



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

TESTeksamen 2021

Vanskelighetsgrad	Andel oppgaver	Beskrivelse
●●	40.0%	Fornøyd med å stå, <i>E</i> eller <i>D</i> .
●●●●	40.0%	"Midt på treet", dvs. <i>C</i> .
●●●●●	20.0%	Sikter mot stjernene, <i>A</i> eller <i>B</i> .

Karakterskala:

100%–90%	→	<i>A</i>
80%–89%	→	<i>B</i>
60%–79%	→	<i>C</i>
50%–59%	→	<i>D</i>
40%–49%	→	<i>E</i>
0%–39%	→	<i>F</i> (stryk)

🕒 **Tid 5t:** Tiden som står på hver deloppgave er kun **forventet** tidforbruk. Det er altså kun et estimat, og kan variere fra person til person. Det går helt fint å bruke litt mer eller litt mindre tid enn dette estimatet.

Fusk: Det er **ikke** lov å samarbeide med andre når man har hjemmeksamen.

Oppgave 1 små, tekniske oppgaver

Denne oppgaven består av en rekke små oppgaver som er hentet fra ulike deler av pensum.

	10.0%
	15.0%
	0%
	25.0%
	1t 15'

a) Nedenfor ser du et algebraisk uttrykk.

$$13x^5 - czy + 7a \quad (1.1)$$

	2.5%
	7.5'

Marker hva som er variabler, eksponenter, koeffisienter, ledd, operatorer, konstantledd og parametre.

Algebra har en egen *terminologi* for å beskrive delene av et algebraisk uttrykk:

x, y, z - variabler

1 - eksponent

2 - koeffisient

3 - ledd

4 - operator

5 - konstantledd

6 - parameter

Legg merke til at en parameter også kan være en koeffisient. ¹

¹En koeffisient er konstanten som står foran en variabel.

b) Anta at Norges bruttonasjonalprodukt (BNP) er

$$3\,540\,000 \text{ millioner NOK} \quad (1.2)$$

Skriv tallet på standardform.

Én million er 10^6 . Dermed er

$$\underbrace{3\,540\,000}_{= 3.54 \cdot 10^6} \underbrace{\text{ millioner NOK}}_{= 10^6} \quad (1.3)$$

det samme som

$$3.54 \cdot 10^{12} \text{ NOK} \quad (1.4)$$

c) Gitt følgen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{40}$ bestemt ved

$$151, 147, 143, 139, \dots, -5 \quad (1.5)$$

i) Begrunn hvorfor følgen i lign.(1.5) er en aritmetisk følge.

Differens:

$$147 - 151 = -4 \quad (1.6)$$

$$143 - 147 = -4 \quad (1.7)$$

$$139 - 143 = -4 \quad (1.8)$$

osv. så ser vi at differansen mellom to påfølgende ledd er konstant, $a_{i+1} - a_i = d$ ($d = -4$). Derfor er lign.(1.5) en aritmetisk følge.

ii) Summen av følge er S_{40} gitt ved:

$$S_{40} = \sum_{i=1}^{40} a_i \quad (1.9)$$

Regn ut S_{40} .

Summen av en aritmetisk rekke er: (se boken, f.eks. formelsamling bakerst i boken)²

$$S_n = n \left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (1.12)$$

Med $a_1 = 151$ og $d = -4$ får vi:

$$S_{40} = 40 \left(151 + \frac{(40-1)(-4)}{2} \right) = 2920 \quad (1.13)$$

²Man kan løse oppgaven på en ennå enklere måte. Istedet for å bruke formelen i lign.(1.12), så kan vi bruke formelen (se boken)

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (1.10)$$

siden vi fra oppgaven vet at $a_{40} = -5$. Med $n = 40$, $a_1 = 151$ har vi dermed:

$$S_{40} = \frac{40(151 + (-5))}{2} = 2920 \quad (1.11)$$

På eksamen holder det man kun løser oppgaven på én av måtene. Man får ikke mer poeng for å løse oppgavner på to måter.

d) Forkort brøken så mye som mulig ved å bruke faktorisering:



5%
15'

$$\frac{-x(2x)^2 + x(5y)^2 - x(5y + 2x)}{5(xy + \frac{2}{5}x^2)} \quad (1.14)$$

$$\frac{-x(2x)^2 + x(5y)^2 - x(5y + 2x)}{5(xy + \frac{2}{5}x^2)} \quad (1.15)$$

$$= \frac{\overbrace{-(2x)^2 + (5y)^2}^{= (5y)^2 - (2x)^2} - (5y + 2x)}{5x(y + \frac{2}{5}x)} \quad (1.16)$$

$$= \frac{\overbrace{(5y - 2x)(5y + 2x)}^{= (5y)^2 - (2x)^2} - (5y + 2x)}{5y + 2x} \quad (1.17)$$

$$= \frac{\cancel{(5y + 2x)}((5y - 2x) - 1)}{\cancel{5y + 2x}} \quad (1.18)$$

$$= 5y - 2x - 1 \quad (1.19)$$

e) Finn Løsningsmengden til ligningen³

$$(10^{2x})^2 - 10(10^{2x}) + 9 = 0 \quad (1.21)$$



Vi gjør følgende variableskifte

$$y = 10^{2x} \quad (1.22)$$

som innsatt i lign.(1.31) gir:

