppfyller følgende logiske utsagn:

$$N = \{ \text{hvert element } x \in M \text{ slik at } x < 5 \} \quad (1.54)$$

Ved å se på elementene i M , vet vi at $N = \{ 3 \}$, men tanken her er å uttrykke N ved å bruke et logisk uttrykk istedet for å skrive opp elementene eksplisitt. Vi innfører følgende notasjon:

$$N = \{ x \in M \mid x < 5 \} \quad (1.55)$$

Vi leser dette uttrykket som:

$$N = \{ \underbrace{\text{alle elementer } x \text{ ifra } M}_{x \in M} \mid \underbrace{\text{slik at}}_{\text{logisk utsagn om } x \text{ er oppfylt}} \underbrace{x < 5}_{\text{logisk utsagn om } x \text{ er oppfylt}} \} \quad (1.56)$$

Definisjon 1.2.7 — Konstruksjon av **delmengder** via logiske utsagn

La M være en vilkårlig mengde. La $x \in M$ være et vilkårlig element i M .
La $p(x)$ være et logisk utsagn om elementet x . Da er

$$N = \{ x \in M \mid p(x) \} \quad (1.57)$$

delmengden av M som består av alle x i M som gjør utsagnet $p(x)$ sant.

■ **Eksempel 1.8** La $M = \{ 3, 6, 7, 9 \}$. Eksempel på konstruerte delmengder via logiske utsagn:

$$N_1 = \{ x \in M \mid \overbrace{x = 3 \vee x = 6}^{p(x)} \} = \{ 3, 6 \} \quad (1.58)$$

$$N_2 = \{ x \in M \mid x \leq 5 \} = \{ 3 \} \quad (1.59)$$

$$N_3 = \{ x \in M \mid x^2 \geq 8 \} = M \quad (1.60)$$

$$N_4 = \{ x \in M \mid x \leq 0 \vee x \geq 10 \} = \emptyset \quad (1.61)$$

■

 Vi tenker gjerne på utsagnet $p(x)$ som en *restriksjon* på elementene i M .

1.2.3 Mengdeoperasjoner

Mengdeoperasjoner brukes til å konstruere nye mengder fra to gitte mengder A og B . De er nært koblet mot de logiske konnektivene *og*, *eller* og *ikke*.

I denne fremstillingen skal vi anta at mengdene A og B delmengder av en *universmengde* Ω .² Vi antar i alle eksemplene under at $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$.

Definisjon 1.2.8 — Snittet mellom to mengder

Snittet $A \cap B$ mellom A og B er mengden hvis elementer både er elementer i A *og* i B :

$$A \cap B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in B \} \quad (1.62)$$

■ Eksempel 1.9 — snitt

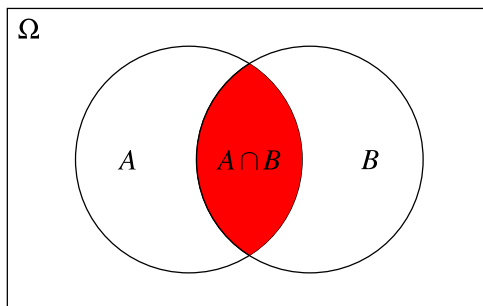
La $A = \{ 3, 6, 7, 9 \}$ og $B = \{ 1, 3, 7, 8, 10 \}$.

Da er **snittet** $A \cap B$ de tallene som både er i A og i B :

$$A \cap B = \{ 3, 7 \} \quad (1.63)$$

■

Figur 1.3 viser et såkalt *Venn-diagram* hvor hver mengde representeres som et *areal* i planet. Figuren illustrerer hvordan snittet tilsvarende det arealet hvor A og B *overlapper*.



Figur 1.3: Venn-diagram av **snittet** $A \cap B$ mellom to mengder A og B .

²Man kan velge å ha med en universmengde som representerer mengden man jobber i. En slik situasjon hvor man har en universmengde forekommer nesten alltid i matematiske analyser.

Hvis vi i definisjon 1.2.8 bytter ut og-konnektivet med eller, får vi *unionen* istedet for snittet mellom to mengder.

Definisjon 1.2.9 — **unionen** mellom to mengder

La A og B være to vilkårlige mengder. **Unionen** $A \cup B$ mellom A og B er mengden hvis elementer enten er elementer i A *eller* i B :

$$A \cup B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \vee x \in B \} \quad (1.64)$$

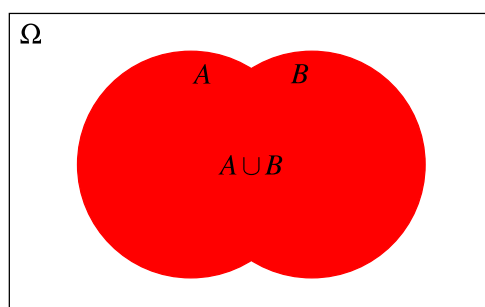
■ **Eksempel 1.10** La $A = \{ 3, 6, 7, 9 \}$ og $B = \{ 1, 3, 7, 8, 10 \}$.

