



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

TESTeksamen 2021

Vanskelighetsgrad	Andel oppgaver	Beskrivelse
●●	40.0%	Fornøyd med å stå, <i>E</i> eller <i>D</i> .
●●●●	40.0%	"Midt på treet", dvs. <i>C</i> .
●●●●●	20.0%	Sikter mot stjernene, <i>A</i> eller <i>B</i> .

Karakterskala:

100%–90%	→	<i>A</i>
80%–89%	→	<i>B</i>
60%–79%	→	<i>C</i>
50%–59%	→	<i>D</i>
40%–49%	→	<i>E</i>
0%–39%	→	<i>F</i> (stryk)

🕒 **Tid 5t:** Tiden som står på hver deloppgave er kun **forventet** tidforbruk. Det er altså kun et estimat, og kan variere fra person til person. Det går helt fint å bruke litt mer eller litt mindre tid enn dette estimatet.

Fusk: Det er **ikke** lov å samarbeide med andre når man har hjemmeksamen.

Oppgave 1 små, tekniske oppgaver

Denne oppgaven består av en rekke små oppgaver som er hentet fra ulike deler av pensum.

10.0%
15.0%
0%
25.0%
1t 15'

- a) Nedenfor ser du et algebraisk uttrykk.

$$13x^5 - czy + 7a \quad (1.1)$$

2.5%
7.5'

Marker hva som er variabler, eksponenter, koeffisienter, ledd, operatorer, konstantledd og parametre.

- b) Anta at Norges bruttonasjonalprodukt (BNP) er

$$3\,540\,000 \text{ millioner NOK} \quad (1.2)$$

2.5%
7.5'

Skriv tallet på standardform.

- c) Gitt følgen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{40}$ bestemt ved

$$151, 147, 143, 139, \dots, -5 \quad (1.3)$$

5%
15'

i) Begrunn hvorfor følgen i lign.(1.3) er en aritmetisk følge.

ii) Summen av følge er S_{40} gitt ved:

$$S_{40} = \sum_{i=1}^{40} a_i \quad (1.4)$$

Regn ut S_{40} .

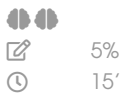
- d) Forkort brøken så mye som mulig ved å bruke faktorisering:

$$\frac{-x(2x)^2 + x(5y)^2 - x(5y + 2x)}{5(xy + \frac{2}{5}x^2)} \quad (1.5)$$

5%
15'

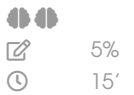
e) Finn Løsningsmengden til ligningen¹

$$(10^{2x})^2 - 10(10^{2x}) + 9 = 0 \quad (1.7)$$



f) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: ²

$$(2.3 \cdot y^2 - 2.3 \cdot 10y + 2.3 \cdot 9) \frac{1}{y^4 + 27} < 0 \quad (1.9)$$



¹Hint:

$$(y - 1)(y - 9) = y^2 - 10y + 9 \quad (1.6)$$

²Hint:

$$(y - 1)(y - 9) = y^2 - 10y + 9 \quad (1.8)$$

Oppgave 2 små, tekniske oppgaver

Denne oppgaven består av en rekke små oppgaver som er hentet fra ulike deler av pensum.

	10.0%
	10.0%
	5.0%
	25.0%
	1t 15'

a) Gitt funksjonen

$$f(x, y) = e^x \ln y \quad (2.10)$$

	5%
	15'

Finn de partiell deriverte til denne funksjonen.

b) Denne oppgaven dreier seg om tolkningen og forståelsen av den deriverte. Svar kort. Én setning per delspørsmål er nok.

	5%
	15'

i) Gi en tolkning av den deriverte $\frac{df(a)}{dx}$.

ii) Hva er den deriverte til en funksjon et mål på?

c) Anta at vi setter inn kapitalen K_0 i banken år 0. Renten er r .