$$y^2 - 10y + 9 = 0 \quad (1.23)$$

. Fra fotnoten i oppgaven vet vi at

$$(y - 1)(y - 9) = y^2 - 10y + 9 = 0 \quad (1.24)$$

som gir løsningene

$$y = 1 \vee y = 9 \quad (1.25)$$

Vi setter så inn for y og løser ligningene mtp. x:

$$10^{2x} = 1 \quad \vee \quad 10^{2x} = 9 \quad \bigg/ \log(-) \quad (1.26)$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{\log} 10^{2x} = \log 1 \quad \vee \quad \cancel{\log} 10^{2x} = \log 9 \quad (1.27)$$

$$\Updownarrow$$

$$2x = \log 1 \quad \vee \quad 2x = \log 9 \quad (1.28)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{\log 9}{2} \quad (1.29)$$

Løsningsmengden er dermed gitt ved

$$\mathcal{L} = \left\{ 0, \frac{\log 9}{2} \right\} \quad (1.30)$$

³Hint:

$$(y - 1)(y - 9) = y^2 - 10y + 9 \quad (1.20)$$

f) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: ⁴

$$\left(2.3 \cdot y^2 - 2.3 \cdot 10y + 2.3 \cdot 9\right) \frac{1}{y^4 + 27} < 0 \quad (1.32)$$

Siden 2.3 er en felles faktor så kan den settes utenfor:

$$2.3(y^2 - 10y + 9) \frac{1}{y^4 + 27} < 0 \quad \bigg/ \cdot (y^4 + 27) > 0 \quad (1.33)$$

$\Updownarrow$

$$2.3(y^2 - 10y + 9) < 0 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{2.3} \quad (1.34)$$

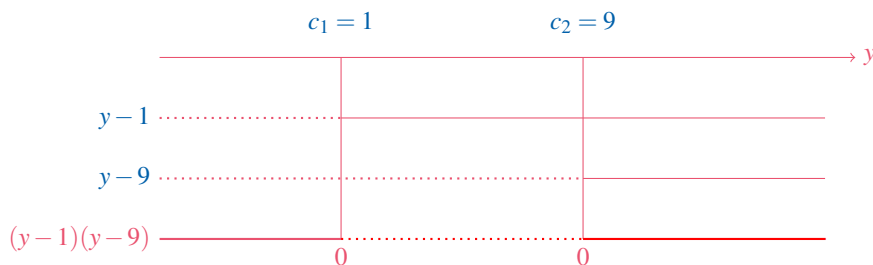
$\Updownarrow$

$$y^2 - 10y + 9 < 0 \quad (\text{fotnote}) \quad (1.35)$$

$\Updownarrow$

$$(y - 1)(y - 9) < 0 \quad (1.36)$$

Vi setter opp fortegnsskjema med nullpunktene $c_1 = 1$ og $c_2 = 9$:



Figur 1: Fortegnsskjema.

Løsningsmengden er dermed gitt ved intervallet for den stiplede linjen i figur 1:

$$\mathcal{L} = \langle 1, 9 \rangle \quad (1.37)$$

⁴Hint:

$$(y - 1)(y - 9) = y^2 - 10y + 9 \quad (1.31)$$

Oppgave 2 små, tekniske oppgaver

Denne oppgaven består av en rekke små oppgaver som er hentet fra ulike deler av pensum.

	10.0%
	10.0%
	5.0%
	25.0%
	1t 15'

a) Gitt funksjonen

$$f(x, y) = e^x \ln y \quad (2.38)$$

	5%
	15'

Finn de partiell deriverte til denne funksjonen.

Partiell derivert for x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \ln y) = \ln y \frac{\partial}{\partial x} (e^x) = e^x \ln y \quad (2.39)$$

hvor vi har brukt at $(e^x)' = e^x$.

Partiell derivert for y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \ln y) = e^x \frac{\partial}{\partial y} (\ln y) = e^x \frac{1}{y} = \frac{e^x}{y} \quad (2.40)$$

hvor vi har brukt at $(\ln y)' = \frac{1}{y}$.

b) Denne oppgaven dreier seg om tolkningen og forståelsen av den deriverte. Svar kort. Én setning per delspørsmål er nok.

	5%
	15'

i) Gi en tolkning av den deriverte $\frac{df(a)}{dx}$.

$$\begin{aligned} \frac{df(a)}{dx} &= \text{stigningstallet til tangenten til grafen i punktet } x = a \quad (2.41) \\ &= \text{stigningen i punktet } (a, f(a)) \text{ på grafen} \end{aligned}$$

(Det er nok å skrive én av disse setningene. Også andre formuleringer kan gi full score.)

ii) Hva er den deriverte til en funksjon et mål på?

Den deriverte er et mål på:

- *hvor raskt* en funksjonen endrer seg i punktet
- “*bratthet*” til funksjonen i det aktuelle punktet (Det er nok å skrive én av disse setningene. Også andre formuleringer kan gi full score.)

c) Anta at vi setter inn kapitalen K_0 i banken år 0. Renten er r .

