



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høgskole i logistikk

3. Stokastiske variabler, forventning og ..

Øving 3: Oppgaver

“MAT110 Statistikk I”, 2021

versjon 01

- Utlevering:
 - Mandag 1. mars kl. 12:00.
 - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.
- Innlevering:
 - senest kl. 12:00 mandag 29. mars
 - dvs. man har 4 uker på å gjøre oppgavene
 - vi anbefaler at man prøver å bli ferdig etter 2 uker, siden ny øving kommer da
- **FOR**arbeid:
 - Se videoene for uke 9 og uke 10
 - Les kompendiet.
 - Les gjennom øvingoppgave 4
- **ETTER**arbeid:
 - Gå gjennom løsning 3 som legges ut torsdag 25. mars kl. 16:00.

Problem 3.1 — Korona - Sannsynlighetsteori, betinget sanns., sannsynlighetstre

I denne oppgaven skal vi se litt nærmere på personer som blir testet for koronavirus. Figur 4.1 viser de topp 5 landene over antall registrerte smittede per 8. april 2020.

Legg merke til følgende raritet:

Tyskland, som har over 100 000 registrerte smittede personer, har *langt* lavere antall døde enn de andre landene på lista.

Region	↓ Registrert smittet	Per 100k innb.	Døde	Per 100k innb.
USA	399 929	119,7	12 925	3,9
Spania	146 690	313,7	14 555	31,1
Italia	135 586	224,3	17 129	28,3
Frankrike	110 070	161,6	10 343	15,2
Tyskland	107 663	128,5	2 016	2,4

Figure 3.1: Topp 5 landene i verden over antall registrerte smittede per. 8. april 2020. Kilde: vg.no/spesial/2020/corona/verden.

Årsaken for de lave dødelighetstallene i Tyskland kan være mange, men et av områdene hvor Tyskland skiller seg ut ift. de andre landene, er når det gjelder *testing* for koronavirus. Tyskland tester *svært* mange personer hver dag.

Foto: Heiko Junge



Foto: Elaine Thompson

Figure 3.2: Koronatesting.

Eksperiment:

Anta at vi velger en vilkårlig person i Tyskland og denne personen tar koronatesten. Vi registrerer deretter om testen gir positivt eller negativt svar. Til slutt finner vi ut om personen faktisk er syk eller ikke. ¹

Når en person testes for korona har man 4 mulige utfall: ²

Personen tester **positivt** for korona og er **smittet** (korrekt test) (3.1)

Personen tester **positivt** for korona og er **ikke smittet** (falsk positiv test) (3.2)

Personen tester **negativt** for korona og er **ikke smittet** (korrekt test) (3.3)

Personen tester **negativt** for korona og er **smittet** (falsk negativ test) (3.4)

Notasjon:

t = test er positiv (3.5)

$\bar{t}$ = test er negativ (3.6)

s = **smittet** person (3.7)

$\bar{s}$ = **ikke smittet** person (3.8)

Utfallsrom Ω :

$$\Omega = \left\{ (t, s), (\bar{t}, s), (t, \bar{s}), (\bar{t}, \bar{s}) \right\} \quad (3.9)$$

- a) Tolk sannsynlighetene $P(t, s)$, $P(\bar{t}, s)$, $P(t, \bar{s})$ og $P(\bar{t}, \bar{s})$ tilhørende utfallene til Ω , dvs. beskriv kort med ord hva sannsynlighetene betyr. ³

¹Vi kan finne ut om personen faktisk er smittet ved å ta enda en test som er enda sikrere, evt. vente lenge nok til at vi er sikre på at personen er syk eller ikke.

²En test er positiv dersom testen indikerer at man er smittet (men man må ikke være smittet selv om testen sier det).

³Tips: Bruk lign.(4.1)-(4.4).

Definerer begivenheter:

$$T = \{ (t, s), (t, \bar{s}) \} \quad (\text{testen er positiv}) \quad (3.10)$$

$$S = \{ (t, s), (\bar{t}, s) \} \quad (\text{personen er smittet}) \quad (3.11)$$

Anta at 1 % av Tysklands befolkning er smittet, dvs.:

$$P(S) = 0.01 \quad (3.12)$$

Sannsynligheten oppgitt ovenfor samt andre relevante sannsynligheter tilhørende de 4 mulige utfallene i utfallsrommet Ω i lign.(4.9) kan visualiseres i et sannsynlighetstre:

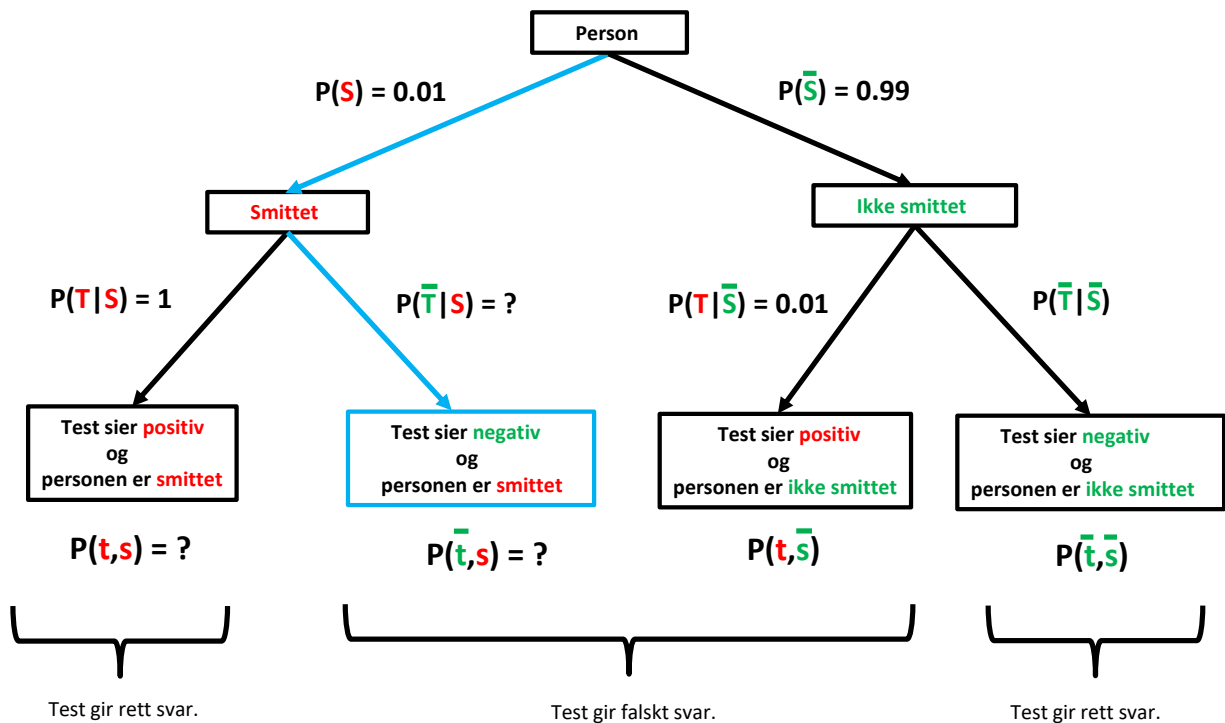


Figure 3.3: Sannsynlighetstre.

Egenskaper til test:

Det finnes flere forskjellige typer koronatester.

En test designes alltid slik at sannsynligheten for å få en falsk negativ test er svært lav, dvs. at testen gir negativt resultat selv om personen er smittet av korona (utfall i lign.(4.4)).

Dette går som regel på bekostning av den andre måten en test kan gå galt, nemlig falsk positiv, dvs. at testen gir positivt resultat selv om personen *ikke* er smittet av korona (utfall i lign.(4.50)).

Vi skal nå regne på hvordan selv en relativt lav sannsynlighet for falsk positiv test kan forklare noe av hvorfor Tyskland har så lave dødelighetstall.

La oss i denne oppgaven se på en test som har følgende egenskaper:

- 1) Anta at dersom en person som er **smittet** tar testen så blir testresultatet **positivt** med 100 % sannsynlighet. Matematisk kan dette formuleres slik:

$$P(T|S) = 1 \quad (3.13)$$

Altså koronatesten gir alltid rett resultat dersom testen utføres på personer som er smittet.

- 2) Anta at dersom en person som **ikke** er **smittet** tar testen så blir testresultatet også **positivt** med 1 % sannsynlighet. Matematisk kan dette formuleres slik:

$$P(T|\bar{S}) = 0.01 \quad (3.14)$$

Altså koronatesten gir feil resultat i 1 % av tilfellene dersom testen utføres på en person som er frisk, dvs. ikke er smittet.

De betingede sannsynlighetene i lign.(4.13) og (4.14) er vist i sannsynlighetstreet i figur 4.8.

- b)** Regn ut sannsynlighetene $P(\bar{T}|S)$ og $P(\bar{t}, s)$.⁴
- c)** Hva sier svaret til $P(\bar{t}, s)$ fra oppgave 4.1 **b)** om falske negative tester?⁵
- d)** Bruk setningen om oppsplitting av utfallsrom og vis ved regning at sannsynlighet for at testen gir positivt resultat $P(T)$ er

$$P(T) = 0.0199 \quad (3.15)$$

- e)** Bruk svaret fra oppgave 4.1 **d)**, dvs. lign.(4.15), og vis ved regning at

$$P(\bar{S}|T) = 0.4975 \quad (3.16)$$

- f)** I lys av svaret fra oppgave 4.1 **e)**, dvs. lign.(4.16), er det lurt å teste friske personer? Begrunn svaret.⁶

■

⁴Ta gjerne en titt på sannsynlighetstreet. Bruk læresetninger som oppgitt i boken når dere regner ut svarene, f.eks. komplementsetningen og multiplikasjonssetningen.

