



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

1. Sannsynlighetsteori

Øving 1: Oppgaver

“MAT110 Statistikk I”, 2021

versjon 01

- Utlevering:
 - Tirsdag 19. jan. kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - senest kl. 12:00 mandag 15. feb.
 - dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- **FORarbeid:**
 - Se videoene for uke 1 og uke 2
 - Les kompendiet.
 - Les gjennom øvingoppgave 1
- **ETTERarbeid:**
 - Gå gjennom løsning 1 som legges ut torsdag 11. feb. kl. 16:00.

Problem 1.1 — sjakk - sannsynlighetsmodell

Du er en iherdig sjakkspiller, og ønsker å definere en sannsynlighetsmodell for utfallene: seier, tap og remis (uavgjort).

Begrunn svarene kort hvor det ikke er regning.

- a) Beskriv et passende eksperiment E med tilhørende utfallsrom Ω_E .
- b) Hvordan ville du ha gått frem for å finne utfallssannsynlighetene, $p_u \in \Omega_E$?
- c) Hva er kardinaliteten $|\Omega_E|$ til utfallsrommet Ω_E ?
- d) Er modellen diskret eller kontinuerlig?
Er modellen endelig?
Er modellen uniform?

I sjakk spiller man mot hverandre med to farger: hvit og svart brikker. Det er viden akseptert at spilleren som har hvite brikker har en liten fordel kontra spilleren med svarte brikker.

Anta du nå ønsker å inkludere hvilken *farge* vi spiller med i analysen.

- e) Hvorfor er det lurt å inkludere farger i sannsynlighetsmodellen?
- f) Utvid sannsynlighetsmodellen fra oppgave a) til å inkludere fargene hvit og svart.

Anta du nå har telt opp alle de gamle spillene dine, som totalt var 1000 spill. Frekvensene er gitt i tabell 1.1.

$u \in \Omega_E$	seier	remis	tap
hvit	250	300	50
svart	100	200	100

Table 1.1: Historiske sjakkdata.

- g)** Regn ut de eksperimentelle sannsynlighetene for hvert av utfallene.

Anta vi gjør følgende antagelse:

$$p_u = f_u \tag{1.1}$$

for alle utfallene $u \in \Omega_E$.

- h)** Er antagelsen i lign.(1.1) berettiget? Begrunn svaret.

Definerer begivenheter:

$$H = \text{du spiller med hvite brikker} \tag{1.2}$$

$$S = \text{du vinner} \tag{1.3}$$

$$R = \text{det blir remis} \tag{1.4}$$

$$\tag{1.5}$$

- i)** Beskriv begivenhetene H , S og R (dvs. uttrykk dem som mengder).

En svært viktig setning for *endelige sannsynlighetsmodeller* er at sannsynligheten for en begivenhet S er gitt ved summen av utfallsannsynlighetene som begivenheten består av:

Setning 1.0.1 — begivenhetssannsynlighet

La $(E, \Omega_E, P(S))$ være en endelig sannsynlighetsmodell, dvs. $|\Omega_E| = n$, som betyr at modellen har totalt n utfall. For enhver begivenhet $S \subseteq \Omega_E$, gjelder da

$$P(S) = \sum_{u \in S} p_u \quad (1.6)$$

j) Regn ut $P(H)$, $P(S)$ og $P(R)$ ved hjelp av lign.(1.6).



Figure 1.1: "Queens Gambit" - en populær serie på Netflix om sjakk.

Vi skal nå trene på *regnereglene* for sannsynlighetslære. disse er gitt ved:

Setning 1.0.2 — fundamentale regneregler

La $(E, \Omega_E, P(S))$ være en sannsynlighetsmodell og anta at A og B er to vilkårlige begivenheter. Da gjelder følgende regneregler:

1. Utfallsrommet Ω_E

$$P(\Omega_E) = 1 \quad (1.7)$$

2. Komplementærsetningen

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (1.8)$$

3. Den tomme begivenheten $\emptyset$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (1.9)$$

4. Den generelle addisjonssetningen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1.10)$$

5. Den spesielle addisjonssetningen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{hvis } A \text{ og } B \text{ er disjunkte, dvs } A \cap B = \emptyset \quad (1.11)$$

6. Differansesetningen

$$P(A - B) = P(A) - P(B) \quad \text{hvis } B \subseteq A \quad (1.12)$$

7. Tvillingssetningene

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) \quad \text{og} \quad P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad (1.13)$$

