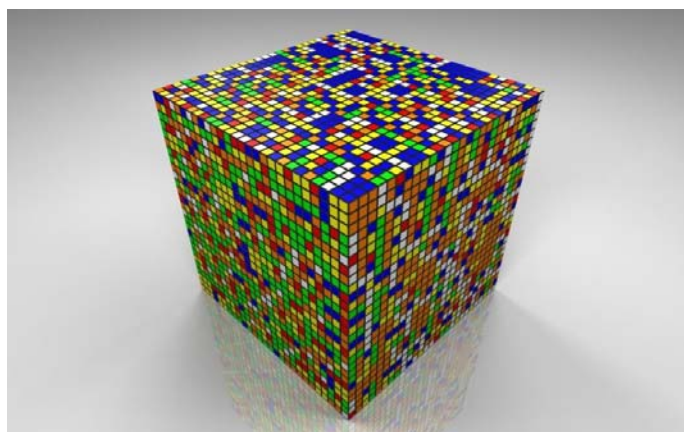


2. Kombinatorikk



2.1 Koblinger

Definisjon 2.1.1 — koblinger

Koblinger = forhold som gjør at et bestemt valg kan **påvirke** utfallet av **andre** valg vi skal gjøre.

Grunnprinsipp i kombinatorikk: (**antagelse**)

Ingen kobling mellom mellom valgmulighetene. (Med koblinger blir det fort vanskelig).

■ Eksempel 2.1 — gutter og jenter

I en klasse er det 1 gutt og 15 jenter. Vi skal velge et par, en jente og en gutt. Dersom valget av jenta ikke påvirker valget av gutten, så er:

$$\text{antall mulige valg} = 1 \cdot 15 = 15 \quad (2.1)$$

Altså det er 15 mulige forskjellige par i klassen.

■

■ Eksempel 2.2 — gutter og jenter

I en klasse er det 2 gutter og 15 jenter. Vi skal velge et par, en jente og en gutt. Dersom valget av jenta ikke påvirker valget av gutten, så er:

$$\text{antall mulige valg} = 2 \cdot 15 = 30 \quad (2.2)$$

Altså det er 30 mulige forskjellige par i klassen.

■



Figur 2.1: Gutter og jenter.

■ Eksempel 2.3 — fotballtipping

I fotballtipping er det 3 muligheter, H, U og B. Det er 12 kamper på en kupong.

$$\text{antall mulige valg} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{12 \text{ stk.}} = 3^{12} = 531\,441 \quad (2.3)$$

(Dette er et eksempel på et **ordnet** utvalg **med** tilbakelegging.

I neste avsnitt kaller vi dette “situasjon 1”).

■

	1	2	3	4	5	6
1. Southampton - Manchester C	X	U	B	H	U	B
2. Chelsea - Wigan	X	U	B	H	U	B
3. Sunderland - Arsenal	H	U	X	H	U	B
4. Norwich - Fulham	H	X	B	H	U	B
5. Swansea - Queens Park R	X	U	B	H	U	B
6. Stoke - Reading	X	U	B	H	U	B
7. Huddersfield - Cardiff	H	X	B	H	U	B
8. Bolton - Burnley	X	U	B	H	U	B
9. Blackpool - Millwall	X	U	B	H	U	B
10. Wolverhampton - Leeds	H	X	B	H	U	B
11. Charlton - Birmingham	H	X	B	H	U	B
12. Blackburn - Ipswich	X	U	B	H	U	B

Figur 2.2: Tippekupong.

Eksemplet på forrige side kan vi *generalisere*:

Kombinasjoner: (uten koblinger)

Dersom vi har

$$\begin{aligned} m_1 &= \text{antall muligheter i valg nr. 1} \\ m_2 &= \text{antall muligheter i valg nr. 2} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ m_N &= \text{antall muligheter i valg nr. } N \end{aligned} \tag{2.4}$$

da er

$$\text{antall mulige kombinasjoner} = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots m_N \tag{2.5}$$

2.2 4 situasjoner (endelig populasjon)