⁵Kun et kort svar trenges her.

⁶Kun et kort svar trenges her.

Problem 3.2 — økonomi og sport - diskrete stok. var., forventning, varians

Basert på historiske data har man etablert en sannsynlighetsfordeling for hvor mange mål fotballaget *Tufte IL* scorer i en kamp. La:

$X =$ **antall mål** som *Tufte IL* scorer i løpet av en tilfeldig valgt kamp

Den tilhørende sannsynlighetsfordelingen $P(X = x_i)$ er gitt ved følgende tabell: ⁷

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	0.10	0.25	0.20	0.15	0.15	0.05	0.05	0.05

Figure 3.4: Sannsynlighetsfordeling $P(X = x_i)$.



Figure 3.5: Tufte IL.

- a) Er X en diskret eller kontinuerlig stokastisk variabel? Gi en *kort* begrunnelse.

⁷For enkelthetsskyld antar vi at *Tufte IL* aldri scorer mer enn 7 mål i løpet av en kamp.

- b) i) Hva betyr $E[X]$ i vårt tilfelle? ⁸
ii) Finn $E[X]$.
- c) i) Hva betyr $Var[X]$ i vårt tilfelle?
ii) Finn $Var[X]$.
- d) Finn standardavviket til X , dvs. finn $\sigma[X]$.
- e) Hva er sannsynligheten for at *Tufte IL* scorer mindre enn 4 mål i en kamp?

Anta at antall mål som scores i ulike kamper er uavhengige.

Tufte IL spiller 28 kamper i løpet av en sesong.

La oss se på to tilfeldige kamper i løpet av en sesong og definere følgende stokastiske variabler:

$$X_1 = \text{antall mål som scores i den første tilfeldige kampen} \quad (3.17)$$

$$X_2 = \text{andre} \quad (3.18)$$

- f) i) Hva er sannsynligheten for at det scores mindre enn 4 mål i både kamp **nr. 7** og kamp **nr. 24**? ⁹
- ii) Hva er sannsynligheten for at det scores mindre enn 4 mål i **to kamper på rad**, f.eks. kamp nr. 13 og kamp nr. 14?

⁸Dvs. hva betyr $E[X]$ på “godt norsk”/tolkning?

⁹Innser du at oppgaven spør etter den simultane sannsynligheten $P(X_1 < 4, X_2 < 4)$? Husk at kampene antas uavhengige. Kanskje du trenger resultatet fra oppgave **1e** her?

La oss definere følgende stokastiske variabel:

$$Y = X_1 + X_2 \quad (3.19)$$

- g) i) Hva er sannsynligheten for at **summen** av antall mål som scores i kamp **nr. 15** og kamp **nr. 19** er nøyaktig lik 4? ¹⁰

- ii) Dersom du har gjort oppgave 4.2 g) i foran riktig så vet du at det er 5 måter å score 4 mål på over to kamper.
Det totale antall utfall i utfallsrommet er $8^2 = 64$

Hvorfor er det ikke riktig å si at $P(Y = 4) = \underbrace{\frac{\# \text{ gunstige}}{\# \text{ mulige}}}_{\text{feil}} = \frac{5}{64}$?

DNB er hovedsponsor for *Tufte IL*. Sponsoravtalen er prestasjonsrettet på en slik måte at de får **bonus** B bestemt av antall mål scoret i løpet av en gitt kamp:

$$B = cX^3 \quad (3.20)$$

hvor $c = 500$ NOK. ¹¹

- h) Forklar hvorfor B er en stokastisk variabel. ¹²

- i) i) Hva betyr $E[B]$ i vårt tilfelle?

- ii) Finn $E[B]$.

■

¹⁰Oppgaven spør etter $P(Y = 4)$. Denne oppgaven er litt vanskelig. Spør på "Diskusjoner" i Canvas eller kom på øvingstimer dersom du står fast.

¹¹ c er en **konstant**, mens X er en stokastisk **variabel**.

¹²Se eksempel på side 117 i boken. Ser du at det viktig å lese i boken?

Problem 3.3 — økonomi - kombinatorikk , sannsynlighet , stok. var. , forventning

En student som bor på Molde Campus har fått akutt dårlig råd. Han arrangerer et nytt lotteri for å skaffe penger slik at kan betale husleien.