8. Total sannsynlighet

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \quad (1.14)$$

- k) Sjekk at $P(\Omega_E) = 1$ ved å summerer alle utfallssannsynlighetene, dvs. sjekk at

$$P(\Omega_E) = \sum_{u \in \Omega_E} p_u = 1 \quad (1.15)$$

- l) La B være begivenheten å spille med svarte brikker. Bruk komplementærsetningen til å regne ut sannsynligheten for å få spille med svarte brikker, dvs $P(B)$.
- m) Gi en tolkning av begivenheten $R \cap \overline{H}$.
Hvilke utfall har begivenheten, og regn ut $P(R \cap \overline{H})$ fra utfallssannsynlighetene.
- n) Regn ut sannsynligheten for at vi får seier eller remis.
Bruk den spesielle addisjonssetningen (lign.(1.11)), og begrunn hvorfor denne kan benyttes.
- o) Bruk en av tvillingsetningene (lign.(1.13)) for å regne ut sannsynligheten for begivenheten $\overline{S} \cap \overline{R}$.
Gi en tolkning av begivenheten.
- p) Anta vi tolker begivenhetene H og $\overline{H}$ som en **oppsplitting** av utfallsrommet (hvit og svart). Verifiser at loven om total sannsynlighet (lign.(1.14)) er korrekt for begivenheten S (seier).

■

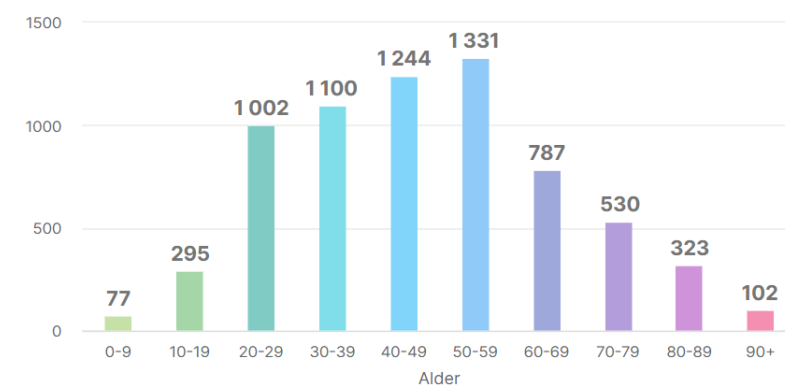
Problem 1.2 — Korona - sannynlighet for å få korona

Per 16. april 2020 var det registrert totalt $N = 6791$ personer som testet positivt på korona i Norge. Disse personene ble delt inn i 10 grupper etter alder, 0-9 år, 10-19 år osv. og opp til 90-99 år.

Aldersfordelingen til disse aldersgruppene er vist i figur 1.2.

Aldersfordeling

Tallene viser aldersfordelingen blant de som har testet positivt. Tallene oppdateres daglig fra FHI's dagsrapport og kommer kun på landsnivå.



Sist oppdatert: 16. april (i dag).

Figure 1.2: Aldersfordeling blant de $N = 6791$ personene som testet positivt per. 16. april 2020. Kilde: vg.no/spesial/2020/corona.

Antall personer tilhørende disse aldersgruppene er $N_1, N_2, \dots, N_{10}$, se tabell 1.2.

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}
Antall personer N_i	77	295	1002	1100	1244	1331	787	530	323	102
Aldersgruppe	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90+

Table 1.2: Antall personer N_i , hvor $i = 1..10$, fra figur 1.2.

- a) Du ønsker å regne ut noen sannsynligheter for situasjonen som beskrevet ovenfor, dvs. vi skal dele inn i aldersgruppene som vist i figur 1.2. Du bestemmer deg for å gjennomføre et eksperiment basert på situasjonen ovenfor hvor utfallet til eksperimentet er gjennomsnittsalderen for den aktuelle aldersgruppen.¹

Beskriv *kort* hva slags eksperimentet som da må gjennomføres.

- b) Hva er utfallsrommet Ω_E ? Og hva er kardinaliteten $|\Omega_E|$?
- c) Er sannsynlighetsmodellen endelig eller uendelig?
Gi en *kort* begrunnelse for svaret.
- d) Er sannsynlighetsmodellen diskret eller kontinuerlig?
Gi en *kort* begrunnelse for svaret.
- e) Er sannsynlighetsmodellen uniform?
Gi en *kort* begrunnelse for svaret uten utregninger.

- f) Nedenfor ser du tre formler for sannsynligheter:

$$f_u = \frac{N_u}{N} \quad , \quad P(S) = \sum_{u \in S} p_u \quad , \quad P(S) = \frac{|S|}{|\Omega_E|} \quad (1.16)$$

Hva heter disse sannsynlighetene?

Forklar *kort* i hva slags sammenheng disse formlene brukes.

- g) Regn ut de eksperimentelle sannsynlighetene i vårt eksperiment E .
Regn ut summen av alle de eksperimentelle sannsynlighetene.
Er summen det du trodde den skulle bli?

Bruk 4 desimales nøyaktighet.

