

Bård-Inge Pettersen og Per Kristian Rekdal

Anvendt matematikk

1. utgave

Pytagoras Forlag
Molde 2021

© Pytagoras Forlag, Molde 2021

1. utgave

Det må ikke kopieres fra denne boken i strid med åndsverkloven eller avtaler om kopiering inngått med KOPINOR, Interessehavere for rettighetshavere til åndsverk. Kopiering i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og inndragning, og kan straffes med bøter eller fengsel.

ISBN 978-82-692361-5-6

For spørsmål vedr. denne boken:

E-post: kontakt@pytagorasforlag.no

Trykk: Lasertrykk AS, Oslo

Forord

«Anvendt matematikk» er en lærebok som tar for seg grunnleggende emner med konkrete anvendelser innen flere disipliner. Boken passer for introduserende matematikkurs på høyskole/universitet nivå som går over ett semester.

Boken er delt inn i tre deler:

- Del I: teori
- Del II: oppgaver
- Del III: komplette, gjennomarbeidede løsninger

Del II er utstyrt med to typer oppgaver:

hovedoppgave



tvillingoppgave

(1)

Hovedoppgavene er oppgaver med utarbeidede, komplette løsninger i del III av boken. I tillegg har hovedoppgavene ekstramateriel i form av videoer. I disse videoene går man gjennom hele eller deler av hovedoppgavene.

Tvillingoppgavene er oppgaver som *ligner på* hovedoppgavene. Tvillingoppgavene har samme natur, omtrent samme vanskelighetsgrad og inneholder de samme poengene som tilhørende hovedoppgave. **Tvillingoppgavene** har ingen løsninger eller tilhørende videoer, og er ment som oppgaver som for studentene skal løse selv eller sammen med andre studenter. Dersom man står fast når man løser **tvillingoppgavene**, kan man se på tilhørende hovedoppgavene som har både komplett løsningsforslag og tilhørende video.

Boken er et resultat av undervisningssamarbeid mellom forfatterne over flere år. Selv om vi har utviklet undervisningsmaterialet selv så har det vært støttelitteratur som har fungert som et supplement og alternativt kursmateriel for de som ønsker det. Denne støttelitteraturen og samt andre relevante kilder finnes i bibliografien bakerst i denne boken.

Helt siden 2014 har studenter og hjelpelærere gitt tilbakemeldinger på boken, oppgavene og løsningene. Vi har fått tilbakemeldinger om både positive og negative sider ved dette kursmaterialet. Forfatterne ønsker å takke for disse tilbakemeldingene.

Vi ønsker også å rette en spesiell takk til Elio A. Farina som har hjulpet oss med det tekniske arbeidet knyttet til L^AT_EX, blant annet figurer.

Molde, september 2021

Bård-Inge Pettersen og Per Kristian Rekdal



Innhold

I

Teori

1	Algebraiske ligninger	13
1.1	Algebraiske uttrykk	13
1.1.1	Variabler, parametre og konstanter	15
1.1.2	Forenkle algebraiske uttrykk	16
1.2	Algebraiske ligninger	19
1.2.1	Litt historie	19
1.2.2	Koordinatsystemer	20
1.2.3	Ligninger og geometri	22
1.2.4	Algebraiske ligninger og løsningsmengden $\mathcal{L}$	29
1.2.5	Klassifisering av algebraiske ligninger	30
1.2.6	Løsningsmetodikk: Transformasjoner	31
1.3	Linære ligninger (1. gradsligninger)	35
1.4	Linære ligningssystem	39
1.5	Kvadratiske ligninger (2. gradsligninger)	42
1.5.1	Kvadratiske ligninger med én variabel – ABC-formelen	42
1.5.2	Polynomer	46
2	Faktorisering og ulikheter	49
2.1	Faktorisering	49
2.1.1	Fundamentalsetningen for aritmetikk	50
2.1.2	Fundamentalsetningen for algebra	51
2.2	Ulikheter	54
2.2.1	Transformasjoner for ulikheter	56
2.2.2	Polynomulikheter	60
2.2.3	Ulikheter med rasjonale uttrykk	63

2.3	Absolutttverdi	66
3	Funksjoner	71
3.1	Funksjoner	71
3.2	Lineære funksjoner (rette linjer)	72
3.2.1	Ett- og to-punktsformelen	75
3.3	Simplex-algoritmen	78
3.4	Kvadratiske funksjoner (parabler)	82
3.4.1	Noen egenskaper til kvadratiske funksjoner (parabler)	83
3.5	Rasjonale funksjoner	87
3.6	Asymptoter	94
3.6.1	Asymptoter for rasjonale funksjoner	95
4	Derivasjon	99
4.1	Derivasjon	99
4.2	Derivasjonsregler	101
4.2.1	Generell derivasjonsregler	101
4.2.2	Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner	111
4.2.3	Kjerneregelen	117
4.3	Globale og lokale ekstremalpunkt	118
4.3.1	Ekstremalpunkt eller ikke?	121
4.3.2	Lokale ekstremalpunkt: 1. derivasjonstesten	121
4.3.3	Lokale ekstremalpunkt: 2. derivasjonstesten	122
4.3.4	Globale ekstremalpunkt	125
5	Ekspontial- og logaritmefunksjoner	129
5.1	Ekspontialfunksjonen	129
5.2	Tallet e, Eulers tall	132
5.2.1	Ekspontialfunksjonen $f(x) = e^x$	134
5.2.2	Regneregler for e^x	135
5.2.3	Deriverte av e^x	136
5.3	Logaritmer	141
5.3.1	Definisjon	141
5.3.2	Regneregler	143
5.4	Deriverte av $\ln x$	147
6	Følger og rekker	151
6.1	Følger og rekker	151
6.1.1	Regneregler for summasjon	154
6.2	Aritmetiske følger og rekker	156
6.2.1	Sum av en aritmetisk rekke	157
6.3	Geometriske følger og rekker	164
6.3.1	Sum av en geometriske rekke	165
6.4	Konvergente og divergente rekker: $n \rightarrow \infty$	178
6.5	Geometriske rekker: $n \rightarrow \infty$	179
6.6	Oversikt finansmatematikk	182

7	Integrasjon	183
7.1	Motivasjon: Areal under graf	183
7.2	Definisjon av integral	187
7.3	Fundamentalsetningen for kalkulus	190
7.3.1	Regneregler for bestemte integral	193
7.4	Antiderivert og ubestemt integral	194
7.5	Beregning av bestemte integral	199
7.5.1	Eksempler på integrasjon innen økonomi og logistikk	201
8	Funksjoner av flere variabler	205
8.1	Funksjoner av to variable	205
8.2	Nivåkurver	208
8.3	Partiellderiverte	210
8.4	Retningsderivert	214
8.5	Globale og lokale ekstremalpunkter	218
8.5.1	Kritiske punkter og 1.derivasjonstesten	220
8.5.2	Klassifisering av stasjonære punkter - 2.derivasjonstesten	222
8.6	Lokale ekstremalpunkter under bibetingelser	226
8.6.1	Lagranges multiplikatormetode	230

II	Oppgaver	
1	Algebraiske uttrykk	245
2	Faktorisering og ulikheter	259
3	Funksjoner	268
4	Derivasjon	284
5	Eksponential- og logaritmefunksjoner	301
6	Følger og rekker	312
7	Integrasjon	322
8	Funksjoner av flere variabler	330

III	Løsninger	
1	Algebraiske ligninger	337
2	Faktorisering og ulikheter	355
3	Funksjoner	372
4	Derivasjon	389
5	Eksponential- og logaritmefunksjoner	417
6	Følger og rekker	434
7	Integrasjon	449
8	Funksjoner av flere variabler	457

	Grunnleggende formler	472
--	------------------------------	------------

	Formelsamling	474
--	----------------------	------------

1	Algebraiske ligninger	13
1.1	Algebraiske uttrykk	
1.2	Algebraiske ligninger	
1.3	Lineære ligninger (1. gradsligninger)	
1.4	Lineære ligningssystem	
1.5	Kvadratiske ligninger (2. gradsligninger)	
2	Faktorisering og ulikheter	49
2.1	Faktorisering	
2.2	Ulikheter	
2.3	Absoluttverdi	
3	Funksjoner	71
3.1	Funksjoner	
3.2	Lineære funksjoner (rette linjer)	
3.3	Simplex-algoritmen	
3.4	Kvadratiske funksjoner (parabler)	
3.5	Rasjonale funksjoner	
3.6	Asymptoter	
4	Derivasjon	99
4.1	Derivasjon	
4.2	Derivasjonsregler	
4.3	Globale og lokale ekstremalpunkt	
5	Ekspontial- og logaritmefunksjoner	129
5.1	Ekspontialfunksjonen	
5.2	Tallet e , Eulers tall	
5.3	Logaritmer	
5.4	Deriverte av $\ln x$	
6	Følger og rekker	151
6.1	Følger og rekker	
6.2	Aritmetiske følger og rekker	
6.3	Geometriske følger og rekker	
6.4	Konvergente og divergente rekker: $n \rightarrow \infty$	
6.5	Geometriske rekker: $n \rightarrow \infty$	
6.6	Oversikt finansmatematikk	
7	Integrasjon	183
7.1	Motivasjon: Areal under graf	
7.2	Definisjon av integral	
7.3	Fundamentalsetningen for kalkulus	
7.4	Antiderivert og ubestemt integral	
7.5	Beregning av bestemte integral	
8	Funksjoner av flere variabler	205
8.1	Funksjoner av to variable	
8.2	Nivåkurver	
8.3	Partiellderiverte	
8.4	Retningsderivert	
8.5	Globale og lokale ekstremalpunkter	
8.6	Lokale ekstremalpunkter under bibetingelser	



1. Algebraiske ligninger

1.1 Algebraiske uttrykk

Et *algebraisk uttrykk* er et uttrykk bygd opp av av:

1. *Konstanter*, dvs. heltall $\overbrace{\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots}^{\mathbb{Z}}$
2. *Parametre*, ofte symbolisert ved $a, b, c \dots$
3. *Variabler*, ofte symbolisert ved $x, y, z \dots$

og de *algebraiske operasjonene*:

+ addisjon,

– subtraksjon,

· multiplikasjon,

/ divisjon,

^ potenser,

√ kvadratrøtter.

■ Eksempel 1.1 — Algebraiske uttrykk

Her er noen eksempler på *algebraiske uttrykk*:

$$1) \quad ax^2 + bx + c \quad (1.1)$$

$$2) \quad \frac{3x^2 - 2xy + a}{y^3 - 3b} \quad (1.2)$$

$$3) \quad \sqrt{\frac{1 - x^4}{1 + ax^3}} \quad (1.3)$$

$$4) \quad \sqrt[3]{z^3 + 3b - x} \quad (1.4)$$

$$5) \quad (x_1 - c_1)(x_2 - c_2)(x_3 - c_3) \cdots (x_n - c_n) \quad (1.5)$$

$$6) \quad (z - 3)^{az^2} - 5 \quad (1.6)$$

$$7) \quad -7 \quad (1.7)$$

$$8) \quad \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + 2 \quad (1.8)$$

■

Ⓚ Algebra har en egen *terminologi* for å beskrive delene av et algebraisk uttrykk:

x, y – variabler

1 – eksponent

2 – koeffisient

3 – ledd

4 – operator

5 – konstantledd

6 – parameter

Legg merke til at en parameter også kan være en koeffisient. ¹

Ⓚ Ledd med *størst* eksponent er som regel skrevet til *venstre*:

$$x^{10} - 3x^5 + 2x^3 + x - 3 \quad (1.9)$$

Ⓚ Andre *konvensjoner*: ²

$$1x = x \quad (\text{koeffisienten 1 fjernes}) \quad (1.10)$$

$$3x^1 = 3x \quad (\text{eksponenten 1 fjernes}) \quad (1.11)$$

$$2x^0 = 2 \quad (\text{noe opphøyd i 0te er alltid 1}) \quad (1.12)$$

¹En koeffisient er konstanten som står foran en variabel.

²Konvensjon i vår sammenheng overenskomst, dvs. noe som er vedtatt at slik skriver vi det.

1.1.1 Variabler, parametre og konstanter

Forskjellen mellom *variabler*, *parametre* og *konstanter* er ofte vanskelig å fange opp, men også svært viktig å forstå.

Tolkningen bak disse begrepene kommer fra *konteksten*, dvs. sammenhengen, som uttrykket stammer fra.³

Generelt har vi at:

Konstant:

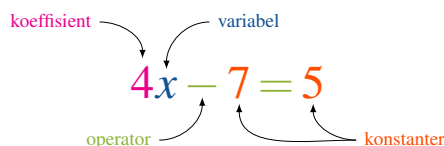
Representerer en fast størrelse som *ikke endrer seg* i den konteksten vi ser på.

Parameter:

Representerer en *konstant* som vi *ikke kjenner*, men som er gitt i den konteksten vi ser på.

Variabel:

Representerer en størrelse som kan *varierte* i den konteksten vi ser på. Svært ofte vil en variabel representerer en *beslutning* som vi må ta, hvor vi har flere alternativ.



Figur 1.1: Variabler og konstanter.

■ Eksempel 1.2 — Kontekst

I det algebraiske uttrykket

$$\frac{1}{2}9.8x^2 \quad (1.13)$$

har vi én konstant 9.8 og én variabel x . Uten kontekst sier dette uttrykket oss svært lite.

Kontekst:

Anta vi holder en ball i ro i luft og deretter slipper den. La x stå for *tiden* som har gått i antall sekunder etter at vi slapp ballen. Uttrykket

$$\frac{1}{2}9.8x^2 \quad (1.14)$$

står da for *avstanden* ballen har falt etter x sekunder, hvor 9.8 er *gravitasjonskonstanten* på jorda.

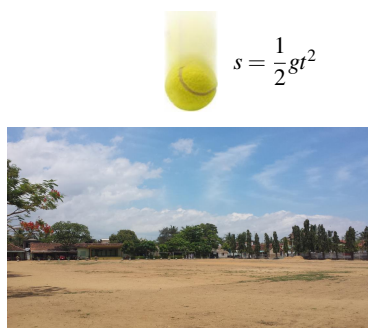
Kontekst med parameter:

Anta vi står på en vilkårlig planet og slipper en ball. Uttrykket

$$\frac{1}{2}gx^2 \quad (1.15)$$

står da for *avstanden* ballen har falt etter x sekunder, hvor g er *gravitasjonskonstanten* på planeten. Parameteren g er fremdeles en konstant i denne konteksten, men verdien er avhengig av hvilken planet vi er på. Gravitasjonskonstanten er forskjellig på månen sammenlignet med jorden. ■

³Begrepet «kontekst» kommer fra det virkelige liv hvor alle størrelsene i et algebraisk uttrykk står for noe spesifikt.



Figur 1.2: Ball faller mot bakken.

1.1.2 Forenkle algebraiske uttrykk

Det algebraiske uttrykket

$$5(2+x) + 3(5x+4) - (x^2)^2 \quad (1.16)$$

kan *reduseres* eller *forenkles* til uttrykket

$$-x^4 + 20x + 22 \quad (1.17)$$

Vi kan *verifisere* at uttrykkene er like for en *gitt* verdi for x , f.eks. $x = 1$, ved å evaluere begge uttrykkene:⁴

$$\begin{aligned} 5(2+x) + 3(5x+4) - (x^2)^2 &= 5(2+1) + 3(5 \cdot 1 + 4) - (1^2)^2 \\ &= 5 \cdot 3 + 3 \cdot 9 - 1 \\ &= 15 + 27 - 1 \\ &= 41 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} -x^4 + 20x + 22 &= -1^4 + 20 \cdot 1 + 22 \\ &= -1 + 20 + 22 \\ &= 41 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Hvilke av disse uttrykkene synes du var enklest å evaluere?

Uttrykket i lign.(1.17) kalles et *forenklet* uttrykk av lign.(1.16).

Men hvordan kan vi vite at uttrykkene er like for *alle* mulige verdier for x ?

Siden det er uendelig mange verdier x kan ta, kan vi ikke verifisere at uttrykkene er like for alle mulige verdier av x , vi må *utlede* at uttrykkene er like.

⁴I lign.(1.18) og (1.19) viser vi at det uttrykkene er like for $x = 1$, ikke generelt. Det kan finnes flere løsninger, men sier vi ikke noe om her. Vi har kun verifisert, dvs. bevist, at den stemmer for $x = 1$ og ingenenting annet.

Definisjon 1.1.1 — Utlede

Å **utlede** at en gitt matematisk formel er lik en annen matematisk formel, betyr å bruke formler vi allerede kjenner til å **vise at** den ene formelen er lik den andre.



Figur 1.3: Detektiven Sherlock Holmes *utleder* hvem drapsmannen er ut fra det han vet/allerede kjenner.

- (K) Vi bruker verbet «å *utlede*» er synonymt med verbet «å *vise at*».
- (K) Når vi skal vise at to formler er like, starter vi gjerne med en av formlene og bruker et visst antall steg på komme til den andre formelen. Hvert steg i utledningen må bruke en allerede kjent formel.

Selve *føringen* har formen (VS = venstre side , HS = høyre side)

$$\begin{array}{ll}
 \text{VS} = \text{HS} & (\text{henvisning til kjent formel}) \\
 = \text{HS} & (\text{henvisning til kjent formel}) \\
 = \text{HS} & (\text{henvisning til kjent formel}) \\
 = \text{HS} & (\text{henvisning til kjent formel}) \\
 = \text{HS} & (\text{henvisning til kjent formel}) \\
 = \text{HS} & (1.20)
 \end{array}$$

hvor vi i høyremargen henviser til en kjente formler som vi *vet* er sanne som gjør stegene korrekte.

■ **Eksempel 1.3** *Utled eller vis at:*

$$5(2+x) + 3(5x+4) - (x^2)^2 = -x^4 + 20x + 22 \quad (1.21)$$

Løsning:

Vi bruker den distributive lov, den kommutative lov og formelen for potens av en potens:

$$5(2+x) + 3(5x+4) - (x^2)^2 = 5 \cdot 2 + 5x + 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4 - (x^2)^2 \quad (\text{distributive lov}) \quad (1.22)$$

$$= 10 + 20x + 12 - x^{2 \cdot 2} \quad (\text{potens av potens}) \quad (1.23)$$

$$= 20x + 10 + 12 - x^4 \quad (\text{kommulative lov}) \quad (1.24)$$

$$= 20x - x^4 + 22 \quad (\text{kommulative lov}) \quad (1.25)$$

$$= -x^4 + 20x + 22 \quad (\text{kommulative lov}) \quad (1.26)$$

Etter at vi har vist det vi skal så pleier man å *avslutte* «vis at»-oppgaver med:

«*som skulle vises*» eller på latin *q.e.d.* (quod erat demonstrandum)

Ofte kan man *utelate kommentarene* i høyremargen dersom det er svært standard. Vi har tatt de med her for å vise god *føringskikk*. ■

Ⓚ I eksempel 1.3 var vi unødvendig nøyaktige og brukte mange steg som ellers vi kan ta i hodet. Når vi skal forenkle et algebraisk uttrykk, kan vi som regel dele opp prosessen i tre steg:

1. *Løse ut parenteser* (distributive lov, assosiative lov, kvadratsetningene)
2. *Fortegnsregler* (like fortegn gir +, ulike fortegn gir −)
3. *Samle like ledd* (ledd med samme potens)

Ⓚ Etterhvert som man får mer erfaring med utregninger så tar man med færre steg, men samtidig ikke for få. Det er viktig å ha med de kritiske stegene, mens de «trivielle» stegene hoppes ofte over.

■ Eksempel 1.4 *Løser ut parenteser*

$$3(xy + 2y - z) = 3xy + 3 \cdot 2y - 3z \quad (\text{distributive og assosiative lov}) \quad (1.27)$$

$$= 3xy + 6y - 3z \quad (\text{fortegnsregler}) \quad (1.28)$$

■ Eksempel 1.5 *Løser ut parenteser og fortegnregler:*

$$-3(xy + 2y - z) = (-3)xy + (-3)2y - (-3)z \quad (\text{distributive og assosiative lov}) \quad (1.29)$$

$$= -3xy - 6y + 3z \quad (\text{fortegnsregler}) \quad (1.30)$$

■ Eksempel 1.6 *Løser ut parenteser, fortegnregler og samler like ledd:*

$$3(3xy + y) - 2(-xy - 2y + z) = 3 \cdot 3xy + 3y - 2(-xy) - 2(-2)y + (-2)z \quad (1.31)$$

$$= 9xy + 3y + 2xy + 4y - 2z \quad (1.32)$$

$$= 11xy + 7y - 2z \quad (1.33)$$

Ⓚ Ofte kan steg 1 og steg 2 *slås sammen*, dvs. man løser ut parenteser og bruker fortegnsreglene i ett og samme steget. Da må man være trygg på spesielt fortegnsreglene. Det er lett å gjøre feil når man gjør begge stegene samtidig, men man sparer også tid og det gir mindre føring.

■ **Eksempel 1.7** Løser ut parentesene og bruker fortegnsregler i *ett steg*. Bruker den generelle kvadratsetningen til å løse ut parentesene. Samle like ledd.

$$\begin{aligned} (2xy+x)(4xy-x) & \overset{\text{- tegn foran parentes}}{-4x^2(1-y)} + x^2 = 8x^2y^2 - 2x^2y + 4x^2y - \cancel{x^2} - 4x^2 + 4x^2y + \cancel{x^2} \\ & = 8x^2y^2 + 6x^2y - 4x^2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

■

1.2 Algebraiske ligninger

1.2.1 Litt historie

Diophantus av Alexandria var en gresk matematiker født rundt 200 BC som først introduserte symbolsk algebra og skrev 13 bøker om løsning av ulike algebraiske ligninger. Han var spesielt kjent for en mengde spill og puzzler, og kanskje det mest kjente problemet var det som stod på gravsteinen hans:⁵

How old is Diophantus?

*Here lies Diophantus,' the wonder behold.
Through art algebraic, the stone tells how old:
'God gave him his boyhood **one-sixth** of his life,
One twelfth more as youth while whiskers grew rife;
And then yet **one-seventh** ere marriage begun;
In **five years** there came a bouncing new son.
Alas, the dear child of master and sage*

*After attaining **half** the measure of his father's life chill fate took him. After consoling his fate by the science of numbers for **four** years, he ended his life.*

Hvis x representerer hvor gammel Diophantus ble, kan vi sette opp følgende *ligning* basert på diktet på gravsteinen:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \quad (1.35)$$

Vi skal blant annet lære å løse slike ligninger i dette avsnittet. Diophantus ble forresten $x = 84$ år.

⁵Skrevet på engelsk for å opprettholde diktets autentiske form (selv om det selvfølgelig var skrevet på gresk).



Figur 1.4: Diophantus av Alexandria.

1.2.2 Koordinatsystemer

René Descartes (født 31. mars 1596 i Frankrike) var en fransk filosof og matematiker. Han var den første som koblet geometriske objekter som linjer, trekanter, sirkler firkanter etc. med algebraiske ligninger.

Descartes' geniale ide var å innføre *koordinatsystemet*. Han skulle etter sigende ha ligget i en sykeseng og stirret i et rutemønstret tak da han kom på ideen med å innføre koordinatsystemet.

Han innså at hvert punkt i planet kan beskrives ved hjelp av to dimensjoner: *x*-retningen og *y*-retningen. Et vilkårlig punkt *p* i planet kunne da representeres som en 2-tupel (x, y) . Han kalte *x*- og *y*-koordinater og hvilke verdier *x* og *y* har i punktet *p* er avhengig av *referansepunktet* $(0, 0)$ hvor aksene skjærer. Dette skjæringspunktet til aksene kalles *origo*.

Vi kan konstruere et *koordinatsystem* i planet ved følgende enkle steg.

1. Vi starter med et geometrisk objekt vi ønsker å beskrive algebraisk, si for enkelthetsskyld et punkt *p* i planet, se figur 1.5.
2. Deretter velger vi et *origo* (referansepunkt) i forhold til punktet *p*, si et steg ned og et steg til venstre, se figur 1.6.
3. Videre tegner vi opp *x*-aksen og *y*-aksen som representerer de to dimensjonene i planet, se figur 1.7. Origo får da koordinatene $(0, 0)$.
4. Til slutt velger vi hvilken *enhet* aksene skal ha. La et steg representere én enhet. Siden vi gikk et steg ned og et steg til venstre når vi valgte referansepunktet, får punktet *p* koordinatene $(1, 1)$, se figur 1.8.

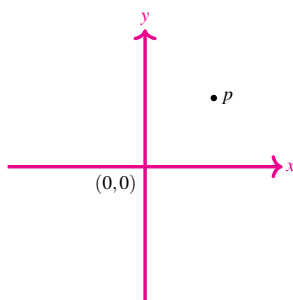
• *p*

Figur 1.5: Steg 1: Et punkt *p* i planet.

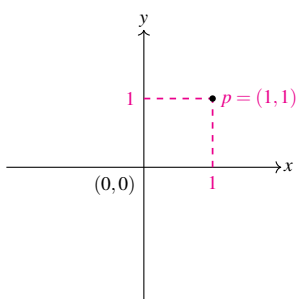
• *p*

• origo

Figur 1.6: Steg 2: Plasserer origo et steg ned og et steg til venstre.



Figur 1.7: Steg 3: Tegner opp x -aksen og y -aksen og gir origo koordinatene $(0,0)$.

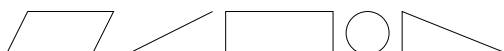


Figur 1.8: Punktet p får koordinatene $(1,1)$.



Renè Descartes
«Jeg tenker, altså er jeg»

«Geometriske objekter»



«Kan beskrives ved ligninger og ulikheter»

$$y = ax + b$$

$$0 \leq y \leq 5 \wedge 0 \leq x \leq 5$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Figur 1.9: Renè Descartes assosierte *ligninger* med *geometriske objekter*.

Ⓚ Vi kan *velge origo* hvor vi vil. ⁶

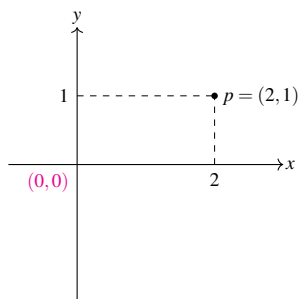
Ⓚ Vi kan også velge *enheten* selv når vi lager et koordinatsystem. ⁷

Ⓚ Vi kan også endre *skalaen* på koordinatsystemet. ⁸

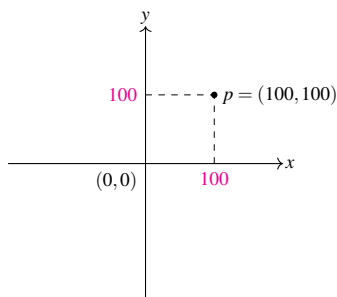
⁶Vi kunne for eksempel gått 1 steg ned og 2 steg til venstre og satt origo der. Da hadde punktet p fått andre koordinater, nemlig $(2,1)$, se figur 1.10.

⁷Hvis et steg representerer 100 enheter i stedet for 1 enhet, får punktet p koordinatene $(100,100)$ i stedet for koordinatene $(1,1)$, se figur 1.11.

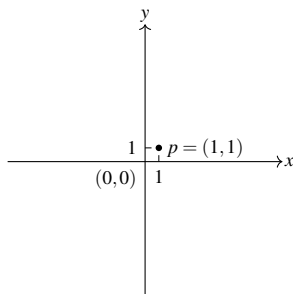
⁸Å velge skala er som å ta på seg briller med en viss styrke, vi zoomer med andre ord inn eller ut. Anta vi zoomer oss 5 enheter ut. Punktet p har fremdeles koordinatene $(1,1)$, men nå virker det som om punktet ligger 5 enheter nærmere origo, se figur 1.12.



Figur 1.10: Origo et steg ned og to steg til venstre gir koordinatene $p = (2, 1)$.



Figur 1.11: Vi kan velge fritt en annen *enhet* langs aksene.



Figur 1.12: Endre *skala*: Vi har zoomet oss 5 enheter utover.

1.2.3 Ligninger og geometri

Med oppfinnelsen av koordinatsystemet kunne Renè Descartes begynne å beskrive geometriske figurer ved hjelp av algebraiske ligninger, eller retttere sagt ved *løsningsmengden* av algebraiske ligninger.

■ Eksempel 1.8 — Løsningsmengde – lineær funksjon

Ta for eksempel den enkle ligningen

$$y = 2x - 1 \quad (1.36)$$

Hvilke punkter (x, y) løser lign.(1.24)?

Løsning:

Vi ser i figur 1.13 at punktene ligger langs en rett *linje*. Vi kan dermed si at ligningen $y = 2x - 1$ representerer en rett linje, ved at *løsningsmengden*

$$\mathcal{L} = \{ (x, y) \mid y = 2x - 1 \} \quad (1.37)$$

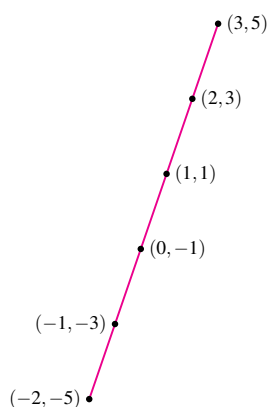
til ligningen utgjør alle punktene på den rette linja i fig.(1.13).

Algebraisk ligning: $y = 2x - 1$

x	y	(x, y)
-2	$2 \cdot (-2) - 1 = -5$	$(-2, -5)$
-1	$2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
0	$2 \cdot 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$	$(2, 3)$
3	$2 \cdot 3 - 1 = 5$	$(3, 5)$

Tabell 1.1: **Noen punkter** på $y = 2x - 1$.

Geometrisk figur: *linje*



Figur 1.13: Linjen $y = 2x - 1$.

■ Eksempel 1.9 — Nullpunkt

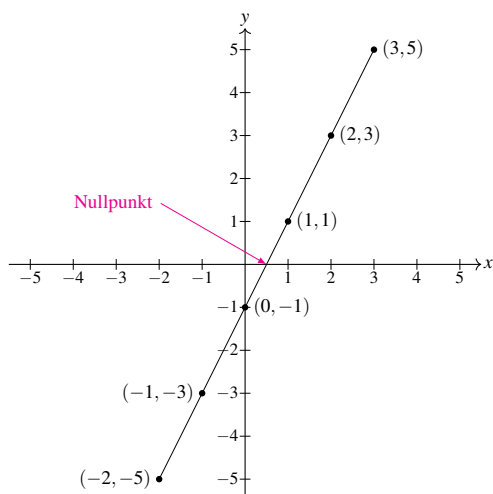
Anta vi fremdeles ser på ligningen

$$y = 2x - 1 \quad (1.38)$$

fra eksempel 1.8 som representerer linjen i figur 1.13.

Vi ønsker nå å finne punktet hvor linjen skjærer x -aksen, se figur 1.14. Dette punktet kalles *nullpunktet* til linjen, se figur 1.14.

Løsning:



Figur 1.14: I hvilket punkt skjærer linjen $y = 2x - 1$ x -aksen?

Geometriske spørsmål kan nå *oversettes* til algebraiske ligninger:

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor **skjærer** linjen x -aksen?

Algebraisk oversettelse:

Hvilken x **løser** ligningen
 $0 = 2x - 1$

Siden nullpunktet skjærer x -aksen, må y -koordinaten være null. Hvis vi setter $y = 0$ i lign.(1.38), får vi følgende ligning med én ukjent:

$$0 = 2x - 1 \quad (1.39)$$

Løser Eq.(1.39) med hensyn på x alene:

$$x = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (1.40)$$

som betyr at $x = 0.5$ er den mulige løsningen.⁹

⁹Vi har *transformert* ligningen vi startet med til en ny ligning som er enklere å løse enn den vi startet med. Mer om transformasjoner i avsnitt 1.2.6.

Geometrisk spørsmål/tolkning

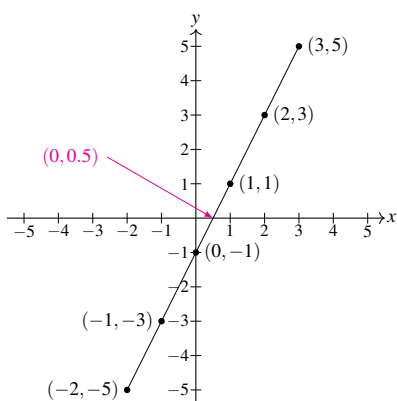
Hvor skjærer linjen x -aksen?