Anta videre at kapitalen K_i ved år nr. i , rente inkludert, følger mønsteret

$$K_1 = K_0(1 + r) \quad \text{startledd} \quad (2.42)$$

$$K_{i+1} = K_i(1 + r) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.43)$$

i) Hva slags type følge utgjør lign.(2.42) og (2.43)?

Siden

$$\frac{K_{i+1}}{K_i} = 1 + r \quad (2.44)$$

er en konstant så er dette en geometrisk rekke.

ii) Finn et uttrykk for det i 'te leddet K_i .

For en geometrisk følge gjelder: (se læreboka)

$$K_i = K_1 k^{i-1} \quad (2.45)$$

Med $K_1 = K_0(1 + r)$ og $k = 1 + r$:

$$K_i = K_0(1 + r)(1 + r)^{i-1} = K_0(1 + r)^i \quad (2.46)$$



5%

15'

iii) Finn et uttrykk for summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n K_i \quad (2.47)$$

Summen av en geometrisk rekke: (se læreboka)

$$S_n = K_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (2.48)$$

Med $K_1 = K_0(1 + r)$ og $k = 1 + r$:

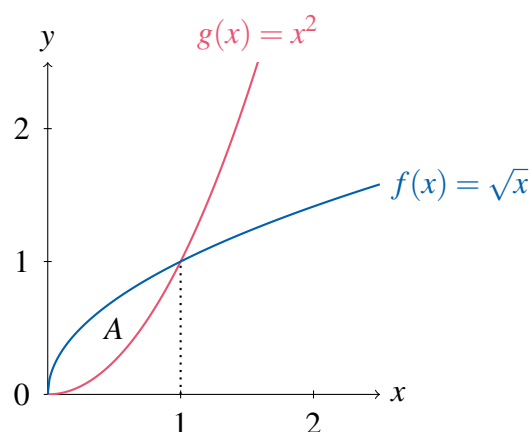
$$\begin{aligned} S_n &= K_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = K_0(1 + r) \frac{(1 + r)^n - 1}{1 + r - 1} \\ &= K_0(1 + r) \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \end{aligned} \quad (2.49)$$

d) Finn, ved hjelp av integrasjon, arealet A av området avgrenset av funksjonene

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (2.50)$$

$$g(x) = x^2$$

som vist i figur 2.



Figur 2: Arealet A .

Anti-deriverte: (Husk at: $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$)

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + c \quad (2.51)$$

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + \tilde{c} \quad (2.52)$$

Dermed: (integralsetningens fundamentalsats)

$$A = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \quad (2.53)$$

$$= \int_0^1 (f(x) - g(x))dx$$

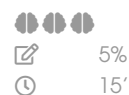
$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$$

$$= F(1) - F(0) - (G(1) - G(0))$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{3} 1^{3/2} + \cancel{c} \right) - \left(\frac{2}{3} 0^{3/2} + \cancel{c} \right) - \left(\left(\frac{1}{3} 1^3 + \cancel{c} \right) - \left(\frac{1}{3} 0^2 + \cancel{c} \right) \right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

e) Finn den deriverte av funksjonen ⁵

$$f(x) = 3 \log((x^2 + a^2)2\sqrt{x}) \quad (2.55)$$



Det er flere måter å løse denne oppgaven på. Man kan multiplisere inn $\sqrt{x}$ i lign.(2.55) og deretter bruke kjerneregelen én gang. I dette løsningsforslaget gjør vi det på en annen måte. Begge tilnærmelsene er omtrent like gode. Så lenge det er rett så gir begge tilnærmelsene like mye poeng.

Omskriving:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \log((x^2 + a^2)2\sqrt{x}) \\ &= 3 \log(x^2 + a^2) + 3 \log(2\sqrt{x}) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Legg merke til at det ikke er noen regnerelger for logaritmer som gjør at vi kan forenkle leddet $\log(x^2 + a^2)$.

Kjerneregelen. Ytre funksjon:

$$f(x) = g_1(u) + g_2(v) \quad (2.57)$$

hvor

$$g_1(u) = 3 \log(u) \quad , \quad g_2(v) = 3 \log(v) \quad (2.58)$$

med indre funksjoner

$$u = x^2 + a^2 \quad , \quad v = 2\sqrt{x} \quad (2.59)$$

Kjerneregelen:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= g'_1(u)u' + g'_2(v)v' \\ &= (3 \log u)'(x^2 + a^2)' + (3 \log v)'(2\sqrt{x}) \\ &= 3 \frac{1}{u \ln(10)} 2x + 3 \frac{1}{v \ln(10)} 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x}{(x^2 + a^2) \ln(10)} + \frac{3}{2\sqrt{x} \ln(10)} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x}{(x^2 + a^2) \ln(10)} + \frac{3}{2x \ln(10)} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dette uttrykket kan faktorerises. Men det er ikke en del av oppgaven. Oppgaven ber oss ikke faktorisere. Derfor stopper vi her.

