Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

1. Grunnleggende algebra

Dag 1: Oppgaver

"*MAT100 Matematikk*", 2021

versjon 01

- Disse oppgavene er de vi har planlagt skal jobbes med på dag 1 i kurset.

- Hvis man ikke får gjennomført alle oppgavene ila dagen, *ikke noe problem*! Det er ikke om å gjøre å komme lengst mulig, det viktigste er at man prøver selv så godt man kan. Gå heller gjennom oppgavene ved en senere anledning.

- Hvis man sitter fast, spør på Discord under den tråden som omhandler oppgaven du sitter fast på. Der får du raskt hjelp av enten medstudenter eller hjelpelærer/faglærere.

- Når man spør om hjelp, ta bilde av hva du har gjort og paste dette inn i tråden. Da blir det mye enklere å hjelpe deg. Vi har en funksjon som kan gjøre deg anonym, dersom du foretrekker det, bare skriv "&" foran meldingen din.

- *Ikke* spør om få hjelp på en oppgave du ikke har prøvd selv på. Det gir lite læringsutbytte.

- Hvis du sitter bom fast og får ikke startet, spør om retningehjelp". Retningshjelp beytr at vi gir deg et puff i rett retning.

1 Grunnleggende algebra

Løsning 1.1 — Kommutative lov

a) $-a-b=-b-a$

b) $a(-b)=(-b)a$

c) $a(bc)=(bc)a$

d) $(e+f+g)(a+b+c)=(a+b+c)(e+f+g)$

■

Løsning 1.2 — Kommutative lov

Kommutative lov maks 3 ganger:

$$b+a+b+a+b+a=b+a+b+a+a+b \tag{1.1}$$

$$=b+a+a+a+b+b \tag{1.2}$$

$$=a+a+a+b+b+b \tag{1.3}$$

Vi vil påpeke at det finnes flere måter å flytte a-leddene helt til venstre på, men alle må innebære at vi bruker den kommutative lov på flere ledd samtidig. [1]

■

Løsning 1.3 — Assosiative lov

Vi legger merke til at ved å sette parentes rundt de like leddene, så kan vi kanselere en del ledd:

$$(1-a)+(a-b)+(b-c)+(c-1)=\cancel{1}+\cancel{(-a+a)}+\cancel{(-b+b)}+\cancel{(-c+c)}-\cancel{1} \tag{1.4}$$

$$=0 \tag{1.5}$$

Vi brukte her at $+(-a)=-a$ og tilsvarende for b og c.

■

[1] Oppgaven spør om samle leddene, ikke slå dem sammen til $3a+3b$.

Løsning 1.4 — Distributive lov

a) $3(2b-1) = 3\cdot 2b - 3\cdot 1 = 6b-3$

b) $(2b-1)3 = 3(2b-1) = 6b-3$ (samme som oppgave a))

c) $y(2-y) = y2 - yy = 2y - y^2$

d) $-(-2y-3x) = -1(-2y-3x) = -1\cdot(-2y) - (-1)3x = 2y+3x$

e) $-3(-4a+5x-2) = (-3)\cdot(-4a) - 3\cdot 5x + (-3)(-2)\cdot x = 12a - 15x + 6$

f) Vi bruker den kommutative lov og flytter 3-tallet foran parentesen i uttrykket:

$$\begin{aligned} 3(y+3x)(-2) &= 3(-2)(y+3x) = -6(y+3x) \\ &= -6\cdot y - 6\cdot 3x = -6y - 18x \end{aligned} \tag{1.6}$$

g) Ikke la deg lura av det siste ledde -2. Har skal vi *ikke* bruke den distributive lov, siden vi subtraherer og ikke multipliserer med -2:

$$\begin{aligned} 7(-x-4y-3) - 2 &= 7\cdot(-x) - 7\cdot 4y - 7\cdot 3 - 2 \\ &= -7x - 28y - 21 - 2 \qquad (1.7) \\ &= -7x - 28y - 23 \qquad (1.8) \end{aligned}$$

■

Løsning 1.5 — Kvadratsetningene og konjugatsetningene

a) Vi gjenkjenner 1. kvadratsetning med $a := 2x$ og $b := 3y$:

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 \tag{1.9}$$

b) Vi gjenkjenner 2. kvadratsetning med $a := x$ og $b := 2y$. Legg merke til at vi tar 3-tallet til slutt *etter* at vi har brukt 2. kvadratsetning:

$$\begin{aligned} 3(x-2y)^2 &= 3(x^2 - 2x(2y) + (2y)^2) = 3(x^2 - 4xy + 4y^2) \qquad (1.10) \\ &= 3x^2 - 12xy + 12y^2 \qquad (1.11) \end{aligned}$$

c) Vi gjenkjenner konjugatsetningen med $a := x$ og $b := 3$: (3. kvadratsetning)

$$(x-3)(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9 \tag{1.12}$$

d) Vi bruker 2. kvadratsetning to ganger:

$$(x-3y)^2-(2y-3x)^2=(x^2-2x\cdot 3y+(3y)^2)-((2y)^2-2\cdot 2y3x+(3x)^2)$$

$$=(x^2-6xy+9y^2)-(4y^2-12xy+9x^2) \tag{1.13}$$

$$=x^2-9x^2-6xy+12xy+9y^2-4y^2 \tag{1.14}$$

$$=-8x^2+6xy+5y^2 \tag{1.15}$$

e) Vi bruker konjugatsetningen med $a := 2x$ og $b := 3y$: (3. kvadratsetning)

$$(2x-3y)(2x+3y)=(2x)^2-(3y)^2 \tag{1.16}$$

$$=4x^2-9y^2 \tag{1.17}$$

f) Vi bruker *den distributive lov*, eller “pilmetoden", se figur 1.1.

$$(2x-6y+2)(-y+3-5x)$$

Figur 1.1: Distributive lov - pilmetoden.

I prinsippet skal alle leddene i den førset parentesen multipliseres med alle leddene i den andre parentesen, hvor vi hele tiden passer på fortegnene via fortegnsreglene.

Pilmetoden gir bare en fornuftig måte å multiplisere alle leddene med hverandre. Vi kunne løst opp disse parentesene i den rekkefølgen vi ville, så lenge alle leddene mulitpliseres med hverandre:

$$
\begin{aligned}
(2x-6y+2)(-y+3-5x) = {} & 2x\cdot(-y)+2x\cdot 3+2x\cdot(-5x) \\
& -6y\cdot(-y)-6y\cdot 3-6y\cdot(-5x) \\
& +2\cdot(-y)+2\cdot 3+2\cdot(-5x) \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & -2xy+6x-10x^2 \\
& 6y^2-18y+30xy \\
& -2y+6-10x \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & -10x^2+6y^2-2xy+30xy \\
& +6x-10x-18y-2y \\
& +6 \qquad (1.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= {} & -10x^2+6y^2+28xy \\
& -4x-20y \\
& +6 \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

$$= -10x^2+6y^2+28xy-4x-20y+6 \qquad (1.22)$$

■

Løsning 1.6 — Kvadratsetningene og konjugatsetningene

Vi bruker kvadratsetningene:

a)

$$((2a-b)(2a+b))^2 = (4a^2-b^2)^2 = 16a^4 - 8a^2b^2 + b^4$$

b) Vi bruker konjugatsetningen med $a := a$ og $b := y+1$:

$$(a-y-1)(a+y+1) = a^2-(y+1)^2 = a^2-(y^2+2y+1) = a^2-y^2-2y-1$$

c) Vi bruker konjugatsetningen med $a := a-b$ og $b := 1-c$:

$$\begin{aligned}((a-b)+(1-c))((a-b)-(1-c)) &= (a-b)^2-(1-c)^2 \\ &= a^2-2ab+b^2-(1-2c+c^2) \\ &= a^2-2ab+b^2-c^2+2c-1\end{aligned}$$

■

Løsning 1.7 — Visualisering av kvadratsetningene

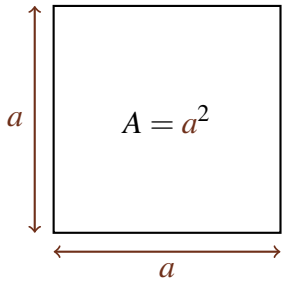
a) Vi starter med å anta at $a > b$. [2]

Anta vi har et kvadrat hvis sider er a, som vist i figur 1.2. Arealet av hele kvadratet er da gitt ved

$$A = a^2 \tag{1.23}$$

Vi kan løse oppgaven på 2 alternative måter.

[2] Dersom $a < b$ kan vi bare bytte rollene til a og b i beviset.



Figur 1.2: Et kvadrat med sidene a.

Løsning alternativ 1:

Siden $a > b$, kan vi dele opp kvadratet i 4 rektangler ved å trekke linjer som vist i figur 1.3.

Vi er interessert i et uttrykk for arealet til kvadratet med sidene $a - b$, se figur 1.3.

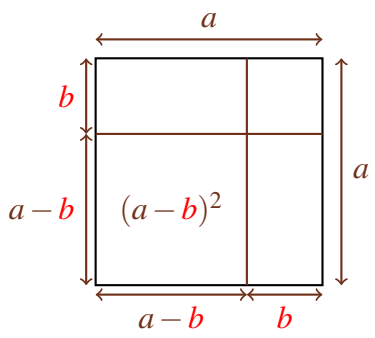
Strategi:

(a) Det totale arealet = a^2.