Svar: I punktet $(0, 0.5)$

Algebraisk oversettelse:

Siden $y = 0$ hvor linjen skjærer x -aksen, kan vi oversette problemet til:

Hvilken x løser ligningen
 $0 = 2x - 1$



Svar: $x = 0.5$

■ Eksempel 1.10 — Løsningsmengde – parabel

Anta vi utvider lign.(1.24) ved å opphøye x -variabelen i 2.potens:

$$y = 2x^2 - 1 \quad (1.41)$$

Hvilke punkter (x, y) løser lign.(1.41)?

Løsning:

Vi ser i figur 1.15 at punktene *ikke* ligger langs en rett linje, men langs en såkalt *parabel*. Vi kan dermed si at ligningen $y = 2x^2 - 1$ representerer en parabel, ved at *løsningsmengden*

$$\mathcal{L} = \{ (x, y) \mid y = 2x^2 - 1 \} \quad (1.42)$$

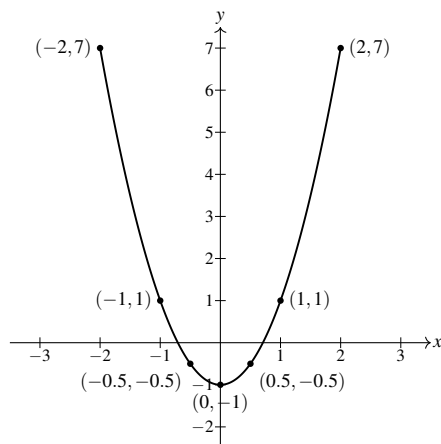
til ligningen utgjør alle punktene på parabelen i fig.(1.15).

Algebraisk ligning: $y = 2x^2 - 1$

x	y	(x, y)
-2	$2(-2)^2 - 1 = 7$	$(-2, 7)$
-1	$2(-1)^2 - 1 = 1$	$(-1, 1)$
-0.5	$2(-0.5)^2 - 1 = -0.5$	$(-0.5, -0.5)$
0	$2 \cdot 0^2 - 1 = -1$	$(0, -1)$
0.5	$2 \cdot 0.5^2 - 1 = -0.5$	$(0.5, -0.5)$
1	$2 \cdot 1^2 - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$2 \cdot 2^2 - 1 = 7$	$(2, 7)$

Tabell 1.2: Noen punkter på $y = 2x^2 - 1$.

Geometrisk figur: *parabel*



Figur 1.15: Parabelen $y = 2x^2 - 1$.

■ Eksempel 1.11 — Nullpunkt – parabel

Vi fortsetter fra eksempel 1.10 og ønsker nå å finne punktene hvor parabelen skjærer x -aksen. Vi ser fra figur 1.15 at parabelen skjærer x -aksen i *to* punkter. Disse punktene kalles *nullpunktene* til parabelen.

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor skjærer parabelen x -aksen?

Algebraisk oversettelse:

Hvilken x løser ligningen
 $0 = 2x^2 - 1$

Hvis vi setter $y = 0$ i lign.(1.41), får vi følgende ligning med én ukjent:

$$0 = 2x^2 - 1. \quad (1.43)$$

Hvis vi flytter litt på leddene og deler på 2 i lign.(1.43) får vi

$$x^2 = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (1.44)$$

som betyr at

$$x = -\sqrt{0.5} \quad \text{og} \quad x = \sqrt{0.5} \quad (1.45)$$

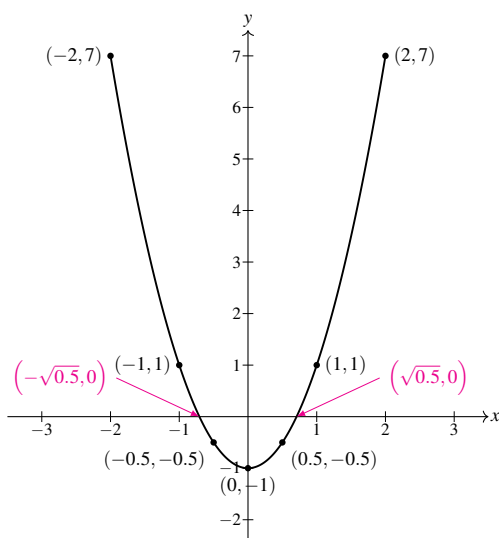
er de mulige løsningene.¹⁰

¹⁰Vi har transformert ligningen vi startet med til en ny ligning som er enklere å løse enn den vi startet med. Mer om transformasjoner i avsnitt 1.2.6.

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor skjærer linjen x -aksen?

Svar: I punktene $(-\sqrt{0.5}, 0)$ og $(\sqrt{0.5}, 0)$

Algebraisk oversettelse:

Siden $y = 0$ hvor parabelen skjærer x -aksen, kan vi oversette problemet til:

Hvilke x løser ligningen

$$0 = 2x^2 - 1$$

Svar: $x = -\sqrt{0.5}$ og $x = \sqrt{0.5}$

■ Eksempel 1.12 — Skjæringspunkter – parabel

Vi kan nå kombinere linjen $y = 2x - 1$ fra eksempel 1.8 og parabelen $y = 2x^2 - 1$ fra eksempel 1.10 i ett og samme koordinatsystemet, og deretter spørre følgende spørsmål: ¹¹

Hvor *skjærer* linjen og parabelen?

Løsning:

Figur 1.16 illustrerer problemstillingen.

Vi ser fra grafen at linjen og parabelen skjærer hverandre i punktene $(0, -1)$ og $(1, 1)$, men på samme måte som før kan vi oversette et geometrisk spørsmål til det å løse en algebraisk ligning: ¹²

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor *skjærer* linjen og parabelen?

Algebraisk oversettelse:

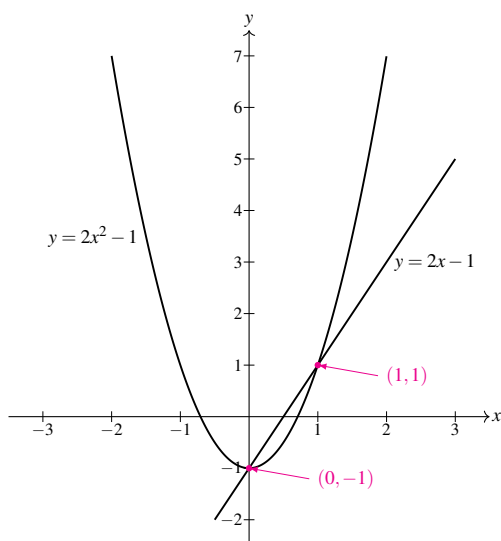
Hvilke (x, y) løser ligningene

$$y = 2x - 1$$

$$y = 2x^2 - 1$$

¹¹Spørsmålet hvor forskjellige geometriske figurer skjærer hverandre forekommer svært ofte både i økonomi og logistikk og matematikk ellers.

¹²Det er ikke alltid like enkelt som i dette tilfellet å lese av nøyaktig fra figuren hva skjæringspunktene er. Da er man avhengig av den algebraiske fremgangsmetoden.



Figur 1.16: Parabelen $y = 2x^2 - 1$ og linjen $y = 2x - 1$.

I et punkt (x, y) hvor linjen $y = 2x - 1$ og parabelen $y = 2x^2 - 1$ skjærer, må *begge* ligningene være oppfylt *samtidig*. Punktet (x, y) må derfor oppfylle *ligningssystemet*

$$y = 2x - 1 \quad (1.46)$$

$$y = 2x^2 - 1 \quad (1.47)$$

For å løse ligningssystemet, finner vi x først ved å trekke lign.(L1.48) fra lign.(L1.49):

$$y = y \quad (1.48)$$

som gir

$$0 = 2x^2 - 2x, \quad (1.49)$$

Vi kan skrive lign.(L1.52) på formen

$$0 = 2x(x - 1), \quad (1.50)$$

som betyr at $x = 0$ eller $x = 1$ er de verdiene for x .¹³

De tilsvarende mulige y -koordinatene finnes ved å sette inn for x i lign.(L1.48) (eller lign.(L1.49)):

$$x = 0 : \quad y = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \quad (1.51)$$

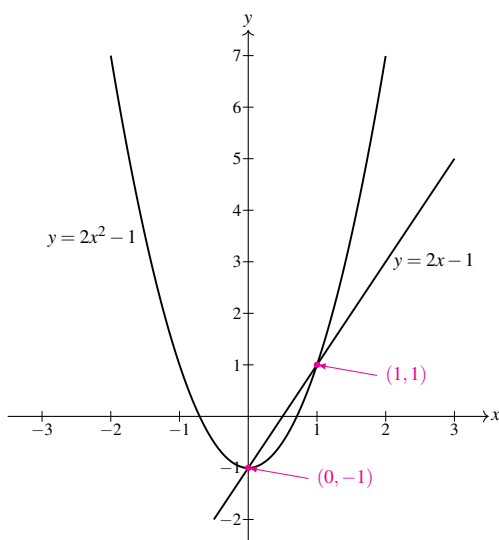
$$x = 1 : \quad y = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \quad (1.52)$$

som gir de mulige skjæringspunktene $(0, -1)$ og $(1, 1)$.

¹³Denne måten å løse ligninger på kalles *faktorisering*, som vi skal lære med om i avsnitt 2.1.

Geometrisk spørsmål/tolkning

Hvor skjærer linjen og parabelen?

Svar: I punktene $(0, -1)$ og $(1, 1)$ Algebraisk oversettelse:Hvilke (x, y) løser ligningene

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ y &= 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \text{og} \quad y = -1 \\ x = 1 & \quad \text{og} \quad y = 1 \end{aligned}$$

1.2.4 Algebraiske ligninger og løsningsmengden $\mathcal{L}$

En *algebraisk ligning* og den tilhørende *løsningsmengden* $\mathcal{L}$ er så fundamentale begreper at vi definerer disse begrepene generelt.

Definisjon 1.2.1 — Algebraisk ligning

En *algebraisk ligning* er en ligning på formen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.53)$$

hvor $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er to algebraiske uttrykk av n variabler $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ⓚ Når vi har bare *én* variabel ($n = 1$) skriver vi gjerne bare x i stedet for x_1 .

Når vi har *to* variabler ($n = 2$) forekommer ofte x og y i stedet for x_1 og x_2 .

Når vi har *tre* variabler ($n = 3$) forekommer ofte x , y og z i stedet for x_1, x_2 og x_3 .

Når vi har *fire eller flere* variabler ($n \geq 4$) forekommer nesten alltid $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$

■ **Eksempel 1.13** Noen algebraiske ligninger:

$$\overbrace{2x+x^3}^{A(x)} = \overbrace{4x^2+5}^{B(x)} \quad (1.54)$$

$$\frac{yz}{x} = \frac{2}{y^3-3z} \quad (1.55)$$

$$x^3 = \sqrt{x^2-1} \quad (1.56)$$

$$x_1^5 + 3x_2^2 = \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \quad (1.57)$$

■

Definisjon 1.2.2 — Løsningsmengden $\mathcal{L}$

Løsningsmengden $\mathcal{L}$ av den algebraiske ligningen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.58)$$

er definert som mengden

$$\mathcal{L} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \} \quad (1.59)$$

dvs. mengden av alle punktene $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ som oppfyller lign.(1.58).

Ⓚ Når vi *løser* en ligning, finner vi med andre ord hvilke punkter *løsningsmengden* består av.

Ⓚ Det er elementene i *løsningsmengden* til en algebraiske ligning hvis punkter beskriver et *geometrisk objekt* i passende valgt koordinatsystem, men vi sier at det er *ligningen* som *representerer* objektet.

■ **Eksempel 1.14** Noen algebraiske ligninger med tilhørende løsningsmengde:

$$1) \quad x = 4 \quad \mathcal{L} = \{x \mid x = 4\} = \{4\} \quad (1.60)$$

$$2) \quad x^2 = 9 \quad \mathcal{L} = \{x \mid x^2 = 9\} = \{-3, 3\} \quad (1.61)$$

$$3) \quad y = 5x \quad \mathcal{L} = \{(x, y) \mid y = 5x\} \quad (1.62)$$

$$4) \quad x^3 = 5 \quad \mathcal{L} = \{x \mid x^3 = 5\} = \{\sqrt[3]{5}\} \quad (1.63)$$

■

1.2.5 Klassifisering av algebraiske ligninger

Vi klassifiserer en algebraisk ligning

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.64)$$

etter to nøkkelstørrelser:

1. antall *variabler* (dimensjonen),
2. *graden* (høyeste potens x^k).

■ **Eksempel 1.15** Ligningen

$$2x - 1 = 0 \quad (1.65)$$

kalles en *1. gradsligning* i 1 dimensjon, siden vi har én variabel x og høyeste potens er 1. ■

■ **Eksempel 1.16** Ligningen

$$x^5 - x + 1 = 0 \quad (1.66)$$

kalles en *5. gradsligning* i 1 dimensjon, siden vi har én variabel x og høyeste potens er 5. ■

■ **Eksempel 1.17** Ligningen

$$y = 2x - 1 \quad (1.67)$$

kalles en *1. gradsligning* i 2 dimensjoner, siden vi har to variabler x og y og høyeste potens er 1. (Slike ligninger kalles også *lineære* ligninger). ■

■ **Eksempel 1.18** Ligningen

$$y^3 - z^2 = 2x - 1 \quad (1.68)$$

kalles en *3. gradsligning* i 3 dimensjoner, siden vi har *tre* variabler x , y og z og høyeste potens er 3. ■

1.2.6 Løsningsmetodikk: Transformasjoner

Å løse en ligning er ofte forbundet med genialitet og oppfinnsomhet. Forskjellige ligninger krever forskjellige strategier. Vi spør derfor:

*Finnes det en **fast måte** å løse ligninger på?*

Dersom det var tilfelle, hadde vi kunnet løse ligninger mekanisk uten å faktisk tenke.¹⁴

Det vi derimot *kan* gjøre er å ha en fast *strategi* for hvordan man løser ligninger. Denne strategien baserer seg på *transformasjoner*.

Definisjon 1.2.3 — Transformasjon

Anta vi har en algebraisk ligning

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.69)$$

med tilhørende løsningsmengde $\mathcal{L}$.

¹⁴Vi kan bruke *dataprogrammer* som kan løse ligninger, men husk at da får man *numeriske tilnærminger* og ikke eksakte løsninger.

En **transformasjon** T av lign.(1.69) er en matematisk operasjon som transformerer de algebraiske uttrykkene A og B til to nye algebraiske uttrykk A' og B' slik at den nye ligningen

$$A'(x_1, x_2, \dots, x_n) = B'(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.70)$$

har samme løsningsmengden $\mathcal{L}$ som den opprinnelige ligningen.

Ⓚ Vi skriver generelt

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \bigg/ T \quad (1.71)$$

$\Updownarrow$

$$A'(x_1, x_2, \dots, x_n) = B'(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.72)$$

hvor tegnet $\Updownarrow$ betyr at ligningene har samme løsningsmengde. Symbolet $\Updownarrow$ kalles en ekvivalenspil.

Ⓚ Hovedideen bak det å transformere ligninger til nye ligninger, er at den nye ligningen er på en *enklere* form enn den vi startet med.

■ Eksempel 1.19 — Transformasjoner

Løs ligningen

$$2x - 1 = 0 \quad (1.73)$$

ved å bruke de riktige transformasjonene.

Løsning:

La T være *transformasjonen* hvor vi summerer venstre side (VS) og høyre side (HS) med 1:

$$2x - 1 = 0 \quad \bigg/ +1 \quad (1.74)$$

$\Updownarrow$

$$2x = 1 \quad (1.75)$$

Begge ligningene har samme *løsningsmengde* $\mathcal{L} = \{ \frac{1}{2} \}$, dvs. $x = \frac{1}{2}$ er eneste løsning. Dersom vi igjen transformerer lign.(1.65) ved å multiplisere VS og HS med $\frac{1}{2}$ blir dette enda tydeligere:

$$2x = 1 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{2} \quad (1.76)$$

$\Updownarrow$

$$x = \frac{1}{2} \quad (1.77)$$

Alle ligningene har samme *løsningsmengde*, men legg merke til at lign.(1.67) er på en *enklere* form enn lign.(1.68), den sier *eksplisitt* at løsningen er $x = \frac{1}{2}$. ■

Ideen med transformasjoner er å finne et sett med transformasjoner $T_1, T_2, \dots, T_k$ slik at løsningen til den resulterende ligningen etter k transformasjoner er enkel/åpenbar:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad T_1 \quad (1.78)$$

$$\Updownarrow$$

$$A_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad T_2 \quad (1.79)$$

$$\Updownarrow$$

$$A_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad T_3 \quad (1.80)$$

$$\Updownarrow$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\Updownarrow$$

$$A_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad T_k$$

$$\Updownarrow$$

$$A_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = B_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

■ Eksempel 1.20 — Transformasjoner

Løs ligningen

$$\frac{2x-1}{x+1} = 1 \quad (1.81)$$

ved å bruke de riktige transformasjonene.

Løsning:

Første transformasjon er å fjerne telleren i brøken i VS, dvs T_1 . Det gjør vi ved å multiplisere ligningen med $x+1$.

$$\frac{2x-1}{x+1} = 1 \quad \Big/ \cdot (x+1) \quad T_1 \quad (1.82)$$

$$\Updownarrow$$

$$2x-1 = x+1 \quad (1.83)$$

Neste transformasjon T_2 er å «flytte x fra HS til VS», dvs. vi må trekke fra x :

$$2x-1 = x+1 \quad \Big/ -x \quad T_2 \quad (1.84)$$

$$\Updownarrow$$

$$x-1 = 1 \quad (1.85)$$

Siste transformasjon T_3 er å «flytte -1 fra VS til HS», dvs. vi må addere fra 1:

$$x-1 = 1 \quad \Big/ +1 \quad T_3 \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ x &= 2 \end{aligned} \tag{1.87}$$

som viser at løsningen er $x = 2$, dvs. $\mathcal{L} = \{ 2 \}$. ■

■ **Eksempel 1.21** Noen ganger kan en transformasjon resultere i *mer* enn 1 løsning, f.eks. når vi tar kvadratroten av en ligning:

$$x^2 = 9 \quad \Big/ \sqrt{\dots} \tag{1.88}$$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ x &= 3 \vee x = -3, \end{aligned} \tag{1.89}$$

som viser at løsningen er $x = 3$ *eller* $x = -3$, dvs. $\mathcal{L} = \{ -3, 3 \}$. ■

■ **Eksempel 1.22** Den *omvendte transformasjonen* av kvadratroten er å ta 2. potens av en ligning. Det gir kun én løsning:

$$3 = \sqrt{x+1} \quad \Big/ (\dots)^2 \tag{1.90}$$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ 9 &= x+1 \end{aligned} \quad \Big/ -1 \tag{1.91}$$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ 8 &= x \end{aligned} \tag{1.92}$$

som viser at løsningen er $x = 8$, dvs. $\mathcal{L} = \{ 8 \}$.¹⁵ ■

Ⓚ Når vi løser ligninger i praksis, trenger vi ikke alltid å påpeke hvilken transformasjon vi bruker, dersom det er *underforstått* hvilken det er.

Ⓚ Her er noen *typiske* transformasjoner: (VS = venstre side, HS = høyre side)

$$\Big/ + \quad (\text{addere samme tall på VS og HS}) \tag{1.93}$$

$$\Big/ - \quad (\text{subtrahere samme tall på VS og HS}) \tag{1.94}$$

$$\Big/ \cdot \quad (\text{multiplisere samme tall på VS og HS}) \tag{1.95}$$

$$\Big/ : \quad (\text{dividere samme tall på VS og HS}) \tag{1.96}$$

$$\Big/ \sqrt[n]{\dots} \quad (\text{ta nte-kvadratroten av VS og HS}) \tag{1.97}$$

$$\Big/ \dots^n \quad (\text{opphøye VS og HS i en nte-potens}) \tag{1.98}$$

I kapittel 5 introduserer vi flere transformasjoner som f.eks. e^x og $\ln x$.

¹⁵Legg merke til at $x = -8$ er *ikke* en løsning. Kvadratroten i lign.(3.60) er ikke engang definert for $x = -8$ (komplekst tall).

1.3 Lineære ligninger (1. gradsligninger)

Lineære ligninger eller 1. gradsligninger er ligninger hvor *høyeste potens* av variablene er 1.

Lineære ligninger av 1 variabel er trivielle:

$$ax - b = 0 \quad (1.99)$$

hvor $a \neq 0$ og b er parametre. Løsningen er gitt ved: $x = \frac{b}{a}$. Nedenfor definerer vi en mer generell 1. gradsligning.

Definisjon 1.3.1 — Lineære ligninger med 2 variabler

En *linær ligning* med to variabler er definert ved

$$y = ax + b \quad (1.100)$$

hvor $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$.

Ⓚ Geometrisk sett representerer lign.(1.100) en *rett linje* i planet hvor parametrene har følgende tolkninger, se eksempel 1.24 nedenfor.

- a = stigningstallet til linjen (èn enhet til venstre gir a enheter opp)
- b = skjæring med y-aksen

Ⓚ Definisjonen i lign.(1.100) er en 1. gradsligning siden begge variablene x og y kun er opphøyd i første potens.¹⁶

■ Eksempel 1.23 — 1. gradsligning

Hva slags *geometrisk tolkning* har 1. gradsligningen nedenfor?

$$y = -\frac{2}{3}x + 5 \quad (1.101)$$

Løsning:

De punktene (x, y) i planet som løser lign.(1.101) er en linje som skjærer y-aksen i punktet $b = 5$ og med stigningstallet $a = -\frac{2}{3}$. ■

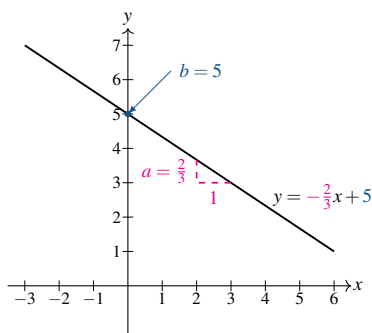
■ Eksempel 1.24 — To skjærende linjer

Anta vi har gitt to linjer:

$$y = -x + 1 \quad (1.102)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (1.103)$$

¹⁶Husk $x = x^1$ og $y = y^1$.



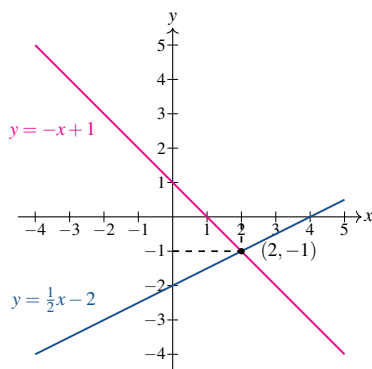
Figur 1.17: Linjen $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

Disse to linjene skjærer hverandre i (x, y) -planet.

- a) Finn skjæringspunktet til linjene *grafisk*.¹⁷
- b) Finn skjæringspunktet til linjene *ved regning*.

Løsning:

- a) Grafisk løsning:



Figur 1.18: Plott av linjene $y = -x + 1$ og $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Av figur 1.17 ser vi at grafene skjærer hverandre i punktet $(2, -1)$.

- b) «Ved regning» betyr at vi må bruke de algebraiske ligningene for linjene

$$y = -x + 1 \quad (1.104)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (1.105)$$

¹⁷Grafisk, dvs. ved å tegne linjene i et (x, y) -koordinatsystem og finne svaret kun ved å lese av figuren, altså ingen utregninger behøves.

for å finne *skjæringspunktet*. Det essensielle her er at *begge* ligningene må være oppfylt i skjæringspunktet. Vi kan dermed sette y -ene lik hverandre:

$$y = y \quad (1.106)$$

$$\Downarrow$$

$$-x + 1 = \frac{1}{2}x - 2 \quad \Bigg/ +x \text{ og } +2 \quad (1.107)$$

$$\Downarrow$$

$$1 + 2 = \frac{1}{2}x + x \quad \Bigg/ \text{slår sammen like ledd} \quad (1.108)$$

$$\Downarrow$$

$$3 = \frac{3}{2}x \quad \Bigg/ \cdot \frac{2}{3} \quad (1.109)$$

$$\Downarrow$$

$$2 = x \quad (1.110)$$

Dette er den x -verdien hvor linjene *skjærer* hverandre, se figur 1.18. For å finne den tilhørende y -koordinaten kan vi bare sette inn $x = 2$ for en av linjene, vi har valgt linjen $y = -x + 1$:

$$y = -x + 1 \quad \Bigg/ x = 2 \quad (1.111)$$

$$= -2 + 1 \quad (1.112)$$

$$= -1 \quad (1.113)$$

Vi har dermed funnet skjæringspunktet $(2, -1)$ ved hjelp av regning. ■

■ Eksempel 1.25 — Skjæring med x -aksen for linjen $y = ax + b$

La oss igjen se på linjen

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (1.114)$$

fra eksempel 1.24.

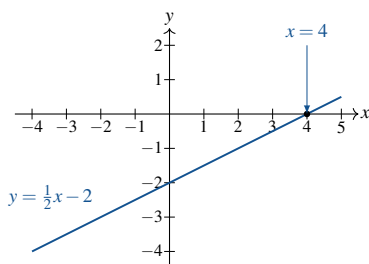
Finn *skjæringen* med x -aksen ved regning, se figur 1.19. Dette punktet kalles *nullpunktet* til linjen.

Løsning:

Vi ser direkte fra grafen i figur 1.19 at nullpunktet er gitt ved $x = 4$. Men oppgaven ba oss om å finne dette ved regning. Dermed må vi bruke den algebraiske representasjonen av linjen.

Skjæring med x -aksen (nullpunktet) er hvor $y = 0$:

$$y = 0 \quad (1.115)$$



Figur 1.19: Finner nullpunktet til linjen $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Dermed:

$$0 = \frac{1}{2}x - 2 \quad \quad \quad / + 2 \quad \quad \quad (1.116)$$

$\Updownarrow$

$$2 = \frac{1}{2}x \quad \quad \quad / \cdot 2 \quad \quad \quad (1.117)$$

$\Updownarrow$

$$4 = x \quad \quad \quad (1.118)$$

som viser at *nullpunktet*, dvs. skjæringen med x -aksen, er gitt ved $x = 4$. ■

■ **Eksempel 1.26** Hvor mange skjæringer med x -aksen kan en linje maksimalt ha?

Kan en linje ha ingen skjæring med x -aksen? ■

Definisjon 1.3.2 — Lineære ligninger med 3 variabler

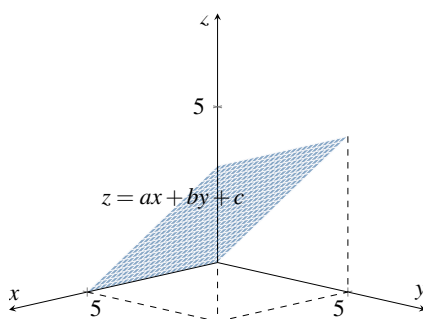
En *lineær ligning* med tre variabler er definert ved

$$z = ax + by + c \quad \quad \quad (1.119)$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ⓚ Geometrisk sett representerer *løsningsmengden* til lign.(1.119) et *plan i rommet*, se figur 1.20.¹⁸

¹⁸Tolkningen av parametrene a , b og c er mer komplisert enn for linjer og går ikke gjennom her.



Figur 1.20: Ligninger på formen $z = ax + by + c$ repræsenterer et plan i rummet.

■ Eksempel 1.27 — Lineær ligning med 3 variable

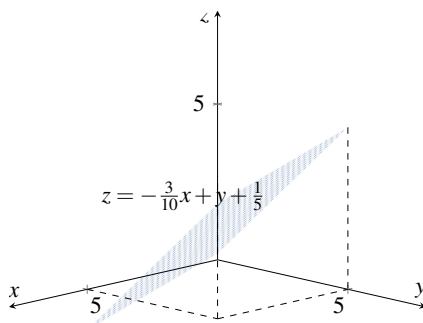
Den lineære ligningen

$$3x - 10y + 10z = 2 \quad (1.120)$$

kan omskrives med z alene på venstre side:

$$z = -\frac{3}{10}x + y + \frac{1}{5} \quad (1.121)$$

Løsningsmængden for denne ligningen er et plan i rummet, se figur 1.21.



Figur 1.21: Ligningen $z = -\frac{3}{10}x + y + \frac{1}{5}$ repræsenterer et plan i rummet. ■

1.4 Lineære ligningssystem

Dersom vi har flere lineære ligninger som skal løses samtidig, har vi et *lineært ligningssystem*.

Definisjon 1.4.1 — Lineært ligningssystem med 2 variabler

Et *lineært ligningssystem* med 2 variabler består av n ligninger som må løses samtidig:

$$a_1y + b_1x = c_1 \quad (1.122)$$

$$a_2y + b_2x = c_2 \quad (1.123)$$

$$\vdots$$

$$a_ny + b_nx = c_n \quad (1.124)$$

hvor $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ og $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

(K) Et lineært ligningssystem med 2 variabler og n ligninger, betyr gemoetrisk sett at vi har tegnet opp n *linjer i planet* og ser om *alle* linjene skjærer hverandre i *ett* og samme punkt.

■ Eksempel 1.28 — Lineært ligningssystem

Løs ligningssystemet både grafisk og ved regning:

$$x + y = 5 \quad (1.125)$$

$$3x + 2y = 10 \quad (1.126)$$

Løsning:

Vi løser ligningssystemet i 3 steg:

Steg 1: Skriv lign.(3.58) og (3.59) om på formen $y = ax + b$.

Steg 2: Tegn opp linjene i et passende koordinatsystem. Dersom linjene er parallelle, så finnes ingen løsning. Hvis de skjærer, så er skjæringspunktet løsningen.

Steg 3: Sett høyresidene i ligningene for linjene fra steg 1 lik hverandre og løs med hensyn på x .

Vi utfører disse 3 stegene:

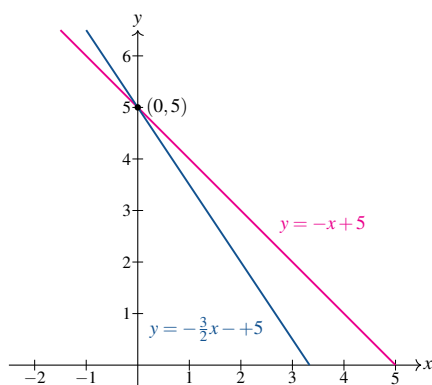
Steg 1: Skriv ligningene på formen $y = ax + b$:

$$x + y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 5 \quad (1.127)$$

$$3x + 2y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + 5 \quad (1.128)$$

Steg 2: Tegn opp linjene i et passende koordinatsystem:

Vi ser ved inspeksjon av figur 1.22 at linjene skjærer hverandre i punktet $(0, 5)$. Løsningsmengden til ligningssystemet er dermed $\mathcal{L} = \{ (0, 5) \}$.



Figur 1.22: Plott av linjene $y = -x + 5$ og $y = -\frac{3}{2}x + 5$.

La oss likevel være på den sikre siden og regne oss frem til dette svaret.