- h) La oss nå kun se på personer som er 60 år eller eldre.
Definer en begivenhet G som beskriver denne aldersgruppen og regn ut begivenhetssannsynligheten $P(G)$.

■

¹F.eks. dersom personen tilhører aldersgruppe 0-9 år så blir utfallet $\frac{0+9}{2} = 4.5$ år.

Problem 1.3 — anbud og korrupsjon i Petrobras Brasil

Petrobras er det statseide oljeselskapet i Brasil. Petrobras har ofte svært store utbyggingsprosjekter. De starter hele tiden nye utbyggingsprosjekt som de ønsker å legge ut på anbud til de store entreprenørene i Brasil.



Figure 1.3: Petrobras er Brasils statseide oljeselskap.

Konkurranseloven krever at alle entreprenørene skal ha en fair sjanse får å få ordren. Dessverre er Brasil et svært korrupt land, så historien viser at disse anbudene er alt ifra fair.

I 2014 kom det store avsløringer om korrupsjon mellom Petrobras og 8 av de største entreprenørene i Brasil. Spørsmålet var hvor langt opp i systemet denne korrupsjonen gikk?

I Netflix-serien "*O Mecanismo*" eller "*Mekanismen*" på norsk, antydes det at korrupsjonen gikk helt til topps, se figur 1.4.



Figure 1.4: Til venstre: Netflix-serien "*Mekanismen*" om korrupsjonen i Petrobras. Til høyre: "*Eles sabiam de tudo*" - "*de visste alt*", som hentyder at korrupsjonen gikk helt til topps i Brasil: President Dilma Rouseff og tidligere president "Lula". De tilhørte begge "arbeidernes parti" i Brasil.

Vi skal i denne oppgaven gå tilbake til tiden før 2014, rett før "*Operasjon Bilvask*" ble gjennomført. Direktøren for Petrobras, Paulo Roberto Costa, tok imot en luksusbil fra Yussuf, mellommannen for de store entreprenørselskapene. Han hadde glemt å kjøpe en gave til kona så han lot seg overtale av Yussuf. Politiet hadde derimot en overvåkning av dette, og dermed var "*Operasjon Bilvask*" i gang. Direktøren plystret så det sang etthvert som han skjønnte at han måtte i fengsel (les: gjorde en avtale for bedre fengselsvilkår).

Anta direktør Paulo Costa i Petrobras skal tilordne 3 nye anbud til de 4 største korruperte entreprenørene:

1) Camargo Correa	(CC)	(1.17)
2) Construtora OAS	(OA)	(1.18)
3) Odebrecht	(OB)	(1.19)
4) UTC Engenharia	(UT)	(1.20)

Direktør Paulo Costa, som ønsker å tyne mest mulig ut av entreprenørene, har tenkt ut en 2-stegsprosess for å velge ut entreprenørene:

Steg 1: Costa trekker 3 entreprenører som går videre til neste steg. Den siste entreprenøren som ikke ble trukket ut, er ute av dansen.

Alle entreprenørene legger inn samme beløp i potten (under bordet) for å delta i steg 1.

Steg 2: Costa lar de 3 gjenværende entreprenørene velge mellom 4 forskjellige scenarier for å bestemme hvem som vinner anbudene.

Ved alle sceneriene i steg 2, må entreprenørene legge ytterligere store summer i potten.



Figure 1.5: Petrobras korruperte direktør Paulo Roberto Costas tok imot bestiktelser.

Steg 1: Hvem går videre?

Paulo Costa skal altså trekke 3 entreprenører fra 4 mulige. Vi kan se på dette eksperimentet som en [urnemodell](#) hvor vi trekker 3 ganger fra en urne med 4 like kuler. Rekkefølgen entreprenørene trekkes i er ikke viktig.