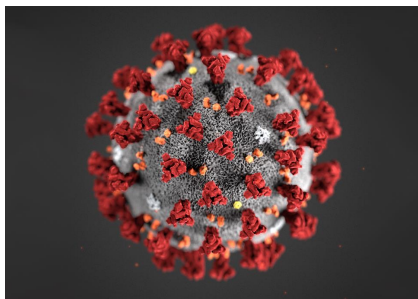
⁵Bruk at

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x \ln 10} \quad (2.54)$$

Oppgave 3 Spredning av Covid-19 optimering

●	7.5%
●●	7.5%
●●●●	10.0%
✍	25.0%
🕒	1t 15'

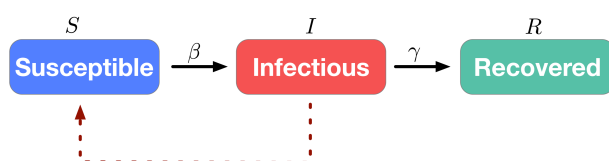
Covid-19 viruset herjer mer enn noensinne etter at den nye Omikron-varianten har oppstått. Vi skal i denne oppgaven modellere spredningen av Covid-19 gjennom en enkel modell kalt SIR-modellen.



Figur 3: Covid-19 viruset.

SIR-modellen antar følgende situasjon:

- Vi har en populasjon av totalt $N = 10$ individer som er konstant, dvs. at ingen nye individer kommer til eller faller fra.⁶
- En person må være i nøyaktig en av de følgende tilstandene:
 - S : personen er mottagelig for coronaviruset (**S**usceptible).
 - I : personen er smittet av coronaviruset og kan smitte andre individer (**I**nfectiuos).
 - R : personen kan ikke smitte andre individer og er immun (**R**ecovered).
- Anta ved tiden $t = 0$ at nøyaktig èt individ er smittet med Covid-19.
- Forløpet for en person blir dermed at man starter tilstand S , dvs. i usmittet tilstand, men mottagelig for smitte. Dersom man får kontakt med et smittsomt individ, dvs. et individ som er i tilstand I , kan man bli smittet selv. Da havner personen i tilstand I . Etter en viss tid havner personen i tilstand R .



Figur 4: De tre tilstandene et individ kan være i.

⁶En slik situasjon kan forekomme f.eks. på et skip, hvor man har et gitt antall individer. Vi antar at ingen individer kommer til (ingen blir født eller kommer ombord skipet) og ingen faller fra (ingen dør eller forlater skipet).

- Spredningen av Covid-19 styres i denne modellen av to viktige parametre:

β = gjennomsnittlig antall smitteoverførende kontakter per tidsenhet per mottagelig individ.

γ = gjennomsnittlig smittsom periode, dvs. antall dager man er smittsom.

Anta at $\beta = 1$ per dag. Det betyr at hvert mottagelig i individ populasjonen i gjennomsnitt har én smitteoverførende kontakt med resten av populasjonen hver dag.

Anta videre at $\gamma = 5$. Det betyr at man er smittsom i gjennomsnitt 5 dager (som betyr at man befinner seg i tilstand I i gjennomsnitt 5 dager).

- Basis reproduksjonstallet R_0 er definert som

$$R_0 = \beta\gamma \quad (3.61)$$

og beskriver i gjennomsnitt hvor mange mottagelige individer en smittet person smitter. Dersom $\beta = 1$ og $\gamma = 5$ så blir basis reproduksjonstallet $R_0 = 5$.

Vi definerer nå tre funksjoner som modellerer hvor mange individer som befinner seg i hver tilstand ved tiden t :

$$S(t) = \text{antall individer i tilstand } S \text{ ved tiden } t \quad (3.62)$$

$$I(t) = \text{antall individer i tilstand } I \text{ ved tiden } t \quad (3.63)$$

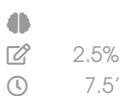
$$R(t) = \text{antall individer i tilstand } R \text{ ved tiden } t \quad (3.64)$$

- a) Begrunn kort hvorfor ligningen

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (3.65)$$

er korrekt under våre antagelser.

Lign.(3.65) er korrekt siden vi har antatt at antall individer er konstant lik N , og at et individ er i nøyaktig én av tilstandene S , I eller R til enhver tid.



Anta vi har følgende eksplisitte uttrykk for $S(t)$ og $R(t)$:⁷

$$S(t) = N \left(1 - e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} \right) \quad (3.66)$$

$$R(t) = N \left(e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad (3.67)$$

b) Vis at $I(t)$ er gitt ved funksjonen:

$$I(t) = N \left(e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} - e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad (3.68)$$



5%
15'

Fra oppgave 3a har vi at

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (3.69)$$

$\Updownarrow$

$$I(t) = N - S(t) - R(t) \quad (3.70)$$

Vi setter inn funksjonsuttrykkene fra lign.(3.66) og (3.67):

$$I(t) = N - S(t) - R(t) \quad (3.71)$$

$$= N - N \left(1 - e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} \right) - N \left(e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad (3.72)$$