Steg 3: Sett høyresidene i ligningene for linjene fra steg 1 lik hverandre og løs med hensyn på x .

$$-x + 5 = -\frac{3}{2}x + 5 \quad \quad \quad / -5 \quad (1.129)$$

$\Updownarrow$

$$-x = -\frac{3}{2}x \quad \quad \quad / +\frac{3}{2}x \quad (1.130)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{5}{2}x = 0 \quad \quad \quad / \cdot \frac{2}{5} \quad (1.131)$$

$\Updownarrow$

$$x = 0 \quad (1.132)$$

Vi finner tilhørende y -verdi ved å sette inn i lign.(L1.97) eller lign.(L1.98):¹⁹

$$y = -\frac{3}{2} \cdot 0 + 5 = 5 \quad (1.133)$$

Dermed har vi vist ved regning at *løsningsmengden* er punktet $(0, 5)$. ■

■ Eksempel 1.29 — Ligningssystem – ingen løsning

Anta vi legger til ligningen $y = x$ i ligningssystemet fra eksempel 1.28. Da får vi et ligningssystem med variable og 3 ligninger:

$$x + y = 5 \quad (1.134)$$

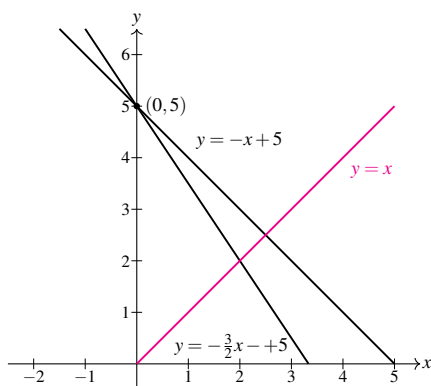
¹⁹I skjæringspunktet er x -verdien til kurvene like. Og det samme gjelder for y -verdiene. I skjæringspunktet kan vi derfor velge om vi vil regne ut y -verdien med den ene eller andre linjen.

$$3x + 2y = 10 \quad (1.135)$$

$$y = x \quad (1.136)$$

Vi husker fra eksempel 1.28 at de to første linjene skjærer hverandre i punktet $(0, 5)$. Dersom det nye ligningssystemet skal ha en løsning, må også linjen $y = x$ også gå gjennom dette punktet – noe den ikke gjør, se figur 1.23.

Intet punkt der alle linjene skjærer hverandre.



Figur 1.23: Plott av linjene $y = -x + 5$, $y = -\frac{3}{2}x + 5$ og $y = x$.

Ligningssystemet har dermed *ingen løsning*, dvs.

$$\mathcal{L} = \emptyset \quad (1.137)$$

Et slikt ligningssystem, som har flere ligninger (3) enn variabler (2), kalles et *overbestemt* system. ■

1.5 Kvadratiske ligninger (2. gradsligninger)

Kvadratiske ligninger eller 2. gradsligninger er ligninger hvor *høyeste potens* av variablene er *2*.

Vi har hovedfokus på kvadratiske ligninger med én og to variabler.²⁰

1.5.1 Kvadratiske ligninger med én variabel – ABC-formelen

Løsningen av en 2. gradsligning med én variabel har *maksimalt to løsninger*.

Disse løsningene finnes via ABC-formelen.

²⁰Kvadratiske ligninger med tre variabler representerer kurvede flater i rommet og tas ikke med her.

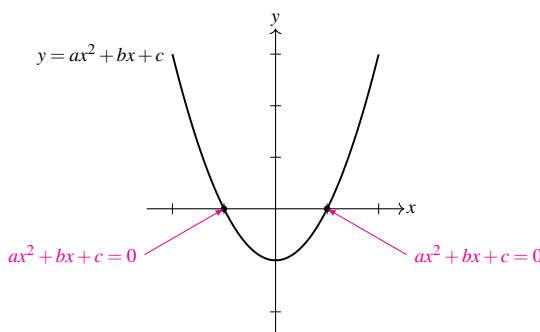
Definisjon 1.5.1 En kvadratisk ligning med 1 variabel er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.138)$$

hvor $a \neq 0$, b og c er reelle parametre og x er den ukjente variabelen.

- Ⓚ Legg merke til at hvis $a = 0$, reduseres lign.(1.138) til en lineær ligning.
- Ⓚ Den geometriske tolkningen av lign.(1.138) er at løsningen representerer *nullpunktene* til parabolen $ax^2 + bx + c = y$, se figur 1.24.

Løsningen av ligning 1.138 er gitt ved den velkjente *ABC-formelen*.



Figur 1.24: Tolkning av løsningen av ligningen $ax^2 + bx + c = 0$.

Setning 1.5.1 — ABC-formelen

Løsningen av en 2. gradsligning med en variabel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.139)$$

er gitt ved den såkalte ABC-formelen

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.140)$$

dvs. løsningsmengden

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \quad (1.141)$$

- Ⓚ Lign.(1.140) skrives ofte på *kortformen*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.142)$$

K Vi kommer ofte til å bruke *notasjonen*

$$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (1.143)$$

når vi tolker løsningene som *nullpunktene* til polynomet $ax^2 + bx + c$.

Vi kan da skrive lign.(1.49) på såkalt *faktorisert* form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{ikke faktorisert}) \quad (1.144)$$

$\Updownarrow$

$$a(x - c_1)(x - c_2) = 0 \quad (\text{faktorisert}) \quad (1.145)$$

Vi går mye nærmere inn i detalj om faktorisering i kap. 2.1.

■ **Eksempel 1.30** Løs ligningen

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (1.146)$$

og skriv den på *faktorisert* form.

Løsning:

Vi identifiserer at lign.(1.146) er på *kvadratisk* form med

$$a = 1 \quad (1.147)$$

$$b = -6 \quad (1.148)$$

$$c = 5 \quad (1.149)$$

Vi kan dermed bruke *ABC-formelen* i lign.(1.140):

$$c_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \quad (1.150)$$

$$= \frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2} \quad \text{og} \quad = \frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2} \quad (1.151)$$

$$= \frac{6 - \sqrt{16}}{2} \quad \text{og} \quad = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} \quad (1.152)$$

$$= \frac{6 - 4}{2} \quad \text{og} \quad = \frac{6 + 4}{2} \quad (1.153)$$

$$= 1 \quad \text{og} \quad = 5 \quad (1.154)$$

Nullpunktene er dermed gitt ved $c_1 = 1$ og $c_2 = 5$. Dermed kan vi skrive ligningen på *faktorisert form*:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (1.155)$$

$\Updownarrow$

$$a(x - c_1)(x - c_2) = 0 \quad \text{faktorisert form} \quad (1.156)$$

$$\Updownarrow$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0 \quad \text{faktorisert form}(a = 1) \quad (1.157)$$

■

Fra ABC-formelen kan vi klassifisere *hvor mange* løsninger lign.(1.138) har ved å se på *fortegnet* på den såkalte *diskriminanten*

$$b^2 - 4ac \quad (1.158)$$

Setning 1.5.2 — Diskriminant

En kvadratisk ligning

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.159)$$

med $a, b, c \in \mathbb{R}$, har 3 mulige situasjoner for løsningsmengden avhengig av fortegnet på *diskriminanten* i ABC-formelen:

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{to løsninger} \quad (1.160)$$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{èn løsning} \quad (1.161)$$

$$b^2 - 4ac < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ingen løsning.} \quad (1.162)$$

■ **Eksempel 1.31** Bruk *diskriminanten* for å avgjøre hvor mange løsninger følgende ligninger har:

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$

b) $x^2 - 4x + 3 = 0$

c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

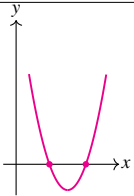
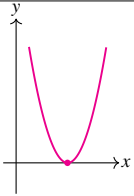
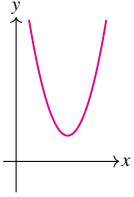
Løsning:

a) $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{èn løsning}$

b) $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \text{to løsninger}$

c) $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ingen løsning}$

■

	$b^2 - 4ac > 0$	To løsninger	$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$b^2 - 4ac = 0$	En løsninger	$c = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$
	$b^2 - 4ac < 0$	Ingen løsninger	Ingen løsninger siden kvadratroten ikke er definert for negative tall (komplekse tall ikke pensum)

Figur 1.25: Antall løsninger fra ABC-formelen.

1.5.2 Polynomer

Polynomer er svært fundamentalt i matematikk, og er en *generalisering* av de lineære ligningene og kvadratiske ligningene vi introduserte i avsnitt 1.3 og 1.5.

Definisjon 1.5.2 Et *polynom* av grad n er en ligning med 2 variable på formen

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1.163)$$

hvor $a_n \neq 0$ og $n \in \mathbb{N}$.

■ **Eksempel 1.32** Et 1. gradspolynom ($n = 1$) er en lineær ligning:

$$y = a_1 x + a_0 \quad (1.164)$$

Legg merke til at de vanlige parametrene a og b for lineære ligninger har fått nye navn a_1 og a_0 hhv. siden vi bruker den generelle formelen i lign.(1.163).

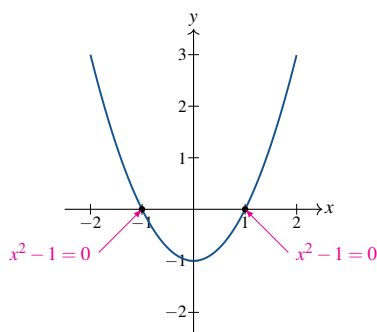
Men rent matematisk har navnet på parametrene ingenting å si. ■

■ **Eksempel 1.33** Et 2. gradspolynom ($n = 2$) er den *kvadratiske* ligningen:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1.165)$$

I figur 1.26 har vi tegnet opp grafen til 2. gradspolynomet $y = x^2 - 1$. **Nullpunktene** er gitt ved

ABC-formelen.



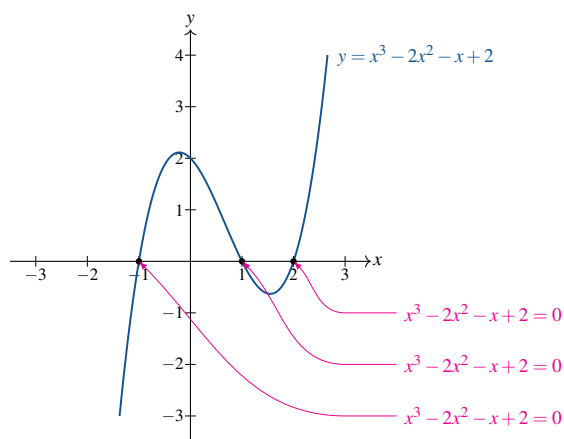
Figur 1.26: Grafen til 2. gradspolynom $y = x^2 - 1$.

■ **Eksempel 1.34** Et 3. gradspolynom ($n=3$) er den *kubiske* ligningen:

$$y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (1.166)$$

I figur 1.27 har vi tegnet opp grafen til 3. gradspolynom $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Et 3. gradspolynom har maksimalt 3 nullpunkter.

Det finnes også en formel for nullpunktene til et 3. gradspolynom, men den formelen er ikke pensum i dette kurset.

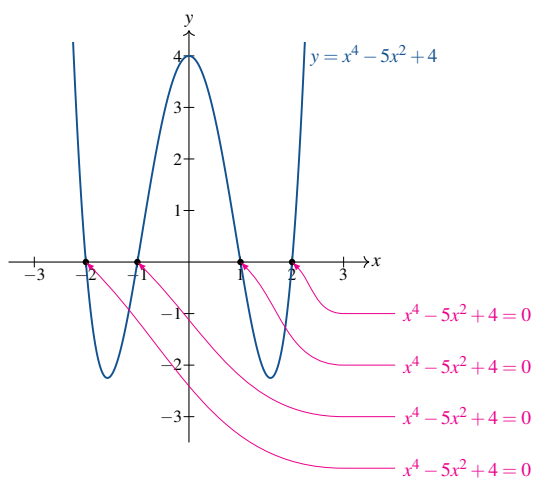


Figur 1.27: Grafen til 3. gradspolynom $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

■ **Eksempel 1.35** Et 4. gradspolynom ($n=4$) er den *bikvadratiske* ligningen:

$$y = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (1.167)$$

I figur 1.28 har vi tegnet opp grafen til 4. gradspolynom $y = x^4 - 5x^2 + 4$. Et 4. gradspolynom har maksimalt 4 nullpunkter.



Figur 1.28: Grafen til 4. gradspolynomiet $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

■



2. Faktorisering og ulikheter

2.1 Faktorisering

I avsnitt 1.5.2 om polynomer observerte vi at det var en sammenheng mellom maksimalt antall nullpunkter og *graden* til ligningen:

Maksimalt antall nullpunkter i et n 'te gradspolynom er n .

Denne observasjonen gir opphav til *faktorisering* av polynomer. Faktorisering er et komplisert begrep som ofte er vanskelig å forstå hensikten bak.

Definisjon 2.1.1 — Faktorisering

Faktorisering er en *dekomponering* av algebraiske uttrykk til et produkt av *faktorer*.

(K) Definisjon 2.1.1 er en ganske løs definisjon.

Avhengig av hva vi faktorerer og hvilke faktorer vi har, får vi *forskjellige faktoriseringer*.

(K) Ideen bak faktorisering er ganske *fundamental*:

Vi ønsker å beskrive et *komplisert* uttrykk ved hjelp av *enkle* uttrykk – faktorer – slik at vi får en dypere innsikt i egenskapene ved det kompliserte uttrykket.¹

¹De enkle faktorene gir oss dermed struktur og innsikt til å enkelt svare på spørsmål som ellers hadde vært svært vanskelig å svare på.

- (K) Vi kan se på faktorene som *byggeklossene* i en større konstruksjon. Spesielt med disse byggeklossene, er at de ikke kan faktoreres videre inn i mindre faktorer igjen.²

I dette avsnittet skal vi se på to fundamentale faktoriseringer:

1. Faktorisering av naturlige tall $\mathbb{N}$ – *fundamentalsetningen for aritmetikk*³
2. Faktorisering av polynomer – *fundamentalsetningen for algebra*⁴

- (K) Primtall er byggeklosser i tallsystemet vårt.

2.1.1 Fundamentalsetningen for aritmetikk

Et helttall $n > 1$ kan enten *dekomponeres* i mindre naturlige tall (primtall)⁵ eller så er tallet et primtall som ikke kan faktoreres ytterligere:

$$2 = 2 \cdot 1 \quad (2 \text{ er primtall} - \text{er faktorisert}) \quad (2.1)$$

$$3 = 3 \cdot 1 \quad (3 \text{ er primtall} - \text{er faktorisert}) \quad (2.2)$$

$$4 = 2 \cdot 2 \quad (\text{faktorisert}) \quad (2.3)$$

$$5 = 5 \cdot 1 \quad (5 \text{ er primtall} - \text{er faktorisert}) \quad (2.4)$$

$$6 = 2 \cdot 3 \quad (\text{faktorisert}) \quad (2.5)$$

$$7 = 7 \cdot 1 \quad (7 \text{ er primtall} - \text{er faktorisert}) \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

Setning 2.1.1 — Fundamentalsetningen for aritmetikk

Ethvert naturlig tall $n > 1$ kan skrives som et entydig *produkt av primtall* p_i

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_m^{a_m} \quad (2.8)$$

hvor $i \leq m$ og $a_i \in \mathbb{N}$.

■ Eksempel 2.1 — Faktorisering av naturlige tall

Vi faktorerer følgende *naturlige tall*:

$$92 = 2 \cdot 46 = 2^2 \cdot 23 \quad (2 \text{ og } 23 \text{ er primtall}) \quad (2.9)$$

²I fysikk søker man å finne de minste byggeklossene i universet for å forstå hvordan all materie oppstod. Dette er en form for faktorisering.

³Aritmetikk omhandler elementære *operasjoner* på tall.

⁴Algebra er *læren om ligninger*, regning med tall, regning med variabler, regning med bokstaver.

⁵Et *primtall* er et naturlig tall $n > 1$, som bare er delelig med seg selv og 1. De første 10 primtallene er:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

$$7 = 7 \cdot 1 \quad (7 \text{ er primtall} - \text{er faktorisert}) \quad (2.10)$$

$$22 = 2 \cdot 11 \quad (2 \text{ og } 11 \text{ er primtall}) \quad (2.11)$$

$$36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2 \quad (2 \text{ og } 3 \text{ er primtall}) \quad (2.12)$$

$$64 = 8 \cdot 8 = 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 2^6 \quad (2 \text{ er primtall}) \quad (2.13)$$

$$68 = 4 \cdot 17 = 2 \cdot 2 \cdot 17 = 2^2 \cdot 17 \quad (2 \text{ og } 17 \text{ er primtall}) \quad (2.14)$$

■

2.1.2 Fundamentalsetningen for algebra

Neste faktorisering handler om *polynomer* som faktoreres ved hjelp av *nullpunktene*. Som vi sa innledningsvis har et n 'te gradspolynom maksimalt n nullpunkter, men dette gjelder for *reelle* nullpunkter.

Dersom vi utvider tallsystemet til de *komplekse tall*, $\mathbb{C}$, vil et n 'te gradspolynom *alltid* ha n nullpunkter.⁶

Setning 2.1.2 — Fundamentalsetningen for algebra

Polynomet

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.15)$$

kan faktorerises på formen

$$y = a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_{n-1})(x - c_n) \quad (2.16)$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_n$ er nullpunktene (mulig komplekse) til polynomet.

- Ⓚ Nullpunktene c_i , som også kalles *røtter*, kan generelt være komplekse.
- Ⓚ *Multiple* *røtter* kan forekomme, dvs. at en eller flere av røttene er like.
- Ⓚ Faktorisering blir et viktig hjelpemiddel for løsning av *ulikheter* som vi tar for oss i avsnitt 2.2.
- Ⓚ Faktorisering kan også utvides til å omfatte generelle algebraiske uttrykk. Som regel vil det å finne nullpunktene da være svært komplisert og man må ofte ty til numeriske løsninger.
- Ⓚ Faktorisering brukes også til å finne *felles faktorer* mellom to forskjellige polynomer.

■ Eksempel 2.2 Finn faktoriseringen til polynomet

$$y = x^2 + 5x \quad (2.17)$$

⁶Komplekse tall er ikke pensum. Vi kommer kun til å se på faktoriseringer med kun reelle nullpunkter.

Løsning:

Vi trekker ut *felles faktor* x fra polynomet:

$$y = x^2 + 5x = x(x + 5) \quad (2.18)$$

som er på faktorisert form med *nullpunktene* $c_1 = 0$ og $c_2 = -5$.

Legg merke at vi også kan skrive, se lign.(2.16),

$$y = x^2 + 5x = x(x + 5) = (x - c_1)(x - c_2) \quad (2.19)$$

■

■ **Eksempel 2.3** Finn faktoriseringen til det algebraiske uttrykket

$$xy + 7y \quad (2.20)$$

Løsning:

Vi trekker ut *felles faktor* y fra uttrykket:

$$xy + 7y = y(x + 7) \quad (2.21)$$

som er på faktorisert form.

■

■ **Eksempel 2.4** Finn faktoriseringen til polynomet

$$y = 4x^2 - 20xb + 25b^2 \quad (2.22)$$

Løsning:

ABC-formelen i setning 1.5.1 gir nullpunktene: ($a = 4$, $b' = -20b$, $c = 25b^2$)

$$c_1 = \frac{-(-20b) - \sqrt{20^2b^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25b^2}}{2 \cdot 4} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-(-20b) + \sqrt{20^2b^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25b^2}}{2 \cdot 4} \quad (2.23)$$

$$= \frac{-(-20b) - \sqrt{400b^2 - 400b^2}}{8} \quad \text{og} \quad = \frac{-(-20b) + \sqrt{400b^2 - 400b^2}}{8} \quad (2.24)$$

$$= \frac{-(-20b) - \sqrt{400b^2 - 400b^2}}{8} \quad \text{og} \quad = \frac{-(-20b) + \sqrt{400b^2 - 400b^2}}{8} \quad (2.25)$$

altså

$$c_1 = \frac{5}{2}b \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{5}{2}b, \quad (2.26)$$

som gir *faktoriseringen* (husk at $a = 4$ her)

$$4x^2 - 20xb + 25b^2 = 4 \underbrace{\left(x - \frac{5}{2}b\right) \left(x - \frac{5}{2}b\right)}_{\text{faktorisert form}} \quad (2.27)$$

■

■ **Eksempel 2.5** Finn faktoriseringen til det algebraiske uttrykket ⁷.

$$8x^4y^4 - 2 \quad (2.28)$$

Løsning:

Vi trekker ut *felles faktor* 8 og gjenkjenner formen til konjugatsetningen.

$$8x^4y^4 - 2 = 8 \left(x^4y^4 - \frac{1}{4} \right) \quad (2.29)$$

$$= 8 \left(x^2y^2 - \frac{1}{2} \right) \left(x^2y^2 + \frac{1}{2} \right) \quad \text{konjugatsetningen} \quad (2.30)$$

$$= 8 \left(xy - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(xy + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \overbrace{\left(xy - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)}^{\text{kompleks}} \overbrace{\left(xy + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)}^{\text{kompleks}} \quad (2.31)$$

■

■ **Eksempel 2.6** Det algebraiske uttrykket

$$ab + ac - ad = \overbrace{a(b + c - d)}^{\text{faktorisert form}} \quad (2.32)$$

er null, dvs. $a(b + c - d) = 0$, dersom en av faktorene er null, dvs. dersom

$$a = 0 \quad \vee \quad b + c - d = 0 \quad (2.33)$$

■

■ **Eksempel 2.7** Det algebraiske uttrykket

$$2a^2b - 4ab = 2a \overbrace{ab - 2 \cdot ab}^{\text{faktorisert form}} = 2ab(a - 2) \quad (2.34)$$

er lik null, dvs. $2ab(a - 2) = 0$, dersom en av faktorene er null, dvs. dersom

$$a = 0 \quad \vee \quad b = 0 \quad \vee \quad a = 2 \quad (2.35)$$

■

■ **Eksempel 2.8** Kvadratsetningene og konjugatsetningen er faktoriseringer:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = \overbrace{(a + b)^2}^{\text{faktorisert form}} \quad (1. \text{ kvadratsetning}) \quad (2.36)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b) = \overbrace{(a - b)^2}^{\text{faktorisert form}} \quad (2. \text{ kvadratsetning}) \quad (2.37)$$

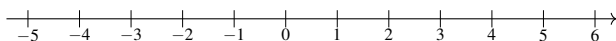
$$a^2 - b^2 = \overbrace{(a + b)(a - b)}^{\text{faktorisert form}} \quad (\text{konjugatsetningen}) \quad (2.38)$$

■

⁷Eksempelen viser tilfellet ved komplekse røtter for kompletthetens skyld. Her er $i = \sqrt{-1}$

2.2 Ulikheter

Alle tallmengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er utstyrt med en *ordningsrelasjon*. En ordningsrelasjon plasserer i prinsippet alle tallene langs en *rekkefølge*. Visuelt sett er dette den velkjente *tallinjen*, hvor vi bruker konvensjonen om at voksende tall går mot høyre.



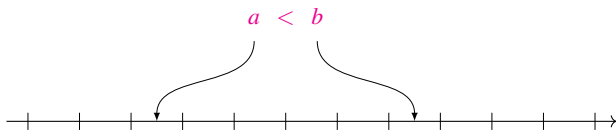
Figur 2.1: Tallene er *ordnet* langs en rett linje.

Definisjon 2.2.1 — Ulikhet

Dersom et tall b er til høyre for et annet tall a på tallinjen, sier vi at a er *mindre enn* b . Matematisk skriver vi

$$a < b \quad (2.39)$$

Figur 2.2 illustrerer lign.(2.39):



Figur 2.2: Når a er mindre enn b , dvs. $a < b$.

Ⓚ Dersom vi også tillater at $a = b$, skriver vi

$$a \leq b \quad (2.40)$$

Tegnet $\leq$ betyr «mindre enn eller lik».

Ⓚ At a er mindre enn b , er ekvivalent med at b er *større enn* a :

$$b > a \quad \text{som betyr «større enn»} \quad (2.41)$$

$$b \geq a \quad \text{som betyr «større enn eller lik»} \quad (2.42)$$

■ **Eksempel 2.9** Noen enkle eksempler på ordningsrelasjonen:

$$3 < 5 \quad (2.43)$$

$$5 > 3 \quad (2.44)$$

$$5 \geq 3 \quad (2.45)$$

$$3 \leq 3 \quad (2.46)$$

$$-3 > -5 \quad (2.47)$$

■



Figur 2.3: Ordningsrelasjonene $<$ og $>$.

Med *ordningsrelasjonene* på plass, kan vi definere hva vi mener med en *algebraisk ulikhet*, som er svært beslektet med en algebraisk ligning.

Definisjon 2.2.2 — Algebraisk ulikhet

En *algebraisk ulikhet* er en ulikhet på formen

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.48)$$

hvor $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er to algebraiske uttrykk med n variabler $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ⓚ Vi kan i lign.(2.48) skifte ut $<$ med en av $>$, $\leq$ eller $\geq$.

Ⓚ *Løsningsmengden* til lign.(2.48) er definert på samme måte som for algebraiske ligninger:

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \quad (2.49)$$

■ **Eksempel 2.10** Løs ulikheten

$$0 \leq 4x - 8 \quad (2.50)$$

Løsning

Vi transformerer ulikheten til en enklere form:

$$0 \leq 4x - 8 \quad \quad \quad / + 8 \quad (2.51)$$

$\Updownarrow$

$$8 \leq 4x \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{4} \quad (2.52)$$

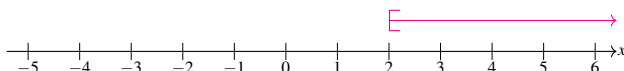
$$\Updownarrow$$

$$2 \leq x \quad (2.53)$$

som gir løsningsmengden:

$$\mathcal{L} = \{x | 2 \leq x\} = [2, \infty) \quad (2.54)$$

Figur L2.2 illustrerer løsningsmengden langs tallinjen.



Figur 2.4: Løsningsmengden til $0 \leq 4x - 8$.

2.2.1 Transformasjoner for ulikheter

Når vi skal løse ulikheter, dvs. finne løsningsmengden til ulikheten, kan vi bruke samme strategi som for ligninger, nemlig å *transformere* ulikheten til ekvivalente ulikheter som er *enklere*.

Noe som gjør ulikheter *vanskeligere* å løse enn ligninger, er at vi må være forsiktige med enkle transformasjoner som multiplikasjon og divisjon og potens, da disse transformasjonene ikke alltid er gyldige eller krever ekstra antagelser.

■ Eksempel 2.11 Ulikheten

$$\frac{x+1}{x-1} + x < 4 \quad (2.55)$$

kan vi *ikke* transformeres ved å multiplisere med $(x-1)$, siden uttrykket $(x-1)$ kan både være positivt eller negativt.

Siden vi ikke vet om $(x-1)$ er positiv eller negativ, vet vi ikke om vi må snu ulikhetstegnet eller ikke dersom vi multipliserer med $(x-1)$.

Vi må i tillegg *anta* at $(x-1) > 0$ eller $(x-1) < 0$ for at transformasjonen skal bli gyldig.

■ Eksempel 2.12 Ulikheten

$$x < -4 \quad (2.56)$$

kan vi *ikke* transformeres ved å ta 2. potensen av høyre og venstre side:

$$x^2 < (-4)^2 = 16 \quad (2.57)$$

som tillater at $x > 4$ også er løsning.

Vi må i tillegg *anta* høyre og venstre side har samme fortegn dersom vi vil transformere ulikheten ved å ta 2. potensen.

Setning 2.2.1 For en gitt algebraisk ulikhet

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.58)$$

har vi følgende gyldige transformasjoner:

$$\text{Addere med et tall } a \quad \quad \quad / + a \quad (2.59)$$

$$\text{Subtrahere med et tall } a \quad \quad \quad / - a \quad (2.60)$$

$$\text{Multiplisere med et positivt tall } a > 0 \quad \quad \quad / \cdot a \quad (2.61)$$

$$\text{Dividere med et positivt tall } a > 0 \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{a} \quad (2.62)$$

■ **Eksempel 2.13** Løs ulikheten

$$3x + 2 > x + 3 \quad (2.63)$$

Løsning:

Vi løser ulikheten ved hjelp av *transformasjoner*:

$$3x + 2 > x + 3 \quad \quad \quad / - x \quad (2.64)$$

$\Updownarrow$

$$2x + 2 > 3 \quad \quad \quad / - 2 \quad (2.65)$$

$\Updownarrow$

$$2x > 1 \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{2} \quad (2.66)$$

$\Updownarrow$

$$x > \frac{1}{2} \quad (2.67)$$

som gir løsningsmengden:

$$\mathcal{L} = \left\{ x \mid x > \frac{1}{2} \right\} = \left\langle \frac{1}{2}, \infty \right\rangle \quad (2.68)$$

■

Vi kan også transformere en ligning ved å multiplisere eller dividere med et *negativt* tall, men da må man huske på å *snu* ulikhetstegnet.

Setning 2.2.2 — Negativt tall – *snu* ulikheten

For en gitt algebraisk ulikhet

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.69)$$

er følgende transformasjoner gyldige:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \bigg/ \cdot a \quad (2.70)$$

$$\Updownarrow$$

$$aA(x_1, x_2, \dots, x_n) > aB(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.71)$$

og

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) < B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{a} \quad (2.72)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{a}A(x_1, x_2, \dots, x_n) > \frac{1}{a}B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.73)$$

hvor $a < 0$ er et negativt tall.

■ **Eksempel 2.14** Multipliserer vi en ulikhet med et negativt tall, må vi *snu* ulikhetstegnet:

$$5 > 3 \quad \bigg/ \cdot (-1) \quad (2.74)$$

$$\Updownarrow$$

$$-5 < -3 \quad (2.75)$$

■

■ **Eksempel 2.15** Dividerer vi en ulikhet med et negativt tall, må vi *snu* ulikhetstegnet:

$$5 > 3 \quad \bigg/ \cdot (-1) \quad (2.76)$$

$$\Updownarrow$$

$$-5 < -3 \quad (2.77)$$



Figur 2.5: Negative og positive tall har *omvendt* rekkefølge.

■

K For ulikheter, har vi også følgende regel:

Aldri multiplisere eller dividere med uttrykk som inneholder den ukjente

Dette er fordi vi ikke vet hvilken verdi den ukjente har. Vi må i så fall restriktene verdiene x kan ta slik at uttrykket enten kun er negativt eller positivt (ikke null).

■ **Eksempel 2.16** Løs ulikheten:

$$-4(x-2) + 3(x+4) \geq 5x - (x-1) \quad (2.78)$$

Løsning:

$$-4(x-2) + 3(x+4) \geq 5x - (x-1) \quad (\text{Løs opp parenteser}) \quad (2.79)$$

$\Updownarrow$

$$-4x + 8 + 3x + 12 \geq 5x - x + 1 \quad (\text{Samle like ledd}) \quad (2.80)$$

$\Updownarrow$

$$-x + 20 \geq 4x + 1 \quad / +x, -1 \quad (2.81)$$

$\Updownarrow$

$$19 \geq 5x \quad / \cdot \frac{1}{5} \quad (2.82)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{19}{5} \geq x, \quad (2.83)$$

som gir løsningsmengden:

$$\mathcal{L} = \left\{ x \mid \frac{19}{5} \geq x \right\} = \left\langle -\infty, \frac{19}{5} \right] \quad (2.84)$$

Figur L2.2 illustrerer løsningsmengden langs tallinjen.⁸



Figur 2.6: Løsningsmengden til lign.(2.78). ■

⁸Vi nevner her at $\frac{19}{5} = 3.8$.

2.2.2 Polynomulikheter

Polynomulikheter av grad n er ulikheter på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 > 0 \quad n > 0 \quad (2.85)$$

■ **Eksempel 2.17** Noen eksempel på polynomulikheter:

$$x^2 + 4x - 4 > 0 \quad (2.86)$$

$$x^3 - x^2 - 5 \leq 2x^2 + 4 \quad (2.87)$$

$$100x^7 - 1 < 0 \quad (2.88)$$

■

Polynomulikheter er et godt eksempel hvor *faktorisering* kommer til nytte. Følgende løsningsmetode kalles løsning ved *fortegnsskjema* og bygger på faktoriseringen av et polynom.

■ **Eksempel 2.18** Løs polynomulikheten

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \quad (2.89)$$

Løsning:

Først finner vi *faktoriseringen* til polynomet $y = x^2 + 3x - 4$. Nullpunktene finnes enkelt ved *ABC-formelen*:⁹

$$c_1 = -4 \vee c_2 = 1 \quad (2.90)$$

som gir den faktoriserte versjonen

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \quad (2.91)$$

$\Updownarrow$

$$(x+4)(x-1) > 0 \quad \left| \quad x^2 + 3x - 4 = (x - c_1)(x - c_2) \right. \quad (2.92)$$

av ulikheten i lign.(2.89). Legg merke til at lign.(2.92) er på formen

$$f_1 f_2 > 0 \quad (2.93)$$

hvor f_1 og f_2 er *faktorene*, dvs.

