



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

Eksamen 2021 - ny og utsatt - MAT100 Matematikk

Vanskelighetsgrad	Andel oppgaver	Beskrivelse
●●	40.0%	Fornøyd med å stå, <i>E</i> eller <i>D</i> .
●●●●	40.0%	"Midt på treet", dvs. <i>C</i> .
●●●●●	20.0%	Sikter mot stjernene, <i>A</i> eller <i>B</i> .

Karakterskala:

100%–90%	→	<i>A</i>
80%–89%	→	<i>B</i>
60%–79%	→	<i>C</i>
50%–59%	→	<i>D</i>
40%–49%	→	<i>E</i>
0%–39%	→	<i>F</i> (stryk)

Tid 4t 54':

Tiden som står på hver deloppgave er kun **forventet** tidforbruk. Det er altså kun et estimat, og kan variere fra person til person. Det går helt fint å bruke litt mer eller litt mindre tid enn dette estimatet.

Fusk: Det er **ikke** lov å samarbeide med andre når man har hjemmeksamen.

Oppgave 1 Små, tekniske oppgaver

Denne oppgaven består av en rekke små oppgaver som er hentet fra ulike deler av pensum.

	15.0%
	10.0%
	0%
	25.0%
	1t 2'

- a) Finn felles faktor og forenkle uttrykket så mye som mulig.

$$3(x+1)^2(x-1) - 3(x+1)^3 \quad (1.1)$$

	2.5%
	5'

Faktoriserer: $(3(x+1)^2 \text{ er felles faktor})$

$$\begin{aligned} 3(x+1)^2(x-1) - 3(x+1)^3 &= 3(x+1)^2(x-1-(x+1)) \\ &= 3(x+1)^2(\cancel{x}-1-\cancel{x}-1) = 3(x+1)^2(-2) = -6(x+1)^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

- b) Løs ulikheten:

$$f(x) = -6(x+1)^2 \geq 0 \quad (1.3)$$

	5%
	5'

hvor x er et reelt tall.

Siden $(x+1)^2$ er positiv eller null for alle reelle x , dvs. $(x+1)^2 \geq 0$, så er

$$x = -1 \quad (1.4)$$

eneste løsning til lign.(1.3)

- c) Regn ut uten bruk av kalkulator. Vis mellomregninger.

$$\frac{(32 \cdot 10^{-5})(\frac{1}{4} \cdot 10^7)}{8 \cdot 10^2} \quad (1.5)$$

	2.5%
	7.5'

$$\frac{(32 \cdot 10^{-5})(\frac{1}{4} \cdot 10^7)}{8 \cdot 10^2} = \frac{32}{8 \cdot 4} \cdot 10^{-5} \cdot 10^7 \cdot 10^{-2} = \frac{32}{32} \cdot 10^{-5+7-2} = 1 \cdot 10^0 = 1 \quad (1.6)$$

d) Gitt følgen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$ bestemt ved

$$1, 2, 3, 4, \dots, 98, 99, 100 \quad (1.7)$$



i) Begrunn hvorfor følgen i lign.(1.7) er en aritmetisk følge.

ii) La S_n være summen av den tilhørende aritmetiske rekken, dvs. la:

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} a_i \quad (1.8)$$

Regn ut S_{100} .

i) Differens:

$$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1 \quad (1.9)$$

$$a_3 - a_2 = 3 - 2 = 1 \quad (1.10)$$

$$a_4 - a_3 = 4 - 3 = 1 \quad (1.11)$$

osv. så ser vi at differansen mellom to påfølgende ledd er konstant, $a_{i+1} - a_i = d$. Derfor er i lign.(1.7) en aritmetisk følge.

ii) Summen av en aritmetisk rekke er: (se boken)

$$S_n = n \left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (1.12)$$

Med $a_1 = 1$, $d = 1$ og $n = 100$ får vi:

$$S_{100} = 100 \left(1 + \frac{(100-1) \cdot 1}{2} \right) = 5050 \quad (1.13)$$

e) Gitt funksjonene:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^{3/2} + (x-2^2)(x-6^2) \quad , \quad g(x) = \frac{1}{8}x^{3/2} \quad (1.14)$$



Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene.¹

Skjæringspunkt(en) til funksjonene er bestemt av $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = g(x) \quad \text{skjæring} \quad (1.15)$$

$\Updownarrow$

$$\cancel{\frac{1}{8}x^{3/2}} + (x - 2^2)(x - 6^2) = \cancel{\frac{1}{8}x^{3/2}} \quad / - \frac{1}{8}x^{3/2} \quad (1.16)$$

$\Updownarrow$

$$(x - 2^2)(x - 6^2) = 0 \quad (1.17)$$

som har løsningene

$$x = 2^2 = 4 \quad \vee \quad x = 6^2 = 36 \quad (1.18)$$

Tilhørende funksjonsverdier er:

$$g(2^2) = \frac{1}{8}(2^2)^{3/2} = \frac{1}{8}2^3 = \frac{8}{8} = 1 \quad (1.19)$$

$$g(6^2) = \frac{1}{8}(6^2)^{3/2} = \frac{1}{8}6^3 = \frac{216}{8} = 27 \quad (1.20)$$

Skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$ er dermed:

$$(x, y) = (4, 1) \quad \text{og} \quad (x, y) = (36, 27) \quad (1.21)$$

f) Løs ligningsystemet

$$x + 5y = 2 \quad (1.22)$$

$$3x + 5y = 26 \quad (1.23)$$



5%

10'

Det er flere måter å løse et lineær ligningsystem på, blant annet via “innsetningsmetoden” eller “addisjonsmetoden.” I dette tilfellet velger vi “innsetningsmetoden”.

¹Husk at skjæringspunkt(en) har både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. (x, y) .

Løser m.h.p. x alene i lign.(1.22).

$$x = 2 - 5y \quad (1.24)$$

Setter dette uttrykket for x inn i lign.(1.23):

$$3x + 5y = 26 \quad \text{innsatt for } x \quad (1.25)$$

$$\Updownarrow$$

$$3(2 - 5y) + 5y = 26 \quad \text{“pilmetoden”} \quad (1.26)$$

$$\Updownarrow$$

$$6 - 15y + 5y = 26 \quad (1.27)$$

$$\Updownarrow$$

$$-10y = 26 - 6 \quad / -\frac{1}{10} \quad (1.28)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = -2 \quad (1.29)$$

Via lign.(1.24) finner vi da x :

$$x = 2 - 5(-2) \quad \text{innsatt for } y = -2 \quad (1.30)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 2 + 10 \quad (1.31)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 12 \quad (1.32)$$

Løsningen til ligningsystemet er dermed: $(x, y) = (12, -2)$.

Oppgave 2 Små, tekniske oppgaver

Denne oppgaven består av en rekke små oppgaver som er hentet fra ulike deler av pensum.

	5.0%
	20.0%
	0%
	25.0%
	1t 15'

a) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{12}e^{\frac{3}{2}x^2} \quad (2.33)$$

	5%
	20'

i punktet $x = 2$. Skriv svaret på eksakt form.

Sammensatt funksjon:

$$f(x) = \frac{1}{12}e^{\frac{3}{2}x^2} \quad (2.34)$$

hvor

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \quad (2.35)$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjernen)} \quad (2.36)$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(u(x)) \quad (2.37)$$

hvor

$$g(u) = \frac{1}{12}e^u \quad (\text{ytre funksjon}) \quad (2.38)$$

$$u(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad (\underbrace{\text{indre funksjon}}_{\text{kjerne}}) \quad (2.39)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\frac{1}{12}e^u\right)' \left(\frac{3}{2}x^2\right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (2.40)$$

$$= g'(u)u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (2.41)$$

$$= \left(\frac{1}{12}e^u\right)' \left(\frac{3}{2}x^2\right)' \quad (2.42)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12} e^u \right)' \left(\frac{3}{2} x^2 \right)' \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{12} e^u 3x \quad \text{sett inn } u = \frac{3}{2} x^2 \quad (2.44)$$

$$= \frac{x}{4} e^{\frac{3}{2} x^2} \quad (2.45)$$

Innsatt for $x = 2$ gir oss stigningstallet i punktet:

$$f'(2) = \frac{2}{4} e^{\frac{3}{2} 2^2} = \frac{1}{2} e^6 \quad (2.46)$$

b) Bruk fundamentalsetningen for aritmetikk og faktoreriser følgende naturlige tall:

$$i) \quad 8 \quad (2.47)$$

$$ii) \quad 9 \quad (2.48)$$

$$iii) \quad 8 \quad (2.49)$$

$$iv) \quad 21 \quad (2.50)$$



$$i) \quad 8 = 2^3 \quad (2 \text{ er primtall}) \quad (2.51)$$

$$ii) \quad 9 = 3^2 \quad (3 \text{ er primtall}) \quad (2.52)$$

$$iii) \quad 12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2 \quad (3 \text{ og } 2 \text{ er primtall})$$

$$iv) \quad 21 = 3 \cdot 7 \quad (3 \text{ og } 7 \text{ er primtall}) \quad (2.53)$$

c) Anta at vi setter inn kapitalen $K(0)$ i banken år 0. Renten r er konstant.