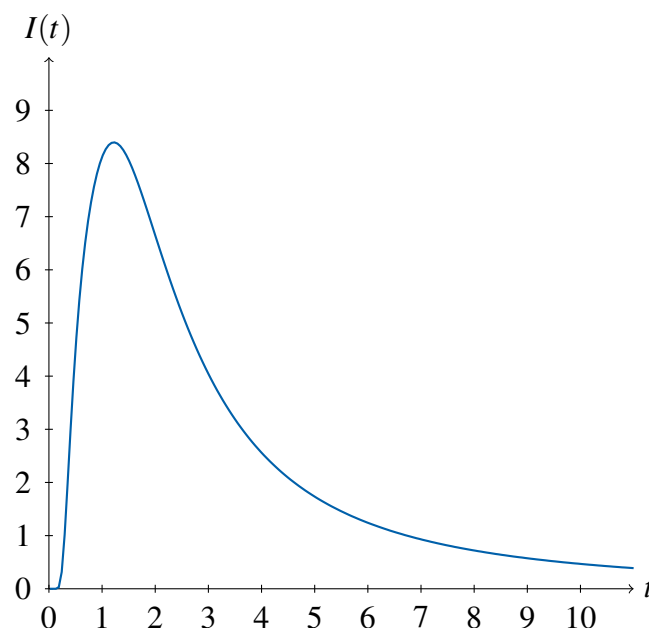
$$= \cancel{N} - \cancel{N} + N e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} - N e^{-\frac{R_0}{t^2}} \quad \Big/ N \text{ er felles faktor} \quad (3.73)$$

$$= N \left(e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} - e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad (3.74)$$

som skulle vises.

⁷At tiden t i lign.(3.66) og (3.67) er dimensjonsløs er en teknisk sak som dere ikke behøver å tenke på i denne eksamenen.

Funksjonen $I(t)$ gir oss antall smittede ved tiden t . Figur 5 viser oss at antall smittede har et maksimum når $R_0 = 5$. Det er av høy viktighet at vi kan beregne både når og hvor mange som er smittet når dette maksimumet inntreffer. Dette kommer av at presset på helsevesenet er høyest når $I(t)$ er maksimal.



Figur 5: Antall smittede I over tiden t .

- c) Vis at maksimalt antall smittede $I^* = I(t^*)$ inntreffer når ⁸

$$t^* = \sqrt{\frac{R_0^2 - 1}{2R_0 \ln(R_0)}} \quad (3.75)$$

7.5%
22.5'

Vi må vise at t^* er et kritisk punkt, dvs. at $S'(t^*) = 0$. Vi må derfor først finne den deriverte til S . Vi skriver om funksjonen med kjerner $u(t) = -\frac{1}{R_0 t^2}$ og $v(t) = -\frac{R_0}{t^2}$:

$$I(t) = N \left(e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} - e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) = N(e^u - e^v) \quad (3.76)$$

Kjerneregelen:

$$\frac{dI(t)}{dt} = N \frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} - e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad (3.77)$$

$$= N \frac{d}{du} e^u \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{R_0 t^2} \right) - N \frac{d}{dv} e^v \frac{d}{dt} \left(-\frac{R_0}{t^2} \right) \quad (3.78)$$

⁸Anta at dere *vet* at det kritiske punktet er et toppunkt, dvs. dere trenger *ikke* å vise at 2. derivasjons-testen gir et toppunkt.

$$= \frac{N}{R_0} e^u \frac{d}{dt} (-t^{-2}) - N R_0 e^u \frac{d}{dt} (-t^{-2}) \quad (3.79)$$

$$= \frac{N}{R_0} e^u 2t^{-3} - N R_0 e^v 2t^{-3} \quad (3.80)$$

$$= \frac{2N}{t^3} \left(\frac{1}{R_0} e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} - R_0 e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad (3.81)$$

Ifølge 1. derivasjonstesten finner vi de kritiske løsningene ved:

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (3.82)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2N}{t^3} \left(\frac{1}{R_0} e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} - R_0 e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) = 0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{t^3}{2N} \quad (3.83)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{R_0} e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} - R_0 e^{-\frac{R_0}{t^2}} = 0 \quad (3.84)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{R_0} e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} = R_0 e^{-\frac{R_0}{t^2}} \quad \Bigg/ \cdot R_0 \quad (3.85)$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} = R_0^2 e^{-\frac{R_0}{t^2}} \quad \Bigg/ \ln(-) \quad (3.86)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln \left(e^{-\frac{1}{R_0 t^2}} \right) = \ln \left(R_0^2 e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad \Bigg/ \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{R_0 t^2} = \ln(R_0^2) + \ln \left(e^{-\frac{R_0}{t^2}} \right) \quad \Bigg/ \ln a^b = b \ln a \quad (3.87)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R_0}{t^2} - \frac{1}{R_0 t^2} = 2 \ln(R_0) \quad \Bigg/ \cdot t^2 \quad (3.88)$$

$$\Downarrow$$

$$R_0 - \frac{1}{R_0} = 2 \ln(R_0) t^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{R_0^2 - 1}{R_0} = 2 \ln(R_0) t^2 \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{2 \ln(R_0)} \quad (3.89)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{R_0^2 - 1}{2 R_0 \ln(R_0)} = t^2 \quad \Bigg/ \sqrt{} \quad (3.90)$$

$$\Updownarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{R_0^2 - 1}{2 R_0 \ln(R_0)}} \quad \vee \quad t = -\sqrt{\frac{R_0^2 - 1}{2 R_0 \ln(R_0)}} \quad (3.91)$$

Siden $t \geq 0$ kan vi se vekk ifra den negative løsningen. Dermed har vi vist at det kritiske punktet er gitt ved

$$t^* = \sqrt{\frac{R_0^2 - 1}{2 R_0 \ln(R_0)}} \quad (3.92)$$

Fra fotnoten i oppgaven vet vi kan vi ikke trenger å utføre 2. derivasjonstesten. Vi kan dermed konkludere at dette ekstremalpunktet er et toppunkt.