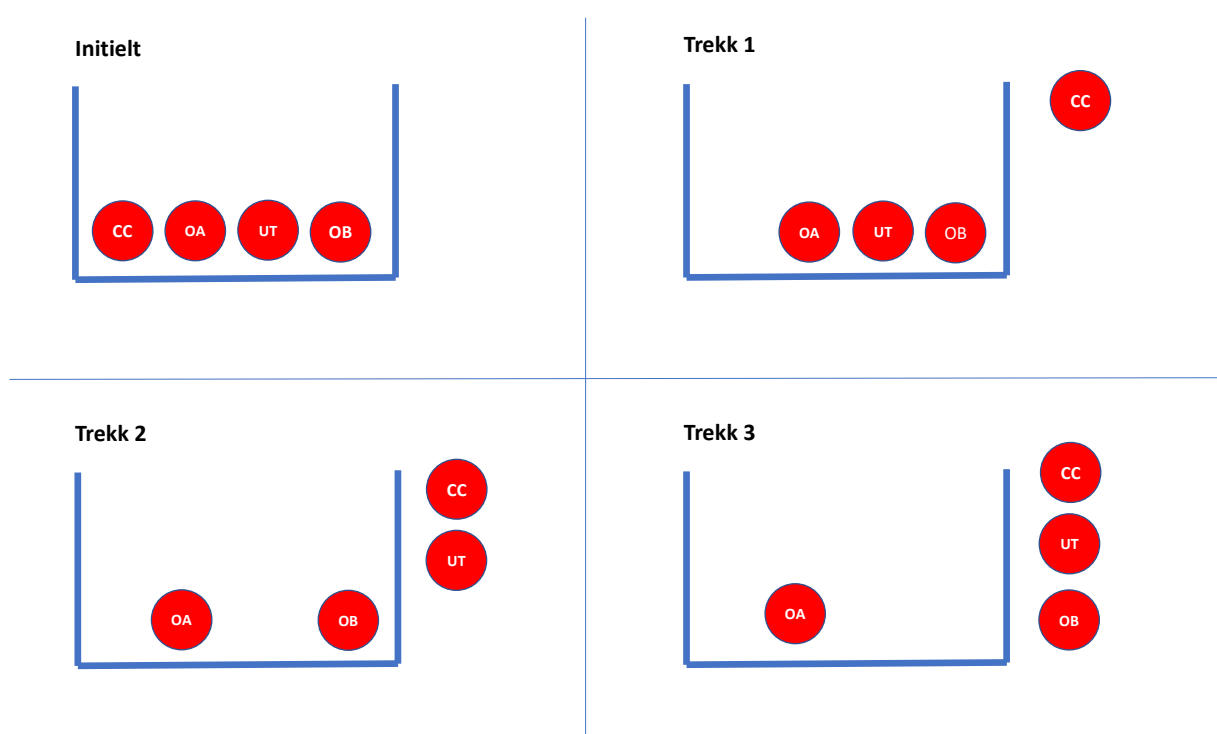


Figure 1.6: Steg 1: Trekking uten tilbakelegging med like kuler. Rekkefølgen er ikke viktig.

- a) Beskriv steg 1 som et eksperiment E .
- b) Definer et mulig utfallsrom Ω_E .²

²Siden rekkefølgen er uviktig, skal vi for å beskrive et utfall, *ikke* benytte en triplet på formen $(_, _, _)$, men derimot en mengde med 3 elementer $\{_, _, _ \}$. Husk at i en mengde definert via $\{_, _, _ \}$, så skiller vi ikke på rekkefølgen til elementene.

- c) Hva er kardinaliteten $|\Omega_E|$ til utfallsrommet?
Finn svaret både ved telling og ved kombinatorikk.

- d) Bestem utfallssannsynlighetene til eksperimentet E .

- e) Hva er sannsynligheten for at CC og UT blir valgt?
Finn svaret både ved telling og ved kombinatorikk. ³

³Angående kombinatorikk, se gjerne figur 1.6.

Steg 2: Hvem får anbudene?

Anta nå at Costa har gjennomført steg 1 hvor entreprenøren som måtte ut var *UT* (ikke helt overraskende).

De gjenværende 3 entreprenørene får nå 4 scenarioer å velge mellom:

Scenario 1: Entreprenørene betaler inn en **lik** sum hver (under bordet). Entreprenørene får ett anbud hver og med **lik** sannsynlighet for å bli trukket.

Scenario 2: Entreprenørene betaler inn en **lik** sum hver (under bordet). En entreprenør kan få flere anbud og med **lik** sannsynlighet for å bli trukket hver gang.

Scenario 3: Entreprenørene betaler inn en **ulik** sum hver (under bordet). Entreprenørene får ett anbud hver og med **ulik** sannsynlighet for å bli trukket.

Sannsynligheten for å bli trukket tilsvarende andelen betalt i forhold til de andre.

Scenario 4: Entreprenørene betaler inn en **ulik** sum hver (under bordet). Entreprenørene kan få flere anbud og med **ulik** sannsynlighet for å bli trukket.

Sannsynligheten for å bli trukket tilsvarende andelen betalt i forhold til de andre.

Scenario 1

Siden hver entreprenør skal få et anbud hver, kan vi se på dette som en urnemodell hvor vi har trekking **uten** tilbakelegging og like store kuler (lik sannsynlighet for å bli trukket).

Figur 1.7 viser et eksempel på hvordan trekkingen kan foregå: Da fikk anbud 1, OB fikk anbud 2 og CC fikk anbud 3.