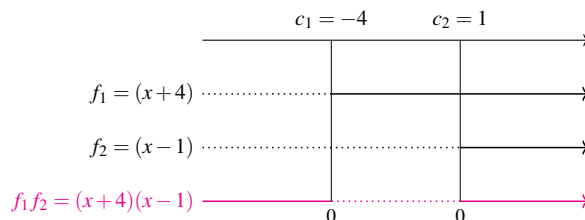
$$\overbrace{(x+4)}^{f_1} \overbrace{(x-1)}^{f_2} > 0 \quad (2.94)$$

Det eneste vi må sørge for er at produktet $f_1 f_2$ er *positivt*. *Fortegnsreglene* sier at et produkt $f_1 f_2$ er positivt dersom begge faktorene enten er bare positive eller bare negative, dvs.

$$f_1 > 0, f_2 > 0 \quad \text{eller} \quad f_1 < 0, f_2 < 0 \quad (2.95)$$

⁹Verifiser for deg selv at *ABC-formelen* gir $c_1 = -4$ og $c_2 = 1$.

En svært god og enkel måte å bestemme når lign.(2.95) er oppfylt er ved hjelp av såkalt *fortegnsskjema*. Ideen er å bestemme for hvilke x faktorene f_1 og f_2 har like/ulike fortegn på en enkel og visuell måte. Figur 2.7 viser fortegnsskjemaet for faktorene f_1 og f_2 .



Figur 2.7: Fortegnsskjema.

Figur 2.7 kan forstås på følgende måte:

1. Øverste linjen viser *tallinjen*. Vi merker av begge nullpunktene $c_1 = -4$ og $c_2 = 1$.
2. Linje nr. 2 viser hvor faktoren $f_1 = (x+4)$ er negativ og positiv hhv. Den *stiplede* linjen viser hvor $f_1 < 0$ (negativ), mens den *heltrukne* linjen viser hvor $f_1 > 0$ (positiv).
3. Linje nr. 3 viser hvor faktoren $f_2 = (x-1)$ er negativ og positiv hhv. Den *stiplede* linjen viser hvor $f_2 < 0$ (negativ), mens den *heltrukne* linjen viser hvor $f_2 > 0$ (positiv).
4. Linje nr. 4 (*rød* linje) viser hvor *produktet* $f_1 f_2 = (x+4)(x-1)$ er negativt og positivt hhv. ¹⁰

Vi kan nå lese av løsningsmengden direkte fra figur 2.7 ved å se for hvilke x den siste linjen er *heltrukken*:

$$x < -4 \quad \vee \quad x > 1, \quad (2.96)$$

dvs. $\mathcal{L} = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$. ■

Løsningsmetodikken ved hjelp av fortegnsskjema som vi brukte i eksempel 2.18 kan generaliseres for polynomer av *enhver* grad n .

¹⁰Legg merke til at her bruker vi *fortegnsreglene* siden det dreier seg om multiplikasjon av to faktorer $f_1 f_2$. Første del av linjen blir *heltrukken* (positiv) siden både f_1 og f_2 er *stiplede* (negative). Neste del av linjen blir *stiplet* (negativ) siden f_1 er *heltrukken* (positiv) mens f_2 er *stiplet* (negativ). Siste del av linjen er *heltrukken* siden både f_1 og f_2 er *heltrukne* (positive).

Setning 2.2.3 — Løsning av polynomulikheter ved fortegnsskjema

En polynomulikhet på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 > 0 \quad n > 0, a_n > 0 \quad (2.97)$$

kan løses ved hjelp av følgende metode:

1. Finn *faktoriseringen* til polynomet, dvs. finn *nullpunktene* $c_1, c_2, \dots, c_n$ og skriv ulikheten i lign.(2.97) på den ekvivalente formen

$$\underbrace{a_n}_{f_0} \underbrace{(x - c_1)}_{f_1} \underbrace{(x - c_2)}_{f_2} \cdots \underbrace{(x - c_{n-1})}_{f_{n-1}} \underbrace{(x - c_n)}_{f_n} > 0 \quad n > 0, a_n > 0 \quad (2.98)$$

2. Sett opp et *fortegnsskjema* for faktorene $f_i = (x - c_i)$ for $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

En ny linje for hver faktor.

	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-1}	c_n	
$f_0 = a_n$						→
$f_1 = (x - c_1)$						→
$f_2 = (x - c_2)$						→
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$f_{n-1} = (x - c_{n-1})$						→
$f_n = (x - c_n)$						→
$f_0 f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n$						→
	0	0	$\dots$	0	0	

Den **røde** linjen viser hvor lign.(2.98) er oppfylt (heltrukne linjer).

Vi har her antatt at n er et *partall* og at alle nullpunktene c_i er *reelle* og sortert i *voksende* rekkefølge. Dersom n er et *oddetall*, får den siste linjen motsatt mønster.

Vi har også antatt at konstanten a_n er positiv (0te faktor f_0). Dersom konstanten a_n er *negativ*, må den **blå** linjen i fortegnsskjemaet være stiplet (negativ) istedet for heltrukken (positiv).

Eksempel 2.19 Polynomiet

$$y = -2x^4 - 14x^3 + 188x^2 + 656x - 1920 \quad (2.99)$$

har nullpunktene $c_1 = -12$, $c_2 = -4$, $c_3 = 2$ og $c_4 = 8$.

Løs ulikheten

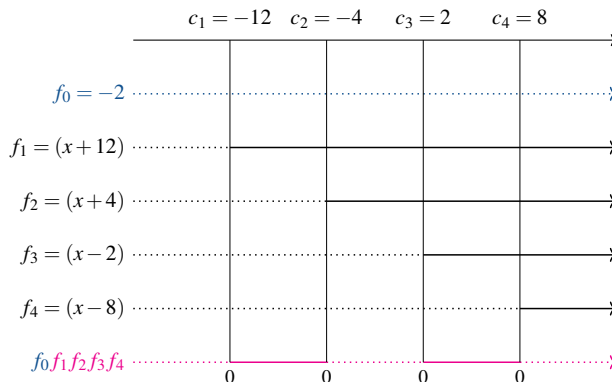
$$-2x^4 - 14x^3 + 188x^2 + 656x - 1920 < 0. \quad (2.100)$$

Løsning:

Siden vi har oppgitt nullpunktene, kan vi skrive opp den *faktoriserte* versjonen av ulikheten i lign.(2.100): (her er $a = -2$)

$$-2(x+12)(x+4)(x-2)(x-8) < 0 \quad (2.101)$$

Vi setter deretter opp *fortegnsskjemaet* for de 5 faktorene:



Figur 2.8: Fortegnsskjema.

Vi kan nå lese av **løsningsmengden** direkte fra figur 2.8 ved å se for hvilke x den siste linjen er *stiplet* (siden vi har $<$ i lign.(2.100)):

$$x < -12 \quad \vee \quad -4 < x < 2 \quad \vee \quad 8 < x, \quad (2.102)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \langle -\infty, -12 \rangle \cup \langle -4, 2 \rangle \cup \langle 8, \infty \rangle \quad (2.103)$$

■

2.2.3 Ulikheter med rasjonale uttrykk

Definisjon 2.2.3 En *rasjonal ulikhet* er en ulikhet på formen

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad (2.104)$$

hvor $A(x)$ og $B(x)$ er polynomer av grad n og m hhv.

Ⓚ Vi kan i lign.(2.104) skifte ut $<$ med en av $>$, $\leq$ eller $\geq$.

■ **Eksempel 2.20** Eksempel på rasjonale ulikheter:

$$1) \quad \frac{x^2 - 1}{x - 2} > 0 \quad (2.105)$$

Vi finner så faktoriseringene til polynomene i telleren $A(x)$ og nevneren $B(x)$ hhv:

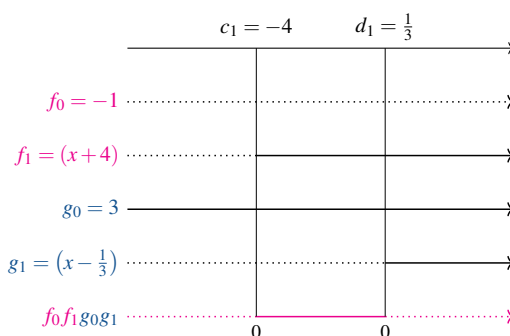
$$A(x) = -x - 4 = \overbrace{-1}^{f_0} \overbrace{(x+4)}^{f_1} \quad (\text{nullpunkt: } c_1 = -4) \quad (2.115)$$

$$B(x) = 3x - 1 = \overbrace{3}^{g_0^{-1}} \overbrace{\left(x - \frac{1}{3}\right)}^{g_1^{-1}} \quad (\text{nullpunkt: } d_1 = \frac{1}{3}) \quad (2.116)$$

Lign.(2.114) kan dermed skrives på den ekvivalente formen

$$\overbrace{-1}^{f_0} \overbrace{(x+4)}^{f_1} \overbrace{3^{-1}}^{g_0} \overbrace{\left(x - \frac{1}{3}\right)^{-1}}^{g_1} > 0 \quad (2.117)$$

Fortegnsskjema for faktorene f_0 , f_1 , g_0 og g_1 :



Figur 2.9: Fortegnsskjema.

Vi kan nå lese av *løsningsmengden* direkte fra figur 2.9 ved å se for hvilke x den siste linjen er *heltrukket* (siden vi har $>$ i lign.(2.117)):

$$-4 < x < \frac{1}{3} \quad (2.118)$$

dvs.

$$\mathcal{L} = \left\langle -4, \frac{1}{3} \right\rangle \quad (2.119)$$

■

■ **Eksempel 2.22** La oss sammenligne løsningen av ulikheten

$$\frac{2x-5}{3x-1} > 1 \quad \mathcal{L} = \left\langle -4, \frac{1}{3} \right\rangle \quad (2.120)$$

med løsningen av *likheten*

$$\frac{2x-5}{3x-1} = 1 \quad \mathcal{L} = \{ -4 \} \quad (2.121)$$

Vi viste i eksempel 2.21 at løsningen av lign.(2.121) var gitt ved $x = -4$ (nullpunktet for polynomet i telleren).

Konklusjon: Det er *uendelig* mange løsninger av ulikheten, mens tilsvarende ligning hadde kun *én* løsning. ■

2.3 Absoluttverdi

Å ta absoluttverdien av et tall betyr å fjerne *fortegnet* fra tallet:

$$|-3| = 3 \quad (2.122)$$

$$|3| = 3 \quad (2.123)$$

dvs. en absoluttverdi er alltid *positiv* (eller 0).

Definisjon 2.3.1 — Absoluttverdi

Absoluttverdien av et tall $a \in \mathbb{R}$ er definert som

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{når } a \geq 0 \\ -a, & \text{når } a < 0 \end{cases} \quad (2.124)$$

■ Eksempel 2.23 Absoluttverdier:

$$|-17| = 17 \quad (2.125)$$

$$|0| = 0 \quad (2.126)$$

$$|145| = 145 \quad (2.127)$$

■

■ Eksempel 2.24 Tegn opp punktene (x, y) som oppfyller ligningen:

$$y = \overbrace{|2x - 3|}^{\text{alltid positiv}} \quad (2.128)$$

Løsning:

Vi må finne *nullpunktet* til uttrykket i absoluttverdien i lign.(2.128).

$$2x - 3 = 0 \quad \quad \quad / +3, \cdot \frac{1}{2} \quad (2.129)$$

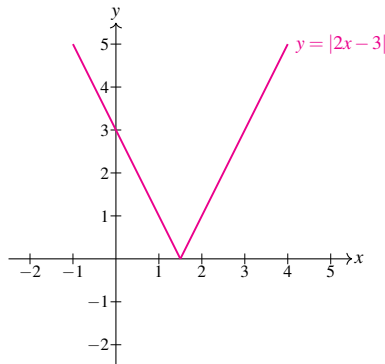
$\Updownarrow$

$$x = \frac{3}{2} \quad (2.130)$$

Dermed vet vi at uttrykket er negativt når $x < \frac{3}{2}$ og positivt eller null når $x \geq \frac{3}{2}$. Definisjonen gir da

$$y = |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & \text{når } x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x - 3), & \text{når } x < \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (2.131)$$

Figur L3.3 viser at absolutttverdien er alltid *positiv* og *symmetrisk* rundt nullpunktet, som i dette tilfellet er $c_1 = \frac{3}{2}$.



Figur 2.10: Plott av ligningen $y = |2x - 3|$.

■ **Eksempel 2.25** Dersom vi først kvadrerer et tall, f.eks. $(-3)^2$, og deretter tar kvadratroten så får man absolutttverdien av tallet:

$$\sqrt{(-3)^2} = 3 \quad (2.132)$$

Dette gjelder uansett om tallet er negativt eller positivt:

$$\sqrt{3^2} = 3 \quad (2.133)$$

Eksempel 2.25 viser en generell sammenheng:

Setning 2.3.1 — Absolutttverdi

For ethvert reellt tall $x \in \mathbb{R}$ gjelder

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad (2.134)$$

uansett om x er positiv eller negativ.

■ **Eksempel 2.26** Løs ligningen:

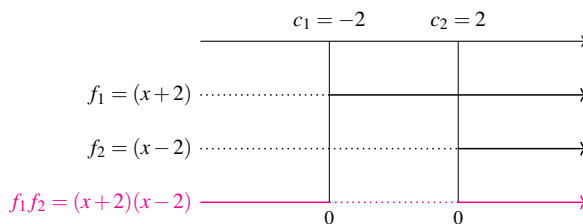
$$|x^2 - 4| + 2x + 1 = 0 \quad (2.135)$$

Løsning:

Vi må først fjerne absoluttegnen ved å finne verdiene hvor uttrykket $x^2 - 4$ er positivt og negativt hhv. For å gjøre dette bruker vi *faktorisering* og *fortegnsskjema*. Vi gjenkjenner formen på konjugatsetningen:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \quad (2.136)$$

som viser at uttrykket har faktorene $f_1 = (x + 2)$ og $f_2 = (x - 2)$. Dermed setter vi opp fortegnsskjema for faktorene:



Figur 2.11: Fortegnsskjema.

Vi ser av fortegnsskjemaet at

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{når } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -(x^2 - 4), & \text{når } -2 < x < 2 \end{cases} \quad (2.137)$$

Vi får dermed to forskjellige ligninger som må løses:

$$1) \quad x \leq -2 \vee x \geq 2: \quad x^2 - 4 + 2x + 1 = 0 \quad (2.138)$$

$$2) \quad -2 < x < 2: \quad -(x^2 - 4) + 2x + 1 = 0 \quad (2.139)$$

Dette er to separate 2. gradsligninger som vi løser enkelt ved *ABC-formelen*:

1) $x \leq -2 \vee x \geq 2$:

$$x^2 - 4 + 2x + 1 = 0 \quad (2.140)$$

$\Downarrow$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (2.141)$$

ABC-formelen gir nullpunktene:

$$c_1 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \quad (2.142)$$

$$= \frac{-2 - 4}{2} \quad = \frac{-2 + 4}{2} \quad (2.143)$$

$$= -3 \quad \neq 1 \quad (2.144)$$

2) $-2 < x < 2$:

$$-(x^2 - 4) + 2x + 1 = 0 \quad (2.145)$$

$$\Updownarrow$$

$$-x^2 + 2x + 5 = 0 \quad (2.146)$$

ABC-formelen gir nullpunktene

$$c_1 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} \quad (2.147)$$

$$= \frac{-2 - \sqrt{24}}{-2} \quad \quad \quad = \frac{-2 + \sqrt{24}}{-2} \quad (2.148)$$

$$= 1 + \sqrt{6} \quad \quad \quad = 1 - \sqrt{6} \quad (2.149)$$

For de to tilfellene ovenfor ser vi at to av løsningene må forklastes, mens de to andre løsningene beholdes. Dermed:

$$x = -3 \quad \vee \quad x = 1 - \sqrt{6} \quad (2.150)$$

som gir løsningsmengden

$$\mathcal{L} = \{ -3, 1 - \sqrt{6} \} \quad (2.151)$$

■

3. Funksjoner

3.1 Funksjoner

■ Eksempel 3.1 — Funksjon

La oss igjen se på linjen fra side 37:

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \quad (3.1)$$

Løsningsmengden til denne ligningen var et sett med punkter (x, y) som ga en linje i planet.

For en gitt x finnes en *entydig* y slik at $y = \frac{1}{2}x - 2$, f.eks. med $x = 10$ så er tilhørende $y = 3$:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 10 - 2 = 5 - 2 = 3 \quad (3.2)$$

Slik kan vi fortsette med alle mulige verdier for x . Vi kan derfor si at vi har en *funksjon*

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 \quad (3.3)$$

slik at for hver x har funksjonen en verdi « $\frac{1}{2}x - 2$ ».

Vi skriver funksjonen som

$$y = f(x) \quad (3.4)$$

for å vise verdien tilhørende x -variabelen. Vi kan da skrive:

$$f(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 - 2 = 3 \quad (3.5)$$

$$f(20) = \frac{1}{2} \cdot 20 - 2 = 8 \quad (3.6)$$

■

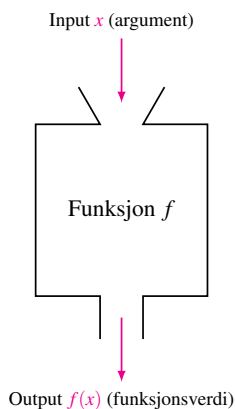
Definisjon 3.1.1 — Funksjon

En funksjon f er: ^a

$$\text{funksjon } f = \text{entydig assosiasjon fra en størrelse } x \text{ til en annen } f \quad (3.7)$$

hvor x ofte kalles den *uavhengige variabelen* eller bare *argumentet*, og $y = f(x)$ kalles ofte *funksjonsverdien*.

^aIsteden for «entydig» kunne vi like gjerne sagt «èn og bare én verdi».



Figur 3.1: Visualisering av en funksjon f .

Definisjon 3.1.2 — Definisjonsmengde og verdimengde

Vi definerer definisjonsmengde og verdimengde:

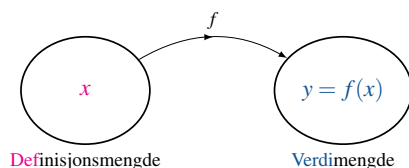
$$\text{definisjonsmengde} = \text{alle mulige tillatte verdier av } x \quad (3.8)$$

$$\text{verdimengde} = \text{alle mulige funksjonsverdier til } y = f(x) \text{ tilhørende alle} \quad (3.9)$$

$$\text{tillatte verdier av } x \quad (3.10)$$

3.2 Lineære funksjoner (rette linjer)

I avsnitt 1.3 lærte vi om 1. gradsligninger, dvs. lineære funksjoner.

Figur 3.2: Funksjon $y = f(x)$.**Definisjon 3.2.1 — Lineær funksjon**

En *lineær funksjon* $y = f(x)$ har formen

$$f(x) = ax + b \quad (3.11)$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

I avsnitt 1.5.1 (se side 42) lærte vi hvordan man kan finne løse nullpunktene $f(x) = 0$ til slike lineære funksjoner. Nå skal vi tegne (også kaldt «plotte») og studere dem mer.

Eksempel 3.2 — Lineære funksjoner

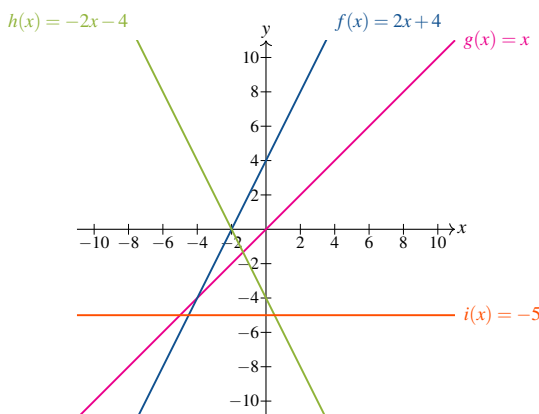
Lineære funksjoner er rette linjer.

$$f(x) = 2x + 4 \quad (3.12)$$

$$g(x) = x + 0 \quad (3.13)$$

$$h(x) = -2x - 4 \quad (3.14)$$

$$i(x) = 0x - 5 = -5 \quad (3.15)$$



Figur 3.3: Lineære funksjoner.

■

Eksempel 3.3 — Lineær funksjon

- a) Tegn funksjonen

$$f(x) = 2x - 1 \quad (3.16)$$

- b) Finn stigningstallet a .

- c) Skjærer linjen y-aksen? Dersom den gjør det, for hvilken verdi gjør den det?

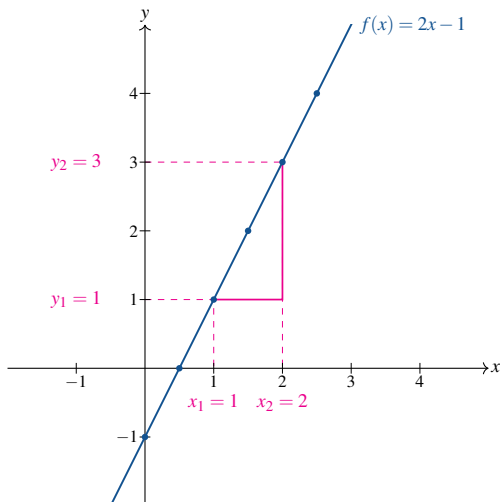
Løsning:

- a) For en *rett linje* er det tilstrekkelig med bare *to* funksjonsverdier når den skal tegnes. Da er den rette, lineære linjen entydig bestemt. Men av «sikkerhetsmessige» grunner er det lurt å ha flere verdier som f.eks. i tabellen i figur (3.1).

Når man skal tegne (plotte) funksjoner, lag en *verditabell*:

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	-1	0	1	2	3

Tabell 3.1: Verditabell for $f(x) = 2x - 1$.



Figur 3.4: Plott av funksjonen $f(x) = 2x - 1$.

- b) For en *rett linje* er det tilstrekkelig med bare *to* funksjonsverdier når den skal plottes.

Stigningstallet a :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2 \quad (3.17)$$

At stigningstallet er $a = 2$ kan man innse direkte, uten regning, via $f(x) = 2x - 1$.

- c) Fra figur (3.4) ser vi at linjen skjærer y-aksen for $y = -1$. Også dette kan vi innse direkte ut fra ligningen, via $f(x) = 2x - 1$:

$$y = f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \quad (3.18)$$

Ⓚ Det er to måter en lineær funksjon kan bestemmes på:

1. stigningstallet a er kjent og **ett punkt** (x_1, y_1)
2. **to punkt** (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

3.2.1 Ett- og to-punktsformelen

Setning 3.2.1 — Ettpunktsformlen for lineære funksjoner

Dersom stigningstallet a og ett punkt (x_1, y_1) på en *rett linje* er kjent så er den tilhørende lineære funksjonen gitt ved

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1 \quad (3.19)$$

Denne formelen kalles *ettpunktsformelen*.

Setning 3.2.2 — Topunktsformlen for lineære funksjoner

Dersom to punkt (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er kjent på en *rett linje*, så er den tilhørende lineære funksjonen gitt ved:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \quad (3.20)$$

Denne formelen kalles *topunktsformelen*.

Stigningstallet er da $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ⓚ Ser du når du skal bruke ettpunktsformelen og når du skal bruke topunktsformelen?

1. Ettpunktsformelen: dersom vi kun kjenner *ett* punkt (x_1, y_1) samt stigningstallet.
2. Topunktsformelen: dersom vi kjenner *to* punkt (x_1, y_1) og (x_2, y_2) .

■ Eksempel 3.4 — Ett- og topunktsformelen for lineære funksjoner

- a) Finn ligningen for den rette linjen som går gjennom punktet P og har stigningstallet a :

$$f(x): \quad P = (-3, 2) \quad \text{og} \quad a = 5$$

- b) Finn ligningen til den rette linjen som går gjennom punktene:

$$g(x): \quad (x_1, y_1) = (8, 1) \quad \text{og} \quad (x_2, y_2) = (4, 3)$$

Løsning:

- a) Siden vi kjenner *ett* punkt og stigningstallet a for den rette linjen så kan vi bruke *ettpunktsformelen* for lineære funksjoner:

$$f(x) = \overbrace{a(x - x_1) + y_1}^{\text{ettpunktsformel}} = 5(x - (-3)) + 2 = 5x + 17 \quad (3.21)$$

- b) Siden vi kjenner *to* punkter på den rette linjen så kan vi bruke *topunktsformelen* for lineære funksjoner:

$$g(x) = \overbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1}^{\text{topunktsformel}} \quad (3.22)$$

$$= \frac{3 - 1}{4 - 8} (x - 8) + 1 \quad (3.23)$$

$$= -\frac{1}{2} (x - 8) + 1 \quad (3.24)$$

$$= -\frac{x}{2} + 5 \quad (3.25) \quad \blacksquare$$

■ Eksempel 3.5 — Lineære funksjoner – ISLM-modellen

Innen økonomi lærer man blant annet om noe som heter en «IS»-kurve. En IS-kurve representerer alle kombinasjoner av renten r og nasjonalproduktet R som gir likevekt i *produktmarkedet*.

Anta at en slik IS-kurve er gitt ved:

$$r_{IS} = -\frac{1}{2000}R + \frac{1}{1000}G + \frac{3}{10} \quad (\text{IS-kurve}) \quad (3.26)$$

hvor G = offentlige utgifter (G = «government»).

En LM-kurve representerer alle kombinasjoner av renten r og nasjonalproduktet R som gir likevekt i *pengemarkedet*. Anta at en slik LM-kurve er gitt ved:

$$r_{LM} = \frac{1}{4000}R - \frac{1}{5} \quad (\text{LM-kurve}) \quad (3.27)$$



Figur 3.5: Makroøkonomi. (Foto: Colourbox)

- a) Tegn r_{IS} som funksjon av (sfa.) R , dvs. $r_{IS}(R)$ når $G = 600$.
- b) Løs analytisk, dvs. ved regning:
Ved hvilken verdi for nasjonalproduktet R krysser disse linjene IS- og LM-kurven hverandre?
- c) Hva betyr det, ut fra et økonomisk ståsted, at LM-kurven og IS-kurven er like?

Løsning:

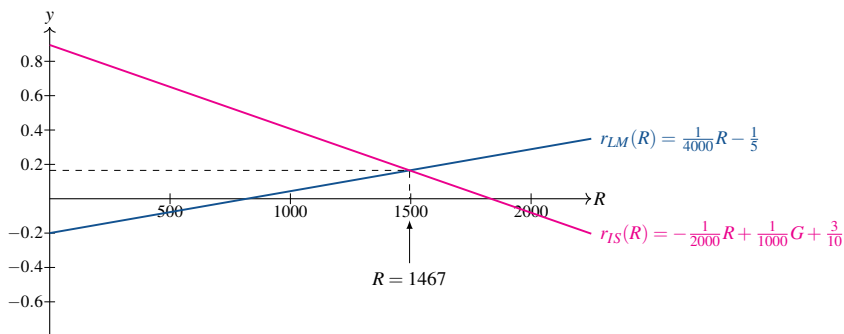
a) Når man skal tegne funksjoner, lag en *verditabell*:

R	0	500	1000	1500	2000
$r_{IS}(R)$	0.90	0.65	0.40	0.15	-0.10

Tabell 3.2: Verditablell for $r_{IS}(R)$ ($G = 600$)

R	0	500	1000	1500	2000
$r_{LM}(R)$	-0.20	-0.075	0.05	0.175	0.30

Tabell 3.3: Verditablell for $r_{LM}(R)$



Figur 3.6: Plott av IS-kurven og LM-kurven.

b) IS- og LM-kurven krysser hverandre når $G = 600$

$$r_{IS} = r_{LM} \quad (3.28)$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{2000}R + \frac{1}{1000}600 + \frac{3}{10} = \frac{1}{4000}R - \frac{1}{5} \quad (3.29)$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{2000}R - \frac{1}{4000}R = -\frac{1}{5} - \frac{6}{10} - \frac{3}{10} \quad \text{samler } R\text{'ene på venste side} \quad (3.30)$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1 \cdot 2}{2000 \cdot 2}R - \frac{1}{4000}R = -\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{6}{10} - \frac{3}{10} \quad \text{fellesnevner} \quad (3.31)$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{3}{4000}R = -\frac{2+6+3}{10} \quad (3.32)$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{4400}{3} \approx 1467 \quad (3.33)$$

Renten r_{IS} i *produktmarkedet* er sammenfallende med renten r_{LM} i *pengemarkedet* når nasjonalproduktet er $R \approx 1467$.

- c) Når linjene skjærer hverandre, dvs. er like, så betyr det at det er likevekt mellom *produktmarkedet* og *pengemarkedet*.

(Innen økonomi kalles dette *makroøkonomisk likevekt*).

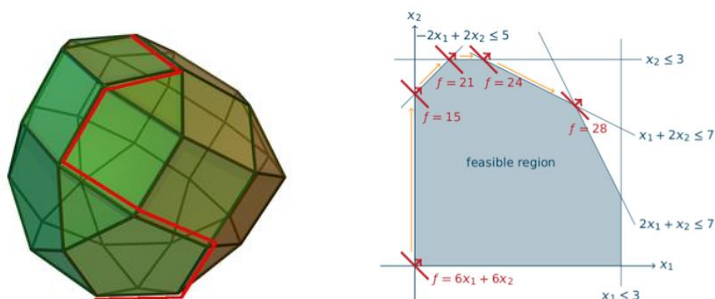
■

3.3 Simplex-algoritmen

Simplex-algoritmen er en matematisk teknikk innen *optimeringsteori* for numerisk løsning av lineærprogrammeringsproblemer. Lineærprogrammering forkortes ofte med LP.

Simplex-algoritmen er en komplisert algoritme som bruker innen mange disipliner, f.eks. logistikk og økonomi.

En litt forenklet og kort beskrivelse av Simplex-algoritmen er *hjørneløsningsmetoden*.



Figur 3.7: Simplex metoden – *hjørneløsningsmetoden*.

■ Eksempel 3.6 — Lineærprogrammering

La oss se på bedriften *Tankdesign A/S* sitt optimeringsproblem. Anta at de produserer to typer varmtvannsberedere, type 1 and type 2.

Da er det hensiktsmessig å definere *beslutningsvariablene*:

$$x_1 = \text{antall varmtvannsberedere av type 1} \quad (3.34)$$

$$x_2 = \text{antall varmtvannsberedere av type 2} \quad (3.35)$$

Anta at inntekten $i \equiv i(x_1, x_2)$ til bedriften er gitt ved:

$$i(x_1, x_2) = 350x_1 + 300x_2 \quad (3.36)$$

Denne inntekten skal *maksimeres*.

Tankdesign A/S har kun 200 pumper, 1566 arbeidstimer og 2880 dm rør tilgjengelig.

Varmtvannsberederne trenger en pumpe hver. Det tar 9 timer å lage type 1, og det tar 6 timer å lage type 2.

Det trengs 12 dm rør til type 1, og det trengs 16 dm rør til type 2.



Figur 3.8: Tankdesign A/S.

Disse *restriksjonene* kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$\text{restriksjoner: } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 200 & (\text{pumper}) \\ 9x_1 + 6x_2 \leq 1566 & (\text{arbeidstimer}) \\ 12x_1 + 16x_2 \leq 2880 & (\text{rør}) \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

hvor de to siste ulikhetene stammer fra det faktum at x_1 og x_2 må være positive siden det dreier seg om mengde produsert.

Inntekten $i(x_1, x_2)$ i lign.(3.36) skal *maksimeres* under restriksjonene beskrevet av lign.(3.37).

- a) Man kan vise matematisk at løsningen av et LP-problem inntreffer et sted når ulikhetene er likhet, i *ett av hjørnene*.¹

Det betyr at løsningen inntreffer når en eller flere av ressursene er helt brukt opp.

Siden løsningen til LP-problemet inntreffer et sted når ulikhetene er likhet, *gjør om ulikhetene til likheter* og løs restriksjonene x_2 som funksjon av x_1 .

- b) Tegn alle restriksjonene i en og samme figur. Bruk x_2 på y-aksen og x_1 på x-aksen.