	5%
	15'

Anta videre at kapitalen K_i ved år nr. i , rente inkludert, følger mønsteret

$$K_1 = K_0(1 + r) \quad \text{startledd} \quad (2.11)$$

$$K_{i+1} = K_i(1 + r) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

i) Hva slags type følge utgjør lign.(2.11) og (2.12)?

ii) Finn et uttrykk for det i 'te leddet K_i .

iii) Finn et uttrykk for summen

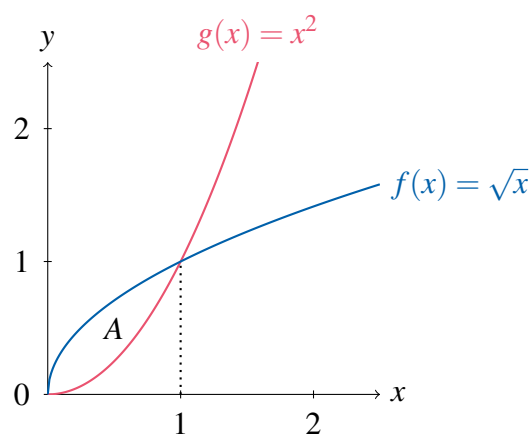
$$S_n = \sum_{i=1}^n K_i \quad (2.13)$$

- d) Finn, ved hjelp av integrasjon, arealet A av området avgrenset av funksjonene

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (2.14)$$

$$g(x) = x^2$$

som vist i figur 1.



Figur 1: Arealet A .

- e) Finn den deriverte av funksjonen ³

$$f(x) = 3 \log((x^2 + a^2)2\sqrt{x}) \quad (2.16)$$

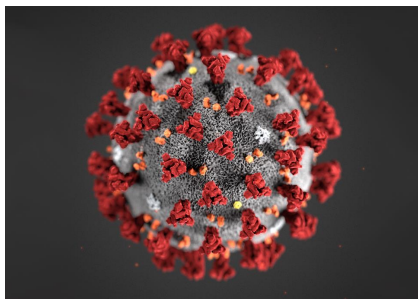
³Bruk at

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x \ln 10} \quad (2.15)$$

Oppgave 3 Spredning av Covid-19 optimering

●	7.5%
●●	7.5%
●●●●	10.0%
✍	25.0%
🕒	1t 15'

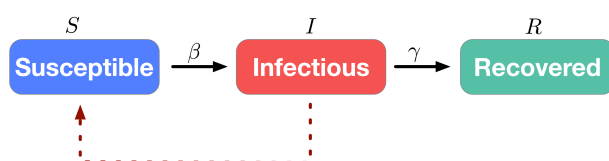
Covid-19 viruset herjer mer enn noensinne etter at den nye Omikron-varianten har oppstått. Vi skal i denne oppgaven modellere spredningen av Covid-19 gjennom en enkel modell kalt SIR-modellen.



Figur 2: Covid-19 viruset.

SIR-modellen antar følgende situasjon:

- Vi har en populasjon av totalt $N = 10$ individer som er konstant, dvs. at ingen nye individer kommer til eller faller fra.⁴
- En person må være i nøyaktig en av de følgende tilstandene:
 - S : personen er mottagelig for coronaviruset (**S**usceptible).
 - I : personen er smittet av coronaviruset og kan smitte andre individer (**I**nfectiuos).
 - R : personen kan ikke smitte andre individer og er immun (**R**ecovered).
- Anta ved tiden $t = 0$ at nøyaktig èt individ er smittet med Covid-19.
- Forløpet for en person blir dermed at man starter tilstand S , dvs. i usmittet tilstand, men mottagelig for smitte. Dersom man får kontakt med et smittsomt individ, dvs. et individ som er i tilstand I , kan man bli smittet selv. Da havner personen i tilstand I . Etter en viss tid havner personen i tilstand R .



Figur 3: De tre tilstandene et individ kan være i.

⁴En slik situasjon kan forekomme f.eks. på et skip, hvor man har et gitt antall individer. Vi antar at ingen individer kommer til (ingen blir født eller kommer ombord skipet) og ingen faller fra (ingen dør eller forlater skipet).

- Spredningen av Covid-19 styres i denne modellen av to viktige parametre:

β = gjennomsnittlig antall smitteoverførende kontakter per tidsenhet
per mottagelig individ.

γ = gjennomsnittlig smittsom periode, dvs. antall dager man er smittsom.

Anta at $\beta = 1$ per dag. Det betyr at hvert mottagelig i individ populasjonen i gjennomsnitt har én smitteoverførende kontakt med resten av populasjonen hver dag.

Anta videre at $\gamma = 5$. Det betyr at man er smittsom i gjennomsnitt 5 dager (som betyr at man befinner seg i tilstand I i gjennomsnitt 5 dager).

- Basis reproduksjonstallet R_0 er definert som

$$R_0 = \beta \gamma \quad (3.17)$$

og beskriver i gjennomsnitt hvor mange mottagelige individer en smittet person smitter. Dersom $\beta = 1$ og $\gamma = 5$ så blir basis reproduksjonstallet $R_0 = 5$.