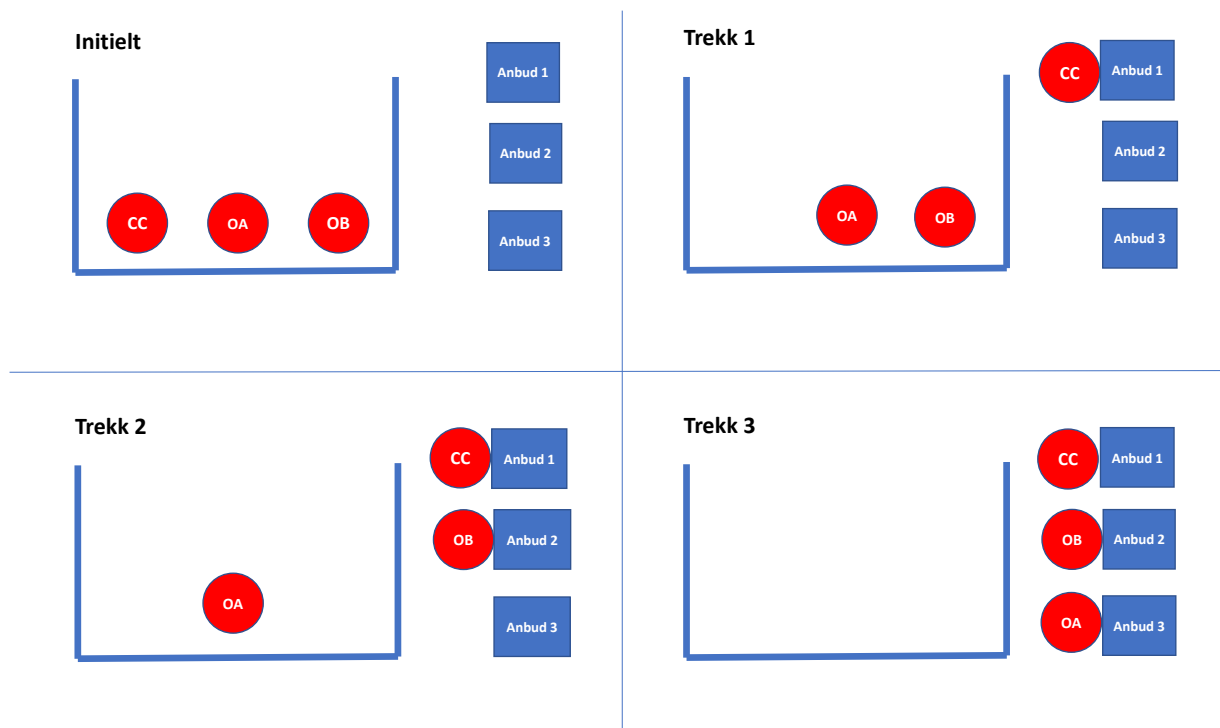


Figure 1.7: Scenario 1: Trekking uten tilbakelegging og like kuler.

- f) Beskriv eksperimentet som gjøres i scenario 1. Kall eksperimentet E_1 .
- g) Definer et mulig utfallsrom Ω_{E_1} .⁴
- h) Hva er kardinaliteten $|\Omega_E|$ til utfallsrommet? Finn svaret både ved telling og ved kombinatorikk.⁵

⁴Siden rekkefølgen nå *er* vesentlig, gir det nå mening å bruke tripletter $(_, _, _)$ for å beskrive et utfall.

⁵Angående kombinatorikk, se gjerne figur 1.6.

- i) Bestem utfallssannsynlighetene p_u til modellen.
- j) Hva er sannsynligheten for at CC får et anbud før OA ?
Finn svaret både ved telling og ved kombinatorikk.⁶

⁶Angående kombinatorikk, se gjerne figur 1.7.

Scenario 2

Samme som scenario 1, bortsett fra at kulene *ikke* er like. De vektlegges etter det relative beløpet entreprenørene legg er ekstra i potten.

Figur 1.8 viser et eksempel på hvordan trekkingen kan foregå. Legg merke til at kulene er ulike, som betyr at utfallssannsynlighetene er forskjellige.