Lotteriet han nå arrangerer er slik at 7 av totalt 1000 lodd gir en pengepremie på 250 NOK hver. Hvert lodd koster 10 NOK. Vi antar at studenten får solgt alle 1000 loddene. *Det er lik sannsynlighet for å trekke de forskjellige loddene, dvs. loddene har "lik vekt".* Vinnernumrene blir ikke offentliggjort før etter at alle loddene er solgt.

Det er kun to typer lodd: taperlodd og vinnerlodd.

Utfallsrom for sannsynlighetsmodellen er derfor det samme:

$$\Omega = \left\{ u_{\text{tap}} , u_{\text{vinn}} \right\} \quad (3.21)$$

med utfallene

$$u_{\text{tap}} = \text{utfall som gir taperlodd} \quad (3.22)$$

$$u_{\text{vinn}} = \text{vinnerlodd} \quad (3.23)$$

og

$$p_{\text{tap}} = \text{sannsynligheten for at et tilfeldig valgt lodd er et taperlodd} \quad (3.24)$$

$$p_{\text{vinn}} = \text{vinnerlodd} \quad (3.25)$$



Foto: Erik Birkeland

Figure 3.6: Molde Campus.

- a) Hvor mye tjener studenten på å arrangere lotteriet? ¹³

En person kjøper $s = 2$ lodd. Da kan situasjonen i oppgaven formuleres slik:

$$N = \text{totalt antall valgobjekter (lodd)} = 1000 \quad (3.26)$$

$$s = \text{antall objekter (lodd) som velges (kjøpes)} = 2 \quad (3.27)$$

- b) Begrunn kort hvorfor **urnemodellen** kan brukes i dette tilfellet. ¹⁴

- c) Beskriver oppgaven situasjon 1, 2, 3 eller 4? Begrunn svaret. ¹⁵

Tips: Tegn gjerne en enkel urne som visualiserer situasjonen før du løser oppgavene 4.3 **d)**, **e)** og **f)** nedenfor.

Hvor mange vinnerlodd er det i urnen?

Og hvor mange taperlodd er det i urnen?

La oss definere den diskrete stokastiske variabelen:

$$X = \text{antall vinnerlodd av de } \underbrace{\text{to loddene}}_{s=2} \text{ som loddkjøperen } \underbrace{\text{trekker}}_{\text{kjøper}} \quad (3.28)$$

¹³Denne oppgaven har ikke så mye med statistikk å gjøre. Oppgaven har som misjon å vise hvor mye lotteriarrangøren (studenten) tjener.

¹⁴Jfr. oppgave 4.2 **g) ii**. Se også den *blå uthevede* delen av den innledende oppgaveteksten øverst på denne siden.

¹⁵Hvilke to spørsmål må du stille deg for å avgjøre hvilken situasjon dette tilsvarer?

- d) Hva er sannsynligheten for at loddkjøperen **ikke vinner**, dvs. $P(X = 0)$? ¹⁶
- e) Hva er sannsynligheten for at loddkjøperen trekker **1 vinnerlodd**, dvs. $P(X = 1)$? ¹⁷
- f) Hva er sannsynligheten for at **begge** loddene til kjøperen vinner, dvs. $P(X = 2)$?
- g) Vis at $P(X = x)$ er en gyldig sannsynlighetsfordeling. ¹⁸

La oss definere en diskret stokastisk variabel som beskriver **fortjenesten** F til loddkjøperen:

$$F = gX - sp \quad (3.30)$$

hvor

$$g = 250 \text{ NOK} \quad (\text{"g" for gevinst}) \quad (3.31)$$

$$s = 2 \quad (\text{antall lodd som kjøpes}) \quad (3.32)$$

$$p = 10 \text{ NOK} \quad (\text{pris på lodd}) \quad (3.33)$$

- h) i) Regn ut forventningen $E[F]$. ¹⁹
- ii) Tolk svaret du fikk i oppgave 4.3 h) i.

■

¹⁶Her er det to kategorier lodd, jfr. utfallsrommet i lign.(4.21): taperlodd og vinnerlodd. Dermed:

$$P(X = x) = \frac{\text{antall } \textit{gunstige} \text{ kombinasjoner}}{\text{antall } \textit{mulige} \text{ kombinasjoner totalt}} = \frac{\text{kategori 1} \cdot \text{kategori 2}}{\text{antall } \textit{mulige}} \quad (3.29)$$

¹⁷Dvs. hva er sannsynligheten for 1 vinnerlodd og 1 taperlodd?

¹⁸ $P(X = x)$ er et gyldig sannsynlighetsfordeling dersom $\sum_{i=0}^2 P(X = x_i) = 1$.