Vi definerer nå tre funksjoner som modellerer hvor mange individer som befinner seg i hver tilstand ved tiden t :

$$S(t) = \text{antall individer i tilstand } S \text{ ved tiden } t \quad (3.18)$$

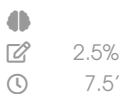
$$I(t) = \text{antall individer i tilstand } I \text{ ved tiden } t \quad (3.19)$$

$$R(t) = \text{antall individer i tilstand } R \text{ ved tiden } t \quad (3.20)$$

- a) Begrunn kort hvorfor ligningen

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (3.21)$$

er korrekt under våre antagelser.



Anta vi har følgende eksplisitte uttrykk for $S(t)$ og $R(t)$:⁵

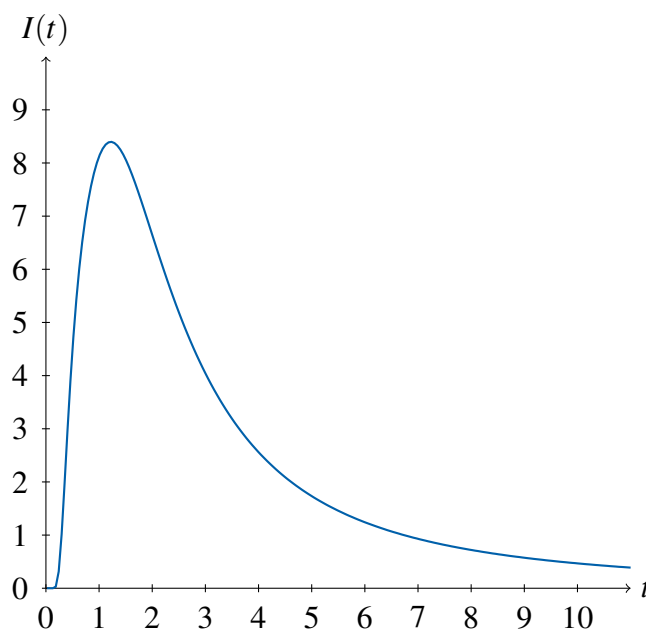
$$S(t) = N \left(1 - e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} \right) \quad (3.22)$$

$$R(t) = N \left(e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad (3.23)$$

b) Vis at $I(t)$ er gitt ved funksjonen:

$$I(t) = N \left(e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} - e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad (3.24)$$

Funksjonen $I(t)$ gir oss antall smittede ved tiden t . Figur 4 viser oss at antall smittede har et maksimum når $R_0 = 5$. Det er av høy viktighet at vi kan beregne både når og hvor mange som er smittet når dette maksimumet inntreffer. Dette kommer av at presset på helsevesenet er høyest når $I(t)$ er maksimal.



Figur 4: Antall smittede I over tiden t .

⁵At tiden t i lign.(3.22) og (3.23) er dimensjonsløs er en teknisk sak som dere ikke behøver å tenke på i denne eksamenen.

- c) Vis at maksimalt antall smittede $I^* = I(t^*)$ inntreffer når ⁶

$$t^* = \sqrt{\frac{R_0^2 - 1}{2R_0 \ln(R_0)}} \quad (3.25)$$

7.5%
22.5'

Et av virkemidlene for å redusere det maksimale smitteantallet, er å innføre restriksjoner på antall kontakter man har per dag.

Nå er det ikke slik at hvis man kommer i kontakt med en smittsom person, så er det 100% sikkert at man faktisk blir smittet. Vi opererer derfor med en såkalt *smitteoverføringsandel* p . Anta at $p = 0.5$, som betyr at hvis man kommer i kontakt med en smittsom person, så vil man i 50% av tilfellene faktisk bli smittet.

Anta videre at antall kontakter mellom et mottagelig individ og et smittsomt individ er $k = 2$ ganger per dag. Vi kan da argumentere for at antall smitteoverførende kontakter β per dag er gitt ved

$$\beta = kp = 2 \cdot 0.5 = 1, \quad (3.26)$$

som er den verdien vi har brukt for β .

- d) Anta at samfunnet har kapasitet til å maksimalt kunne håndtere 6 smittede individer samtidig, og anta at man har innført en avstandsregel på 1 meter som har medført en reduksjon fra $k = 2$ til $k = 1$.