- c) Skraver det området i figuren som tilfredsstiller alle restriksjonene.

- d) Dette er et LP optimeringsproblem som kan løses grafisk:

¹Du skal ikke vise dette faktum. Bare ta det for gitt.

- i) Indiker på grafen hvor alle «hjørneløsninger».
- ii) Les av alle hjørneløsninger og regn ut tilhørende inntekt i .
- iii) Hvilken kombinasjon av x_1 og x_2 gir *maksimal* inntekt i ?

Løsning:

- a) Gjør om ulikhetene til likheter:

Pumper:

$$x_1 + x_2 = 200 \quad \bigg/ -x_1 \quad (3.38)$$

$\Updownarrow$

$$x_2 = -x_1 + 200 \quad (3.39)$$

Arbeidstimer:

$$9x_1 + 6x_2 = 1566 \quad \bigg/ -9x_1 \quad (3.40)$$

$\Updownarrow$

$$6x_2 = 1566 - 9x_1 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{6} \quad (3.41)$$

$\Updownarrow$

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 261 \quad (3.42)$$

Rør:

$$12x_1 + 16x_2 = 2880 \quad \bigg/ -12x_1 \quad (3.43)$$

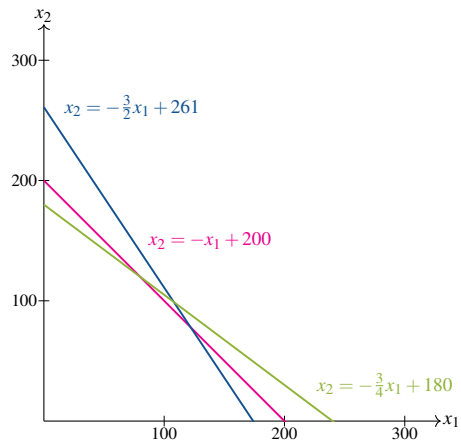
$\Updownarrow$

$$16x_2 = 2880 - 12x_1 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{16} \quad (3.44)$$

$\Updownarrow$

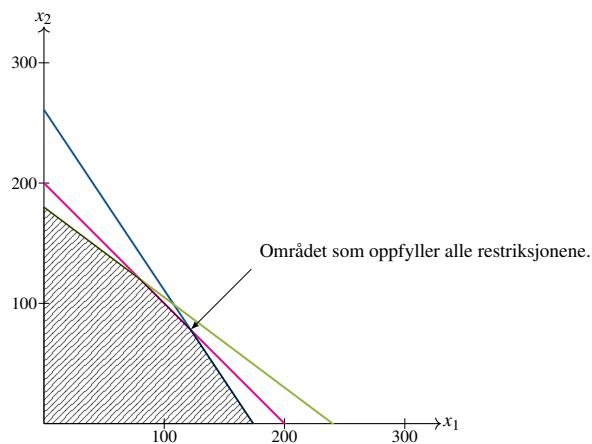
$$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + 180 \quad (3.45)$$

b) Tegner alle restriksjonene i en og samme figur:



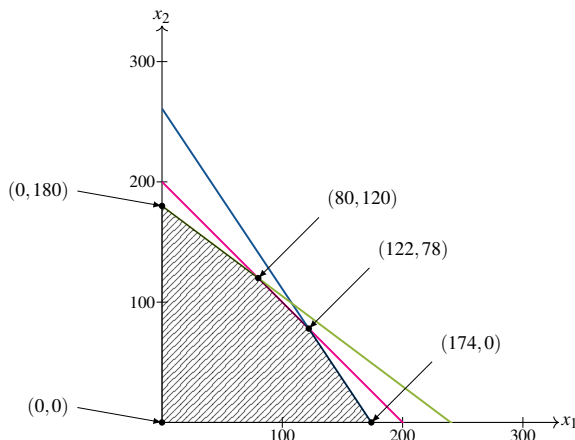
Figur 3.9: Plott av de lineære restriksjonene.

c) Området i figuren som oppfyller alle restriksjonene:



Figur 3.10: Området som oppfyller alle restriksjonene.

- d) i) Indikerer alle «hjørneløsninger»:



Figur 3.11: Totalt er det 5 hjørner, dvs. 5 hjørneløsninger.

- ii) Inntekten $i \equiv i(x_1, x_2)$ ved hjørnepunktene:

$$i(0,0) = 350 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0 \quad (3.46)$$

$$i(0,180) = 350 \cdot 0 + 300 \cdot 180 = 54000 \quad (3.47)$$

$$i(80,120) = 350 \cdot 80 + 300 \cdot 120 = 64000 \quad (3.48)$$

$$i(122,78) = 350 \cdot 122 + 300 \cdot 78 = 66100 \quad (3.49)$$

$$i(174,0) = 350 \cdot 174 + 300 \cdot 0 = 60900 \quad (3.50)$$

- iii) Maksimal inntekt i når $x_1 = 122$ og $x_2 = 78$: $i(122,78) = 66100$

■

3.4 Kvadratiske funksjoner (parabler)

Definisjon 3.4.1 — Kvadratisk funksjon

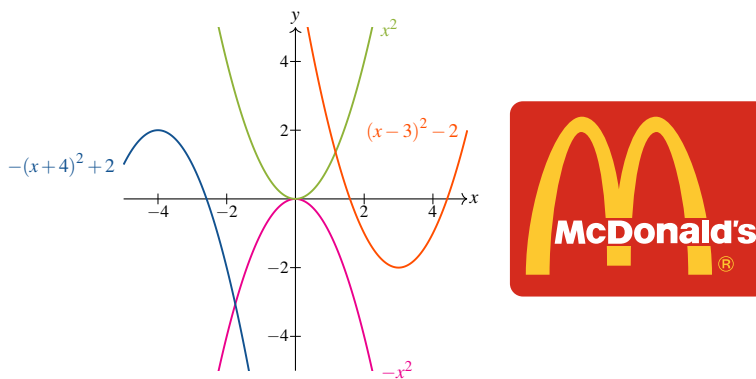
En 2. gradsfunksjon har formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.51)$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ er konstanter.

Ⓚ En 2. gradsfunksjon kalles også *kvadratisk funksjon* eller *parabel*.

I avsnitt 1.5 på side 42 diskuterte vi hvordan man kan finne nullpunktene $f(x) = 0$ til slike kvadratiske funksjoner. Nå skal vi tegne og studere dem mer.



Figur 3.12: Kvadratiske funksjoner.

3.4.1 Noen egenskaper til kvadratiske funksjoner (parabler)

Kvadratiske funksjoner

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.52)$$

har følgende egenskaper:

- $a > 0 \Rightarrow$ grafen er $\cup$ -formet, «smilefjes».
- $a < 0 \Rightarrow$ grafen er $\cap$ -formet, «tristfjes».
- Dersom $b^2 - 4ac > 0$ så har $f(x)$ to nullpunkter, dvs. $f(x)$ skjærer x -aksen $f(x) = 0$ to plasser, se figur (1.25):

$$c_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad c_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.53)$$

- Dersom $b^2 - 4ac = 0$ så har $f(x)$ kun ett nullpunkt, dvs. $f(x)$ skjærer x -aksen $f(x) = 0$ én plass, se figur (1.25):

$$c_1 = c_2 = -\frac{b}{2a} \quad (3.54)$$

- Dersom $b^2 - 4ac < 0$, så skjærer ikke $f(x)$ x -aksen i det hele tatt, dvs. det er **ingen** nullpunkter.
- $b^2 - 4ac > 0$: grafen ligger i sin helhet **over** x -aksen
- $b^2 - 4ac < 0$: grafen ligger i sin helhet **under** x -aksen

■ Eksempel 3.7 — Kvadratiske funksjoner (parabler)

Gitt de kvadratiske funksjonene:

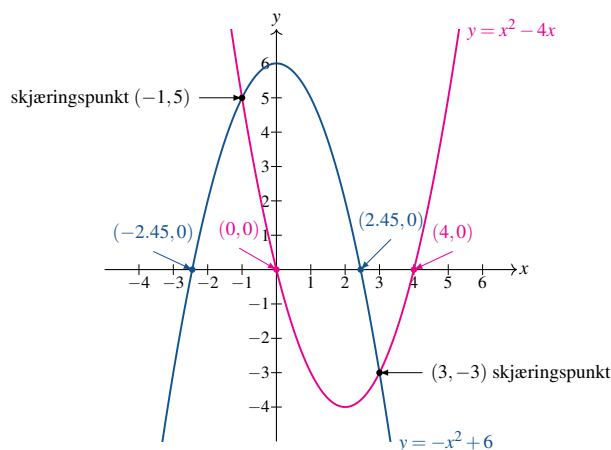
$$f(x) = x^2 - 4x \quad (3.55)$$

$$g(x) = -x^2 + 6 \quad (3.56)$$

- a) Tegn funksjonene.
- b) Finn nullpunktene til både $f(x)$ og $g(x)$. (både grafisk og ved regning)
- c) Finn skjæringspunkt(ene) til grafene. (både grafisk og ved regning)

Løsning:

- a) Når man skal tegne en funksjon i et koordinatsystem så er det lurt å sette opp en verditabell først, og deretter tegne opp grafen.



Figur 3.13: Plott av parabelene $f(x) = x^2 - 4x$ og $g(x) = -x^2 + 6$.

- Ⓚ En kvadratisk funksjon er symmetrisk gjennom topp/bunnpunktet (se figur 3.13).
- Ⓚ $f(x)$ er hul *opp* pga. $+x^2$, dvs. $a = 1 > 0$
- Ⓚ $g(x)$ er hul *ned* pga. $-x^2$, dvs. $a = -1 < 0$
- b) Nullpunktene er bestemt av $f(x) = 0$. Disse kan finnes ved *grafisk* løsning ved ren avlesning fra figur 3.13:

$$f(x) = 0 : \quad c_1 = 0 \quad \text{og} \quad c_2 = 4 \quad (3.57)$$

$$g(x) = 0 : \quad c_1 = -2.45 \quad \text{og} \quad c_2 = 2.45 \quad (3.58)$$

eller ved *regning*, dvs. analytisk, ($\sqrt{6} \approx 2.45$, løsning av 2. gradsligning)

$$f(x) = 0 : \quad c_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 4}{2} \Rightarrow c_1 = 0 \quad \text{og} \quad c_2 = 4$$

$$g(x) = 0 : \quad c_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{\mp 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow c_1 = -\sqrt{6} \quad \text{og} \quad c_2 = \sqrt{6}$$

- c) Skjæringspunktene $f(x) = g(x)$ kan finnes ved grafisk løsning ved ren avlesning fra figur 3.13:

$$f(x) = g(x) : \quad x = -1 \quad \text{og} \quad y = 5 \quad \quad x = 3 \quad \text{og} \quad y = -3 \quad (3.59)$$

eller ved *regning* (løsning av 2. gradsligning)

$$f(x) = g(x) \quad (3.60)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - 4x = -x^2 + 6 \quad \text{samler like ledd} \quad (3.61)$$

$$\Downarrow$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad \text{2. gradsligning} \quad (3.62)$$

Løser 2. gradsligningen i lign.(3.62) med ABC-formelen

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 8}{4} \quad (3.63)$$

$$\Downarrow$$

$$x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 3 \quad (3.64)$$

med tilhørende y-verdier

$$f(-1) = g(-1) = -(-1)^2 + 6 = 5 \quad (3.65)$$

$$f(3) = g(3) = -3^2 + 6 = -3 \quad (3.66)$$

Alt i alt, skjæringspunktene bestemt av $f(x) = g(x)$ er gitt ved:

$$(-1, 5) \quad \text{og} \quad (3, -3) \quad (3.67)$$

■

■ Eksempel 3.8 — Kvadratiske funksjoner

Du jobber i en butikk som selger mobiltelefoner. I forbindelse med lansering og salg av ny iPhone ønsker du å finne hva slags pris som er optimal for å maksimere fortjenesten.

Anta at det totale resultatet TR er gitt ved

$$TR(x) = TI(x) - TK(x) \quad (3.68)$$

hvor total inntekt er

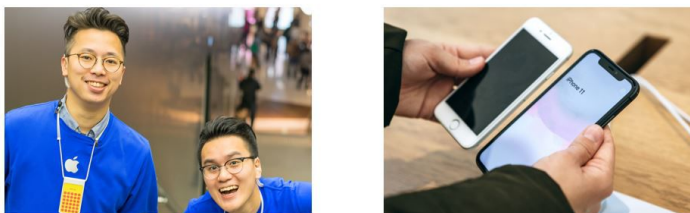
$$TI(x) = px \quad (3.69)$$

og $TK(x)$ er total kostnad, p er pris og x er etterspørsel, dvs. antall iPhoneer.

Ut fra kjennskapen til markedet kan man modellere sammenhengen mellom pris og etterspørsel.

Anta at denne er

$$p(x) = 1900 - 0.4x \quad (3.70)$$



Figur 3.14: iPhone.

Total kostnad $TK(x)$ er kan også modelleres. Anta at denne er

$$TK(x) = 0.75x^2 - 150x + 85\,000 \quad (3.71)$$

- a) Tegn den totale kostnaden $TR(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 500$.
- b) Hvor mange iPhoneer x^* selges når det totale resultatet $TR(x)$ maksimeres?
Løs oppgaven *grafisk*.
- c) Hva slags pris bør Power sette på iPhone 9 for å maksimere $TR(x)$?
Løs oppgaven ved *regning*.
- d) Hva blir det optimale resultatet $TK(x^*)$?
Løs oppgaven *grafisk*.

Løsning:

- a) Først må vi finne et eksplisitt uttrykk for totalt resultat $TR(x)$:

$$TR(x) = TI(x) - TK(x) \quad (3.72)$$

$$= px - TK(x) \quad (3.73)$$

$$= (1900 - 0.4x)x - (0.75x^2 - 150x + 85\,000) \quad (3.74)$$

$$= 1900x - 0.4x^2 - 0.75x^2 + 150x - 85\,000 \quad (3.75)$$

$$= -1.15x^2 + 2050x - 85\,000 \quad (3.76)$$

Når man skal plote funksjoner, lag en *verditabell*:

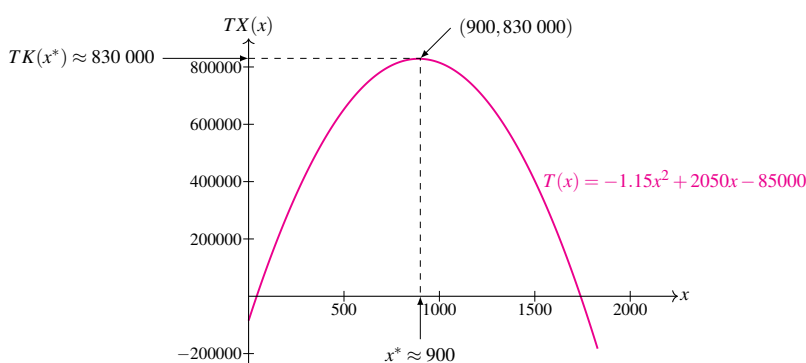
x	0	200	400	600	800
$TR(x)$	-85 000	279 000	551 000	731 000	819 000

Tabell 3.4: Verditabell for $TR(x)$.

x	1000	1 200	1 400	1 600	1 800
$TR(x)$	-815 000	719 000	531 000	251 000	-121 000

Tabell 3.5: Fortsettelse verditabell for $TR(x)$.

Tegner grafen:



Figur 3.15: Totalt resultat $TR(x)$.

- b)** Av figuren ser vi at: (grafisk løsning)

Totalt resultat $TR(x)$ maksimeres når det selges $x^* \approx 900$ stk. iPhoneer.²

- c)** Maksimert resultat TR oppnås når iPhoneen prises til:

$$p(x^*) = p(900) = (1900 - 0.4 \cdot 900) \text{ NOK} = 1540 \text{ NOK} \quad (3.77)$$

- d)** Av figuren ser vi at det maksimale totale resultatet TR er:³

$$TR(x^*) = TR(900) \approx 830000 \text{ NOK} \quad (3.78)$$

■

3.5 Rasjonale funksjoner

I formelsamlingen *grunnleggende formeler* bakerst i denne boken er i rasjonale *tall* definert:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \right\} \quad (3.79)$$

²Senere skal vi også løse denne oppgaven ved regning, dvs. algebraisk. Da finner man $x^* = 891.3$.

³Det eksakte svaret er $TR(891.3) = 828587$ NOK. Dette kommer vi tilbake til senere i boken når vi skal regne ut svaret analytisk, dvs. ved regning.

Her utvider vi dette til rasjonale *funksjoner*.

Definisjon 3.5.1 — Rasjonal funksjon

En ligning på formen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (3.80)$$

hvor $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer, kalles en *rasjonal funksjon*.

Ⓚ Lign.(L5.8) har:

- én ukjent, nemlig x
- en brøk mellom to polynomer av generell grad n

■ Eksempel 3.9 — Kvadratiske funksjoner

La oss returnere til eksemplet som beskrevet på side 86. I dette eksemplet ble kostnadsfunksjonen modellert ved lign.(3.71), dvs.:

$$TK(x) = 0.75x^2 - 150x + 85\,000 \quad (3.81)$$

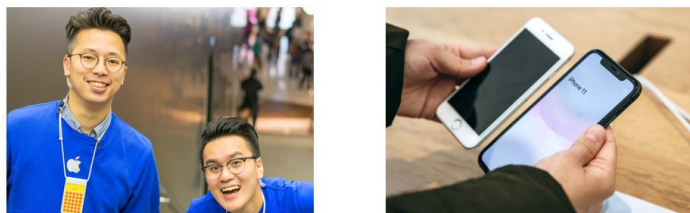
De tilhørende totale gjennomsnittlige *enhetskostnadene* $TEK(x)$ er definert ved:

$$TEK(x) = \frac{TK(x)}{x} \quad (\text{rasjonal funksjon}) \quad (3.82)$$

Med $TK(x)$ som i lign.(3.81) så blir denne:

$$TEK(x) = \frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \quad (\text{rasjonal funksjon}) \quad (3.83)$$

- a) Tegn $TEK(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 500$.
- b) Hvor mange iPhoneer x^* må selges for å minimere den totale gjennomsnittlige enhetskostnaden $TEK(x)$? Løs oppgaven *grafisk*.
- c) Hva er den tilhørende enhetskostnaden, dvs. $TEK(x^*)$? Løs oppgaven *grafisk*.



Figur 3.16: iPhone.

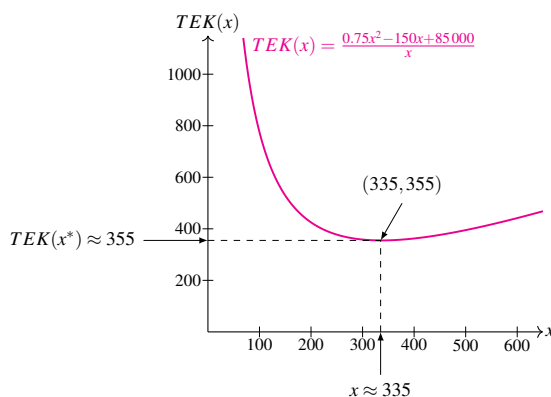
Løsning:

a) Når man skal plote funksjoner, lag en *verditabell*:

x	0	50	100	6150	200
$TEK(x)$	ulovlig	1 588	775	529	425

x	250	300	350	400	500
$TEK(x)$	378	358	355	363	395

Tabell 3.6: Verditabell for $TEK(x) = \frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x}$.

Figur 3.17: Total enhetskostnad $TEK(x)$.

b) Av figuren ser vi at (grafisk løsning) den x som gir minst $TEK(x)$ er: $x^* \approx 335$ ⁴

c) Av figuren ser vi at (grafisk løsning) den minste $TEK(x)$ er $TEK(x^*) = TEK(335) \approx 355$. ■

⁴Senere skal vi også løse denne oppgaven ved regning, dvs. algebraisk. Da finner man $x^* = 336.7$, se lign.(4.121) side 114.

■ Eksempel 3.10 — Nyttmaksimering

Du har fått sommerjobb som taxisjåfør. Du skal jobbe ei langhelg, fredag, lørdag og søndag, dvs. tre dager.

Føringene du har fått fra din arbeidsgiver for denne arbeidshelgen er at de samlede konsumkostnader må være begrenset, maksimum m NOK. Konsumutgiftene skal dekke bensin- og matkostnader. La:

$$p = \text{pris på bensin} \quad (\text{NOK/liter}) \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (3.84)$$

$$q = \text{pris på pølsemeny} \quad (\text{NOK/pølsemeny}) \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (3.85)$$

Ulikheten for arbeidshelgen blir dermed ⁵

$$px + qy \leq m \quad (3.86)$$

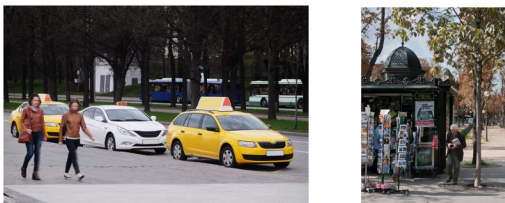
hvor m = samlet konsumutgift og variablene x og y er

$$x = \text{antall liter bensin} \quad (\text{gode nr. 1}) \quad (3.87)$$

$$y = \text{antall pølsemenyer} \quad (\text{gode nr. 2}) \quad (3.88)$$

Anta at *nytt*en ved forbruk av bensin X (gode 1) og mat/drikke Y (gode 2) er bestemt av nyttefunksjonen: ⁶

$$u(x, y) = 2x^2y \quad (3.89)$$



Figur 3.18: Taxi og kiosk.

- a)** Gjør om ulikheten til likhet i budsjettligningen (8.20) og vis at y sfa. x er gitt ved:

$$y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}x \quad (3.90)$$

for gitt m .

- b)**
- i) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(3.90) y -aksen?
 - ii) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(3.90) x -aksen?
 - iii) Lign.(3.90) er en lineær kurve. Hva er stigningstallet?

⁵Lign.(8.20) kalles også «budsjettligningen» i økonomisk sammenheng.

⁶Valget av notasjonen u er fordi «utility»=nytte. Nyttefunksjon er noe man blant annet bruker innen økonomi.

- c) For en gitt, bestemt nytte $u_0 = u(x, y)$, vis at y sfa. x i nyttefunksjonen (8.17) er gitt ved:

$$y = \frac{u_0}{2x^2} \quad (3.91)$$

Denne ligningen kalles *indifferanseligningen*.

Anta at prisen på bensin er $p = 10$ NOK/liter og at pølsemenyen på Narvesen koster $q = 40$ NOK.

Restriksjonen du får fra din overordnede er $m = 1200$ NOK for den aktuelle helgen.

- d) For tallene som oppgitt:

- i) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(3.90) y -aksen?
- ii) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(3.90) x -aksen?
- iii) Hva er stigningstallet?

- e) Tegn lign.(3.90) og (3.91) i én og samme figur for tilfellene:

- i) $u_0 = 55\,000$
- ii) $u_0 = 128\,000$
- iii) $u_0 = 250\,000$

- f) Hva er den *optimale kombinasjonen* (x^*, y^*) av bensin og pølse som gir størst nytte?

Dvs. hvilken kombinasjon av x og y gir størst nytte innenfor budsjettet?

Løs problemet *grafisk*.⁷

Løsning:

- a) Gjør om ulikheten til likhet i budsjettligningen (8.20) og løser y mhp. x :

$$px + qy = m \quad (3.92)$$

$\Updownarrow$

$$qy = m - px \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{q} \quad (3.93)$$

$\Updownarrow$

$$y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}x \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (3.94)$$

⁷Dette problemet kalles *nyttmaksimeringsproblemet* innen økonomi. Problemet kan også løses analytisk, dvs. ved regning, via noe som heter Lagrangemultiplikatorer som vi skal lære om i kap. 8.

- b)** i) Linjen i lign.(3.90) skjærer y-aksen når $x = 0$:

$$y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q} \overbrace{x}^{=0} \quad x = 0 \quad \text{skjæring med } x\text{-aksen} \quad (3.95)$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{m}{p} - \frac{p}{q} \cdot 0 \quad (3.96)$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{m}{q} \quad (3.97)$$

- ii) Linjen i lign.(3.90) skjærer x-aksen når $y = 0$:

$$\overbrace{y}^{=0} = \frac{m}{q} - \frac{p}{q} x \quad (3.98)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \frac{m}{q} - \frac{p}{q} x \quad / \cdot q \quad (3.99)$$

$$\Downarrow$$

$$0 = m - px \quad (3.100)$$

$$\Downarrow$$

$$px = m \quad / \cdot \frac{1}{p} \quad (3.101)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{m}{p} \quad (3.102)$$

- iii) Stigningstallet til den lineære lign.(3.90)

$$y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q} x \quad (3.103)$$

er *koeffisienten* foran x -variabelen, dvs.:

$$\text{stigningstall} = \frac{p}{q} \quad (3.104)$$

- c)** Løser y sfa. x i nyttefunksjonen (8.17) for gitt nytte $u(x, y) = u_0$:

$$\overbrace{u(x, y)}^{=u_0} = 2x^2 y \quad \text{gitt nytte } u(x, y) = u_0 \quad (3.105)$$

$$\Downarrow$$

$$u_0 = 2x^2 y \quad / \cdot \frac{1}{2x^2} \quad (3.106)$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{u_0}{2x^2} \quad \text{q.e.d.} \quad (3.107)$$

- d) i) Skjærer y -aksen ved:

$$y = \frac{m}{q} = \frac{1200 \text{ NOK}}{40 \text{ NOK/pølsemenyer}} = 30 \text{ pølsemenyer} \quad (3.108)$$

- ii) Skjærer x -aksen:

$$x = \frac{m}{p} = \frac{1200 \text{ NOK}}{10 \text{ NOK/liter}} = 120 \text{ liter} \quad (3.109)$$

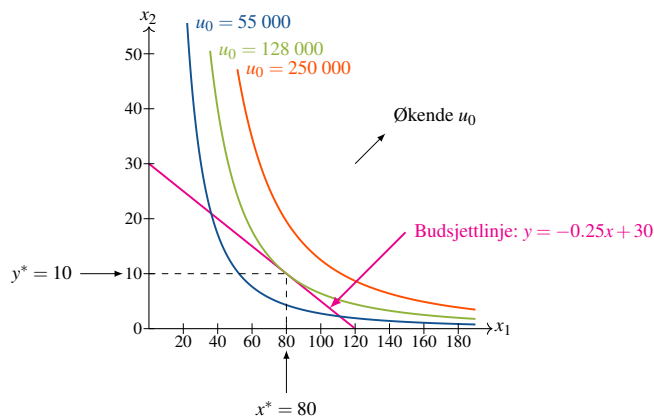
- iii) Stigningstallet: (stigningstallet er et dimensjonsløst tall)

$$\text{stigningstall} = -\frac{p}{q} = -\frac{10 \text{ NOK}}{40 \text{ NOK}} = -0.25 \quad (3.110)$$

- e) Tegner lign.(3.90) og (3.91) i et koordinatystem, se figur 3.19. Dette er et eksempel på at *optimal tilpassing* av en budsjettligning kan finnes ved at

indifferansekurven tangerer budsjettlinjen

fordi nyttefunksjonen vokser med økende u_0 .



Figur 3.19: Optimal tilpassing er når *indifferansekurven tangerer budsjettlinjen*.

- f) Av figur (3.19) ser vi at:

$$x^* = 80 \quad (3.111)$$

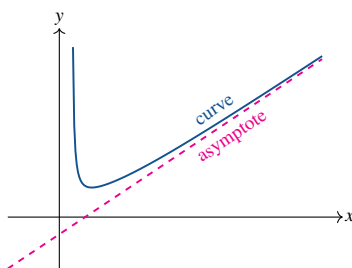
$$y^* = 10 \quad (3.112)$$

er *tangeringspunktet* mellom indifferansekurven og budsjettlinjen.

Med nyttefunksjonen $u(x,y) = 2x^2y$ så er det størst nytte ved å konsumere:

$$x^* = 80 \text{ liter bensin} \quad \text{og} \quad y^* = 10 \text{ pølsemenyer} \quad (3.113)$$

■



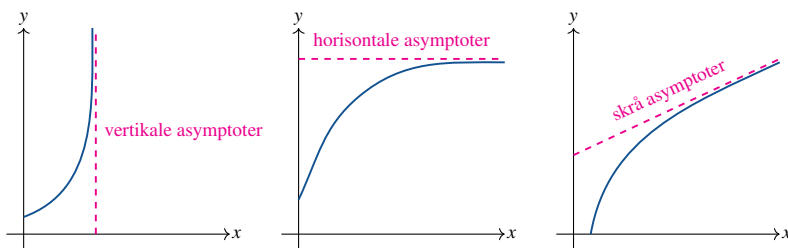
Figur 3.20: Asymptote.

3.6 Asymptoter

En asymptote er en linje som en graf nærmer seg når argumentet går mot uendelig.

Det er tre typer asymptoter:

1. vertikale asymptoter
2. horisontale asymptoter
3. skrå asymptoter



Figur 3.21: Tre typer asymptoter.

Definisjon 3.6.1 — Vertikal asymptote

$x = a$ er en vertikal asymptote til grafen $f(x)$ dersom $x \rightarrow a$ medfører $f(x) \rightarrow \pm\infty$.

Definisjon 3.6.2 — Horisontal asymptote

$y = b$ er en horisontal asymptote til grafen $f(x)$ dersom $f(x)$ nærmer seg et fast tall b når $x \rightarrow \pm\infty$.

Definisjon 3.6.3 — Skrå asymptote

$y = ax + b$ er en skrå asymptote til funksjonen $f(x)$, dersom følgende er oppfylt:

$$|f(x) - (ax + b)| \rightarrow 0 \quad (3.114)$$

når $x \rightarrow \pm\infty$.

3.6.1 Asymptoter for rasjonale funksjoner

En rasjonal funksjon, se lign.(L5.8),

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (3.115)$$

er et eksempel på en klasse funksjoner hvor vi bruker asymptoter som hjelpelinjer for å beskrive funksjonen.

For rasjonale funksjoner:

1. En *vertikal* asymptote finnes ved å finne nullpunktene til nevneren:

$$Q(x) = 0 \quad (3.116)$$

2. Samme grad:

Dersom $P(x)$ og $Q(x)$ har samme grad, har grafen en *horisontal* asymptote b . Denne finnes ved å betrakte $f(x)$ for store x :

$$x \rightarrow \pm\infty \quad (3.117)$$

3. Høyere grad:

Dersom $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$ har samme grad, har grafen en *horisontal* asymptote $y = 0$.

4. En grad høyere:

Dersom graden til $P(x)$ = graden til $Q(x)$ + 1, så kan polynomert skrives på formen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = ax + b + \frac{\text{rest}}{\text{nevner}} \quad (3.118)$$

har grafen en *skrå* asymptote på formen $y = ax + b$.

■ Eksempel 3.11 — Vertikal asymptote

Gitt den rasjonale funksjonen:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad (3.119)$$

- a)** Finn asymptoten(e) til $f(x)$.
- b)** Tegn funksjonen $f(x)$ sammen med dens asymptote(r) i ett og samme koordinatsystem.

Løsning:

- a) $f(x)$ har en vertikal asymptote når telleren $x - 1 = 0$, dvs. $x = 1$.

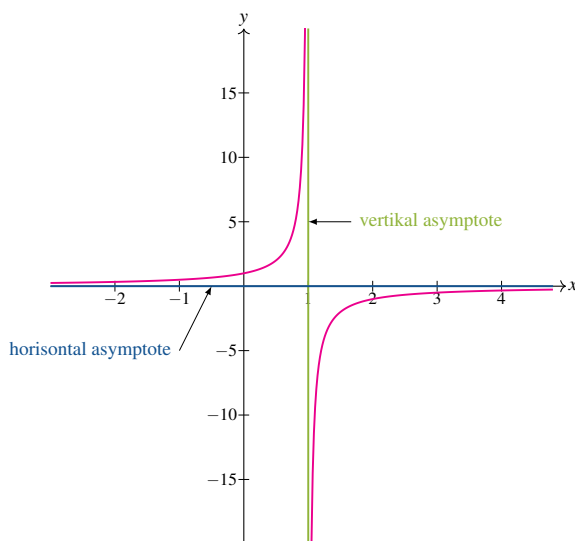
Ved $x \rightarrow \pm\infty$ i lign.(3.119) så innser vi at $y = 0$ er en horisontal asymptote.