Anta videre at kapitalen $K(i)$ ved år nr. i , rente inkludert, følger mønsteret

$$K(0)(1+r), K(0)(1+r)^2, K(0)(1+r)^3, \dots, K(0)(1+r)^i, \dots \quad (2.54)$$



hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

i) Skriv ned, uten utregning, et uttrykk for kapitalen $K(i)$ etter i år. Dette uttrykket kalles ofte “*renteformelen*”.

ii) Hva slags type følge utgjør lign.(2.54)? Hva er vekstfaktoren i dette tilfellet?

iii) Finn et uttrykk for summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n K(i) \quad (2.55)$$

i) Uttrykk for kapitalen $K(i)$ etter i år er:

$$K(i) = K(0)(1+r)^i \quad (2.56)$$

som altså kalles “*renteformelen*”.

ii) Siden

$$k = \frac{K(i+1)}{K(i)} = 1+r \quad (2.57)$$

så er dette en geometrisk rekke med $k = 1+r$ som vekstfaktor.

iii) Summen av en geometrisk rekke: (se boken)

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (2.58)$$

Med $k = 1+r$ og $a_1 = K(0)(1+r)$:

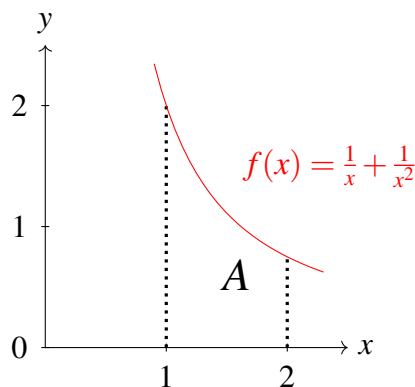
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n K(i) = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \\ &= K(0)(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = K(0)(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \end{aligned} \quad (2.59)$$

d) Finn arealet A avgrenset av funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (2.60)$$

og intervallet $[a, b] = [1, 2]$, dvs. finn:

$$A = \int_1^2 f(x) dx \quad (2.61)$$



Figur 1: Arealet A.

Den antideriverte av $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ er:

$$F(x) = \ln x - x^{-1} + c = \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (2.62)$$

hvor c er en konstant. Dette innser vi ved å gå baklengs:

$$F'(x) = (\ln x - x^{-1} + c)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Fundamentalsetningen for integral gir da:

$$A = \int_1^2 f(x) dx \quad (2.63)$$

$$= F(2) - F(1) \quad (2.64)$$

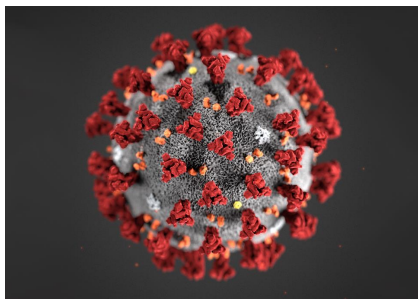
$$= \left(\ln 2 - \frac{1}{2} + c \right) - \left(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{1} + c \right) \quad (2.65)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \quad (2.66)$$

Oppgave 3 Spredning av Covid-19 optimering

10.0%
0%
15.0%
25.0%
1t 15'

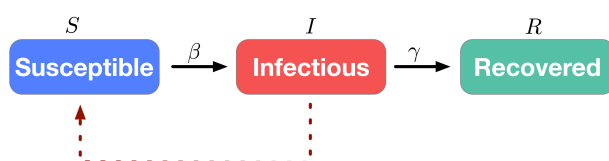
Covid-19 viruset herjer mer enn noensinne etter at den nye Omikron-varianten har oppstått. Vi skal i denne oppgaven modellere spredningen av Covid-19 gjennom en enkel modell kalt SIR-modellen.



Figur 2: Covid-19 viruset.

SIR-modellen antar følgende situasjon:

- Vi har en populasjon av totalt $N = 10$ individer som er konstant, dvs. at ingen nye individer kommer til eller faller fra.²
- En person må være i nøyaktig en av de følgende tilstandene:
 - S : personen er mottagelig for coronaviruset (**S**usceptible).
 - I : personen er smittet av coronaviruset og kan smitte andre individer (**I**nfectiuos).
 - R : personen kan ikke smitte andre individer og er immun (**R**ecovered).
- Anta ved tiden $t = 0$ at nøyaktig èt individ er smittet med Covid-19.
- Forløpet for en person blir dermed at man starter tilstand S , dvs. i usmittet tilstand, men mottagelig for smitte. Dersom man får kontakt med et smittsomt individ, dvs. et individ som er i tilstand I , kan man bli smittet selv. Da havner personen i tilstand I . Etter en viss tid havner personen i tilstand R .



Figur 3: De tre tilstandene et individ kan være i.

²En slik situasjon kan forekomme f.eks. på et skip, hvor man har et gitt antall individer. Vi antar at ingen individer kommer til (ingen blir født eller kommer ombord skipet) og ingen faller fra (ingen dør eller forlater skipet).

- Spredningen av Covid-19 styres i denne modellen av to viktige parametre:

β = gjennomsnittlig antall smitteoverførende kontakter per tidsenhet per mottagelig individ.

γ = gjennomsnittlig smittsom periode, dvs. antall dager man er smittsom.

Anta at $\beta = 1$ per dag. Det betyr at hvert mottagelig i individ populasjonen i gjennomsnitt har én smitteoverførende kontakt med resten av populasjonen hver dag.