10%
30'

Vil denne avstandsregelen sørge for at man alltid vil ha færre enn 6 smittede individer samtidig?⁷

⁶Anta at dere *vet* at det kritiske punktet er et toppunkt, dvs. dere trenger *ikke* å vise at 2. derivasjons-testen gir et toppunkt.

⁷Begrunn svaret ved å gjøre nødvendige beregninger. Dette er en «A»-oppgave, dvs. det er øvre del av «nivå 3» - ekstra vanskelig.

Oppgave 4 Diett problemet - hjørnepunktsmetoden

12.5%
7.5%
5.0%
25.0%
1t 15'

Toro er en kjent suppeprodusent. De planlegger å introdusere en ny type suppe med visse krav om næringsinnhold:

- Suppen må minst inneholde 240 enheter med kalsium.
- Suppen må minst inneholde 460 enheter med jern.
- Suppen kan ikke inneholde mer enn 300 enheter kolestrol.

I suppen kan vi velge mellom to typer råvarer som påvirker disse størrelsene:

- Råvaretype $R1$
- Råvaretype $R2$

Disse råvarene kan kun kjøpes i pakker, hvor hver pakke inneholder et visst antall enheter av kalsium, jern og kolestrol:

Antall enheter per pakke	Råvare $R1$	Råvare $R2$
Kalsium	12	3
Jern	4	20
Kolestrol	6	4

Tabell 1: Næringsinnhold per råvaretype.

En pakke av råvare $R1$ koster 6 kroner, mens en pakke av råvare $R2$ koster 3 kroner.

Toro ønsker å finne innkjøpsforholdet mellom antall pakker av råvare $R1$ og råvare $R2$, slik at innkjøpskostnadene minimeres samtidig som at kravene om næringsinnholdet er oppfylt.



Figur 5: Torofabrikken i Arna kommune.

De definerer dermed følgende variabler:

$$x = \text{antall pakker av råvare } R1 \quad (4.27)$$

$$y = \text{antall pakker av råvare } R2 \quad (4.28)$$

hvor de ønsker å minimere kostnaden

$$K(x, y) = 6x + 3y \quad (4.29)$$

slik at kravene

$$12x + 3y \geq 240 \quad (4.30)$$

$$4x + 20y \geq 460 \quad (4.31)$$

$$6x + 4y \leq 300 \quad (4.32)$$

er oppfylt.

Dette minimeringsproblemet kan løses ved hjelp av *hjørnepunktsmetoden*. Denne metoden kan oppsummeres i noen steg:

- Først må vi finne linjene som definerer omrisset av *mulighetsområdet*.⁸
- Deretter må vi finne hjørnene i mulighetsområdet.
- Deretter beregner vi kostnaden i hvert av hjørnepunktene.
- Det hjørnet som gir *lavest* kostnad, er den optimale løsningen.

a) Vis at restriksjonene i lign.(4.30)-(4.32) kan skrives på formelen

$$y \geq 80 - 4x \quad (4.33)$$

$$y \geq 23 - \frac{1}{5}x \quad (4.34)$$

$$y \leq 75 - \frac{3}{2}x \quad (4.35)$$

b) Plott linjene

$$y = 80 - 4x \quad (4.36)$$

⁸De lovlige punktene (x, y) som oppfyller kravene i lign.(4.30)-(4.32).

$$y = 23 - \frac{1}{5}x \quad (4.37)$$

$$y = 75 - \frac{3}{2}x \quad (4.38)$$

inn i koordinatsystemet i vedlegg bakerst i dette oppgavesettet. Linjene skal ikke krysse x - og y -aksene hhv. Skraver mulighetsområdet.

- c) Ett av hjørnepunktene er $(x, y) = (15, 20)$. Det er den kombinasjonen av råvarene som gir en kostnad på $K(15, 20) = 150$ kroner.⁹

7.5%
22.5'

Regn ut de øvrige hjørnepunktene med tilhørende kostnader $K(x, y)$ og konkluder med at det oppgitte punktet $(15, 20)$ er det hjørnepunktet som gir optimal løsning.

- d) Hva må prisen på råvare $R1$ være for at hjørnepunktet $(2, 72)$ skal bli optimalt?¹⁰

5%
15'

⁹Dette hjørnepunktet svarer skjæringspunktet til linjene for krav 1 og 2. Du skal ikke regne ut verdiene til dette hjørnepunktet. Bare ta de for gitt.

¹⁰Ta for gitt at hjørnepunktet $(40, 15)$ ikke er optimalt.

VEDLEGG A

Kandidatnummer: _____
(Skriv inn ditt kandidatnummer her)