- b) Man kan lage verditabell og deretter plotte $f(x)$ sammen med $x = 1$.

Den vertikale asymptoten er ved $x = 1$, se figur 3.22.

Den horisontale asymptoten er ved $y = 0$, se figur 3.22.

Man kan også bruke f.eks. GeoGebra til å plotte grafen.



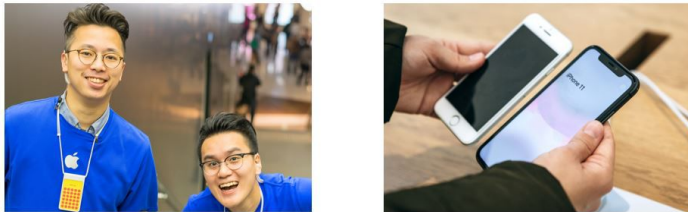
Figur 3.22: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ og asymptotene $x = 1$ og $y = 0$.

■ Eksempel 3.12 — Skrå asymptote

La oss igjen se på eksemplet hvor man skal selge iPhoneer. Det totale gjennomsnittlige *enhetskostnadene* $TEK(x)$ fra lign.(3.83) på side 88 er:

$$TEK(x) = \frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \quad (\text{rasjonal funksjon}) \quad (3.120)$$

- a) Finn den skrå asymptoten til $TEK(x)$.
- b) Tegn funksjonen $TEK(x)$ sammen med den skrå asymptoten.



Figur 3.23: iPhone.

Løsning:

a) Omskriving: (kjelleromskrivning)

$$TEK(x) = \frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \quad (3.121)$$

$$= \frac{0.75x^2}{x} - \frac{150x}{x} + \frac{85\,000}{x} \quad (3.122)$$

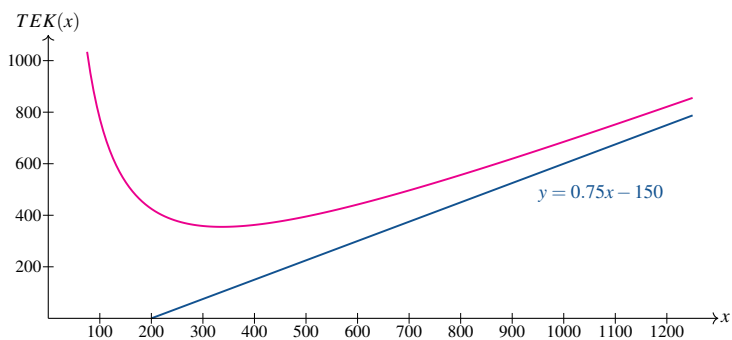
$$= \underbrace{0.75x - 150}_{\text{asymptote}} + \underbrace{\frac{85\,000}{x}}_{\rightarrow 0} \quad (3.123)$$

For $x \rightarrow \infty$ så vil $\frac{85\,000}{x} \rightarrow 0$. Dermed er:

$$y = 0.75x - 150 \quad (3.124)$$

den skrå asymptoten til $TEK(x)$

b) Man kan lage verditabeller og deretter plote $TEK(x)$ og y . Eller man kan bruke f.eks. GeoGebra til å plote det.

Figur 3.24: $TEK(x)$ og asymptoten $y = 0.75x - 150$.

■

4. Derivasjon

4.1 Derivasjon

Derivasjon er en matematisk operasjon som forteller om hvordan en funksjon endrer seg, altså hvordan funksjonsverdien stiger eller synker.

Det å utføre en derivasjon kalles å derivere funksjonen.

Tolkning: (*derivate*, med ord) ¹

$$\frac{df(a)}{dx} = \text{den derivate til funksjonen } y = f(x) \text{ i punktet } x = a \quad (4.1)$$

$$= \text{stigningstallet til tangenten til grafen i punktet } x = a \quad (4.2)$$

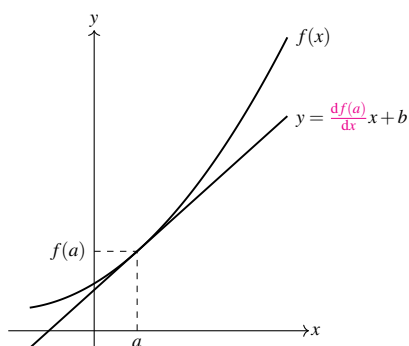
$$= \text{stigningen i punktet } (a, f(a)) \text{ på grafen} \quad (4.3)$$

Definisjon 4.1.1 — Derivate

La $f(x)$ være en deriverbar funksjon i punktet x . Den derivate av denne funksjonen i x er definert ved: (se figur 4.2)

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.4)$$

¹I denne boken bruker vi som oftest, men ikke alltid, $\underbrace{\frac{df(x)}{dx}}_{\text{Leibniz}}$ notasjon istedet for bare $f'(x)$: $f'(x) = \underbrace{\frac{df(x)}{dx}}_{\text{Leibniz}}$.

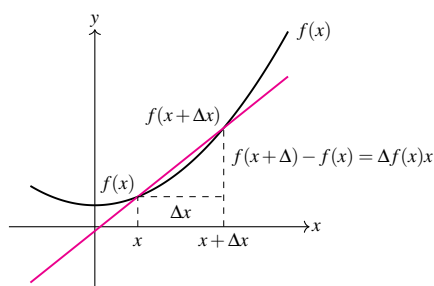


Figur 4.1: Den deriverte i punktet $x = a$, dvs. stigningstallet til **tangenten** i punktet $x = a$.

- Ⓚ Den deriverte er en grenseverdi.
- Ⓚ Dersom grenseverdien eksisterer i et punkt $x = a$ så sies funksjonen å være deriverbar i punktet.
- Ⓚ Den deriverte er et mål på:
 - *hvor raskt* funksjonen endrer seg i punktet
 - «bratthet»
- Ⓚ I denne boken skal vi som oftest, men ikke alltid, bruke Leibniz-notasjonen $\frac{df(x)}{dx}$ istedet for bare $f'(x)$. Notasjonene betyr det samme:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{df(x)}{dx}}_{\text{Leibniz}} \quad (4.5)$$

- Ⓚ Den deriverte i punktet x er når stigningstallet til sekanten sammenfaller med stigningstallet til tangenten i punktet x , dvs. når $h \rightarrow 0$:



Figur 4.2: Gjennomsnittlig endring.

4.2 Derivasjonsregler

4.2.1 Generell derivasjonsregler

Denne regelen brukes så regelmessig at vi ofte bruke det uoffisielle navnet «*hovedregelen*»:

Setning 4.2.1 — Derivasjon av et polynom

Den deriverte av funksjonen

$$f(x) = ax^n \quad (4.6)$$

hvor $a \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$, er

$$\frac{df(x)}{dx} = nax^{n-1} \quad (4.7)$$

Bevis. Derivasjonsreglen i lign.(4.35) kan utledes ved å bruke definisjonen av derivasjon i lign.(4.4). Det er litt teknisk krevende. Derfor nøyer vi oss med å kun presentere resultatene. ■

Fra «*hovedregelen*» i lign.(4.35) er det spesialtilfeller. Noen av disse spesialtilfellene er:²

Setning 4.2.2 — Derivasjonsregler

Fra lign.(4.35) følger at:

$$a = 1 \quad \text{og} \quad n = 1 : \quad f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = 1 \quad (4.8)$$

$$a = 1 \quad \text{og} \quad n = -1 : \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad (4.9)$$

$$a = 1 \quad \text{og} \quad n = 1/2 : \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (4.10)$$

for $x \neq 0$ i lign.(4.40) og (L3.16).

Derivasjonsreglene ovenfor gjelder for polynomer. Nedenfor skal vi se på noen generelle derivasjonsregler som gjelder for to vilkårlige, deriverbare funksjoner $g(x)$ og $h(x)$.

²Selv om $n \in \mathbb{N}$ i lign.(4.35) så skal vi senere utvide «*hovedregelen*» for derivasjon til reelle tall i eksponenten. Derfor er det i orden å bruke $n = -1$ og $n = 1/2$ i lign.(4.40) og (L3.16).

Setning 4.2.3 — Generelle derivasjonsregler

La $f(x)$ være en deriverbar funksjon i x , og la $k \in \mathbb{R}$ være en konstant.

Da gjelder følgende generelle derivasjonsregler:

$$f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad (4.11)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) \quad (4.12)$$

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) - h'(x) \quad (4.13)$$

$$f(x) = k g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k g'(x) \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

Bevis. De generelle derivasjonsreglene kan utledes ved å bruke definisjonen av derivasjon i lign.(4.4). Det er litt teknisk krevende. Derfor nøyer vi oss med å kun presentere resultatene. ■

Ⓚ I regnereglerne ovenfor brukes kortnotasjonen $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

■ **Eksempel 4.1** Deriver funksjonen:

$$f(x) = 5x^3 + 7x \quad (4.16)$$

Løsning:

Deriverer $f(x)$ mhp. x :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (5x^3 + 7x) \quad \text{Leibnitz' notasjon} \quad (4.17)$$

$$= \frac{d}{dx} 5x^3 + \frac{d}{dx} 7x \quad (\text{se lign. (4.12)}) \quad (4.18)$$

$$= 5 \cdot 3x^{3-1} + 7 \cdot 1x^{1-1} \quad (\text{se lign. (4.35), «hovedregelen»}) \quad (4.19)$$

$$= 15x^2 + 7 \quad (4.20)$$

hvor vi har brukt at $x^{1-1} = x^0 = 1$. ■

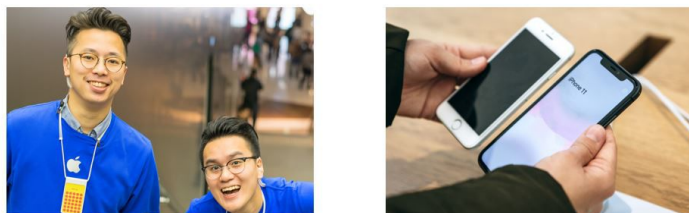
■ **Eksempel 4.2 — Deriverte**

På side 86, lign.(3.76), fant vi at det totale det totale resultatet $TR(x) = TI(x) - TK(x)$ er gitt ved:

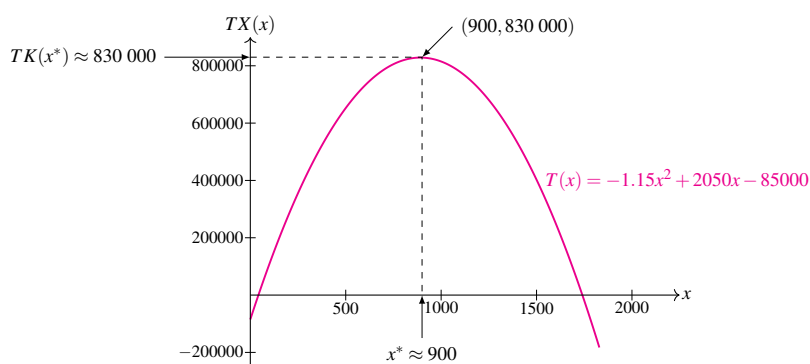
$$TR(x) = -1.15x^2 + 2050x - 85\,000 \quad (4.21)$$

hvor x er antall iPhoneer som etterspørres.

På side 86, figur 3.15, tegnet vi $TR(x)$ i et koordinatsystem:



Figur 4.3: iPhone.

Figur 4.4: Totalt resultat $TR(x)$.

Ut fra figur 4.4 ser vi at

$TR(x)$ er *flat* i maksimumspunktet

dvs.

$$\frac{dTR(x)}{dx} = 0 \quad (4.22)$$

akkurat i nullpunktet.³

- a) Finn verdien for x i maksimumspunktet ved hjelp av derivasjon når $TR(x)$ er gitt ved lign.(4.21).
- b) Finn også tilhørende funksjonsverdi for $TR(x)$.
- c) Stemmer de analytiske resultatene de grafiske avlesningene i figur 4.4?

Løsning:

³Vi skal senere i denne boken lære mer om hvordan man finner ekstrempunkt via 1. derivasjonstesten og 2. derivasjonstesten.

- a) Ut fra figur 4.4 ser vi at $TR(x)$ har et maksimumspunkt. Maksimumspunktet til $TR(x)$ inntreffer når den derivate er null:

$\frac{dTR(x)}{dx}$ er flat

$$\frac{dTR(x)}{dx} = 0 \quad \text{flat} \quad (4.23)$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dx}(-1.15x^2 + 2050x - 85000) = 0 \quad (4.24)$$

$\Downarrow$

$$-1.15 \cdot 2x^{2-1} + 2050 \cdot 1x^{1-1} + 0 = 0 \quad (\text{«hovedregelen»}) \quad (4.25)$$

$\Downarrow$

$$-2.3x + 2050 = 0 \quad (4.26)$$

$\Downarrow$

$$-2.3x = -2050 \quad / \cdot \frac{1}{-2.3} \quad (4.27)$$

$\Downarrow$

$$\frac{-2.3x}{-2.3} = -\frac{2050}{-2.3} \quad \text{kansellering} \quad (4.28)$$

$\Downarrow$

$$x = 891.3 \quad (4.29)$$

- b) Tilhørende funksjonsverdi for $TR(x)$:

$$TR(891.3) = (-1.15891.3^2 + 2050 \cdot 891.3 - 85000) \text{ NOK} = 828587 \text{ NOK} \quad (4.30)$$

- c) Ja, de grafiske avlesningene i figur 4.4

$$x = 900 \text{ iPhoner} \quad \text{og} \quad TR(900) \approx 830000 \text{ NOK} \quad (4.31)$$

stemmer bra med de analytiske resultatene

$$x = 891.3 \text{ iPhoner} \quad \text{og} \quad TR(891.3) \approx 828587 \text{ NOK} \quad (4.32)$$

- (K) For å være sikre på at vi har med et maksimumspunkt å gjøre så må vi utføre 2. derivasjonstesten. Den testen skal vi lære mer om senere, i kapittel 4.3.3.
- (K) Men siden vi her har en figur 4.4 som viser at $TK(x)$ har et maksimumspunkt i vårt tilfelle, så er det i orden å si at vi har et maksimumspunkt uten å gjennomføre 2. derivasjonstesten.

■

■ Eksempel 4.3 — Derivasjon , EOQ-formelen

Innen logistikk og lagerstyring lærer man at det koster penger å ha varer på lager. Man har blant annet lager- og bestillingskostander.

La $c(x)$ være den totale lager- og bestillingskostanden per år gitt ved:

$$c(x) = dc + \underbrace{\frac{x}{2}h}_{\text{lagerkost.}} + \underbrace{\frac{d}{x}s}_{\text{ordre.kost.}} \quad (4.33)$$

hvor ⁴

$$d = \text{etterspørsel per år} \quad (\text{«demand»}) \quad (4.34)$$

$$c = \text{innkjøpspris per enhet} \quad (4.35)$$

$$x = \text{ordrestørrelse} \quad (\text{«quantity»}) \quad (4.36)$$

$$h = ic = \text{lagerkostnader per enhet per år} \quad (4.37)$$

$$i = \text{lagerrente} \quad (4.38)$$

$$s = \text{ordrekostnad, dvs. kostnad per ordre} \quad (4.39)$$

Leddene i lign.(4.33) har en direkte økonomisk tolkning:

$$dc = \text{kostnad forbundet med etterspørsel per år} \quad (4.40)$$

$$\frac{x}{2}h = \text{gjennomsnittlig lagerkostnader per år} \quad (4.41)$$

$$\frac{d}{x}s = \text{ordrekostnader per år} \quad (4.42)$$

Ⓚ Legg merke til at gjennomsnittlig lagerkostnad per år $\frac{x}{2}h$ øker med økende ordrestørrelse x .

Ⓚ Men ordrekostnaden per år $\frac{d}{x}s$ minker med økende ordrestørrelse x .

Anta at du er innkjøpsansvarlig hos en bedrift hvor du skal gjøre innkjøp av metall for noen spesialkomponenter.

La oss anta at prisen på metallet du skal kjøpe er 29 NOK/kg og at bedriften trenger 730 kg/år. Lagerrenten er 15% og kostnaden per ordre er 450 NOK:

$$d = 730 \text{ kg/år} \quad (4.43)$$

$$c = 29 \text{ NOK/kg} \quad (4.44)$$

$$i = 15\% \quad (4.45)$$

$$s = 450 \text{ NOK} \quad (4.46)$$

⁴Her er: x = variabel og de andre størrelsene er parametre.



Figur 4.5: Metall.

- a)** Tegn den totale kostnaden $c(x)$ fra lign.(4.33) for intervallet $100 \leq x \leq 1200$ i et koordinat-system.
- b)** i) Hvor mange kg metall bør bedriften bestille for å minimere den totale kostnaden $c(x)$ per år? Løs oppgaven *grafisk*.
 ii) Hva er den tilhørende totale lagerkostnaden per år for den aktuelle bedriften? Løs oppgaven *grafisk*.
- c)** Vis at det antall kg metall som bedriften må bestille for å *minimere* den totale årlige kostnaden $c(x)$, inntreffer når:

$$\frac{x}{2}h = \frac{d}{x}s \quad (4.47)$$

- d)** Hva betyr lign.(4.47) i økonomisk sammenheng? Har kostnaden dc noen betydning for dette optimum? Begrunn svaret.
- e)** Vis at lign.(4.47) er *den samme som* den velkjente «*EOQ*»-formelen («*economic order quantity*») i lagerstyring:

$$x^* = \sqrt{\frac{2ds}{h}} \quad (4.48)$$

- f)** Løs oppgave **b** ved *regning*.
 Svarene skal selvfølgelig stemme overens. Gjør de det?

Løsning:

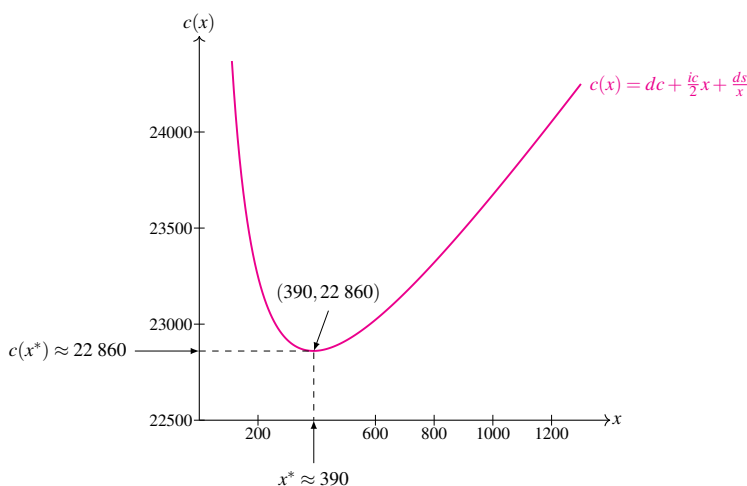
- a) Når man skal plote en funksjon, lag en *verditabell*:

x	100	200	300	400	500	600
$c(x)$	24 673	23 248	22 918	22 861	22 915	23 023

Tabell 4.1: Verditabell for kostnaden $c(x)$.

x	700	800	900	1000	1100	1200
$c(x)$	23 162	23 321	23 493	23 674	23 861	24 054

Tabell 4.2: Fortsettelse verditabell for kostnaden $c(x)$.



Figur 4.6: Total kostnad $c(x)$ per år.

- b) i) Fra figuren ser vi at den minste kostnaden $c(x)$ per år oppnås ved bestilling av $x^* \approx 390$ kg metall per gang.
 ii) Fra figuren ser vi at den minste kostnaden $c(x)$ per år er $c(x^*) \approx 22860$ NOK. ⁵
- c) *Minimum* av total kostnad $c(x)$ inntreffer når stigningstallet = 0:

$$\text{stigningstallet til } c(x) = 0 \quad (4.49)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{dc(x)}{dx} = 0 \quad (4.50)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{d}{dx} \left(dc + \frac{x}{2}h + \frac{d}{x}s \right) = 0 \quad (4.51)$$

⁵Når man bare leser av grafen så er det ikke så lett å få akkurat rett svar pga. avlesningsfeil. Men det er tilstrekkelig at avlesningen er i nærheten av det riktige svaret.

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left(dc + \frac{x}{2}h + dx^{-1}s \right) = 0 \quad \text{(kjelleromskrivning)} \quad (4.52)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{h}{2} + d(-1)x^{-1-1}s = 0 \quad \text{ («hovedregelen»)} \quad (4.53)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{h}{2} - \frac{d}{x^2}s = 0 \quad \quad \quad / + \frac{d}{x^2} \quad (4.54)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{h}{2} = \frac{d}{x^2}s \quad \quad \quad / \cdot x \quad (4.55)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x}{2}h = \frac{d}{x}s, \quad \text{q.e.d.} \quad (4.56)$$

- d)** Lagerkostnaden er $xh/2$ og ordrekostnaden er ds/x . Lign.(4.56) betyr da at totalkostnaden er minst når lagerkostnaden og ordekostnaden er like. Siden

$$\frac{d dc}{dx} = 0 \quad (4.57)$$

så påvirker ikke kostnaden dc minimum i lign.(4.56).

- e)** Ut fra lign.(4.56) kan vi løse ut x alene:

$$\frac{x}{2}h = \frac{d}{x}s \quad \quad \quad / \cdot x \quad (4.58)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{2}h = ds \quad \quad \quad / \cdot \frac{2}{h} \quad (4.59)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = \frac{2ds}{h} \quad \quad \quad / \sqrt{\cdot} \quad (4.60)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^* = \sqrt{\frac{2ds}{h}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (x^* > 0 \quad \text{så velger positiv } \sqrt{\cdot}) \quad (4.61)$$

hvor $h = ic$ og hvor notasjonen x^* er introdusert for optimal x .⁶

⁶Noen bruker også notasjonen:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2ds}{h}} \quad (4.62)$$

f) Den minste kostnaden $c(x^*)$ per år oppnås ved bestilling av:

$$x^* = \sqrt{\frac{2ds}{ic}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 730 \cdot 450}{0.15 \cdot 29}} = 388.63 \approx 389 \quad (4.63)$$

x^* innsatt i lign.(4.33): (bruker at $h = ic$)

$$c(x^*) = d \cdot c + \frac{x^*}{2} ic + \frac{d}{x^*} s \quad (4.64)$$

$$= \left(730 \cdot 29 + \frac{388.63}{2} 0.15 \cdot 29 + \frac{730}{388.63} \cdot 450 \right) \text{ NOK} \quad (4.65)$$

$$= 22\,860.55 \text{ NOK} \quad (4.66)$$

Ja, den *grafiske* løsningen, se figur 4.6, og den *analytiske* løsningen gir tilnærmet samme svar, slik som det skal. ■

■ Eksempel 4.4 — Derivasjon, priselastisitet

Innen blant annet økonomi lærer man om elastisitet. Det finnes mange typer elastisiteter, f.eks. *priselastisitet*.

Priselastisitet $E_p(x)$ er definert ved:

$$E_p(x) = \frac{dx(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \quad (4.67)$$

hvor

$$p = \text{pris} \quad (4.68)$$

$$x(p) = \text{en størrelse som varierer med prisen} \quad (4.69)$$

$$\frac{dx(p)}{dp} = \text{den deriverte av } x(p) \text{ med hensyn til prisen } p \quad (4.70)$$

Størrelsen $x(p)$ kan f.eks. være *etterspørselen* av en vare.

Den momentane priselastisiteten i lign.(4.67) kan *tolkes* som det momentane forholdet mellom endringen i etterspørsel og endringen i pris:

$$E_p(x) = \frac{\% \text{-vis endring i etterspørsel}}{\% \text{-vis endring i pris}} \quad (4.71)$$

Flybussen A/S har leid inn konsulenter og funnet ut at sammenheng mellom etterspørsel av flybussbilletter og pris p er:

$$x(p) = \frac{c}{p^{1.3}} \quad (4.72)$$

hvor c = en konstant. Anta at $c = 35 \text{ NOK}^{1.3}$.



Figur 4.7: Flybussen i Molde.

- a) Finn priselastisiteten $E_p(x)$.
- b) Tolk resultatet i oppgave a.
- c) Hvor mye vil etterspørselen av bussreiser endre seg med dersom prisen øker med 2.5%?
- d) Spiller konstanten $c = 35$ NOK noen rolle i denne oppgaven?

Løsning:

- a) Priselastisiteten $E_p(x)$ finnes via lign.(4.67):

$$E_p(x) = \frac{dx(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \quad (4.73)$$

$$= \frac{d}{dp} \left(\frac{c}{p^{1.3}} \right) \cdot \frac{p}{\frac{c}{p^{1.3}}} \quad (4.74)$$

$$= \frac{d}{dp} (c \cdot p^{-1.3}) \cdot \frac{p \cdot p^{1.3}}{c} \quad \text{kjelleromskrivning} \quad (4.75)$$

$$= (c \cdot (-1.3) \cdot p^{-1.3-1}) \cdot \frac{p^{1+1.3}}{c} \quad (4.76)$$

$$= -1.3 \quad (4.77)$$

- b) Siden

$$E_p(x) = \frac{\% \text{-vis endring i etterspørsel}}{\% \text{-vis endring i pris}} \quad (4.78)$$

så ser vi at:

$$\% \text{-vis endring i etterspørsel} = E_p(x) \cdot \% \text{-vis endring i pris} \quad (4.79)$$

$$= (-1.3) \cdot \% \text{-vis endring i pris} \quad (4.80)$$

som gir tolkningen:

Dersom billettprisen p øker med 1% så vil etterspørselen etter bussbilletter *minke* med 1.3%.

c) Siden

$$E_p(x) = \frac{\% \text{-vis endring i etterspørsel}}{\% \text{-vis endring i pris}} \quad (4.81)$$

så ser vi at:

$$\% \text{-vis endring i etterspørsel} = E_p(x) \cdot \overbrace{\% \text{-vis endring i pris}}^{2.5\%} \quad (4.82)$$

$$= (-1.3) \cdot 2.5\% \quad (4.83)$$

$$= -3.25\% \quad (4.84)$$

d) I oppgave a ser vi at konstanten c kansellerer. Priselastisiteten er altså uavhengig av c .

Dermed innser vi at c ikke spiller noen rolle i denne oppgaven. ■

4.2.2 Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner

Derivasjon av et produkt og derivasjon av en brøk har egne regneregler. For å bevise disse regnereglene så tar man utgangspunktet i definisjonen av den deiverte og tar en grenseverdi. I denne boken hopper vi over bevisene. Det viktige for oss er å forstå resultatene og kunne bruke reglene i rette sammenhenger. Det skal vi trene på.

Setning 4.2.4 — Derivasjon av et produkt

La $u(x)$ og $v(x)$ være deriverbare funksjoner. For produktet

$$f(x) = uv \quad (4.85)$$

gjelder følgende derivasjonsregel:

$$f'(x) = u'v + uv' \quad (4.86)$$

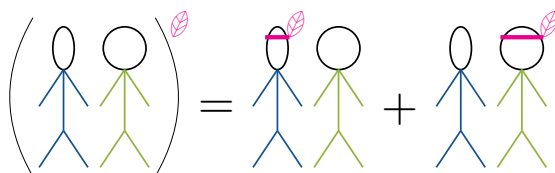
Setning 4.2.5 — Derivasjon av en brøk

La $u(x)$ og $v(x)$ være deriverbare funksjoner. For brøken

$$f(x) = \frac{u}{v} \quad (4.87)$$

gjelder følgende derivasjonsregel:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (4.88)$$



Figur 4.8: «Indianerfjær»-huskereglene for derivasjon av et produkt.

■ Eksempel 4.5 — Derivasjon av et produkt

Gitt funksjonen:

$$f(x) = (4x - 3)(3x + 2) \quad (4.89)$$

- a) Deriver $f(x)$ via produktregelen.
- b) Deriver $f(x)$ ved først å multiplisere ut parentesene.

Løsning:

- a) Deriver $f(x)$ via *produktregelen*:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \left(\overbrace{(4x-3)}^u \overbrace{(3x+2)}^v \right)' \quad (4.90)$$

$$f'(x) = \left(\overbrace{(4x-3)}^u \overbrace{(3x+2)}^v \right)' \quad (4.91)$$

$$= (uv)' \quad (4.92)$$

$$= u'v + uv' \quad (\text{produktregelen}) \quad (4.93)$$

$$= (4x - 3)'(3x + 2) + (4x - 3)(3x + 2)' \quad (4.94)$$

$$= 4(3x + 2) + (4x - 3)3 \quad (4.95)$$

$$= 12x + 8 + 12x - 9 \quad (4.96)$$

$$= 24x - 1 \quad (4.97)$$

- b) *Multiplisere ut parentesene*:

$$(x) = (4x - 3)(3x + 2) \quad (4.98)$$

$$= \frac{d}{dx} 4x \cdot 3x + 4x \cdot 2 - 3 \cdot 3x - 3 \cdot 2 \quad (4.99)$$

$$= 12x^2 + 8x - 9x - 6 \quad (4.100)$$

$$= 12x^2 - x - 6 \quad (4.101)$$

Nå kan man derivere via regneregelen i lign.(4.35):

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (4.102)$$

$$= \frac{d}{dx} (12x^2 - x - 6) \quad (4.103)$$

$$= 12 \cdot 2x^{2-1} - 1 \quad (4.104)$$

$$= 24x - 1 \quad (4.105)$$

altså samme svar som i oppgave a, lign.(4.97).

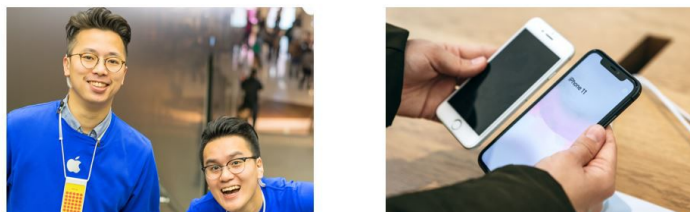
■

■ Eksempel 4.6 — Deriverte

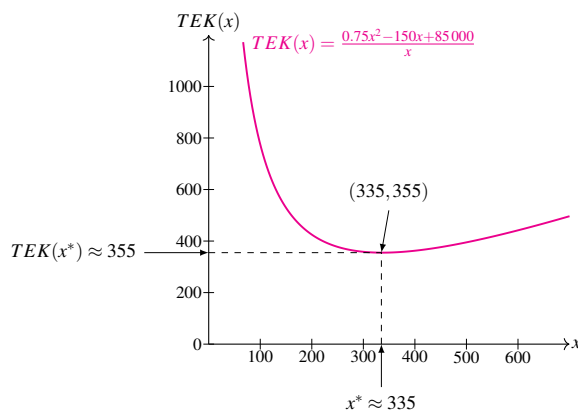
La oss se på eksempelet fra side 88. I dette eksemplet var den *totale enhetskostnaden* modellert ved: (se lign.(3.83))

$$TEK(x) = \frac{TK(x)}{x} = \frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \quad (4.106)$$

hvor x er antall solgte iPhoneer.



Figur 4.9: iPhone.



Figur 4.10: Total enhetskostnad $TEK(x)$, se lign.(4.106).

- a) Finn verdien til x i minimumspunktet for $TEK(x)$ når enhetskostnaden er gitt ved lign.(4.106).

- b)** La oss sammenligne x -verdien ved minimum av $TEK(x)$ vi har funnet i dette eksemplet med x -verdien for maksimum av totalt resultat $TR(x)$ fra det foregående eksemplet.
- c)** Er antall iPhoner som må selges for å maksimere $TR(x)$ og minimere $TEK(x)$ sammenfallende? Begrunn svaret.