Et av virkemidlene for å redusere det maksimale smitteantallet, er å innføre restriksjoner på antall kontakter man har per dag.

Nå er det ikke slik at hvis man kommer i kontakt med en smittsom person, så er det 100% sikkert at man faktisk blir smittet. Vi opererer derfor med en såkalt *smitteoverføringsandel* p . Anta at $p = 0.5$, som betyr at hvis man kommer i kontakt med en smittsom person, så vil man i 50% av tilfellene faktisk bli smittet.

Anta videre at antall kontakter mellom et mottagelig individ og et smittsomt individ er $k = 2$ ganger per dag. Vi kan da argumentere for at antall smitteoverførende kontakter β per dag er gitt ved

$$\beta = kp = 2 \cdot 0.5 = 1, \quad (3.93)$$

som er den verdien vi har brukt for β .

- d) Anta at samfunnet har kapasitet til å maksimalt kunne håndtere 6 smittede individer samtidig, og anta at man har innført en avstandsregel på 1 meter som har medført en reduksjon fra $k = 2$ til $k = 1$.

Vil denne avstandsregelen sørge for at man alltid vil ha færre enn 6 smittede individer samtidig?⁹

Vi beregner først ny verdi for β :

$$\beta = kp = 1 \cdot 0.5 = 0.5 \quad (3.94)$$

Deretter beregner vi ny verdi for R_0 :

$$R_0 = \beta\gamma = 0.5 \cdot 5 = 2.5 \quad (3.95)$$

Deretter må vi regne ut tidspunktet for når smittetallet er på sitt maksimale:

$$t^* = \sqrt{\frac{R_0^2 - 1}{2R_0 \ln(R_0)}} = \sqrt{\frac{2.5^2 - 1}{2 \cdot 2.5 \ln(2.5)}} \approx 1.07 \quad (3.96)$$

Til slutt beregner vi det maksimale smittetallet:

$$I(t^*) = N \left(e^{-\frac{1}{R_0 t^{*2}}} - e^{-\frac{R_0}{t^{*2}}} \right) \quad (3.97)$$

$$= 10 \left(e^{-\frac{1}{2.5(1.07)^2}} - e^{-\frac{2.5}{(1.07)^2}} \right) \quad (3.98)$$

$$= 5.92 \quad (3.99)$$

Siden $I(t^*) = 5.92 < 6$ kan vi konkludere at avstandsregelen er (såvidt) tilstrekkelig til at smittetallet aldri overgår 6 individer samtidig.

⁹Begrunn svaret ved å gjøre nødvendige beregninger. Dette er en «A»-oppgave, dvs. det er øvre del av «nivå 3» - ekstra vanskelig.

Oppgave 4 Diett problemet - hjørnepunktsmetoden

12.5%
7.5%
5.0%
25.0%
1t 15'

Toro er en kjent suppeprodusent. De planlegger å introdusere en ny type suppe med visse krav om næringsinnhold:

- Suppen må minst inneholde 240 enheter med kalsium.
- Suppen må minst inneholde 460 enheter med jern.
- Suppen kan ikke inneholde mer enn 300 enheter kolestrol.

I suppen kan vi velge mellom to typer råvarer som påvirker disse størrelsene:

- Råvaretype $R1$
- Råvaretype $R2$

Disse råvarene kan kun kjøpes i pakker, hvor hver pakke inneholder et visst antall enheter av kalsium, jern og kolestrol:

Antall enheter per pakke	Råvare $R1$	Råvare $R2$
Kalsium	12	3
Jern	4	20
Kolestrol	6	4

Tabell 1: Næringsinnhold per råvaretype.

En pakke av råvare $R1$ koster 6 kroner, mens en pakke av råvare $R2$ koster 3 kroner.

Toro ønsker å finne innkjøpsforholdet mellom antall pakker av råvare $R1$ og råvare $R2$, slik at innkjøpskostnadene minimeres samtidig som at kravene om næringsinnholdet er oppfylt.



Figur 6: Torofabrikken i Arna kommune.

De definerer dermed følgende variabler:

$$x = \text{antall pakker av råvare } R1 \quad (4.100)$$

$$y = \text{antall pakker av råvare } R2 \quad (4.101)$$

hvor de ønsker å minimere kostnaden

$$K(x, y) = 6x + 3y \quad (4.102)$$

slik at kravene

$$12x + 3y \geq 240 \quad (4.103)$$

$$4x + 20y \geq 460 \quad (4.104)$$

$$6x + 4y \leq 300 \quad (4.105)$$

er oppfylt.