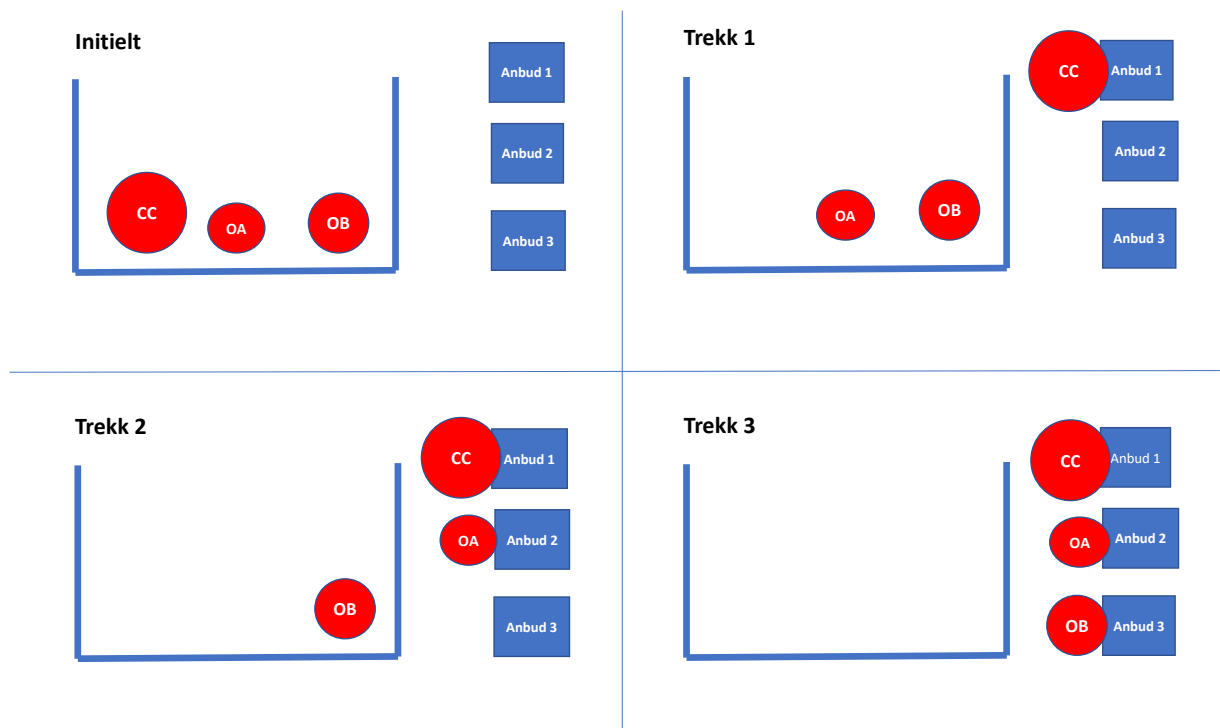


Figure 1.8: Scenario 2: Trekking **uten** tilbakelegging og **ulike** kuler.

Anta f.eks. at entreprenørene la følgende beløp i potten: (under bordet)

	CC	OA	OB
beløp	600	300	100

Table 1.3: Beløp under bordet i 2. runde.

Siden eksperimentet er det samme som i scenario 1, bortsett fra at utfallssannsynlighetene er endret, kan vi anta samme utfallsrom som i scenario 1.

Utfallssannsynlighetene er da gitt ved: ⁷

$$P(CC,OA,OB) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20} \quad (1.21)$$

$$P(CC,OB,OA) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20} \quad (1.22)$$

$$P(OA,CC,OB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{7} = \frac{9}{35} \quad (1.23)$$

$$P(OA,OB,CC) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{70} \quad (1.24)$$

$$P(OB,CC,OA) = \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{1}{15} \quad (1.25)$$

$$P(OB,OA,CC) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{30} \quad (1.26)$$

k) Hva er nå sannsynligheten for at *CC* får et anbud før *OA*?

⁷Ta disse for gitt. Disse utfallssannsynlighetene finnes gjennom såkalt *betinget sannsynlighet* (kap.2).

Scenario 3 (FRIVILLIG OPPGAVE)

Siden hver entreprenør kan få flere anbud hver, kan vi se på dette som en urnemodell hvor vi har trekking **med** tilbakelegging og like store kuler (lik sannsynlighet for å bli trukket).

Figur 1.9 viser et eksempel på hvordan trekkingen kan foregå. Her fikk OA anbud 1, OB fikk både anbud 2 og 3, mens CC fikk ingen anbud.