Løsning:

- a)** Funksjonen $TEK(x)$ gitt ved lign.(4.106) er plottet i figur 4.10. Fra denne figuren ser vi at $TEK(x)$ har et minimumspunkt.⁷ Minimumspunktet til $TEK(x)$ inntreffer når den deriverte er null:

$$\frac{dTEK(x)}{dx} = 0 \quad \text{deriverte lik null} \quad (4.107)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \right) = 0 \quad (4.108)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{0.75x^2}{x} - \frac{150x}{x} + \frac{85\,000}{x} \right) = 0 \quad (4.109)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx} (0.75x - 150 + 85\,000x^{-1}) = 0 \quad \text{kjelleromskrivning} \quad (4.110)$$

$$\Downarrow$$

$$0.75 \cdot 1x^{1-1} - 0 + 85\,000 \cdot (-1)x^{-1-1} = 0 \quad \text{hovedregel} \quad (4.111)$$

$$\Downarrow$$

$$0.75 - 85\,000x^{-2} = 0 \quad (4.112)$$

hvor vi i lign.(4.110) har gjort «kjelleromskrivningen»:

$$\frac{85\,000}{x} = 85\,000x^{-1} \quad \text{kjelleromskrivning} \quad (4.113)$$

fordi det da er lettere å bruke derivasjonsregelen $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.⁸

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{hovedregel}}$

Løser med hensyn på x alene:

$$0.75 - 85\,000x^{-2} = 0 \quad \text{deriverte lik null} \quad (4.114)$$

$$\Downarrow$$

$$0.75 = 85\,000x^{-2} \quad (4.115)$$

⁷Vi skal senere i kurset lære mer om 2. derivasjonstesten som sier noe om et ekstremalpunkt er maksimalpunkt eller minimalpunkt. Men siden vi har en figur som i dette eksemplet som eksplisitt viser at vi har et minimumspunkt, så er det tilstrekkelig her.

⁸Man kan også derivere $TEK(x)$ ved hjelp av derivasjon av en brøk, se seksjon 4.2.2.

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ 0.75 &= \frac{85\,000}{x^2} && / \cdot x^2 \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ 0.75x^2 &= \frac{85\,000}{x^2} x^2 && / \cdot \frac{1}{0.75} \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ x^2 &= \frac{85\,000}{0.75} \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{\frac{85\,000}{0.75}} && \sqrt{\cdot} \end{aligned} \quad (4.119)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ x^* &= \sqrt{\frac{85\,000}{0.75}} \end{aligned} \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ x^* &= 336.7 \end{aligned} \quad (4.121)$$

For å minimere enhetskostanden $TEK(x)$ må det selges 337 iPhoneer.

b) Fra oppgave **a** på forrige side samt eksempelet på side 102 ser vi at:

$$TR_{max} \xrightarrow{\text{lign. (4.29)}} x = 891.3 \text{ iPhoneer} \quad (4.122)$$

$$TEK_{min} \xrightarrow{\text{lign. (4.121)}} x = 336.7 \text{ iPhoneer} \quad (4.123)$$

Altså: For å maksimere *resultatet* $TR(x)$ må det selges $x = 891$ iPhoneer. For å minimere *enhetskostnaden* $TEK(x)$ må det selges $x = 337$ iPhoneer.

c) Konklusjon:

maksimalt resultat $TR(x)$ og minimal enhetskostnad $TEK(x)$
er *ikke* sammenfallende

dvs. de inntreffer *ikke* for samme verdi av x .

■

■ Eksempel 4.7 — Derivasjon

La oss igjen se på den totale enhetskostnad $TEK(x)$ fra side 113, lign.(4.106):

$$TEK(x) = \frac{TK(x)}{x} = \underbrace{\frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x}}_{\text{form 1}} = \underbrace{0.75x - 150 + \frac{85\,000}{x}}_{\text{form 2}} \quad (4.124)$$

På side 114 deriverte vi denne ligningen ved å bruke «form 2». Det gav oss svaret i lign.(4.112).

Bruk nå «form 1» til å finne den deriverte av $TEK(x)$ mhp. x , dvs. finn $\frac{dTEK(x)}{dx}$.

Løsning:

Deriverer $TEK(x)$ mhp. x :

$$TEK'(x) = \frac{dTEK(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \right) \quad (4.125)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) \quad (4.126)$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (4.127)$$

$$= \frac{(0.75x^2 - 150x + 85\,000)'x - (0.75x^2 - 150x + 85\,000)x'}{x^2} \quad (4.128)$$

$$= \frac{(0.75 \cdot 2x^{2-1} - 150)x - (0.75x^2 - 150x + 85\,000) \cdot 1}{x^2} \quad (4.129)$$

$$TEK'(x) = \frac{dTEK(x)}{dx} = \frac{(0.75 \cdot 2x^{2-1} - 150)x - (0.75x^2 - 150x + 85\,000) \cdot 1}{x^2} \quad (4.130)$$

$$= \frac{1.5x^2 - 150x - 0.75x^2 + 150x - 85\,000}{x^2} \quad (4.131)$$

$$= \frac{0.75x^2 - 85\,000}{x^2} \quad (4.132)$$

$$= 0.75 - \frac{85\,000}{x^2} \quad (4.133)$$

altså samme svar som lign.(4.112) på side 114, selvfølgelig.

Konklusjon:

I dette eksemplet kan man bruke derivasjon av et produkt eller derivasjon av en brøk. Begge gir samme svar.

Men muligens er derivasjon av et produkt mest hensiktsmessig å bruke her siden det gir litt mindre regningen.

■

4.2.3 Kjernerregelen

Setning 4.2.6 — Kjernerregelen

Dersom vi har en sammensatt funksjon

$$f(x) = g(u(x)) \quad (g(x) \text{ ytre funksjon}) \quad (4.134)$$

hvor

$$u = u(x) \quad \overbrace{(u(x) \text{ indre funksjon})}^{\text{kjerne}} \quad (4.135)$$

er en funksjon av x , så er den deriverte av $f(x)$ gitt ved:

$$f'(x) = g'(u) u' \quad (4.136)$$

hvor $u(x)$ er kjernefunksjonen.

Ⓚ En alternativ måte å skrive denne ligningen på er: ($u = u(x)$ er kjernefunksjonen)

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(u)}{du} \frac{du}{dx} \quad (4.137)$$

■ Eksempel 4.8 — Kjernerregelen

Gitt funksjonen:

$$f(x) = (x^2 + 2)^{10} \quad (4.138)$$

Deriver $f(x)$, dvs. finn $f'(x)$.

Løsning:

Funksjonen $f(x)$ i lign.(4.138):

$$f(x) = (x^2 + 2)^{10} \quad (4.139)$$

hvor

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \quad (4.140)$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjerne)} \quad (4.141)$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(u(x)) \quad (4.142)$$

hvor

$$g(u) = u^{10} \quad (\text{ytre funksjon}) \quad (4.143)$$

og

$$u(x) = x^2 + 2 \quad \underbrace{(\text{indre funksjon})}_{\text{kjerne}} \quad (4.144)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av *kjerneregelen*:

$$f'(x) = (\text{ytre})'(\text{indre})' \quad (4.145)$$

$$= g'(u)u' \quad (4.146)$$

$$= (u^{10})'(x^2 + 2)' \quad (4.147)$$

$$= 10u^{10-1} \cdot 2x \quad (4.148)$$

$$= 10(x^2 + 2)^9 2x \quad (4.149)$$

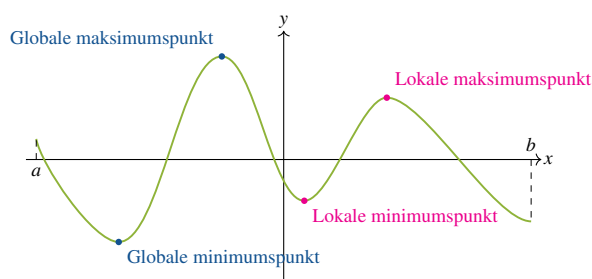
$$= 20x(x^2 + 2)^9 \quad (4.150)$$

■

4.3 Globale og lokale ekstremalpunkt

Et ekstremalpunkt er et minimums- eller maksimumspunkt. Det er to typer ekstremalpunkt:

1. Lokale ekstremalpunkt.
2. Globale ekstremalpunkt.



Figur 4.11: Globale og lokale ekstremalpunkter. Her er $x \in [a, b]$.

Definisjon 4.3.1 — Lokale ekstremalpunkt

Et punkt x er et lokalt minimumspunkt x dersom det finnes et $\varepsilon > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x+d) \quad (4.151)$$

for alle $d \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Et punkt x er et lokalt maksimumspunkt x dersom det finnes et $\varepsilon > 0$ slik at

$$f(x) \geq f(x+d) \quad (4.152)$$

for alle $d \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Definisjon 4.3.2 — Globale ekstremalpunkt

Et punkt x er et globalt **minimumspunkt** x dersom

$$f(x) \leq f(x') \quad (4.153)$$

for alle x' .

Et punkt x er et globalt **maksimumspunkt** x dersom

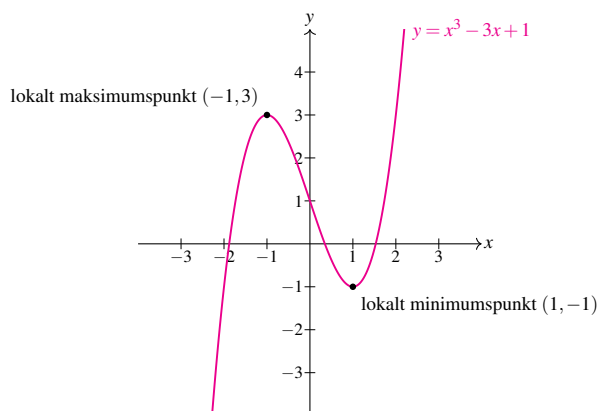
$$f(x) \geq f(x') \quad (4.154)$$

for alle x' .

■ Eksempel 4.9 — Derivasjon, lokale ekstremalpunkt, 3. gradsligning

La oss se 3. gradsligningen:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7 \quad (4.155)$$



Figur 4.12: Kun lokale ekstremalpunkter. ($x \in \mathbb{R}$)

a) Regn ut $f'(x)$.

b) Tegn fortegnsskjema for $f'(x)$.

Tegn grafen $f(x)$ og marker på figuren når $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$.

Marker på figuren *ekstremalpunktene*. Er de *lokale* eller *globale*?

Løsning:

a) Første deriverte: (*hovedregelen* for derivasjon)

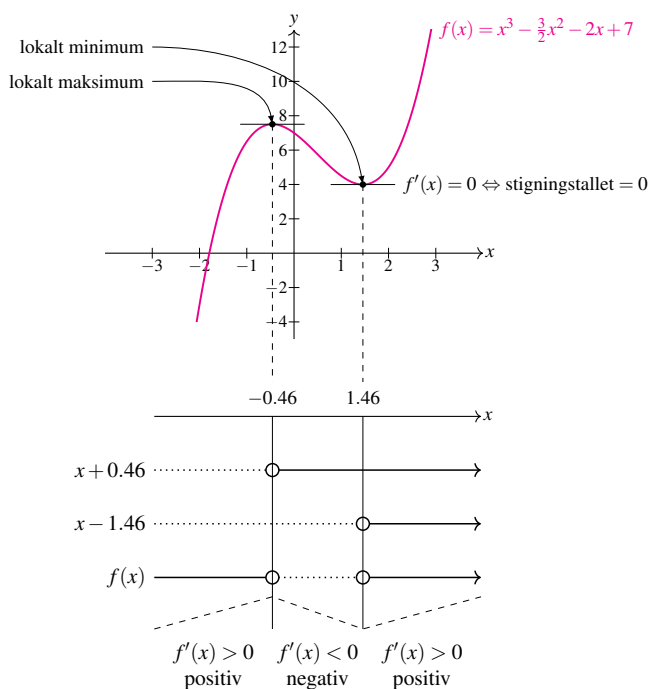
$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7 \right) = 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 2 = 3x^2 - 3x - 2 \quad (4.156)$$

b) Første deriverte $f'(x)$ er en 2. gradsligning som kan *faktoriseres*:

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 3x - 2 = 3 \left(x^2 - x - \frac{2}{3} \right) = 3(x + 0.46)(x - 1.46) \quad (4.157)$$

siden nullpunktene kan finnes ved å bruke *ABC*-formelen i lign.(1.140), $x_{1,2} = 1/2 \mp \sqrt{33}/6$, hvor vi gjør tilnærmelsene: $x_1 = -0.46$ og $x_2 = 1.46$.

Etter denne faktoriseringen kan man lage fortegnsskjema og markere på figuren når $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$:



Figur 4.13: Funksjonen $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7$ og tilhørende fortegnsskjema for $f'(x)$.

■

4.3.1 Ekstremalpunkt eller ikke?

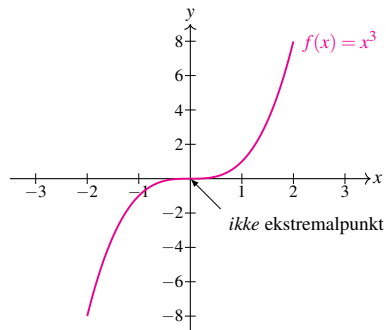
Spørsmål: Er det alltid slik at når man setter $\frac{df(x)}{dx} = 0$ så finner vi et ekstremalpunkt?

Svar: Nei, $\frac{df(x)}{dx} = 0$ representerer *ikke* alltid et ekstremalpunkt.

■ Eksempel 4.10 Funksjonen

$$f(x) = x^3 \quad (4.158)$$

har $\frac{df(x)}{dx} = 0$ for $x = 0$, men $x = 0$ er *ikke* et ekstremalpunkt for funksjonen.



Figur 4.14: Funksjonen $f(x) = x^3$.

4.3.2 Lokale ekstremalpunkt: 1. derivasjonstesten

Fra eksemplet ovenfor så vi at den deriverte er null, dvs. $\frac{df(x)}{dx} = 0$, *ikke* er nok til å garantere et lokalt ekstremalpunkt:

$$\frac{df(c)}{dx} = 0 \quad \text{ikke alltid} \Rightarrow \text{lokalt ekstremalpunkt} \quad x = c \quad (4.159)$$

Men omvendt er derimot alltid tilfelle: Dersom vi har et lokalt ekstremalpunkt så vet vi med sikkerhet at $\frac{df(x)}{dx} = 0$:

$$\text{lokalt ekstremalpunkt} \quad x = c \quad \text{alltid} \Rightarrow \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad (4.160)$$

Den siste implikasjonen, dvs. lign.(4.160), formulerer vi i en egen setning – 1. derivasjonstesten:

Setning 4.3.1 — 1. derivasjonstesten, lokalt ekstremalpunkt

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt ekstremalpunkt} \quad x = c \quad \Rightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad (4.161)$$

Spørsmål: Hva betyr 1. derivasjonstesten i praksis?

Svar: Jo, når vi skal finne lokale ekstremalpunkt så setter vi først

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (4.162)$$

og løser denne ligningen med hensyn på x alene, altså finner alle x 'ene.

Det er ikke sikkert disse x 'ene representerer ekstremalpunkter, men de er mulige *kandidater*.

For å sjekke om disse kandidatene er faktisk ekstremalpunkter så må vi utføre en ny test, nemlig 2. derivasjonstesten.

Altså:

1. Finn mulige *kandidater* til ekstremalpunkter.

$$\left(\begin{array}{l} \text{1. derivasjonstesten} \\ \frac{df(x)}{dx} = 0 \end{array} \right)$$

2. *Sjekk* om kandidatene faktisk er et ekstremalpunkt eller ikke.

$$\left(\begin{array}{l} \text{2. derivasjonstesten} \\ \frac{d^2f(x)}{dx^2} \text{ positiv eller negativ} \end{array} \right)$$

4.3.3 Lokale ekstremalpunkt: 2. derivasjonstesten

For å *sjekke* om kandidater ekstremalpunkt er lokale eller ikke så må vi utføre 2. derivasjonstesten.

Setning 4.3.2 — 2. derivasjonstesten, lokalt ekstremalpunkt

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende funksjon.

$$\text{lokalt maksimum} \quad x = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2f(c)}{dx^2} < 0 \quad (\text{negativ}) \quad (4.163)$$

$$\text{lokalt minimum} \quad x = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2f(c)}{dx^2} > 0 \quad (\text{positiv}) \quad (4.164)$$

Det er flere måter å formulere 2. derivasjonstesten på. Formuleringen nedenfor er en alternativ formuleringen:⁹

Setning 4.3.3 — 2. derivasjonstesten, lokalt ekstremalpunkt

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende funksjon.

lokalt maksimum $x = c$



$$\frac{df(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{df(c)}{dx} \quad \text{skifter fortegn fra + til minus -} \quad (4.165)$$

(4.166)

lokalt minimum $x = c$



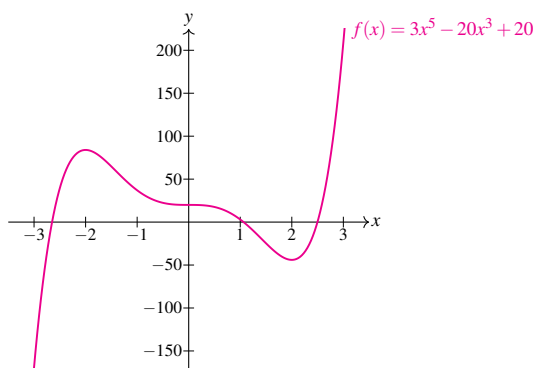
$$\frac{df(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{df(c)}{dx} \quad \text{skifter fortegn fra - til minus +} \quad (4.167)$$

■ **Eksempel 4.11 — 2. derivasjonstesten**

La oss se på følgende 5. gradsfunksjon:

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 20 \quad (4.168)$$

Finn de lokale ekstremalpunktene til $f(x)$.



Figur 4.15: Funksjonen $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 20$.

⁹Setning 4.3.3 er mer fundamental enn setning 4.3.2. Vet du hvorfor?

Løsning:

Finner kandidater til ekstremalpunktene ved å derivere $f(x)$:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (\text{deriverte lik null}) \quad (4.169)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx} (3x^5 - 20x^3 + 20) = 0 \quad (\text{setter inn fra lign. (4.168)}) \quad (4.170)$$

$$\Updownarrow$$

$$3 \cdot 5x^{5-1} - 20 \cdot 3x^{3-1} + 0 = 0 \quad (\text{hovedregelen}) \quad (4.171)$$

$$\Updownarrow$$

$$15x^4 - 60x^2 = 0 \quad (4.172)$$

$$\Updownarrow$$

$$15x^2 (x^2 - 4) = 0 \quad (\text{faktorerer}) \quad (4.173)$$

$$\Updownarrow$$

$$15x^2 (x - 2) (x + 2) = 0 \quad (\text{faktorisere mer, konjugatsetningen brukes}) \quad (4.174)$$

Det er altså 3 løsninger av ligningen $\frac{df(x)}{dx} = 0$:

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 2 \quad (4.175)$$

For å sjekke hvilke(n) av disse *kandidatene* som representerer et lokalt ekstrempunkt så må vi se på den 2. deriverte:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df(x)}{dx} \quad (4.176)$$

$$= \frac{d}{dx} (15x^4 - 60x^2) \quad (4.177)$$

$$= 15 \cdot 4x^{4-1} - 60 \cdot 2x^{2-1} \quad (4.178)$$

$$= 60x^3 - 120x \quad (4.179)$$

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\frac{d^2 f(-2)}{dx^2} = 60 \cdot (-2)^3 - 120 \cdot (-2) = -240 \quad (\text{negativt}) \quad (4.180)$$

$\Rightarrow x = -2$ er et lokalt maksimum

$$\frac{d^2 f(0)}{dx^2} = 60 \cdot 0^3 - 120 \cdot 0 = 0 \quad (\text{verken negativt eller positivt}) \quad (4.181)$$

$\Rightarrow x = 0$ er verken et lokalt maksimum eller lokalt minimum

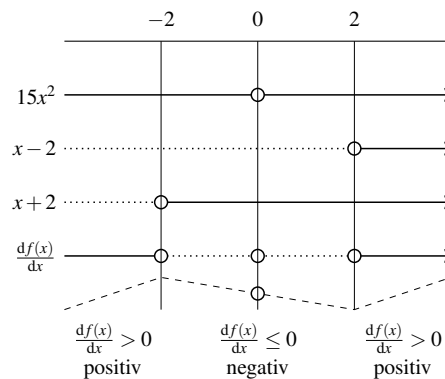
$$\frac{d^2 f(2)}{dx^2} = 60 \cdot 2^3 - 120 \cdot 2 = 240 \quad (\text{positivt}) \quad (4.182)$$

$\Rightarrow x = 2$ er et lokalt minimum

(4.183)

Man kunne også satt opp fortegnsskjema for $\frac{df(x)}{dx}$, se figur L4.6, og brukt den alternative formlieringen av 2. derivasjonstesten, men da må man faktorisere først:

$$\frac{df(x)}{dx} = 15^4 - 60x^2 = 15x^2(x^2 - 4) = \underbrace{15x^2(x-2)(x+2)}_{\text{faktorisert form}} \quad (4.184)$$



Figur 4.16: Fortegnsskjema for $\frac{df(x)}{dx} = 15x^4 - 60x^2 = 15x^2(x-2)(x+2)$.

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ skifter fra + til -} \Rightarrow x = -2 \text{ lokalt maksimum} \quad (4.185)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ skifter fra - til +} \Rightarrow x = 2 \text{ lokalt minimum} \quad (4.186)$$

■

4.3.4 Globale ekstremalpunkt

Å finne globale ekstremalpunkter er *generelt svært vanskelig*.

Det finnes ingen generell måte å bestemme globale ekstremalpunkter på annet enn å tegne grafen og bruke «stirremetoden».

Men det finnes en klasse funksjoner hvor vi faktisk *kan* bestemme globale ekstremalpunkter. Det gjelder for *konvekse* og *konkave* funksjoner.

I dette kapitlet skal vi *definere* hva som menes med konkave og konvekse funksjoner. Deretter skal vi preseneter noen læresetningen angående globale ekstremalpunkter for konkave og konvekse funksjoner.

Definisjon 4.3.3 — Konveks

Gitt to punkter x_1 og x_2 . Korden (linjen) mellom x_1 og x_2 er da definert ved:

$$ax_1 + (1-a)x_2 \quad (4.187)$$

hvor $0 \leq a \leq 1$. En funksjon er *konveks* dersom

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) \leq af(x_1) + (1-a)f(x_2) \quad (4.188)$$

Definisjon 4.3.4 — Konkav

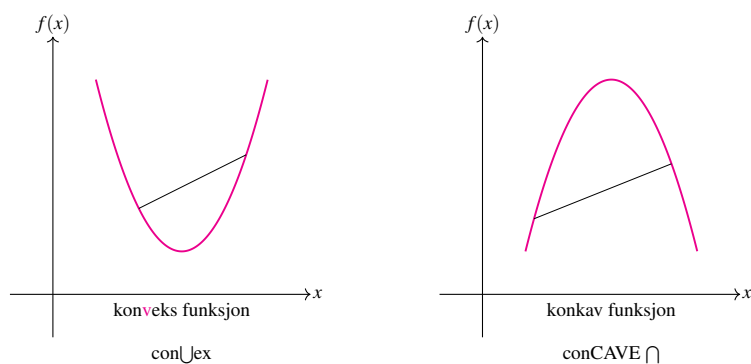
Gitt to punkter x_1 og x_2 . Korden (linjen) mellom x_1 og x_2 er da definert ved:

$$ax_1 + (1-a)x_2 \quad (4.189)$$

hvor $0 \leq a \leq 1$. En funksjon er *konkav* dersom

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) \geq af(x_1) + (1-a)f(x_2) \quad (4.190)$$

Definisjonene ovenfor er litt tekniske og vanskelige å forstå. Derfor formulerer vi dem med ord sammen med en figur:



Figur 4.17: En *konveks* og en *konkav* funksjon.

Definisjon 4.3.5 — konveks, med ord

Funksjonen $f(x)$ kalles *konveks* (på et intervall) dersom korden mellom to vilkårlige punkter på grafen alltid ligger på eller **over** grafen til $f(x)$.

Definisjon 4.3.6 — konkav, med ord

Funksjonen $f(x)$ kalles *konkav* (på et intervall) dersom korden mellom to vilkårlige punkter på grafen alltid ligger på eller **under** grafen til $f(x)$.

Setning 4.3.4 — Globalt minimum

Anta at $f(x)$ er en *konveks* funksjon.

Dersom $x = c$ er et *lokalt minimum* ($\frac{df(x)}{dx} = 0$) så er $x = c$ også et *globalt minimum*.

Anta at $f(x)$ er en *konkav* funksjon.

Dersom $x = c$ er et *lokalt maksimum* ($\frac{df(x)}{dx} = 0$) så er $x = c$ også et *globalt maksimum*.

Setning 4.3.5 — Globalt minimum

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0 \quad (\text{positiv eller null}) \quad \text{for alle } x \Rightarrow f(x) \text{ er konveks} \quad (4.191)$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0 \quad (\text{negativ eller null}) \quad \text{for alle } x \Rightarrow f(x) \text{ er konkav} \quad (4.192)$$

■ Eksempel 4.12 — 1. og 2. derivasjonstesten

Gitt funksjonen:

$$f(x) = x^2 - 6 \quad (4.193)$$

Finn eventuelle ekstremalpunkt. Angi hva slags type ekstremalpunkt det er snakk om.

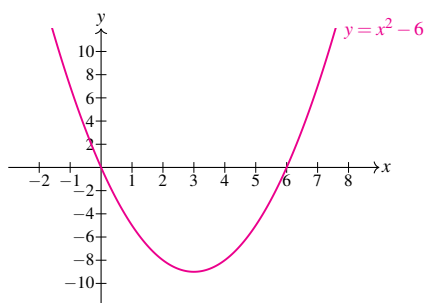
Løsning:

1. derivasjonstesten:

Mulige kandidater til lokale ekstremalpunkt er bestemt av $\frac{df(x)}{dx} = 0$:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (4.194)$$

$\Updownarrow$

Figur 4.18: Funksjonen $f(x) = x^2 - 6x$.

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 6x) = 0 \quad (4.195)$$

$$\Downarrow$$

$$2x - 6 = 0 \quad (4.196)$$

$$\Downarrow$$

$$x = 3 \quad (4.197)$$

som er en *kandidat* til et ekstremalpunkt.

2. derivasjonstesten:

Vi bruker deretter 2. derivasjonstesten til å bestemme *hva slags* ekstremalpunkt det er.

Siden

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 6x) = 2 \quad (\text{positiv}) \quad (4.198)$$

altså den 2. deriverte av $f(x)$ er positiv for $x = 3$. Fra lign.(4.164), dvs. 2. derivasjonstesten, så vet vi at $x = 3$ er et *lokalt minimum*.

Setning 4.3.4 og 4.3.5: (se side 127)

Men $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ er ikke bare positiv for $x = 3$, den er positiv for alle x .

Da vet vi fra setning 2, se lign.(4.191), at $f(x)$ er *konveks*.

Men siden $f(x)$ er *konveks* så vet vi fra setning 1 på side 127, at det lokale minimumet $x = 3$ også er et globalt minimum. ■

5. Eksponential- og logaritmefunksjoner

5.1 Eksponentialfunksjonen

■ Eksempel 5.1 — Motiverende eksempel , renteformelen , årlig kreditering

Anta at vi setter $K(0)$ NOK i banken, dvs. innskudd $K(0)$, ved år 0. Anta videre at renten er r og at renten krediteres én gang i året, ved årets slutt.

Finn et uttrykk for hvor mye kapitalen $K(n)$ er etter n år.



Figur 5.1: Kapitalen øker.

Løsning:

0) Kapital etter 0 år: (kun innskudd)

$$K(0)$$

(5.1)

1) Kapital etter 1 år:

$$K(1) = K(0) + \overbrace{K(0)r}^{\text{rente}} \quad (5.2)$$

$$= K(0) + K(0)r = K(0)(1+r) = K(0)(1+r)^1 \quad (5.3)$$

2) Kapital etter 2 år:

$$K(2) = K(1) + \overbrace{K(1)r}^{\text{rente}} \quad (5.4)$$

$$= K(1) + K(1)r = K(1)(1+r) = K(0)(1+r)(1+r) = K(0)(1+r)^2 \quad (5.5)$$

3) Kapital etter 3 år:

$$K(3) = K(2) + \overbrace{K(2)r}^{\text{rente}} \quad (5.6)$$

$$= K(2) + K(2)r = K(2)(1+r) = K(0)(1+r)^2(1+r) = K(0)(1+r)^3 \quad (5.7)$$

n) Kapital etter n år: ¹

$$K(n) = K(0)(1+r)^n \quad (5.8)$$

Lign.(5.8) kalles ofte «renteformelen»:

$$K(n) = K(0)(1+r)^n \quad (5.9)$$

hvor

$$K(n) = \text{kapitalen etter } n \text{ år (eller } n \text{ terminer)} \quad (5.10)$$

$$K(0) = \text{startkapital, dvs. kapital etter 0 år (eller 0 terminer): nåverdi} \quad (5.11)$$

$$r = \frac{p}{100} = \text{rente med } p\% \text{ per termin} \quad (5.12)$$

$$n = \text{antall år (eller antall terminer)} \quad (5.13)$$

Faktoren $1+r$ i lign.(5.9) kalles *vekstfaktoren*. Hvis vi setter

$$a = 1+r \quad (5.14)$$

så kan vi skrive lign.(5.9) på en mer kompakt form:

$$K(n) = K(0)a^n \quad (5.15)$$

hvor

$$a = 1+r = \text{vekstfaktor} \quad (5.16)$$

$$n = \text{antall år} \quad (5.17)$$

■

■ Eksempel 5.2 — Renteformelen, kontinuerlig kreditering

Dersom banken krediterer innskuddet *kontinuerlig*, dvs. etter en vilkårlig tid t hvor t er et reelt tall $t \in \mathbb{R}$, hva blir da kapitalen $K(t)$?

¹For å vise dette må man bruke induksjon, men detaljene rundt dette tar vi ikke med her.

Løsning:

Generalisering fra renteformelen i lign.(5.9) rett frem:

$$K(t) = K(0) a^t \quad (5.18)$$

hvor

$$a = 1 + r = \text{vekstfaktor} \quad (5.19)$$

$$t = \text{antall år, hvor } t \in \mathbb{R} \quad (5.20)$$

■

Ⓚ Funksjonen $K(t)$ kalles «eksponentialfunksjonen» med grunntall a og eksponent t .²

Definisjon 5.1.1 — Eksponentialfunksjon

Eksponentialfunksjon $f(x)$ er definert ved:

$$f(x) = a^x \quad (5.21)$$

hvor x er eksponenten, $x \in \mathbb{R}$, a er grunntall og $a > 0$.

■ Eksempel 5.3 — Eksponentialfunksjon

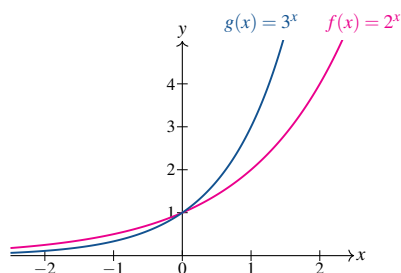
Plott eksponentialfunksjonene for $-2 \leq x \leq 2$:

$$f(x) = 2^x \quad (a = 2) \quad (5.22)$$

$$g(x) = 3^x \quad (a = 3) \quad (5.23)$$

Løsning:

Lag først en *verditabell*. Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:



Figur 5.2: Eksponentialfunksjonene $f(x) = 2^x$ og $g(x) = 3^x$.

■

²Siden funksjonen modellerer eksponentiell vekst kalles grunntallet også gjerne for vekstfaktoren. Andre eksempel på eksponentiell vekst er befolkningsvekst, utbredelse av virus og kjernefysiske reaksjoner.