Anta videre at $\gamma = 5$. Det betyr at man er smittsom i gjennomsnitt 5 dager (som betyr at man befinner seg i tilstand I i gjennomsnitt 5 dager).

- Basis reproduksjonstallet R_0 er definert som

$$R_0 = \beta\gamma \quad (3.67)$$

og beskriver i gjennomsnitt hvor mange mottagelige individer en smittet person smitter. Dersom $\beta = 1$ og $\gamma = 5$ så blir basis reproduksjonstallet $R_0 = 5$.

Vi definerer nå tre funksjoner som modellerer hvor mange individer som befinner seg i hver tilstand ved tiden t :

$$S(t) = \text{antall individer i tilstand } S \text{ ved tiden } t \quad (3.68)$$

$$I(t) = \text{antall individer i tilstand } I \text{ ved tiden } t \quad (3.69)$$

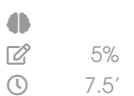
$$R(t) = \text{antall individer i tilstand } R \text{ ved tiden } t \quad (3.70)$$

Siden populasjonens antall N er konstant og at man kun kan være i en av tilstandene til enhver tid, må ligningen

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (3.71)$$

være korrekt.

- a) Funksjonene $S(t)$, $I(t)$ og $R(t)$ er ukjente. Men anta nå at vi har vi kjenner $S(t)$ og $R(t)$, men ikke $I(t)$.



Hvordan kan vi da i prinsipp finne et uttrykk for $I(t)$? ³

Siden vi kjenner $S(t)$ og $R(t)$ så har vi kun én ukjent igjen, nemlig $I(t)$. Med én ukjent trenger vi kun én ligning for å bestemme denne. Og det har vi via lign.(3.71).

³Hvor mange ligninger har vi, og hvor mange ukjente?

Anta vi har følgende eksplisitte uttrykk for $S(t)$ og $R(t)$:⁴

$$S(t) = \frac{N}{1 + R_0 t} \quad t > 0 \quad (3.72)$$

$$R(t) = N \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{t}{R_0}} \right) \quad (3.73)$$

b) Vis at $I(t)$ er gitt ved funksjonen:

$$I(t) = N \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{R_0}} - \frac{1}{1 + R_0 t} \right) \quad (3.74)$$



5%
15'

Fra oppgave 3a har vi at

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (3.75)$$

$\Updownarrow$

$$I(t) = N - S(t) - R(t) \quad (3.76)$$

Vi setter inn funksjonsuttrykkene fra lign.(3.72) og (3.73):

$$I(t) = N - S(t) - R(t) \quad (3.77)$$

$$= N - \frac{N}{1 + R_0 t} - N \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{t}{R_0}} \right) \quad (3.78)$$

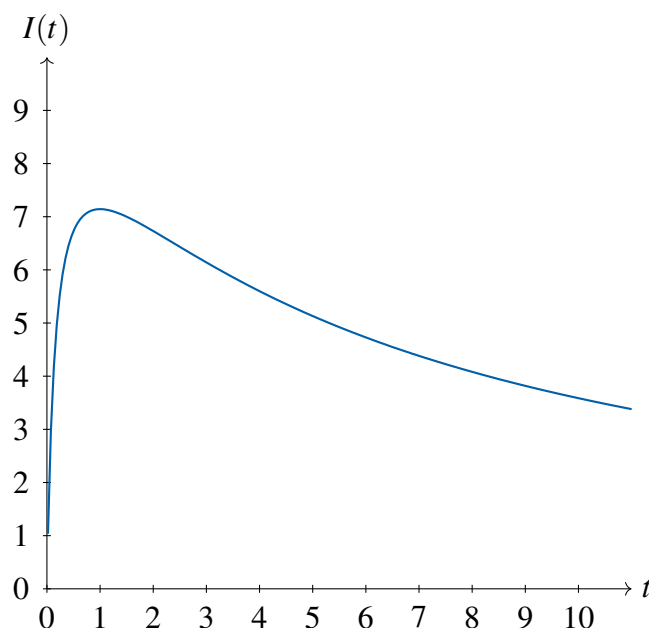
$$= \cancel{N} - \frac{N}{1 + R_0 t} - \cancel{N} + N \frac{1}{1 + \frac{t}{R_0}} \quad \text{ / } N \text{ er felles faktor} \quad (3.79)$$

$$= N \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{R_0}} - \frac{1}{1 + R_0 t} \right) \quad (3.80)$$

som skulle vises.

⁴At tiden t i lign.(3.72) og (3.73) er dimensjonsløs er en teknisk sak som dere ikke behøver å tenke på i denne eksamenen.

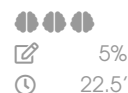
Funksjonen $I(t)$ gir oss antall smittede ved tiden t . Figur 4 viser oss at antall smittede har et maksimum når $R_0 = 6$. Det er av høy viktighet at vi kan beregne både når og hvor mange som er smittet når dette maksimumet inntreffer. Dette kommer av at presset på helsevesenet er høyest når $I(t)$ er maksimal.