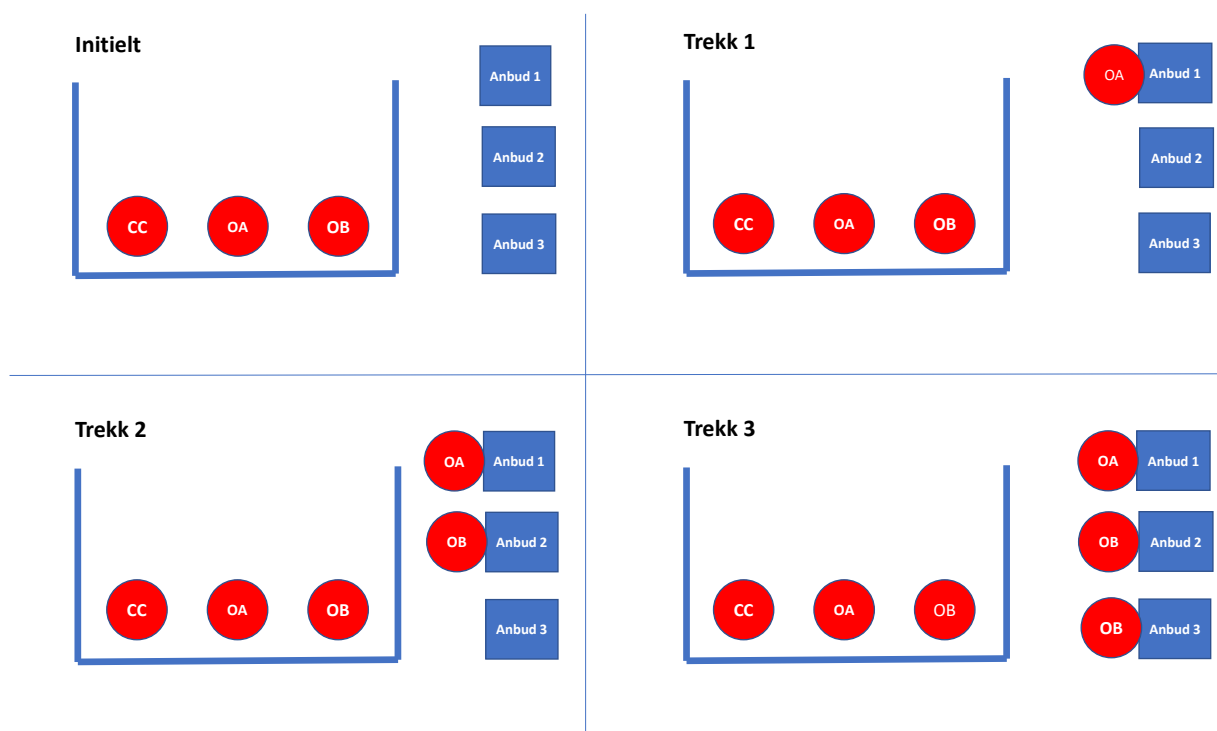


Figure 1.9: Scenario 3: Trekking med tilbakelegging og like kuler.

- l) Beskriv eksperimentet som gjøres i scenario 3. Kall eksperimentet E_3 .
- m) Definer et mulig utfallsrom Ω_{E_3} .⁸
- n) Bestem utfallssannsynlighetene til modellen.
Finn svaret både ved telling og ved kombinatorikk.⁹

⁸Siden rekkefølgen nå *er* vesentlig, gir det nå mening å bruke tripler ($_ , _ , _$) for å beskrive et utfall. Husk at en entreprenør nå kan få flere anbud (eller ingen).

⁹Angående kombinatorikk, se gjerne figur 1.9.

- o) Hva er sannsynligheten for at vi trekker én av entreprenørene nøyaktig to ganger?
Finn svaret både ved telling og ved kombinatorikk.

Scenario 4 (FRIVILLIG OPPGAVE)

Samme som scenario 3, bortsett fra at kulene *ikke* er like. De vektlegges etter det relative beløpet entreprenørene legger i potten.

Figur 1.10 viser et eksempel på hvordan trekkingen kan foregå. Legg merke til at kulene er ulike, som betyr at utfallssannsynlighetene er forskjellige.