¹⁹Her får du bruk for **regnereglene**: (a er en konstant)

$$E[a + X] = a + E[X]$$

$$E[aX] = a \cdot E[X]$$

Problem 3.4 — produksjonsplanlegging - betinget sanns. , forventning

Malingsprodusenten Jotun er en industribedrift som produserer maling og pulverlakk.

Malingens vei fra pulver til ferdig produkt innbærer en del blandingsprosesser samt justeringer av fordelingen mellom pulver og andre stoffer.

Før malingen kan legges ut for salg må den tilfredsstillе visse blandings- og kvalitetskrav. Malingen anses som “defekt” dersom den ikke tilfredsstiller disse kravene.

Jotun blander malingen i maksimalt 4 timer i en gitt tank. Etter hver time gjør de en test for å se om malingen er innenfor blandings- og kvalitetskravene. Dersom malingen ikke er det, så forsetter de blandings- og justeringsprosessen en time til. Første måling skjer etter en time.

Blanding av maling koster tid og penger. Derfor ønsker Jotun å se nærmere på hvor lenge de bør blande malingen for å komme innenfor blandings- og kvalitetskravene. I den sammenheng definerer Jotun følgende begivenheter:

$$D_t \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{array}{l} \text{malingen er fortsatt “defekt” etter } t \text{ timer} \\ \text{med blanding og justeringer} \end{array} \quad (3.34)$$

hvor $t = 1, 2, 3, 4$.



Figure 3.7: Jotun.

Anta i denne oppgaven at:

$$P(D_1) = 0.30 \quad (3.35)$$

$$P(D_2|D_1) = 0.10 \quad (3.36)$$

$$P(D_3|D_2 \cap D_1) = 0.02 \quad (3.37)$$

$$P(D_4|D_3 \cap D_2 \cap D_1) = 0 \quad (3.38)$$

- a) Finn $P(\overline{D}_1)$.²⁰
- b) Finn $P(\overline{D}_2|D_1)$.²¹
- c) Gi en kort tolkning av sannsynligheten $P(\overline{D}_2 \cap D_1)$.
- d) Bruk resultatet fra oppgave 4.4 b) samt den generelle multiplikasjonssetningen til å vise at:

$$P(\overline{D}_2 \cap D_1) = 0.27 \quad (3.39)$$

Sannsynligheten $P(\overline{D}_3 \cap D_2 \cap D_1)$, dvs. sannsynligheten for at malingen er OK etter 3 timer, kan finnes ved å bruke sannsynlighetstreet i figur 4.8.

Dersom man følger den rosa, stiplede linjen så innser man at:

$$\begin{aligned} P(\overline{D}_3 \cap D_2 \cap D_1) &= P(\overline{D}_3|D_2 \cap D_1)P(D_2|D_1)P(D_1) \\ &= 0.98 \cdot 0.10 \cdot 0.30 = 0.0294 \end{aligned} \quad (3.40)$$

²⁰Bruk komplementsetningen.

²¹Husk at komplementsetningen for en betinget sannsynlighet er: $P(\overline{B}|A) + P(B|A) = 1$.

- e) Bruk sannsynlighetstreet i figur 4.8 og vis, slik som illustrert i lign.(4.40), at:

$$P(\bar{D}_4 \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1) = 0.0006. \quad (3.41)$$

hvor $P(\bar{D}_4 \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1)$ er sannsynligheten for at malingen er OK etter 4 timer.