Figur 4: Antall smittede $I(t)$ som funksjon av tiden t for tilfellet $R_0 = 6$.

- c) Vis at maksimalt antall smittede $I^* = I(t^*)$ inntreffer når ⁵

$$t^* = 1 \quad (3.81)$$



Vi må vise at t^* er et kritisk punkt, dvs. at $S'(t^*) = 0$. Vi må derfor først finne den deriverte til S . Vi skriver om funksjonen med kjerner $u(t) = 1 + \frac{t}{R_0}$ og $v(t) = 1 + R_0 t$:

$$I(t) = N \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{R_0}} - \frac{1}{1 + R_0 t} \right) = N \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right) \quad (3.82)$$

Kjerneregelen:

$$\frac{dI(t)}{dt} = N \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{R_0}} - \frac{1}{1 + R_0 t} \right) \quad (3.83)$$

$$= N \frac{d}{du} (u^{-1}) \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{t}{R_0} \right) - N \frac{d}{dv} (v^{-1}) \frac{d}{dt} (1 + R_0 t) \quad (3.84)$$

⁵Anta at dere *vet* at det kritiske punktet er et toppunkt, dvs. dere trenger *ikke* å vise at 2. derivasjons-testen gir et toppunkt.

$$= N(-u^{-2}) \left(\frac{1}{R_0} \right) - N(-v^{-2}) R_0 \quad (3.85)$$

$$= N \left(\frac{R_0}{(1+R_0 t)^2} - \frac{\frac{1}{R_0}}{\left(1 + \frac{t}{R_0}\right)^2} \right) \quad (3.86)$$

Ifølge 1. derivasjonstesten finner vi de kritiske løsningene ved:

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad (3.87)$$

$\Updownarrow$

$$N \left(\frac{R_0}{(1+R_0 t)^2} - \frac{\frac{1}{R_0}}{\left(1 + \frac{t}{R_0}\right)^2} \right) = 0 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{N} \quad (3.88)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{R_0}{(1+R_0 t)^2} - \frac{\frac{1}{R_0}}{\left(1 + \frac{t}{R_0}\right)^2} = 0 \quad \text{snur brøken} \quad (3.89)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{(1+R_0 t)^2}{R_0} = \frac{\left(1 + \frac{t}{R_0}\right)^2}{\frac{1}{R_0}} \quad \bigg/ \cdot R_0 \quad (3.90)$$

$\Updownarrow$

$$(1+R_0 t)^2 = R_0^2 \left(1 + \frac{t}{R_0}\right)^2 \quad (3.91)$$

$\Updownarrow$

$$(1+R_0 t)^2 = (R_0 + t)^2 \quad (3.92)$$

Når vi tar kvadratroten av lign.(3.92) så kan vi ha både positive og negative løsninger:

i) Positiv:

$$1+R_0 t = R_0 + t \quad (3.93)$$

$\Updownarrow$

$$R_0 t - t = R_0 - 1 \quad (3.94)$$

$\Updownarrow$

$$t(R_0 - 1) = (R_0 - 1) \quad (3.95)$$

$$\Updownarrow$$

$$t = 1 \quad (3.96)$$

ii) Negativ:

$$1 + R_0 t = -(R_0 + t) \quad (3.97)$$

$$\Updownarrow$$

$$R_0 t + t = -R_0 - 1 \quad (3.98)$$

$$\Updownarrow$$

$$t(R_0 - 1) = -(R_0 - 1) \quad (3.99)$$

$$\Updownarrow$$

$$t = -1 \quad (3.100)$$

Fra lign.(3.72) vet vi at $t > 0$. Dermed har vi vist at det kritiske punktet er gitt ved

$$t^* = 1 \quad (3.101)$$

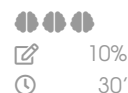
Fra fotnoten i oppgaven vet vi at vi ikke trenger å utføre 2. derivasjonstesten. Vi kan dermed konkludere at dette ekstremalpunktet er et toppunkt.

En viktig størrelse å ha kontroll på under en pandemi er *gjennomsnittlig* antall smittede over en gitt tidsperiode $[0, T]$, hvor $T > 0$ er lengden på intervallet. Vi betegner størrelsen ved $\bar{I}_T$ og er definert ved integralet:⁶

$$\bar{I}_T = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt \quad (3.102)$$

d) Finn et kompakt, analytisk uttrykk for $\bar{I}_T$.