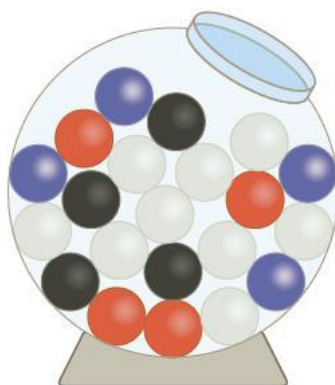
Det kan være vanskelig å telle opp antall elementer i utfallsrommet. Men dersom:

- **uniformt** utfallsrom
- utfallene ikke påvirker hverandre, dvs. de er **uavhengige**

så kan derfor ofte lønne seg å bruke

“**urnemodellen**”

- (K) At utfallsrommet er uniformt i forbindelse med urnemodellen betyr at samme sannsynlighet for å trekke kulene i urnen. Altså kulene er **like store**.
- (K) At valgmulighetene er uavhengige i forbindelse med urnemodellen betyr at kulene i urnen er **uavhengige**. Altså kulene er **ikke koplet** på noen måte

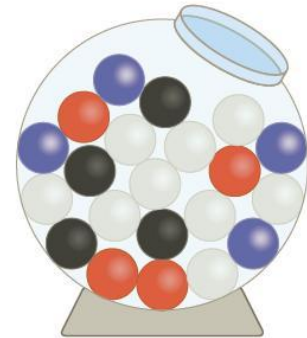


Figur 2.3: Urne.

Tenk deg at alle mulige utfall av et eksperiment er representert ved kuler som ligger i en urne. Så trekker vi kuler etter tur.

Da må vi skille mellom:

- er det trekking **med** eller **uten** tilbakelegging?
- betyr det noe i hvilken **rekkefølge** kulene trekkes?



	trekning	
	m/tilbakelegging	u/tilbakelegging
ordnet	situasjon 1	situasjon 2
ikke-ordnet	situasjon 4 (forekommer sjelden)	situasjon 3

Figur 2.4: **4 situasjoner** for urnemodellen.

1) **Ordnet utvalg med tilbakelegging:** (situasjon 1)

- rekkefølge har **betydning**: 1, 3 er forskjellig fra 3, 1
- legger tilbake trukket element
- kombinasjonen 1, 1 er da fullt mulig, dvs. et element kan være med flere ganger

2) **Ordnet utvalg uten tilbakelegging:** (situasjon 2)

- rekkefølge har **betydning**: 1, 3 er forskjellig fra 3, 1
- legger ikke tilbake trukket element
- kombinasjonen 1, 1 er da umulig, dvs. ingen element kan være med flere ganger

3) **Ikke-ordnet utvalg uten tilbakelegging:** (situasjon 3)

- rekkefølge har ikke betydning: 1, 3 er samme som 3, 1
- legger ikke tilbake trukket element
- kombinasjonen 1, 1 er da umulig, dvs. ingen element kan være med flere ganger

4) **Ikke-ordnet utvalg med tilbakelegging:** (situasjon 4)

- rekkefølge har ikke betydning: 1, 3 det samme som 3, 1
- legger tilbake trukket element
- kombinasjonen 1, 1 er da fullt mulig, dvs. element kan være med flere ganger

■ **Eksempel 2.4 — (situasjon 1) (ordnet utvalg med tilbakelegging)**

Hvor mange måter kan vi velge ut $s = 5$ personer på fra en gruppe på $N = 20$?
 Med tilbakelegging.

Anta at alle $N = 20$ personene har et nummer, og at rekkefølgen betyr noe.

Løsning:

$$\# \text{ ordnede komb. m/tilbakelegging} = \underbrace{20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20}_{5 \text{ ledd}} = \underbrace{20^5}_{\text{generaliseres lett}} = 3\,200\,000 \quad (2.6)$$

■

Eks. i forrige avsnitt, “fotballtipping”, er også et eksempel på situasjon 1 (med $N = 3$ og $s = 12$).

Generelt gjelder: (situasjon 1)

$$\# \text{ ordnede komb. m/tilbakelegging} = N \cdot N \cdot \dots \cdot N = N^s \quad (2.7)$$

hvor

$$N = \text{totalt antall valgobjekter} \quad (2.8)$$

$$s = \text{antall objekter som velges} \quad (2.9)$$

■ **Eksempel 2.5 — (situasjon 2) (ordnet utvalg uten tilbakelegging)**

Hvor mange måter kan vi velge ut $s = 5$ personer på fra en gruppe på $N = 20$? Uten tilbakelegging.