Dette minimeringsproblemet kan løses ved hjelp av *hjørnepunktsmetoden*. Denne metoden kan oppsummeres i noen steg:

- Først må vi finne linjene som definerer omrisset av *mulighetsområdet*.¹⁰
- Deretter må vi finne hjørnene i mulighetsområdet.
- Deretter beregner vi kostnaden i hvert av hjørnepunktene.
- Det hjørnet som gir *lavest* kostnad, er den optimale løsningen.

¹⁰De lovlige punktene (x, y) som oppfyller kravene i lign.(4.103)-(4.105).

a) Vis at restriksjonene i lign.(4.103)-(4.105) kan skrives på formelen

$$y \geq 80 - 4x \quad (4.106)$$

$$y \geq 23 - \frac{1}{5}x \quad (4.107)$$

$$y \leq 75 - \frac{3}{2}x \quad (4.108)$$

Krav 1:

$$12x + 3y \geq 240 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{3} \quad (4.109)$$

$\Updownarrow$

$$4x + y \geq 80 \quad \bigg/ -4x \quad (4.110)$$

$\Updownarrow$

$$y \geq 80 - 4x \quad (4.111)$$

Krav 2:

$$4x + 20y \geq 460 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{20} \quad (4.112)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{1}{5}x + y \geq 23 \quad \bigg/ -\frac{1}{5}x \quad (4.113)$$

$\Updownarrow$

$$y \geq 23 - \frac{1}{5}x \quad (4.114)$$

Krav 3:

$$6x + 4y \leq 300 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{4} \quad (4.115)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{6}{4}x + \frac{4y}{4} \leq \frac{300}{4} \quad \bigg/ -\frac{3}{2}x \quad (4.116)$$

$\Updownarrow$

$$y \leq 75 - \frac{3}{2}x \quad (4.117)$$

b) Plott linjene

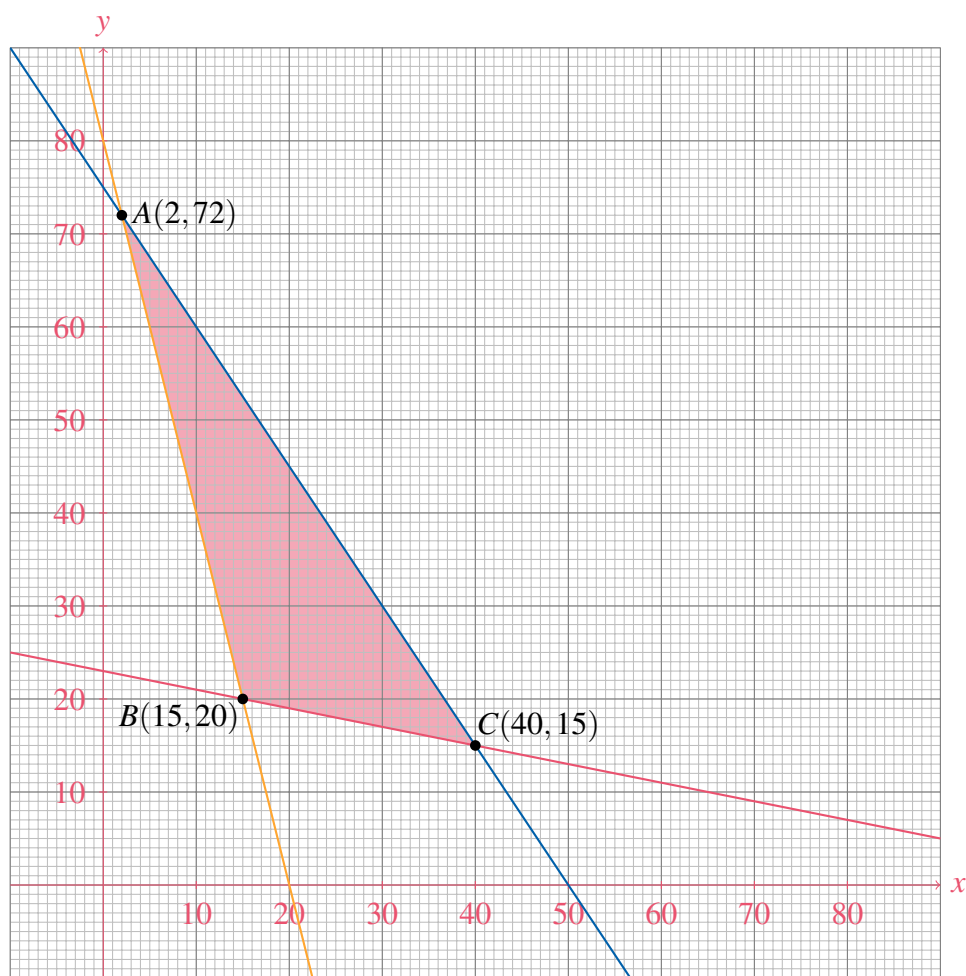
$$y = 80 - 4x \quad (4.118)$$

$$y = 23 - \frac{1}{5}x \quad (4.119)$$

$$y = 75 - \frac{3}{2}x \quad (4.120)$$

inn i koordinatsystemet i vedlegg bakerst i dette oppgavesettet. Linjene skal ikke krysse x - og y -aksene hhv. Skraver mulighetsområdet.