Regn deretter ut den numeriske verdien for $\bar{I}_T$ for $N = 10$, $T = 10$ og $R_0 = 6$.
Bruk 4 desimalers nøyaktighet.⁷



Innsatt for $I(t)$ fra lign.(3.74):

$$\bar{I}_T = \frac{N}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{R_0}} - \frac{1}{1 + R_0 t} \right) dt \quad (3.103)$$

La $F(t)$ være antiderivert til integranden i lign.(3.103). Vi har da at

$$F(t) = \ln \left(1 + \frac{t}{R_0} \right) R_0 - \ln(1 + R_0 t) \frac{1}{R_0} \quad (3.104)$$

Dette kan sjekkes ved å derivere F mhp. t og verifisere at vi får tilbake integranden. Vi kan skrive integranden in lign.(3.104) mer kompakt:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{R_0} \left[\ln \left(1 + \frac{t}{R_0} \right) R_0^2 - \ln(1 + R_0 t) \right] & / p \ln a = \ln a^p \\ &= \frac{1}{R_0} \ln \left(\frac{(1 + \frac{t}{R_0})^{R_0^2}}{1 + R_0 t} \right) & / \ln a - \ln b = \ln \left(\frac{a}{b} \right) \end{aligned} \quad (3.105)$$

Fundamentalsatsen for integral:

$$\bar{I}_T = \frac{N}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{R_0}} - \frac{1}{1 + R_0 t} \right) dt \quad (3.106)$$

$$= \frac{N}{T} (F(T) - F(0)) \quad (3.107)$$

⁶Dette tallet brukes f.eks. til å dimensjonere kapasiteten ved helsevesenet, siden det forteller oss hvor mange som er smittet i gjennomsnitt over tidsperioden T .

⁷Dette er en «A»-oppgave, dvs. det er øvre del av «nivå 3» - ekstra vanskelig. Dersom du har dårlig tid, så bruk heller tiden på andre oppgaver.

$$\begin{aligned}
&= \frac{N}{TR_0} \left[\ln \left(\frac{(1 + \frac{T}{R_0})^{R_0^2}}{1 + R_0 T} \right) - \overbrace{\ln \left(\frac{(1 + \frac{0}{R_0})^{R_0^2}}{1 + R_0 0} \right)}^{=0} \right] \\
&= \frac{N}{TR_0} \ln \left(\frac{(1 + \frac{T}{R_0})^{R_0^2}}{1 + R_0 T} \right)
\end{aligned}$$

som er et kompakt, analytisk uttrykk for $\bar{I}_T$.

Regner ut den numeriske verdien for $\bar{I}_T$ for $N = 10$, $T = 10$ og $R_0 = 6$:

$$\bar{I}_T = \frac{N}{TR_0} \ln \left(\frac{(1 + \frac{T}{R_0})^{R_0^2}}{1 + R_0 T} \right) = \frac{10}{10 \cdot 2} \ln \left(\frac{(1 + \frac{10}{2})^{2^2}}{1 + 2 \cdot 10} \right) \approx 5.1998 \quad (3.108)$$

Oppgave 4 Diett problemet - hjørnepunktsmetoden

10.0%
10.0%
5.0%
25.0%
1t 22'

Toro er en kjent suppeprodusent. De planlegger å introdusere en ny type suppe med visse krav om næringsinnhold:

- Suppen kan ikke inneholde mer enn 280 enheter med sukker.
- Suppen kan ikke inneholde mer enn 240 enheter kolesterol.
- Suppen må minst inneholde 320 enheter med jern.

I suppen kan vi velge mellom to typer råvarer som påvirker disse størrelsene:

- Råvaretype $R1$
- Råvaretype $R2$

Disse råvarene kan kun kjøpes i pakker, hvor hver pakke inneholder et visst antall enheter av sukker, kolesterol og jern:

Antall enheter per pakke	Råvare $R1$	Råvare $R2$
sukker	7	4
kolesterol	3	4
jern	4	8

Tabell 1: Næringsinnhold per råvaretype.

En pakke av råvare $R1$ koster 6 kroner, mens en pakke av råvare $R2$ koster 3 kroner.

Toro ønsker å finne innkjøpsforholdet mellom antall pakker av råvare $R1$ og råvare $R2$, slik at innkjøpskostnadene minimeres samtidig som at kravene om næringsinnholdet er oppfylt.



Figur 5: Torofabrikken i Arna kommune.

De definerer dermed følgende variabler:

$$x = \text{antall pakker av råvare } R1 \quad (4.109)$$

$$y = \text{antall pakker av råvare } R2 \quad (4.110)$$

hvor de ønsker å minimere kostnaden

$$K(x, y) = 6x + 3y \quad (4.111)$$

slik at kravene

$$7x + 4y \leq 280 \quad (\text{krav 1}) \quad (4.112)$$

$$3x + 4y \leq 240 \quad (\text{krav 2}) \quad (4.113)$$

$$4x + 8y \geq 320 \quad (\text{krav 3}) \quad (4.114)$$

er oppfylt.