■ Eksempel 5.4 — eksponentialfunksjon vs kvadratisk funksjon

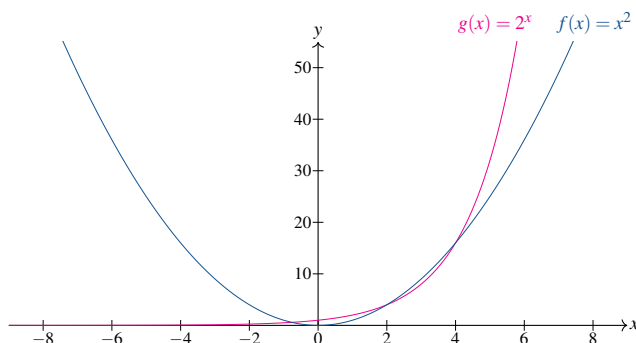
Plott funksjonene for $-8 \leq x \leq 8$:

$$f(x) = 2^x \quad (\text{eksponentialfunksjon}) \quad (5.24)$$

$$g(x) = x^2 \quad (2. \text{ gradsfunksjon}) \quad (5.25)$$

Løsning:

Lag først en *verditabell*. Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:



Figur 5.3: Eksponentialfunksjoenen $f(x) = 2^x$ og 2. gradsfunksjonen $g(x) = x^2$. ■

5.2 Tallet e , Eulers tall

■ Eksempel 5.5 — Renteformelen , årlig kreditering , motiverende eksempel

Anta at vi setter $K(0) = 1$ NOK i banken, dvs. innskudd på 1 krone.

For enkelhets skyld, la oss anta videre at renten er $r = \frac{100\%}{100} = 1$ og at renten krediteres m ganger i året, og da slik at renten justeres til r/m for hver av de m periodene, se figur 5.4.

Hvor mye kapital $K_m(1)$ har vi etter ett år dersom renten krediteres m ganger i løpet av året?

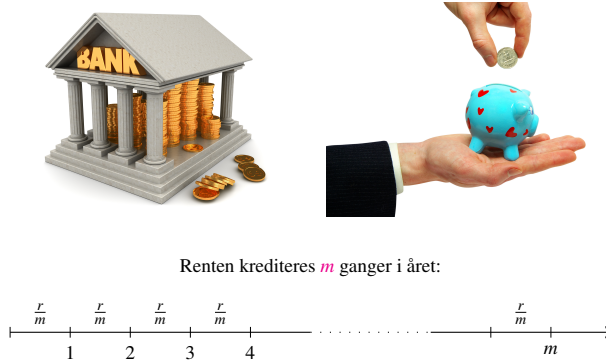
Hva blir kapitalen $K_\infty(1)$ i grensen når $m \rightarrow \infty$?

- i) Renteformelen i lign.(5.8) sier at dersom man setter inn $K(0)$ i banken ved starten av år 1 så vil kapitalen etter t år vokse til:

$$K_1(1) = K(0) (1 + r)^1 = 1 \cdot (1 + 1)^1 \text{ NOK} = 2 \text{ NOK} \quad (5.26)$$

- ii) Dersom renten krediteres $m = 2$ ganger i året så blir renten halvert for hver periode, dvs. $r/2 = 1/2$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_2(1)$ vokser da til:

$$K_2(1) = K(0) \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ NOK} = 2.25 \text{ NOK} \quad (5.27)$$

Figur 5.4: Renten krediteres m ganger i året.

- iii) Dersom renten krediteres $m = 3$ ganger i året så blir renten justeres for hver periode, til $r/3 = 1/3$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_3(1)$ vokser da til:

$$K_3(1) = K(0) \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \text{ NOK} = 2.37 \text{ NOK} \quad (5.28)$$

- iv) Dersom renten krediteres $m = 4$ ganger i året så blir renten justeres for hver periode, til $r/4 = 1/4$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_4(1)$ vokser da til:

$$K_4(1) = K(0) \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \text{ NOK} = 2.44 \text{ NOK} \quad (5.29)$$

- v) Dersom renten krediteres m ganger i året så blir renten justeres for hver periode, til $r/m = 1/m$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_m(1)$ vokser da til:

$$K_m(1) = K(0) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \text{ NOK} \quad (5.30)$$

- vi) I grensen når $m \rightarrow \infty$ blir dette eksponentialfunksjonen:

$$K_\infty(t) = K(0) \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}_{\text{lign. (5.33)} e} = 2.718281828 \dots \text{NOK} \quad (5.31)$$

hvor

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \underbrace{2.718281828 \dots}_{\text{Eulers tall } e} \quad (5.32)$$

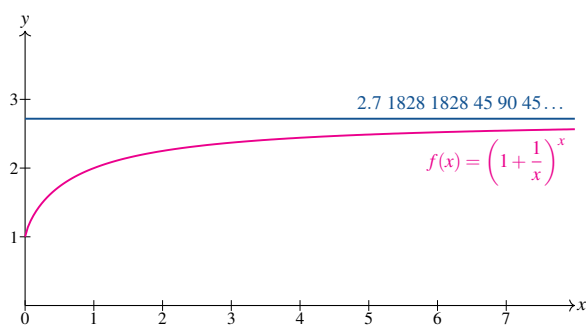
■

Setning 5.2.1 — Eulers tall e

Eulers tall e kan bestemmes av en *grenseverdi*. Denne grenseverdien er:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (5.33)$$

hvor $e = 2.718281828459045 \dots$



Figur 5.5: Funksjonen $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

5.2.1 Eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$ **Definisjon 5.2.1 — Eksponentialfunksjonen med grunntall e**

Eksponentialfunksjon $f(x)$ med grunntall e er definert ved:

$$f(x) = e^x \quad (5.34)$$

hvor x = eksponent, $x \in \mathbb{R}$ og grunntall $e = 2.718281828459045 \dots$

La oss illustrere noen av egenskapene til eksponentialfunksjonen $f(x)$ ved å plote den sammen med andre eksponentialfunksjoner.

■ Eksempel 5.6 — Eksponentialfunksjoner

Plott eksponentialfunksjonene

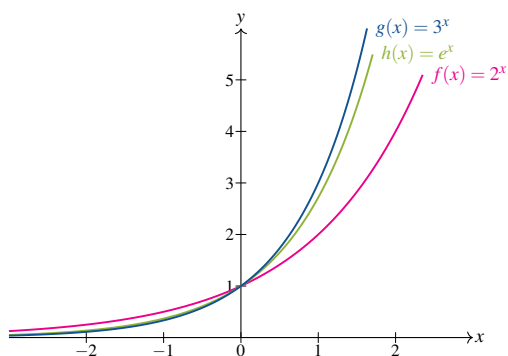
$$f(x) = 2^x \quad (a = 2) \quad (5.35)$$

$$h(x) = e^x \quad (a = e = 2.718281828459045 \dots) \quad (5.36)$$

$$g(x) = 3^x \quad (a = 3) \quad (5.37)$$

Løsning:

Lag først en *verditabell*. Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:



Figur 5.6: Eksponentialfunksjonene $f(x) = 2^x$, $h(x) = e^x$ og $g(x) = 3^x$.

■ Eksempel 5.7 — Eksponentialfunksjoner

Plott eksponentialfunksjonen:

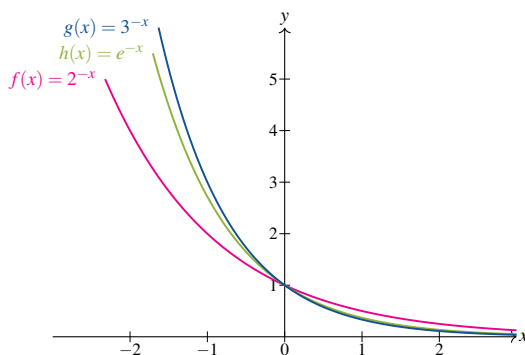
$$f(x) = 2^{-x} \quad (a = 2) \quad (5.38)$$

$$h(x) = e^{-x} \quad (a = e = 2.718281828459045 \dots) \quad (5.39)$$

$$g(x) = 3^{-x} \quad (a = 3) \quad (5.40)$$

Løsning:

Lag først en verditabell. Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:



Figur 5.7: Eksponentialfunksjonene $f(x) = 2^{-x}$, $h(x) = e^{-x}$ og $g(x) = 3^{-x}$.

5.2.2 Regneregler for e^x

Siden eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$ er bare et spesielt tilfelle av potensfunksjonen $g(x) = a^x$, med $a = e = 2.718281828459045 \dots$ så gjelder samme potensregler som ble presentert i grunnleggende formler på side 472: ($a \rightarrow e$)

Setning 5.2.2 — Regneregler for e^x

La $x, y \in \mathbb{R}$ og $e = 2.718281828459045 \dots$

Da gjelder:

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad (5.41)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (5.42)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^x e^{-y} = e^{x-y} \quad (5.43)$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad (5.44)$$

$$(ee)^x = e^x e^x = e^{2x} \quad (5.45)$$

$$\left(\frac{e}{e}\right)^x = \frac{e^x}{e^x} = 1 \quad (5.46)$$

og i tillegg:

$$e^0 = 1 \quad (5.47)$$

$$e^1 = e \quad (5.48)$$

5.2.3 Deriverte av e^x

Denne definisjonen i lign.(5.34), dvs.

$$f(x) = e^x \quad (5.49)$$

er motivert ut fra at faktoren foran eksponentialfunksjonen til den deriverte er 1. Vi bare oppgir her at:³

$$f(x) = 2^x \quad \Rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = 0.6931 \cdot 2^x \quad (5.50)$$

$$g(x) = 2.5^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dg(x)}{dx} = 0.9163 \cdot 2.5^x \quad (5.51)$$

$$h(x) = 2.7^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dh(x)}{dx} = 0.9933 \cdot 2.7^x \quad (5.52)$$

$$i(x) = (2.7182818\dots)^x \quad \Rightarrow \quad \frac{di(x)}{dx} = 1.0000\dots \cdot (2.7182818\dots)^x \quad (5.53)$$

$$j(x) = 3^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dj(x)}{dx} = 1.0986 \cdot 3^x \quad (5.54)$$

³Man an vise lign.(5.50)-(5.54) via definisjonen av den deriverte, men detaljene skal vi ikke gå inn på her.

Dette er så viktig at vi formulerer det i en egen setning.

Setning 5.2.3 — Deriverte av en eksponentialfunksjon med grunntall e

Eksponentialfunksjon $f(x) = e^x$ er lik sin egen deriverte:

$$\frac{df(x)}{dx} = e^x \quad (5.55)$$

hvor x = eksponent, $x \in \mathbb{R}$ og grunntall $e = 2.718281828459045 \dots$

■ **Eksempel 5.8 — Eksponentialfunksjon, derivasjon**

Gitt funksjonen:

$$f(x) = e^{3x-2} \quad (5.56)$$

Finn $\frac{df(x)}{dx}$.

Løsning:

Her bruker man **kjerneregelen** som vi lærte om på side 117, lign.(4.137): ($u = 3x - 2$)

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (e^{3x-2}) \quad \text{deriverer} \quad (5.57)$$

$$\stackrel{\text{lign.(4.137)}}{=} \frac{d}{du} (e^u) \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.58)$$

$$= \underbrace{\frac{d}{du} (e^u)}_{=e^u} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} (3x-2)}_{=3} \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.59)$$

$$= e^u \cdot 3 \quad (5.60)$$

$$= 3e^{3x-2} \quad (5.61) \quad \blacksquare$$

■ **Eksempel 5.9 — Eksponentialfunksjon, derivasjon**

La p være prisen 0.5 liter ananasbrus. La oss se på en avgrenset tidsperiode, f.eks. en dag.

Anta at sammenhengen mellom etterspørsel x av brus og prisen p , for en gitt dag, er:

$$x(p) = x_0 e^{-ap} \quad (5.62)$$

hvor ⁴ $a = 0.08$ 1/NOK og $x_0 = 10000$ halvliters. Anta videre, for en gitt dag, at sammenhengen mellom total kostnad $TK(p)$ og pris p er:

$$TK(p) = cx(p) \quad (5.63)$$



Figur 5.8: Brus.

hvor $c = 2$ NOK er gjennomsnittkostanden per produsert brus for Oskar Sylte.

- a)** Finn et uttrykk for totalt resultat $TR(p)$, $TI(x)$ og $TK(x)$ sfa. prisen p .
- b)** Tegn $TR(p)$, $TI(p)$ og $TK(p)$ sfa. prisen p i intervallet $0 \leq p \leq 30$ i en og samme figur.
- c)** Hvilken pris bør settes på brusen for å maksimere *total inntekt* $TI(p)$?
Hva er inntekten $TI(p)$ da?
- d)** Hvilken pris bør settes på brusen for å maksimere *totalt resultat* $TR(p)$?
Hva er resultatet $TR(p)$ da?
- e)** Kommenter resultatet i oppgave **c** og **d**.

Løsning:

- a)** Totalt resultat $TR(p)$ sfa. prisen p :

$$TR(p) = TI(p) - TK(p) \quad \text{totalt resultat} \quad (5.64)$$

$$= px(p) - cx(p) \quad (5.65)$$

$$= x(p)(p - c) \quad \text{faktorisering} \quad (5.66)$$

$$= x_0 e^{-ap}(p - c) \quad (5.67)$$

Totalt resultat $TI(p)$ sfa p : (bruker lign.(5.62)) som er oppgitt i oppgaven)

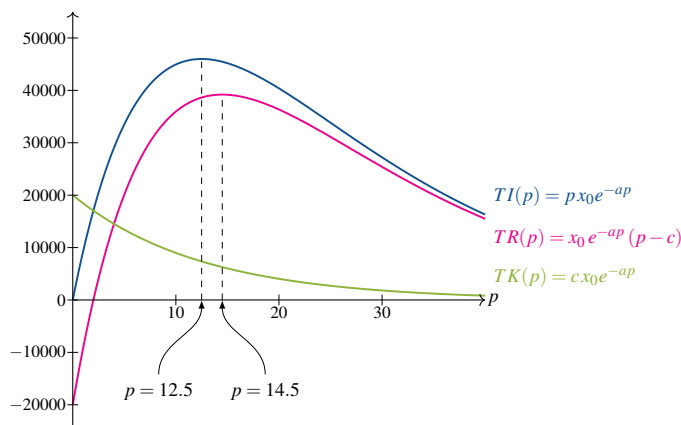
$$TI(p) = px(p) = px_0 e^{-ap} \quad (5.68)$$

Totalt resultat $TK(p)$ sfa p : (bruker lign.(5.62)) som er oppgitt i oppgaven)

$$TK(p) = cx(p) = cx_0 e^{-ap} \quad (5.69)$$

⁴Eksponenten ap i en eksponentialfunksjon må være dimensjonsløs. Dermed må koeffisienten a ha dimensjon 1/NOK siden prisen p har dimensjon NOK.

b) Tegner $TR(p)$, $TI(p)$ og $TK(p)$ i intervallet $0 \leq p \leq 30$:



Figur 5.9: Funksjonene $TR(p)$, $TI(p)$ og $TK(p)$ sfa. prisen p .

c) *Inntekten* er maksimal når stigningstallet er null:⁵

$$\text{maksimuminntekt } TI_{\max} \quad (5.70)$$

$\Updownarrow$

$$\text{stigningstallet til } TI(p) \text{ er lik null} \quad (5.71)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{dTI(p)}{dp} = 0 \quad (5.72)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{d}{dp} (p \cdot x_0 e^{-ap}) = 0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{x_0} \quad (5.73)$$

$\Updownarrow$

$$1 \cdot e^{-ap} + p \cdot e^{-ap}(-a) = 0 \quad \Bigg/ \cdot e^{ap} \quad (5.74)$$

$\Updownarrow$

$$1 + p(-a) = 0 \quad (5.75)$$

$\Updownarrow$

$$p(-a) = -1 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{(-a)} \quad (5.76)$$

$\Updownarrow$

⁵For å vise at man har et maksimum kan man f.eks. gjennomføre 2. derivasjonstesten. Vi hopper over det her. Ut fra figur 5.9 ser vi at det dreier seg om et maksimum og ikke et minimum.

$$p = \frac{1}{a} \quad (5.77)$$

$$\Updownarrow$$

$$p = \frac{1}{0.08} \text{ NOK} = 12.5 \text{ NOK} \quad (5.78)$$

Inntekten blir størst dersom brusen *prises* til 12.5 NOK. Den totale inntekten $TI(p) = px(p)$ per dag blir da:

$$TI(12.5) = 12.5 \cdot 10000 e^{-0.08 \cdot 12.5} \text{ NOK} = 45985 \text{ NOK} \quad (5.79)$$

d) Resultatet er maksimalt når stigningstallet er null: ⁶

$$\text{maksimumresultat } TR_{\max} \quad (5.80)$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{stigningstallet til } TR(p) \text{ er lik null} \quad (5.81)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dTR(p)}{dp} = 0 \quad (5.82)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dp} (\underbrace{x_0 e^{-ap}(p-c)}_{\text{produkt } u \cdot v}) = 0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{x_0} \quad (5.83)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dp} (\underbrace{e^{-ap}(p-c)}_{\text{produkt } u \cdot v}) = 0 \quad (5.84)$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{e^{-ap}}(-a)(p-c) + \cancel{e^{-ap}} = 0 \quad \Bigg/ \cdot e^{ap} \quad (5.85)$$

$$\Updownarrow$$

$$(-a)(p \cdot x_0 - TK_0) + 1 = 0 \quad (5.86)$$

$$\Updownarrow$$

$$(-a)(p-c) = -1 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{(-a)} \quad (5.87)$$

$$\Updownarrow$$

$$p = \frac{1}{a} + c \quad (5.88)$$

⁶For å vise at man har et maksimum kan man f.eks. gjennomføre 2. derivasjonstesten. Vi hopper over det her. Ut fra figur 5.9 ser vi at det dreier seg om et maksimum og ikke et minimum.



$$p = \left(\frac{1}{0.08} + 2 \right) \text{ NOK} = 14.5 \text{ NOK} \quad (5.89)$$

Det totale resultatet per dag blir da: (bruker lign.(5.66))

$$TR(14.5) \stackrel{\text{lign.(5.66)}}{=} x_0 e^{-ap} (p - c) \quad (5.90)$$

$$= 10000 e^{-0.08 \cdot 14.5} (14.5 - 2) \text{ NOK} = 39186 \text{ NOK} \quad (5.91)$$

e) Resultatet fra oppgave c og d viser at:

$$\underbrace{\text{maksimum inntekter}}_{p=12.5 \text{ NOK}} \text{ er ikke sammenfallende med } \underbrace{\text{maksimum resultat}}_{p=14.5 \text{ NOK}} \quad (5.92)$$

■

Ⓚ Konklusjon: minimum enhetskostnad er *ikke* sammenfallende med maksimum resultat.

5.3 Logaritmer

Logaritmer er *inverse* funksjoner til eksponentialfunksjoner.

5.3.1 Definisjon

La oss bruke kalkulatoren til å regne ut følgende eksponenter:

$$10^0 = 1 \quad (5.93)$$

$$10^{0.3010} = 2 \quad (5.94)$$

$$10^{0.4770} = 3 \quad (5.95)$$

$$10^{0.6021} = 4 \quad (5.96)$$

$$10^{0.6990} = 5 \quad (5.97)$$

Av disse kalkulatorberegningene ser vi at f.eks. 0.4770 er det tallet vi må opphøye 10 i, for å få tallet 3.

Tallet 0.4770 kalles *logaritmen* til 3.

Dette tallet 0.4770 har fått en egen notasjon, nemlig $\log(3) = 0.4770$. Tilsvarende:

$$10^0 = 10^{\log 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \log 1 = 0 \quad (5.98)$$

$$10^{0.3010} = 10^{\log 2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \log 2 = 0.3010 \quad (5.99)$$

$$10^{0.4770} = 10^{\log 3} = 3 \quad \Rightarrow \quad \log 3 = 0.4770 \quad (5.100)$$

$$10^{0.6021} = 10^{\log 4} = 4 \quad \Rightarrow \quad \log 4 = 0.6021 \quad (5.101)$$

$$10^{0.6990} = 10^{\log 5} = 5 \quad \Rightarrow \quad \log 5 = 0.6990 \quad (5.102)$$

Definisjon 5.3.1 — Logaritmen med 10 som grunntall (Briggske logaritme)

Logaritmen til et tall x er den eksponenten vi må opphøye 10 i for å få x :

$$10^{\log x} = x \quad (5.103)$$

altså $\log(x)$ = logaritmen = det tallet vi må opphøye 10 i for å få x .

(K) Ut fra lign.(5.103) ser man at $\log x$ er den *inverse* funksjonen av 10^x .

La oss bruke kalkulatoren til å regne ut følgende eksponenter:

$$e^0 = 1 \quad (5.104)$$

$$e^{0.6931} = 2 \quad (5.105)$$

$$e^{1.0986} = 3 \quad (5.106)$$

$$e^{1.3863} = 4 \quad (5.107)$$

$$e^{1.6094} = 5 \quad (5.108)$$

Av disse kalkulatorberegningene ser vi at f.eks. 1.0986 er det tallet vi må opphøye Eulers tall e i, for å få tallet 3. Tallet 1.0986 kalles den *naturlige* logaritmen til 3.

Dette tallet 1.0986 har fått en egen notasjon, nemlig $\ln(3) = 1.0986$. Tilsvarende:

$$e^0 = e^{\ln 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 1 = 0 \quad (5.109)$$

$$e^{0.6931} = e^{\ln 2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = 0.6931 \quad (5.110)$$

$$e^{1.0986} = e^{\ln 3} = 3 \quad \Rightarrow \quad \ln 3 = 1.0986 \quad (5.111)$$

$$e^{1.3863} = e^{\ln 4} = 4 \quad \Rightarrow \quad \ln 4 = 1.3863 \quad (5.112)$$

$$e^{1.6094} = e^{\ln 5} = 5 \quad \Rightarrow \quad \ln 5 = 1.6094 \quad (5.113)$$

Definisjon 5.3.2 — Logaritmen med e som grunntall

Logaritmen til et tall x er den eksponenten vi må opphøye Eulers tall e i for å få x :

$$e^{\ln x} = x \quad (5.114)$$

altså $\ln(x)$ = den naturlige logaritmen = det tallet vi må opphøye e i for å få x .

(K) Ut fra lign.(5.114) ser man at $\ln x$ er den *inverse* funksjonen av e^x .

5.3.2 Regneregler

Ved å bruke definisjonen av den naturlige logaritmen sammen med regnereglene for potenser fra *grunnleggende formler* på side 472, så innser man:

$$e^{\ln 2 + \ln 3} = e^{\ln 2} e^{\ln 3} = 2 \cdot 3 = 6 = e^{\ln 6} = e^{\ln(2 \cdot 3)} \quad (5.115)$$

$$\Rightarrow \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3$$

$$e^{\ln 2 - \ln 3} = e^{\ln 2} e^{-\ln 3} = \frac{2}{3} = e^{\ln(\frac{2}{3})} \quad (5.116)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3$$

$$e^{\ln(2^3)} = 2^3 = (2)^3 = (e^{\ln 2})^3 = (e^{\ln 2})^3 = e^{3 \cdot \ln 2} \quad (5.117)$$

$$\Rightarrow \ln 2^3 = 3 \cdot \ln 2 \quad (5.118)$$

Dette er regneregler for logaritmen som er svært viktige og som vi skal bruke mye når vi skal løse oppgaver.

La oss skrive de mer generelt:

Setning 5.3.1 — regneregler for $\ln$ -funksjoner

La a og b være positive reelle tall, dvs. $a, b > 0$.

Da gjelder:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (5.119)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad (5.120)$$

$$\ln(a^p) = p \ln a \quad (5.121)$$

Setning 5.3.2 — Regneregler for $\ln$ -funksjoner

For logaritmefunksjonen $\ln(x)$ gjelder:

$$\ln 1 = 0 \quad (5.122)$$

$$\ln e = 1 \quad (5.123)$$

$$\ln e^x = x \quad (5.124)$$

$$e^{\ln x} = x, \quad x > 0 \quad (5.125)$$

Akkurat de samme regnereglene gjelder for dersom man har grunntall 10 istedet for Eulers tall e .

Begrunnelsen er helt analog som for tilfellet på forrige side. Derfor skriver vi bare opp reglene:

Setning 5.3.3 — Regneregler for $\log$ -funksjoner

La a og b være positive reelle tall, dvs. $a, b > 0$.

Da gjelder:

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad (5.126)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad (5.127)$$

$$\log(a^p) = p \log a \quad (5.128)$$

Setning 5.3.4 — regneregler for $\log$ -funksjoner

For logaritmefunksjonen $\log(x)$ gjelder:

$$\log 1 = 0 \quad (5.129)$$

$$\log 10 = 1 \quad (5.130)$$

$$\log 10^x = x \quad (5.131)$$

$$10^{\log x} = x, \quad x > 0 \quad (5.132)$$

Ⓚ Det finnes *ingen enkle* regler for $\log(a+b)$ eller $\log(a-b)$.

Ⓚ $\log x$ er bare definert for positive verdier av x .

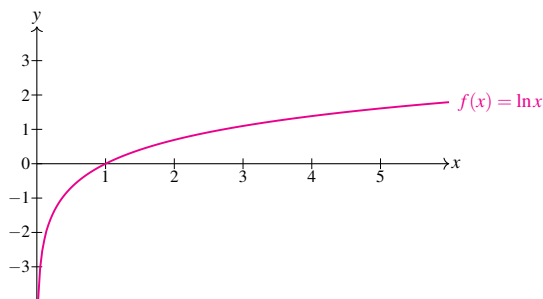
■ Eksempel 5.10 — $\ln$ -funksjon

Plott funksjonen

$$f(x) = \ln x \quad (5.133)$$

Løsning:

Ved å lage verditabell og deretter plote finner man følgende graf:



Figur 5.10: Logaritme-funksjonen $f(x) = \ln x$. ■

Ⓚ Egenskaper til $\ln$ -funksjonen: ($f(x) = \ln x$)

- Definisjonsmengde til $f(x)$: $D_f = \langle 0, \infty \rangle$
- Verdimengde til $f(x)$: $V_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
- $\ln x$ er strengt voksende i hele D_f
- Grafen skjærer x -aksen i $x = 1$ siden $\ln 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ og $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

■ Eksempel 5.11 — Logaritme, renteformelen

Kapitalen K_0 plasseres i en bank ved år null. Renten er $r = 6\%$, dvs. $r = \frac{6}{100} = 0.06$.

Hvor lang tid tar det før kapitalen fordobles?



Figur 5.11: Kapitalen K_0 i bank.

Løsning:

La n være den tiden det tar før kapitalen K_0 fordobles til $K_n = 2K_0$. Oppgaven består i å finne n .

Når man skal regne på rente med rentesrente slik som i denne oppgaven så brukes *renteformelen* som vi så på i eksempel 5.1 på side 129.

Anta at det tar n år før kapitalen dobles, dvs. $K_n = 2K_0$. Dermed:

$$K_n = K_0(1+r)^n \quad \text{renteformelen} \quad (5.134)$$

$\Downarrow$

$$2K_0 = K_0(1+r)^n \quad (5.135)$$

$\Downarrow$

$$2K_0 = K_0(1+r)^n \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{K_0} \quad (5.136)$$

$\Downarrow$

$$\frac{2\cancel{K_0}}{\cancel{K_0}} = (1+r)^n \quad \text{kansellering} \quad (5.137)$$

$$K_n = \frac{2\cancel{K_0}}{\cancel{K_0}} = (1+r)^n \quad \text{kansellering} \quad (5.138)$$

$\Downarrow$

$$2 = (1+r)^n \quad \text{ta ln (eller log) på hver side av ligningen} \quad (5.139)$$

$\Downarrow$

$$\ln 2 = \ln(1+r)^n \quad \text{bruker regneregler i lign.(5.121)} \quad (5.140)$$

$\Downarrow$

$$\ln 2 = n \ln(1+r) \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \quad (5.141)$$

$\Downarrow$

$$\frac{\ln 2}{\ln(1+r)} = n \quad \text{løser mhp. } x \text{ alene} \quad (5.142)$$

$\Downarrow$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} = \frac{\ln 2}{\ln(1+0.06)} \approx 11.9 \quad (5.143)$$

Kapitalen *dobles* etter 12 år med 6% rente.

■

5.4 Deriverte av $\ln x$

Setning 5.4.1 — deriverte av $\ln x$

Den deriverte av $f(x) = \ln x$ er:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad (5.144)$$

Bevis. Fra definisjonen av lign.(5.114) har vi at:

$$e^{\ln(x)} = x \quad (5.145)$$

La oss derivere denne ligningen.

Den deriverte av høyre side av lign.(5.145) er 1.

Vi deriver venstre side via *kjernerregelen* med kjernen $u(x) = \ln x$:

$$\underbrace{\frac{d}{du}(e^u)}_{=e^u} \frac{d}{dx}(\ln x) = 1 \quad \text{kjernerregelen} \quad (5.146)$$

$$\Updownarrow$$

$$e^u \frac{d}{dx}(\ln x) = 1 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{e^u} \quad (5.147)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad (5.148)$$

■

■ Eksempel 5.12 — Eksponentialfunksjon , derivasjon

Gitt funksjonen:

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1) \quad (5.149)$$

Finn $f'(x)$.

Løsning:

Her bruker man *kjernerregelen* som vi lærte om på side 117, lign.(4.137): ($u = x^2 + 1$)

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad \text{deriverer} \quad (5.150)$$

$$= \frac{d}{dx}(x - \ln(x^2 + 1)) \quad \text{Leibniz' notasjon} \quad (5.151)$$

$$\stackrel{\text{lign. (4.137)}}{=} 1 - \frac{d}{du}(\ln u) \frac{du}{dx} \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.152)$$

$$= 1 - \underbrace{\frac{d}{du}(\ln u)}_{=\frac{1}{u}} \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 + 1)}_{=2x} \quad \text{kjerneregelen} \quad (5.153)$$

$$= 1 - \frac{1}{u} 2x \quad (5.154)$$

$$= 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (5.155)$$

■

■ Eksempel 5.13 — Logaritme , derivasjon , lokale ekstremalpunkt

Gitt funksjonen:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad (5.156)$$

hvor $D_f = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$ fordi $\ln 1 = 0$. (Husk: det er *ikke lov* å dele på 0).

- a) Regn ut $f'(x)$.
- b) Tegn grafen $f(x)$ og marker på figuren når $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$ via et fortegnsskjema.
- c) Marker på figuren ekstremalpunktet til $f(x)$. Er det lokalt eller globalt?
- d) Marker asymptoten til $f(x)$ på figuren.

Løsning:

- a) Deriverte: (derivasjon av en brøk, se lign.(??))

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\ln x} \right) \quad \text{deriverer} \quad (5.157)$$

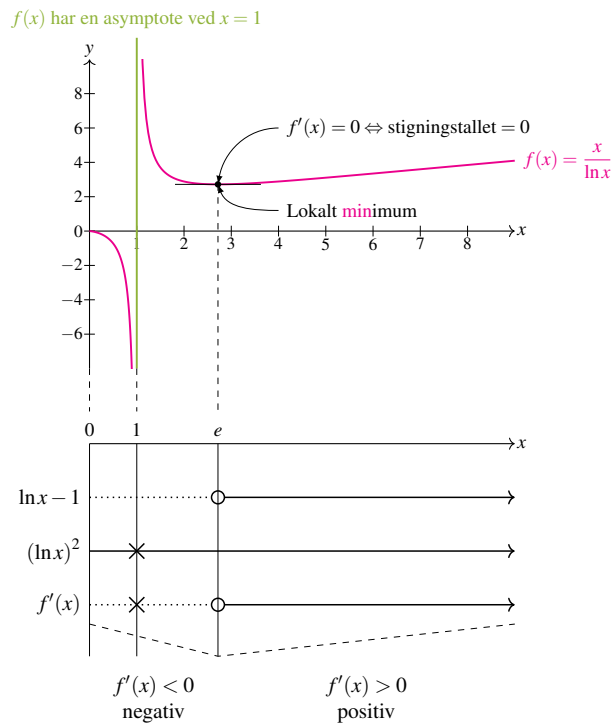
$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) \quad \text{derivasjon av en brøk} \quad (5.158)$$

$$\stackrel{\text{lign. (??)}}{=} \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{derivasjon av en brøk} \quad (5.159)$$

$$= \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \quad (5.160)$$

$$= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \quad (5.161)$$

Oppgave **b**, **c** og **d** er tegnet inn i koordianatsystemet som vist i figuren nedenfor hvor fortegnet til $f'(x)$ er markert og lokale ekstremalpunkt.



Figur 5.12: Funksjonen $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ og tilhørende fortegnsskjema for $f'(x)$.