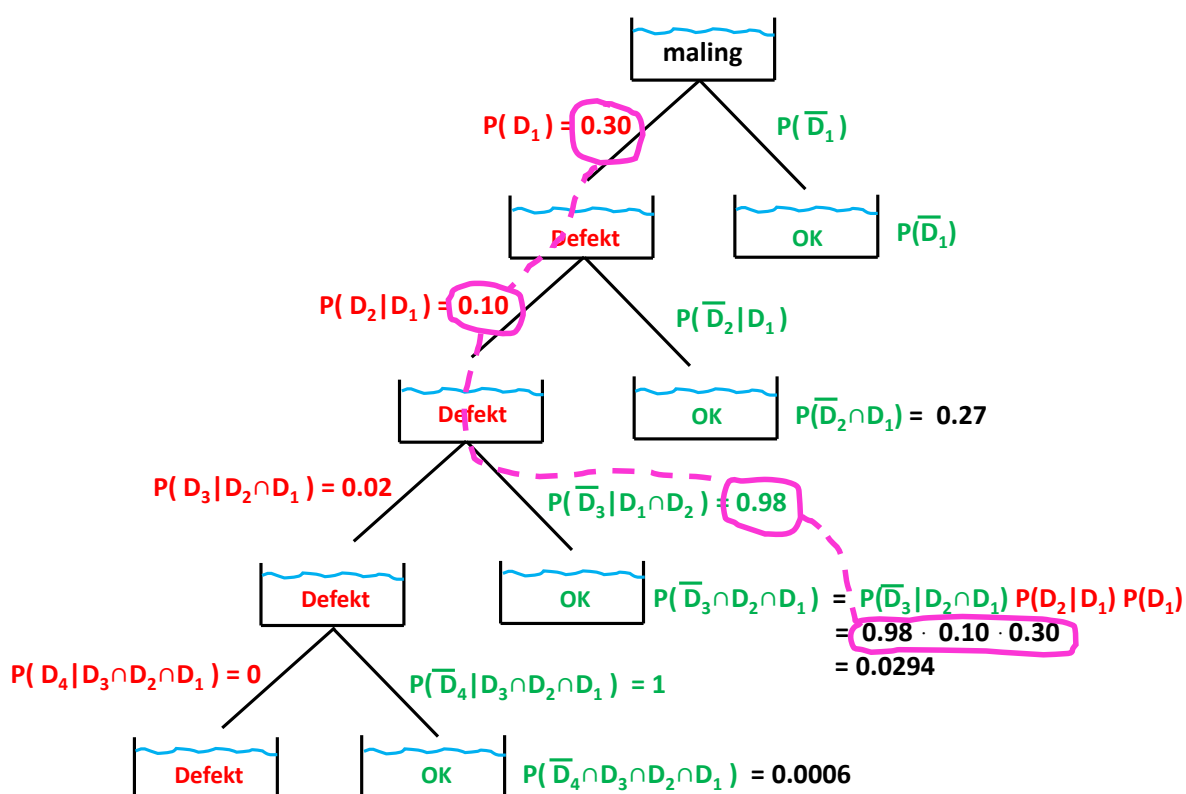


Figure 3.8: Sannsynlighetstre.

Istedet for å se på begivenheter, som vi har regnet på så langt i oppgaven, la oss nå introdusere en stokastisk variabel. Vi definerer den stokastiske variabelen X :

$$X = \text{antall timer som Jotun bruker på blanding og justeringer av malingen} \\ \text{før malingen kommer innenfor blandings- og kvalitetskravene} \quad (3.42)$$

med utfallsrom $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. **Forventet** antall timer som Jotun bruker på blanding og justeringer av malingen før de kommer innenfor kravene er dermed:

$$E[X] = \sum_{i=1}^4 x_i P(X = x_i) \quad (3.43)$$

hvor

$$P(X = 1) = P(\overline{D}_1) \quad (3.44)$$

$$P(X = 2) = P(\overline{D}_2 \cap D_1) \quad (3.45)$$

$$P(X = 3) = P(\overline{D}_3 \cap D_2 \cap D_1) \quad (3.46)$$

$$P(X = 4) = P(\overline{D}_4 \cap D_3 \cap D_2 \cap D_1) \quad (3.47)$$

og $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ og $x_4 = 4$ timer.

f) Bruk resultatene fra tidligere deloppgaver samt lign.(4.43) til å finne $E[X]$.

g) Vis at $P(X = x_i)$ er en gyldig sannsynlighetsfordeling. ²²

■

²²Tips: vis at de 4 sannsynlighetene i lign.(4.43) summeres til 1.

Problem 3.5 — logistikk - sannsynlighetsteori, betinget sanns., forventning

La oss fortsette med Glamox-oppgavene fra øving 2.

Glamox ønsker nå å bruke sannsynlighetsmodellen fra forrige øving til å regne ut størrelser for å kunne gjøre en mer presis prognostisering og dermed ha mulighet til å planlegge bedre.

For å unngå mye repeterende regning, la oss kun se på 6 tilbud. Seks nye tilbud. La oss nå se på tre selgre. Vi antar at selgerne lager to tilbud hver.

Anta at hvert av de 6 tilbudene har produkter som består en **bestemt komponent** som Glamox må produsere. Det trengs n_i enheter at denne komponenten i tilbud i .

Anta videre at **verdien** til tilbud nr. i er v_i (i NOK).

Tilbud nr. i	1	2	3	4	5	6
Høyt (h) eller lavt ($\bar{h}$) tilbud	$\bar{h}$	h	h	$\bar{h}$	h	$\bar{h}$
Selger S_j ($j = 1,2,3$)	1	1	2	2	3	3
Antall komp. n_i	8	113	357	16	128	5
Verdi v_i (NOK)	2 500	33 000	105 000	5 800	39 700	1 950

Figure 3.9: Tilbud og antall komponenter.



Figure 3.10: Glamox.

Tilbud 1: $(S_1 \text{ og } \bar{H})$

La oss først kun se på tilbud 1.