Dette minimeringsproblemet kan løses ved hjelp av *hjørnepunktsmetoden*. Denne metoden kan oppsummeres i noen steg:

- Først må vi finne linjene som definerer omrisset av *mulighetsområdet*.⁸
- Deretter må vi finne hjørnene i mulighetsområdet.
- Deretter beregner vi kostnaden i hvert av hjørnepunktene.
- Det hjørnet som gir *lavest* kostnad, er den optimale løsningen.

a) Vis at restriksjonene i lign.(4.112)-(4.114) kan skrives på formelen

$$y \leq 70 - \frac{7}{4}x \quad (\text{krav 1}) \quad (4.115)$$

$$y \leq 60 - \frac{3}{4}x \quad (\text{krav 2}) \quad (4.116)$$

$$y \geq 40 - \frac{1}{2}x \quad (\text{krav 3}) \quad (4.117)$$

⁸De lovlige punktene (x, y) som oppfyller kravene i lign.(4.112)-(4.114).

Krav 1:

$$7x + 4y \leq 280 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{4} \quad (4.118)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{7}{4}x + y \leq 70 \quad \bigg/ -\frac{7}{4}x \quad (4.119)$$

$\Updownarrow$

$$y \leq 70 - \frac{7}{4}x \quad (4.120)$$

Krav 2:

$$3x + 4y \leq 240 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{4} \quad (4.121)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{3}{4}x + y \leq 60 \quad \bigg/ -\frac{3}{4}x \quad (4.122)$$

$\Updownarrow$

$$y \leq 60 - \frac{3}{4}x \quad (4.123)$$

Krav 3:

$$4x + 8y \geq 320 \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{8} \quad (4.124)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{1}{2}x + y \geq 40 \quad \bigg/ -\frac{1}{2}x \quad (4.125)$$

$\Updownarrow$

$$y \geq 40 - \frac{1}{2}x \quad (4.126)$$

b) Plott linjene

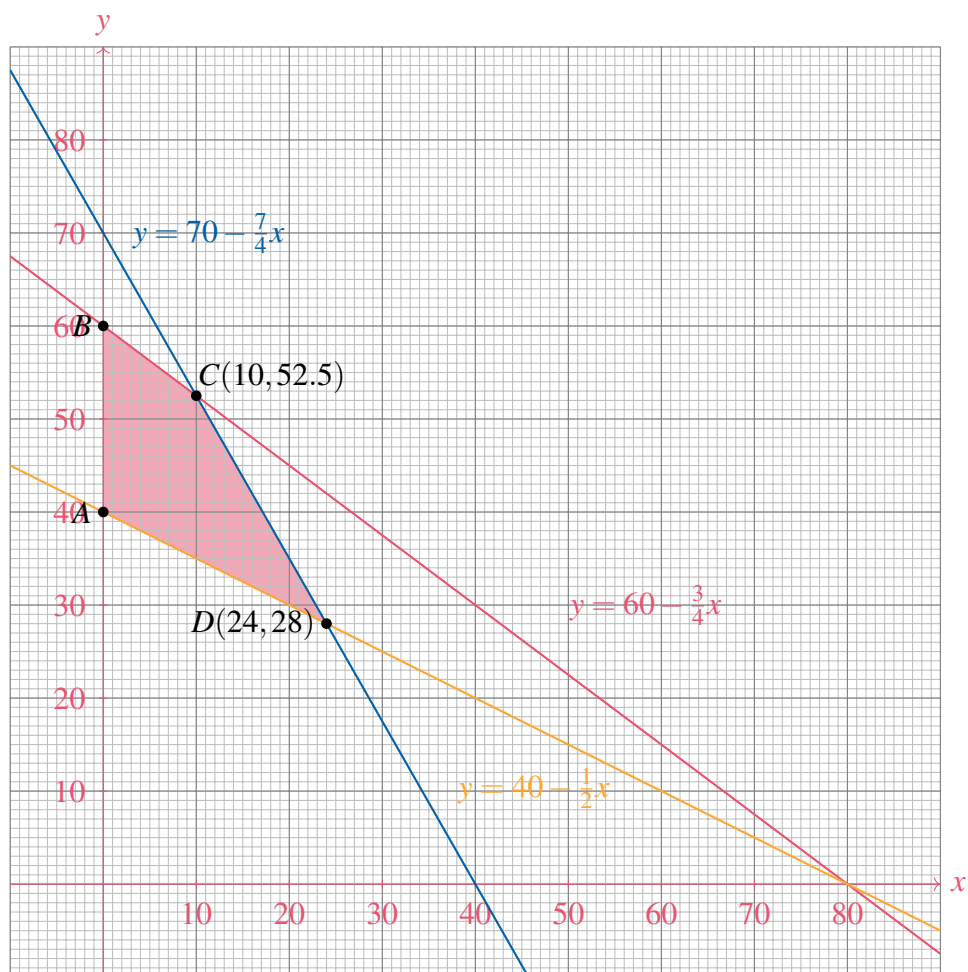
$$y = 70 - \frac{7}{4}x \quad (\text{krav 1}) \quad (4.127)$$

$$y = 60 - \frac{3}{4}x \quad (\text{krav 2}) \quad (4.128)$$

$$y = 40 - \frac{1}{2}x \quad (\text{krav 3}) \quad (4.129)$$

inn i koordinatsystemet i vedlegg bakerst i dette oppgavesettet. Linjene skal ikke krysse x - og y -aksene hhv. Skraver mulighetsområdet.