Mulighetsområdet:



Figur 7: Mulighetsområdet med tre hjørnepunkter A, B og C.

- c) Ett av hjørnepunktene er $(x, y) = (15, 20)$. Det er den kombinasjonen av råvarene som gir en kostnad på $K(15, 20) = 150$ kroner.¹¹

Regn ut de øvrige hjørnepunktene med tilhørende kostnader $K(x, y)$ og konkluder med at det oppgitte punktet $(15, 20)$ er det hjørnepunktet som gir optimal løsning.

Fra oppgave 4b vet vi at det er tre hjørnepunkter, deriblant hjørnepunktet $(x, y) = (15, 20)$ som oppgitt i oppgaven. Vi må derfor regne ut de to resterende skjæringspunktene og deretter sjekke de tilhørende kostnad $K(x, y)$. Til slutt må vi konkludere.

Skjæringspunkt mellom linjene for krav 1 og krav 3:

$$y = y \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{3} \quad (4.121)$$

$\Updownarrow$

$$80 - 4x = 75 - \frac{3}{2}x \quad \bigg/ 4x - 75 \quad (4.122)$$

$\Updownarrow$

$$80 - 75 = 4x - \frac{3}{2}x \quad (4.123)$$

$\Updownarrow$

$$5 = \frac{5}{2}x \quad (4.124)$$

$\Updownarrow$

$$10 = 5x \quad (4.125)$$

$\Updownarrow$

$$2 = x \quad (4.126)$$

Innsatt i linjen for krav 1:

$$y = 80 - 4 \cdot 2 = 72 \quad (4.127)$$

Skjæringspunktet er dermed gitt ved $(2, 72)$, og kostnaden for denne innkjøpskombinasjonen er:

$$K(2, 72) = 6x + 3y = 6 \cdot 2 + 3 \cdot 72 = 228 \quad (4.128)$$

Denne kostnaden er større enn 150 kroner som er kostnaden for hjørnepunktet $(15, 20)$.

¹¹Dette hjørnepunktet svarer skjæringspunktet til linjene for krav 1 og 2. Du skal ikke regne ut verdiene til dette hjørnepunktet. Bare ta de for gitt.

Skjæringspunkt mellom linjene for krav 2 og krav 3:

$$y = y \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{3} \quad (4.129)$$

$\Updownarrow$

$$23 - \frac{1}{5}x = 75 - \frac{3}{2}x \quad \bigg/ \frac{3}{2}x - 23 \quad (4.130)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{5}x = 75 - 23 \quad (4.131)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{15x}{10} - \frac{2x}{10} = 52 \quad (4.132)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{13x}{10} = 52 \quad \bigg/ \cdot \frac{10}{13} \quad (4.133)$$

$\Updownarrow$

$$x = 52 \cdot \frac{10}{13} = 40 \quad (4.134)$$

$\Updownarrow$

$$x = 40 \quad (4.135)$$

Innsatt i linjen for krav 2:

$$y = 23 - \frac{1}{5} \cdot 40 = 15 \quad (4.136)$$

Skjæringspunktet er dermed gitt ved $(x, y) = (40, 15)$, og kostnaden for denne innkjøpskombinasjonen er:

$$K(40, 15) = 6x + 3y = 6 \cdot 40 + 3 \cdot 15 = 285 \quad (4.137)$$

Denne kostnaden er større enn 150 kroner som er kostnaden for hjørnepunktet $(15, 20)$.

Konklusjon:

Siden de to andre hjørnepunkt løsningene gir høyere kostnad enn 150 kroner, kan vi konkludere at $(15, 20)$ gir optimal løsning.

d) Hva må prisen på råvare $R1$ være for at hjørnepunktet $(2, 72)$ skal bli optimalt? ¹²

La ny pris for råvare $R1$ være gitt ved p . Kostnaden er da gitt ved

$$K(x, y) = px + 3y \quad (4.138)$$

Siden, per antagelse i fotnoten, hjørnepunktet $(40, 15)$ ikke er optimalt, så er hjørnepunktet $(2, 72)$ optimalt (dvs. minst) dersom

$$K(2, 72) < K(15, 20) \quad (4.139)$$

$$\Updownarrow$$

$$2p + 3 \cdot 72 < 15p + 3 \cdot 20 \quad (4.140)$$

$$\Updownarrow$$

$$216 - 60 < 15p - 2p \quad (4.141)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{156}{13} < p \quad (4.142)$$

$$\Updownarrow$$

$$12 < p \quad (4.143)$$

Dersom prisen på råvare $R1$ blir større enn 12 kroner per pakke, dvs. $p > 12$ kroner, så vil hjørnepunktet $(2, 72)$ bli optimal innkjøpskombinasjon.

¹²Ta for gitt at hjørnepunktet $(40, 15)$ ikke er optimalt.

VEDLEGG A

Kandidatnummer: _____
(Skriv inn ditt kandidatnummer her)