Fra tabellen i figur 4.9 vet vi at tilbud 1 er et lavt $\bar{H}$ tilbud gitt av selger S_1 . Vi ønsker å finne sannsynligheten for at tilbud 1 blir akseptert, dvs. vi ønsker å finne aksept-sannsynligheten $P(A | \underbrace{S_1 \cap \bar{H}}_{\text{vet}})$ når vi vet $S_1 \cap \bar{H}$.

Aksept-sannsynligheten for tilbud 1 er dermed gitt ved den generelle multiplikasjonssetningen:

$$P(A | \overbrace{S_1 \cap \bar{H}}^{\text{vet}}) = \frac{P(S_1 \cap \bar{H} \cap A)}{P(S_1 \cap \bar{H})} \quad (3.48)$$

For å regne ut aksept-sannsynligheten i lign.(3.48) så ønsker Glamox å bruke historiske data for å estimere relevante sannsynligheter i samme stil som øving 1. Glamox bestemmer seg for å bruke de 600 siste tilbudene. Tilhørende utfallsrom Ω finner du i vedlegg A.

Fra dette vedlegg A ser vi at:

$$P(S_1 \cap \bar{H} \cap A) = p_2 = \frac{40}{600} \quad (3.49)$$

og

$$P(S_1 \cap \bar{H}) = p_2 + p_4 = \frac{40}{600} + \frac{80}{600} = \frac{120}{600} \quad (3.50)$$

- a) Bruk den generelle multiplikasjonssetningen i lign.(4.48) samt lign.(4.49) og (4.50) til å regne ut den betingede sannsynligheten $P(A | \underbrace{S_1 \cap \bar{H}}_{\text{vet}})$.
- b) Bruk komplementsetningen til å regne ut $P(\bar{A} | \underbrace{S_1 \cap \bar{H}}_{\text{vet}})$.²³

²³Komplementsetningen for vårt tilfelle er:

$$P(\bar{A} | S_1 \cap \bar{H}) + P(A | S_1 \cap \bar{H}) = 1 \quad (3.51)$$

La oss introdusere to stokastiske variabler:

1) Stokastisk med kun to utfall: ²⁴1

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dersom kunde aksepterer tilbud nr. } i \\ 0 & , \text{ dersom kunde ikke aksepterer tilbud nr. } i \end{cases} \quad (3.52)$$

hvor $i = 1, 2, \dots, 6$, med ²⁵

$$P(Y_1 = 1) = P(A|S_1 \cap \bar{H}) \quad (3.53)$$

$$P(Y_2 = 1) = P(A|S_1 \cap H) \quad (3.54)$$

$$P(Y_3 = 1) = P(A|S_2 \cap H) \quad (3.55)$$

$$P(Y_4 = 1) = P(A|S_2 \cap \bar{H}) \quad (3.56)$$

$$P(Y_5 = 1) = P(A|S_3 \cap H) \quad (3.57)$$

$$P(Y_6 = 1) = P(A|S_3 \cap \bar{H}) \quad (3.58)$$

2) Stokastiske variabler

$$X_i = n_i Y_i \quad (3.59)$$

hvor ($i = 1, 2, 3, \dots, 6$)

$$X_i = \text{antall komponenter i tilbud nr. } i \text{ som blir solgt} \quad (3.60)$$

(akseptert av kunde)

$$n_i = \text{antall komponenter i tilbud nr. } i \text{ (se figur 4.9)} \quad (3.61)$$

²⁴«Ja-nei»-variabel, også kalt en stokastisk **binær variabel**.

²⁵I lign.(4.53)-(4.58) setter vi to funksjoner like hverandre, men egentlig burde vi satt *verdien* til de aktuelle funksjonene like hverandre. For å unngåfor mye notasjon så bare skriver vi det på formen som i lign.(4.53)-(4.58).

Antall komponenter som **forventes solgt** for tilbud 1 er dermed:

$$E[X_1] = n_1 E[Y_1] = n_1 \left(0 \cdot P(Y_1 = 0) + 1 \cdot \overbrace{P(Y_1 = 1)}^{= \frac{40}{120}} \right) \quad (3.62)$$

altså

$$E[X_1] = n_1 P(Y_1 = 1) \quad (3.63)$$

- c) Bruk lign.(4.63) samt svaret fra oppgave 4.5 a) til å regne ut $E[X_1]$. ²⁶

²⁶Antall komponenter n_1 i tilbud nr. 1 finner du i figur 4.9.