Da er unionen $A \cup B$ de tallene som enten er i A eller i B :

$$A \cup B = \{ 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 \} \quad (1.65)$$

■

Figur 1.4 viser igjen *Venn-diagrammet* for A og B som illustrerer hvordan unionen tilsvare det *totale* arealet dekt av A og B .



Figur 1.4: Venn-diagram av **unionen** $A \cup B$ mellom to mengder A og B .

Komplementet til en mengde A består av de elementene som *ikke* er elementer i A .

Definisjon 1.2.10 — komplementet til en mengde

La A være en vilkårlige mengde.

Komplementet $\bar{A}$ til mengden A er mengden hvis elementer *ikke* er i A :

$$\bar{A} = \{ x \in \Omega \mid x \notin A \} \quad (1.66)$$

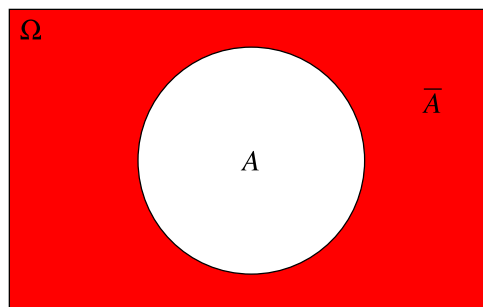
■ Eksempel 1.11 La $A = \{ 3, 7 \}$

Da er komplementet $\bar{A}$ de tallene i Ω som *ikke* er i A :

$$\bar{A} = \{ 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10 \} \quad (1.67)$$

■

Figur 1.5 viser *Venn-diagrammet* som illustrerer hvordan komplementet $\bar{A}$ tilsvarer arealet *ikke* dekt av A .



Figur 1.5: Venn-diagram av **komplementet** $\bar{A}$.

Differansen mellom to mengder består av de elementene som er i den ene mengden som *ikke* er i den andre.

Definisjon 1.2.11 — differansen mellom to mengder

Differansen $A - B$ mellom A og B er mengden hvis elementer er i A som *ikke* er i B :

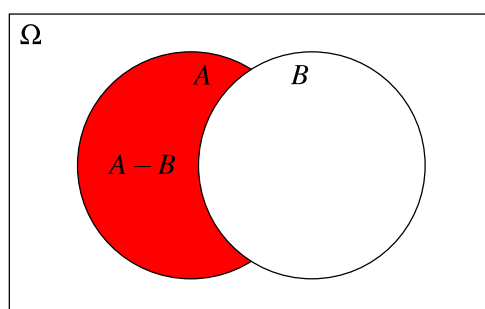
$$A - B = \{ x \in A \mid x \notin B \} \quad (1.68)$$

■ **Eksempel 1.12** La $A = \{ 3, 6, 7, 9 \}$ og $B = \{ 1, 3, 7, 8, 10 \}$. Da er differansen $A - B$ de tallene som er i A som ikke er i B :

$$A - B = \{ 6, 9 \} \quad (1.69)$$

■

Figur 1.6 viser igjen Venn-diagrammet for A og B som illustrerer hvordan **differansen** tilsvarer det arealet av A som ikke er dekt av B .



Figur 1.6: Venn-diagram av **differansen** $A - B$ mellom to mengder A og B .

Dersom vi har to mengder A og B som *ikke overlapper* med hverandre, kalles de disjunkte.

Definisjon 1.2.12 — Disjunkte mengder

To mengder A og B er disjunkte dersom

$$A \overset{\text{og}}{\cap} B = \emptyset \quad (1.70)$$

Eksempel 1.13 — disjunkte mengder

La $A = \{ 3, 6, 7, 9 \}$ og $B = \{ 1, 8, 10 \}$. Siden det er *ingen overlappende* elementer i A og B er snittet tomt:

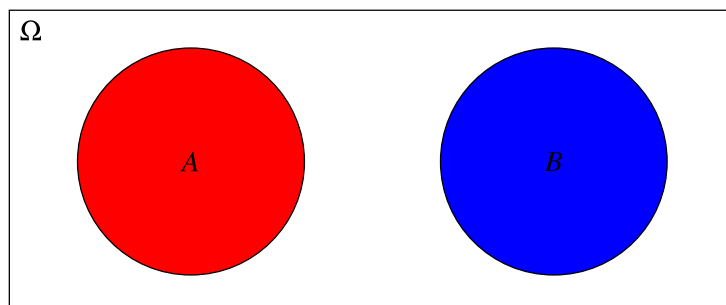
$$A \cap B = \emptyset \quad (1.71)$$

Dermed konkluderer vi at A og B er disjunkte. ■

(K) Disjunkte mengder er et viktig begrep i matematikk og dukker opp flere i ulike situasjoner.

(K) Legg merke til at dersom to A og B er *disjunkte*, så vil unionen representere *summen* av arealene i figur 1.7.

Figur 1.7 viser igjen *Venn-diagrammet* for A og B som illustrerer godt hvordan differansen tilsvarer det arealet av A som ikke er dekt av B .



Figur 1.7: A og B er **disjunkt**.