Anta at alle $N = 20$ personene har et nummer, og at rekkefølgen betyr noe.

Løsning:¹

$$\# \text{ ordnede komb. u/tilbakelegging} = \underbrace{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}_{5 \text{ ledd}} = \underbrace{\frac{20!}{(20-5)!}}_{\text{generaliseres lett}} = 1\,860\,480 \quad (2.10)$$

■

Generelt gjelder: (situasjon 2)

$$\# \text{ ordnede komb. u/tilbakelegging} = N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-s+1) = \frac{N!}{(N-s)!} \quad (2.11)$$

hvor

$$N = \text{totalt antall valgobjekter} \quad (2.12)$$

$$s = \text{antall objekter som velges} \quad (2.13)$$

¹Fakultet: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. I tillegg så definerer vi $0! = 1$ og $1! = 1$.

■ **Eksempel 2.6 — (situasjon 3) (ikke-ordnet utvalg uten tilbakelegging)**

Hvor mange måter kan vi velge ut $s = 5$ personer på fra en gruppe på $N = 20$? Uten tilbakelegging.

Rekkefølgen betyr *ikke* noe.

Løsning:

$$\# \text{ ordnede komb. u/tilbakelegging} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1\,860\,480 \quad \left(= \frac{20!}{(20-5)!} \right) \quad (2.14)$$

Hver gang vi velger ut 5 personer så kan disse personene ordnes på $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ forskjellige måter/("rekkefølge"). Antall **ikke-ordnede** kombinasjoner blir derfor:

$$\begin{aligned} \# \text{ ikke-ordnede komb. u/tilbakelegging} &= \frac{\# \text{ ordnede komb. u/tilbakelegging}}{\# \text{ måter å sortere på}} \\ &= \frac{1\,860\,480}{120} = \frac{20!}{\underbrace{(20-5)! 5!}_{\text{generaliseres lett}}} = 15\,504 \end{aligned} \quad (2.15)$$

■

Generelt gjelder: (situasjon 3)

$$\# \text{ ikke-ordnede komb. u/tilbakelegging} = \frac{N!}{(N-s)! s!} \equiv \underbrace{\binom{N}{s}}_{\text{binomialkoeff.}} \quad (2.16)$$

hvor

$$N = \text{totalt antall valgobjekter} \quad (2.17)$$

$$s = \text{antall objekter som velges} \quad (2.18)$$

$$\frac{N!}{(N-s)! s!} \equiv \underbrace{\binom{N}{s}}_{\text{binomialkoeff.}} \quad ("N \text{ over } s") \quad (2.19)$$

■ Eksempel 2.7 — (situasjon 4) (ikke-ordnet utvalg *med* tilbakelegging)

Komplisert situasjon. Forekommer sjelden.

Denne situasjonen, dvs. situasjon 4, er ikke et stort tema i dette kurset.

■

Oppsummering av de 4 siste eksemplene:

	trekning	
	m/tilbakelegging	u/tilbakelegging
ordnet	situasjon 1: 3.2 mill.	situasjon 2: 1.86 mill.
ikke-ordnet	situasjon 4 (forekommer sjelden)	situasjon 3: 15 504

Figur 2.5: $N = 20$ og $s = 5$.

trekning		
	m/tilbakelegging	u/tilbakelegging
ordnet	Situasjon 1: # komb. = N^s	Situasjon 2: # komb. = $\frac{N!}{(N-s)!}$
ikke-ordnet	situasjon 4 (forekommer sjelden) (ikke pensum)	Situasjon 3: # komb. = $\binom{N}{s}$

Disse formlene gjelder for alle s : $s \geq 0$

N = antall elementer totalt

s = antall valgte elementer

$s=0$:

Ingen valgte elementer.

$s=1$:

Situasjon 1 = situasjon 2 = situasjon 3 = situasjon 4

(alle formlene reduserer seg til det samme: # komb. = N)

$s \geq 2$:

Formlene er forskjellige.

Figur 2.6: Antall kombinasjoner.