Den stokastiske variabelen X :

$$X = \sum_{i=1}^6 X_i \quad (3.64)$$

er summen av antall solgte komponenter for de 6 aktuelle tilbudene. Tilhørende forventningsverdi er:

$$E[X] = \sum_{i=1}^6 E[X_i] \quad (3.65)$$

og kan skrives

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] + E[X_5] + E[X_6] \quad (3.66)$$

eller, siden $X_i = n_i Y_i$,

$$\begin{aligned} E[X] &= n_1 P(Y_1 = 1) + n_2 P(Y_2 = 1)) \\ &+ n_3 P(Y_3 = 1)) + n_4 P(Y_4 = 1)) \\ &+ n_5 P(Y_5 = 1)) + n_6 P(Y_6 = 1)) \end{aligned} \quad (3.67)$$

- d)** Aksept-sannsynlighetene i lign.(4.67) for de 6 tilbudene kan finnes på samme måte som vist for tilbud 1 tidligere i oppgaven. Disse aksept-sannsynlighetene er oppgitt i vedlegg *B* baksert i oppgavesettet.

Finn tallverdien for $E[X]$. ²⁷

²⁷Bruk lign.(4.67) og tallene i tabellen i figur 4.11, dvs. vedlegg *B*.

Den stokastiske variabelen V :

$$V = \sum_{i=1}^6 V_i \quad (3.68)$$

er verdien av de 6 aktuelle tilbudene.
Tilhørende forventingsverdi er:

$$E[V] = \sum_{i=1}^6 E[V_i] \quad (3.69)$$

som kan skrives

$$E[V] = E[V_1] + E[V_2] + E[V_3] + E[V_4] + E[V_5] + E[V_6] \quad (3.70)$$

eller, siden $V_i = v_i Y_i$,

$$\begin{aligned} E[V] &= v_1 P(Y_1 = 1) + v_2 P(Y_2 = 1) \\ &+ v_3 P(Y_3 = 1) + v_4 P(Y_4 = 1) \\ &+ v_5 P(Y_5 = 1) + v_6 P(Y_6 = 1) \end{aligned} \quad (3.71)$$

e) Finn tallverdien for $E[V]$.²⁸

f) Gi en tolkning av $E[V]$.²⁹

²⁸Bruk lign.(4.71) og tallene i figur 4.11, dvs. vedlegg B.

²⁹En setning er nok.

Vedlegg A

Utfallsrommet Ω for oppgave 4.5:

$$\begin{aligned}
 \Omega = & \left\{ \overbrace{(\textcolor{red}{1}, h, a)}^{p_1 = \frac{5}{600}}, \overbrace{(\textcolor{red}{1}, \bar{h}, a)}^{p_2 = \frac{40}{600}}, \overbrace{(\textcolor{red}{1}, h, \bar{a})}^{p_3 = \frac{25}{600}}, \overbrace{(\textcolor{red}{1}, \bar{h}, \bar{a})}^{p_4 = \frac{80}{600}} \right. \\
 & \overbrace{(\textcolor{blue}{2}, h, a)}^{p_5 = \frac{8}{600}}, \overbrace{(\textcolor{blue}{2}, \bar{h}, a)}^{p_6 = \frac{68}{600}}, \overbrace{(\textcolor{blue}{2}, h, \bar{a})}^{p_7 = \frac{22}{600}}, \overbrace{(\textcolor{blue}{2}, \bar{h}, \bar{a})}^{p_8 = \frac{102}{600}} \\
 & \left. \overbrace{(\textcolor{green}{3}, h, a)}^{p_9 = \frac{12}{600}}, \overbrace{(\textcolor{green}{3}, \bar{h}, a)}^{p_{10} = \frac{85}{600}}, \overbrace{(\textcolor{green}{3}, h, \bar{a})}^{p_{11} = \frac{28}{600}}, \overbrace{(\textcolor{green}{3}, \bar{h}, \bar{a})}^{p_{12} = \frac{125}{600}} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Vedlegg B

For oppgave 4.5:

Tilbud nr. i	1	2	3	4	5	6
Høy (h) eller lavt ($\bar{h}$) tilbud	$\bar{h}$	h	h	$\bar{h}$	h	$\bar{h}$
Selger S_j (j = 1,2,3)	1	1	2	2	3	3
Antall komp. n_i	8	113	357	16	128	5
Verdi v_i (NOK)	2 500	33 000	105 000	5 800	39 700	1 950
Sanns. for <u>aksept</u>	$P(A S_1 \cap \bar{H})$ = $\frac{40}{120}$	$P(A S_1 \cap H)$ = $\frac{5}{30}$	$P(A S_2 \cap H)$ = $\frac{8}{30}$	$P(A S_2 \cap \bar{H})$ = $\frac{68}{170}$	$P(A S_2 \cap H)$ = $\frac{12}{40}$	$P(A S_3 \cap \bar{H})$ = $\frac{85}{210}$

Figure 3.11: Aksept-sannsynligheter i rødt.

■