1.2.4 Uendelige mengder

Uendelighet er kanskje det mest omstridte begrepet vi har i matematikken (og kanskje vitenskap som sådan). Uendelighet er et svært komplekst begrep i tillegg og gjør matematikken raskt svært abstrakt.

Et av hovedspørsmålene på 1800-1900-tallet var om det i det hele tatt *finnes* uendelige mengder. Hvis vi ser på universet og naturen rundt oss, så finner vi ingen bevis på at noe er uendelig. Trenger vi da uendelige mengder? Og hva *er* en uendelig mengde. Spørsmålene blir fort abstrakte og matematiske spørsmål går over til filosofiske spørsmål som f.eks.:

Er tiden uendelig?

Vi kan fort bli fristet til å svare ”*Ja, selvfølgelig!*”, men har vi noe bevis for det? Hvordan vet vi at tiden ikke stopper opp en gang?

Flere motstridende paradokser dukket opp i forbindelse med uendelige mengder og vitenskapen var splittet, men til slutt ble det en enighet om at uendelig mengder *finnes*. Men siden dette ikke kan bevises, ble eksistensen av uendelige mengder beskrevet som et *postulat*.³

Setning 1.2.1 — Postulat: Eksistens av uendelig mengder.

Det *finnes* mengder med *uendelig* antall elementer.

Nå som vi har blitt enige om at uendelige mengder finnes, kan vi trivielt beskrive hva en uendelig mengde faktisk er:

Definisjon 1.2.13 — Uendelig mengde

En mengde som ikke er endelig er uendelig.

I neste avsnitt definerer vi de mest kjente uendelige tallmengdene.

³Et *postulat*, også kalt et *aksiom*, er en setning man tar for gitt, *uten bevis*. Matematikken har flere andre postulater som er grunnsteinene for videre deduksjon. I geometri er f.eks. den åpenbare setningen ”*Korteste avstand mellom to punkter i rommet er en linje*” ofte satt opp som et postulat, og ikke et avledet resultat teorem.

1.2.5 Fundamentale tallmengder

Noen fundamentale **tallmengder**:

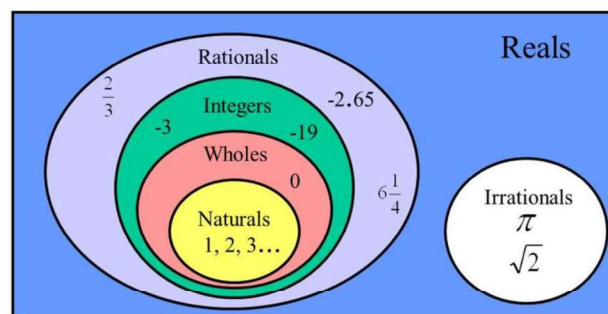
$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \} \quad (\text{naturlige tall}) \quad (1.72)$$

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \} \quad (\text{hele tall}) \quad (1.73)$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{rasjonale tall}) \quad (1.74)$$

$$\mathbb{R} = \text{mengden av reelle tall} \quad (\text{alle tall på tall-linja}) \quad (1.75)$$

- K** Legg merke til at de naturlige tallene, $\mathbb{N}$ *ikke* inkluderer tallet **0**. Dette er mer enn **konvensjon** enn et faktum. I mange situasjoner er 0 inkludert i de naturlige tallene.
- K** De **reelle** tallene kan ses på som alle desimaltallene med **uendelig mange desimaler**. Lign.(1.75) gir ingen eksplisitt definisjon av de reelle tallene, siden det er utenom rammene for dette kompendiet.
- K** Lign.(1.75) gir ingen eksplisitt definisjon av de reelle tallene, siden den er utenom rammene for dette kompendiet.
- K** Som vist i figur 1.8, ser vi at de mindre tallmengdene er delmengder av de større, dvs. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.



Figur 1.8: Tallmengder: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

1.2.6 Intervaller

Alle tallmengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er *ordnede* mengder i den forstand at dersom vi har to tall a og b , så kan vi alltid bestemme om $a \leq b$.

Alle tallene som ligger mellom to vilårlige tall a og b kalles et intervall. Vi har fire typer intervaller avhengig av om endepunktene a og b er med eller ikke.

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \quad (\text{alle reelle tall mellom } a \text{ og } b) \quad (1.76)$$

(lukket intervall)

$$\langle a, b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \quad (\text{ingen endepunkt mellom } a \text{ og } b) \quad (1.77)$$

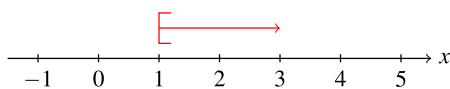
(åpent intervall)

$$\langle a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} \quad (\text{kun endepunktet } b \text{ er med mellom } a \text{ og } b) \quad (1.78)$$

(halvåpent intervall)

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \quad (\text{kun endepunktet } a \text{ er med mellom } a \text{ og } b) \quad (1.79)$$

(halvåpent intervall)



Figur 1.9: Intervallet $[1, 3)$ på tallinjen $\mathbb{R}$.