2.3 Binomialkoeffisienten

Egenskaper til binomialkoeffisienten $\binom{N}{s}$: (“N over s”)

$$\underbrace{\binom{N}{s}}_{\text{binomialkoeff.}} = \frac{N!}{(N-s)! s!} \quad (2.20)$$

hvor f.eks.

$$s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (s-2) \cdot (s-1) \cdot s \quad (2.21)$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \quad (2.22)$$

Legg merke til at

$$\binom{N}{0} = \frac{N!}{(N-0)! 0!} = 1 \quad (2.23)$$

$$\binom{N}{1} = \frac{N!}{(N-1)! 1!} = N \quad (2.24)$$

$$\binom{N}{N} = \frac{N!}{(N-N)! N!} = 1 \quad (2.25)$$

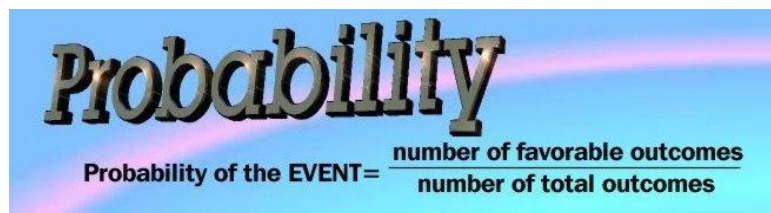
siden $0! = 1$.

2.4 Kombinatoriske sannsynligheter

La oss se på en **tellesituasjon** som kan beskrives med **urnemodellen**. I slike situasjoner er det en sammenheng mellom sannsynlighet og antall kombinasjoner:

La A tilsvare det å trekke kuler av en bestemt type fra urnen. Dette betyr at kulene representerer begivenheten A . Sannsynligheten for å trekke A er da gitt ved: ²

$$P(A) = \frac{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner for } A}{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner totalt}} \quad (2.26)$$



Figur 2.7: Sannsynlighet og telling.

²Dette er helt analogt med **tellesituasjonen** som vi diskuterte i kapittel 1. Se f.eks. eksempel 3 i kapittel 1.

■ Eksempel 2.8 — fond

Du velger å investere i 2 av i alt 4 ulike aksjefond. Det er ingen spesiell sammenheng mellom fondene. Derfor velger du fondene **tilfeldig**.

- 4 fond, 2 velges tilfeldig
- a) Hva er sannsynligheten for at du velger det beste fondet, dvs. $P(\text{beste fondet})$?
- b) Hva er sannsynligheten for at du velger de 2 beste fondene, dvs. $P(2 \text{ beste fondene})$?



Figur 2.8: Fond.

Løsning:

Siden

- **uniformt** utfallsrom
- utfallene ikke påvirker hverandre, dvs. de er **uavhengige**

så kan denne tellesituasjonen beskrives ved “**urnemodellen**”.

Den generelle sammenhengen mellom en slik telling og sannsynlighet er, se lign.(2.26):

$$P(A) = \frac{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner for } A}{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner totalt}} \quad (2.27)$$

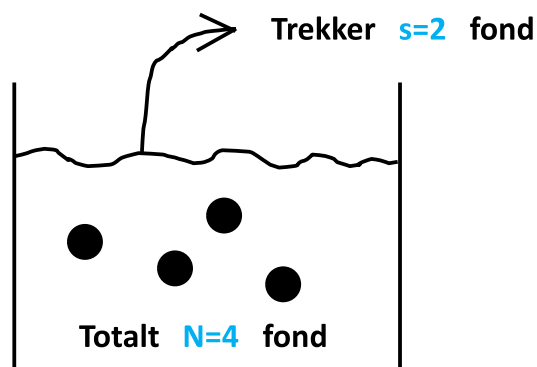
for en gitt begivenhet A .

Er dette situasjon 1, 2, 3 eller 4?

Det er totalt $N = 4$ fond. Du velger å investere i $s = 2$ av disse fondene. Det er ingen avhengighet mellom fondene. Derfor spiller ikke rekkefølgen vi trekker fondene på noen rolle. Når et fond er trukket så kan fondet ikke trekkes på nytt, altså ikke tilbakelegging.

Dette tilsvarer derfor:

situasjon 3



Figur 2.9: Totalt 4 fond. Trekker 2 fond.