Mulighetsområdet:



Figur 6: Mulighetsområdet med tre hjørnepunkter A, B, C og D.

- c) Ett av hjørnepunktene er $(x, y) = (0, 40)$. Det er den kombinasjonen av råvarene som gir en kostnad på $K(0, 40) = 120$ kroner.⁹

Regn ut de øvrige hjørnepunktene med tilhørende kostnader $K(x, y)$ og konkluder med at det oppgitte punktet $(0, 40)$ er det hjørnepunktet som gir optimal løsning.

Fra oppgave 4b vet vi at det er fire hjørnepunkter, deriblant hjørnepunktet $(x, y) = (0, 40)$ som oppgitt i oppgaven. Vi må derfor regne ut de tre resterende skjæringspunktene og deretter sjekke de tilhørende kostnadene $K(x, y)$. Til slutt må vi konkludere.

Skjæringspunkt mellom linjene for krav 1 og krav 3:

$$y = y \quad (4.130)$$

$\Updownarrow$

$$70 - \frac{7}{4}x = 40 - \frac{1}{2}x \quad \Bigg/ \frac{3}{2}x - 50 \quad (4.131)$$

$\Updownarrow$

$$70 - 40 = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}x \quad (4.132)$$

$\Updownarrow$

$$30 = \frac{5}{4}x \quad \Bigg/ \cdot \frac{4}{5} \quad (4.133)$$

$\Updownarrow$

$$24 = x \quad (4.134)$$

Innsatt i linjen for krav 3:

$$y = 40 - \frac{1}{2} \cdot 24 = 28 \quad (4.135)$$

Skjæringspunktet er dermed gitt ved $(24, 28)$, og kostnaden for denne innkjøpskombinasjonen er:

$$K(24, 28) = 6x + 3y = 6 \cdot 24 + 3 \cdot 28 = 228 \quad (4.136)$$

Denne kostnaden er større enn 120 kroner som er kostnaden for hjørnepunktet $(0, 40)$.

⁹Du skal ikke regne ut verdiene til dette hjørnepunktet. Bare ta de for gitt.

Skjæringspunkt mellom linjene for krav 1 og krav 2:

$$y = y \quad \quad \quad / \cdot \frac{1}{3} \quad \quad \quad (4.137)$$

$\Updownarrow$

$$70 - \frac{7}{4}x = 60 - \frac{3}{4}x \quad \quad \quad / \frac{7}{4}x - 60 \quad \quad \quad (4.138)$$

$\Updownarrow$

$$70 - 60 = \frac{7}{4}x - \frac{3}{4}x \quad \quad \quad (4.139)$$

$\Updownarrow$

$$10 = x \quad \quad \quad (4.140)$$

Innsatt i linjen for krav 2:

$$y = 60 - \frac{3}{4} \cdot 10 = 52.5 \quad \quad \quad (4.141)$$

Skjæringspunktet er dermed gitt ved $(x, y) = (10, 52.5)$, og kostnaden for denne innkjøpskombinasjonen er:

$$K(10, 52.5) = 6x + 3y = 6 \cdot 10 + 3 \cdot 52.5 = 217.5 \quad \quad \quad (4.142)$$

Kostnaden for innkjøpskombinasjonen $(x, y) = (0, 60)$ er:

$$K(0, 60) = 6x + 3y = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 60 = 180 \quad \quad \quad (4.143)$$

Konklusjon:

Det hjørnepunktet som gir minst kostnad er $(x, y) = (0, 40)$, som da er optimal løsning.

- d) Hva må prisen på råvare $R2$ være for at hjørnepunktet $(x,y) = (24,28)$ skal gi en lavere kostnad enn hjørnepunktet $(x,y) = (0,40)$?

La ny pris for råvare $R2$ være gitt ved p . Kostnaden er da gitt ved

$$K(x,y) = 6x + py \quad (4.144)$$

Dersom hjørnepunktet $(x,y) = (24,28)$ skal gi en lavere kostnad enn hjørnepunktet $(x,y) = (0,40)$, så er:

$$K(24,28) < K(0,40) \quad (4.145)$$

$\Updownarrow$

$$6 \cdot 24 + p28 < 6 \cdot 0 + p40 \quad (4.146)$$

$\Updownarrow$

$$144 + 28p < 40p \quad (4.147)$$

$\Updownarrow$

$$144 < 40p - 28p \quad (4.148)$$

$\Updownarrow$

$$p > 12 \quad (4.149)$$

Prisen på råvare $R2$ må økes til mer enn 12 kroner per pakke, dvs. $p > 12$ kroner, for at kostanden $K(x,y)$ assosiert med hjørnepunktet $(x,y) = (24,28)$ skal være mindre enn kostnaden til punktet $(x,y) = (0,40)$.

VEDLEGG A

Kandidatnummer: _____
(Skriv inn ditt kandidatnummer her)