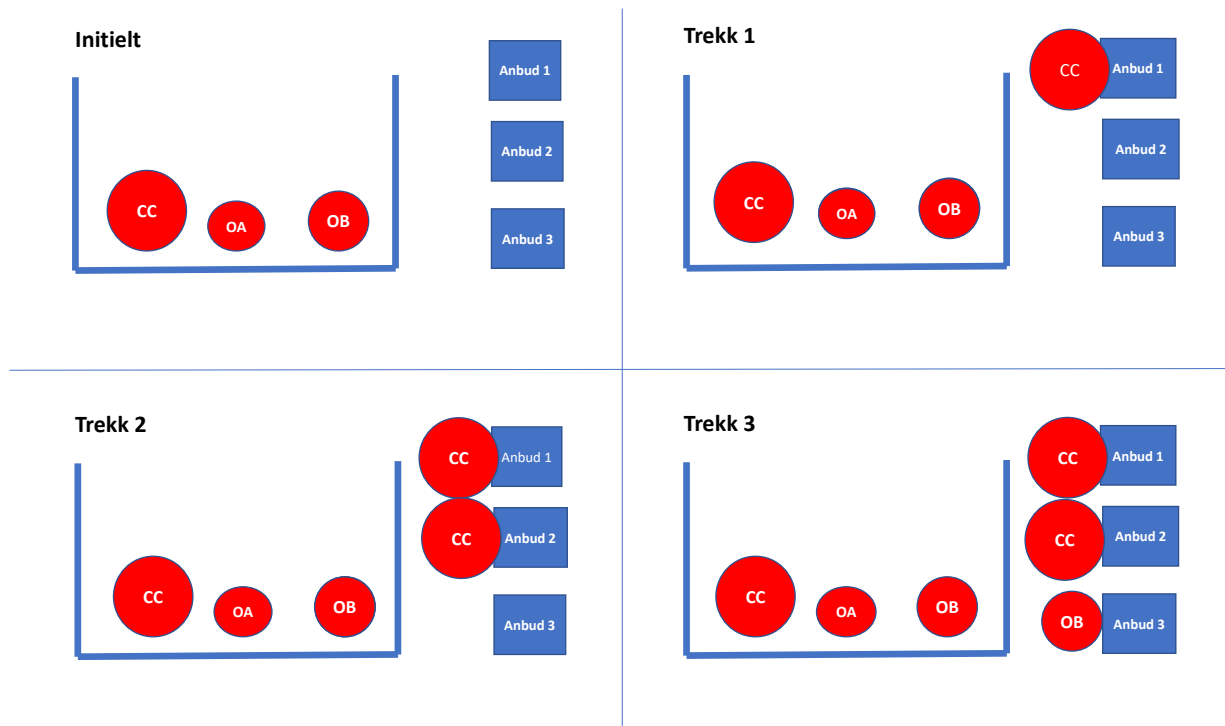


Figure 1.10: Scenario 4: Trekking **med** tilbakelegging og **ulike** kuler.

Anta f.eks. at entreprenørene la følgende beløp i potten:

	CC	OA	OB
beløp	600	300	100

Table 1.4: Beløp under bordet i 2. runde.

Siden eksperimentet er det samme som i scenario 3, bortsett fra at utfallssannsynlighetene er endret, kan vi anta samme utfallsrom som i scenario 3.

Utfallssannsynlighetene er gitt ved: ¹⁰

$$\begin{array}{lll}
 P(CC, CC, CC) = \frac{6}{10} \frac{6}{10} \frac{6}{10} & P(CC, CC, CC) = \frac{1}{10} \frac{1}{10} \frac{1}{10} & P(OA, OA, OA) = \frac{3}{10} \frac{3}{10} \frac{3}{10} \\
 P(CC, CC, OA) = \frac{6}{10} \frac{6}{10} \frac{3}{10} & P(OB, OB, CC) = \frac{1}{10} \frac{1}{10} \frac{6}{10} & P(OA, OA, CC) = \frac{3}{10} \frac{3}{10} \frac{6}{10} \\
 P(CC, CC, OB) = \frac{6}{10} \frac{6}{10} \frac{1}{10} & P(OB, OB, OA) = \frac{1}{10} \frac{1}{10} \frac{3}{10} & P(OA, OA, OB) = \frac{3}{10} \frac{3}{10} \frac{1}{10} \\
 P(CC, OA, CC) = \frac{6}{10} \frac{3}{10} \frac{6}{10} & P(OB, CC, OB) = \frac{1}{10} \frac{6}{10} \frac{1}{10} & P(OA, CC, OA) = \frac{3}{10} \frac{6}{10} \frac{3}{10} \\
 P(CC, OB, CC) = \frac{6}{10} \frac{1}{10} \frac{6}{10} & P(OB, OA, OB) = \frac{1}{10} \frac{3}{10} \frac{1}{10} & P(OA, OB, OA) = \frac{3}{10} \frac{1}{10} \frac{3}{10} \\
 P(OA, CC, CC) = \frac{3}{10} \frac{6}{10} \frac{6}{10} & P(CC, OB, OB) = \frac{6}{10} \frac{1}{10} \frac{1}{10} & P(CC, OA, OA) = \frac{6}{10} \frac{3}{10} \frac{3}{10} \\
 P(OB, CC, CC) = \frac{1}{10} \frac{6}{10} \frac{6}{10} & P(OA, OB, OB) = \frac{3}{10} \frac{1}{10} \frac{1}{10} & P(OB, OA, OA) = \frac{1}{10} \frac{3}{10} \frac{3}{10} \\
 P(CC, OA, OB) = \frac{3}{10} \frac{6}{10} \frac{1}{10} & P(OA, CC, OB) = \frac{3}{10} \frac{6}{10} \frac{1}{10} & P(CC, OA, OB) = \frac{6}{10} \frac{3}{10} \frac{1}{10} \\
 P(CC, OB, OA) = \frac{6}{10} \frac{1}{10} \frac{3}{10} & P(OB, CC, OA) = \frac{1}{10} \frac{6}{10} \frac{3}{10} & P(CC, OB, OA) = \frac{6}{10} \frac{1}{10} \frac{3}{10}
 \end{array}$$

- p) Hva er nå sannsynligheten for at vi trekker en av entreprenørene nøyaktig to ganger? ¹¹

■

¹⁰Ta disse for gitt. Disse utfallssannsynlighetene finnes gjennom såkalt *betinget* sannsynlighet (kap.2).

¹¹Det kan være mindre arbeidskrevende å bruke komplementærsetningen her. I oppgaven må dere finne de gunstige utfallene og summere utfallssannsynlighetene.