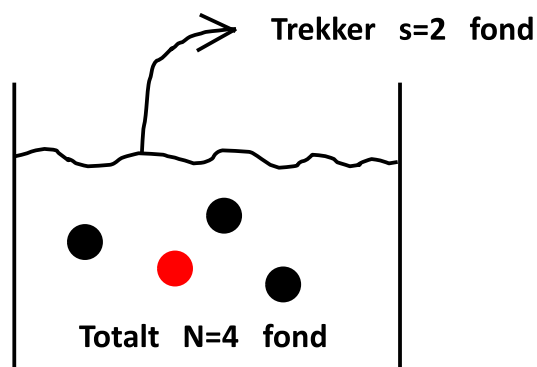
a) $P(\text{beste fondet})$:

Sannsynligheten for å trekke det beste fond er det samme som sannsynligheten for å trekke et *bestemt* fond.

Det er to kategorier: beste fond (rød kule) og ikke beste fond (svarte kuler).
Via lign.(2.27) får vi da:

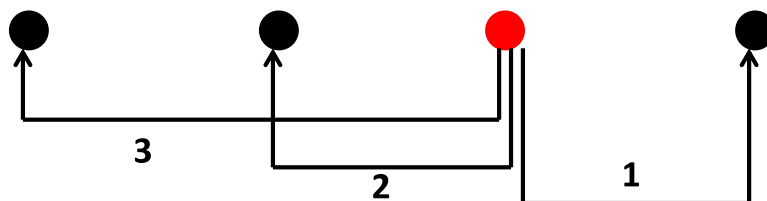
$$P(\text{beste fond}) = \frac{\overbrace{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner}}^{=3}}{\underbrace{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner}}_{=6}} = \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{totalt}} \quad (2.28)$$

$$= \frac{\binom{N-1}{s-1} \binom{1}{1}}{\binom{N}{s}} = \frac{\binom{3}{1} \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3 \cdot 1}{6} = 0.50 \quad (2.29)$$



Figur 2.10: Totalt 4 fond. Trekker 2 fond.

Denne figuren visualiserer at det er 3 måter å trekke kuler på hvor en av dem er den røde slik som telleren i lign.(2.29)



Figur 2.11: 3 måter.

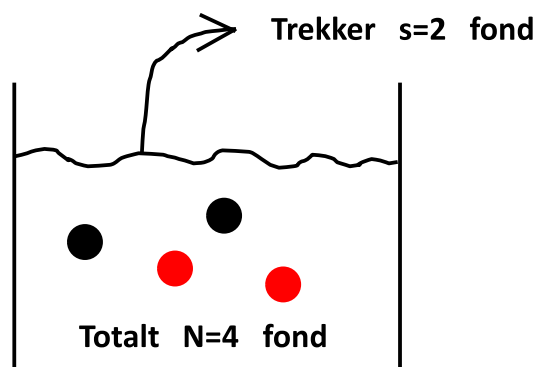
b) $P(2 \text{ beste fondene})$:

Sannsynligheten for å trekke de 2 beste fondene er det samme som sannsynligheten for å trekke to *bestemte* fond.

Det er to kategorier: beste fond (rød kule) og ikke beste fond (svarte kuler).
Via lign.(2.27) får vi da:

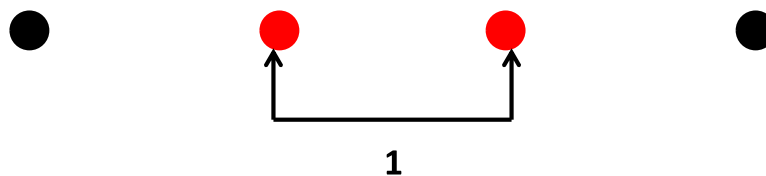
$$P(2 \text{ beste fond}) = \frac{\overbrace{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner}}^{=1}}{\underbrace{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner}}_{=6}} = \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{totalt}} \quad (2.30)$$

$$= \frac{\binom{2}{0} \binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{6} = 0.167 \quad (2.31)$$



Figur 2.12: Totalt 4 fond. Trekker 2 fond.

Denne figuren visualiserer at det kun er 1 måte å trekke kuler på slik at begge er røde slik som telleren i lign.(2.31):



Figur 2.13: 1 måte.

■