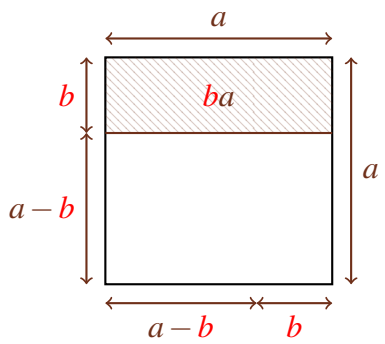
(b) Trekker vi fra arealet til det øvre rektangelet med areal ba, se figur 1.4.

(c) Videre trekker vi fra arealet til det høyre rektangelet med areal ba, se figur 1.5.

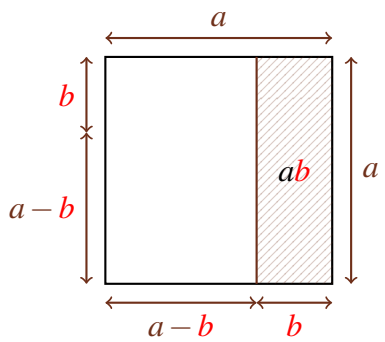
(d) Arealene som overlapper i figur 1.6 telles to ganger.
Vi har trekt fra dette arealet, dvs. b^2, to ganger.
For å unngå å trekke fra dette arealet to ganger så legger vi til b^2.



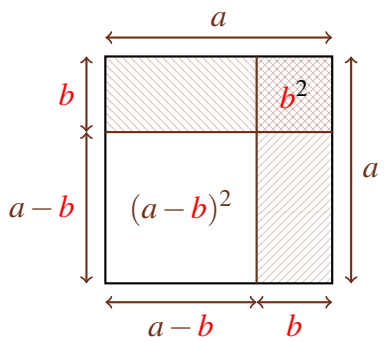
Figur 1.3: Vi deler opp kvadratet i 4 mindre deler.



Figur 1.4: Trekker arealet ba fra den øvre delen av kvadratet.



Figur 1.5: Trekker arealet ab fra det høyre delen av kvadratet.



Figur 1.6: Deler opp kvadratet i 4 mindre deler.

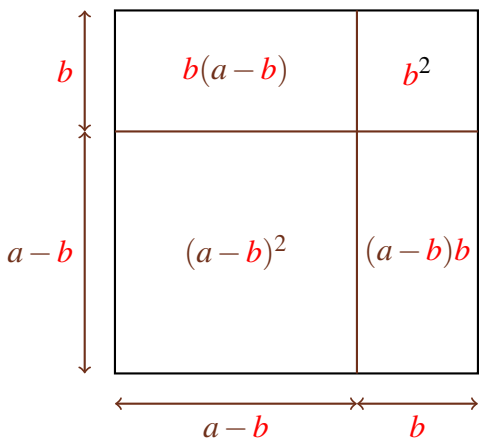
Vi har dermed følgende arealregnskap:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.24}$$

som beviser 2. kvadratsetning.

Løsning alternativ 2:

Siden $a > b$, kan vi dele opp kvadratet i 4 rektangler ved å trekke linjer som vist i figur 1.7.



Figur 1.7: Deler opp kvadratet i 4 mindre deler.

Oppdeling: [3]

$$\text{Totalt areal} = \text{areal } 1 + \text{areal } 2 + \text{areal } 3 + \text{areal } 4 \tag{1.25}$$

$$a^2 = (a-b)^2 + b(a-b) + (a-b)b + b^2 \tag{1.26}$$

$$a^2 = (a-b)^2 + ba - b^2 + ab - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} \tag{1.27}$$

$$a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2 \tag{1.28}$$

[3] Summen av arealene av de fire mindre rektanglene må være lik det totale arealet

Løser mhp. $(a-b)^2$ alene:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.29}$$

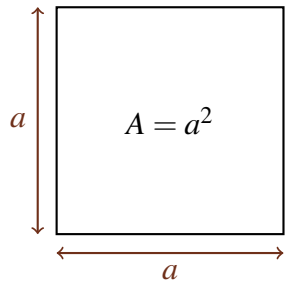
som beviser 2. kvadratsetning.

K Alternativ 1 er et "bedre" bevis enn alternativ 2, siden vi i alternativ 1 *ikke* bruker den distributive lov og manipulasjon av ligninger. Vi sier alternativ 1 er mer *elementært* eller mer *fundamentalt* enn alternativ 2.

b) Vi starter med å anta at $a > b$. [4]

Anta vi har et kvadrat hvis sider er a, som vist i figur 1.8.
Arealet av hele kvadratet er da gitt ved

$$A = a^2 \tag{1.30}$$



Figur 1.8: Et kvadrat med sidene a.

Strategi:

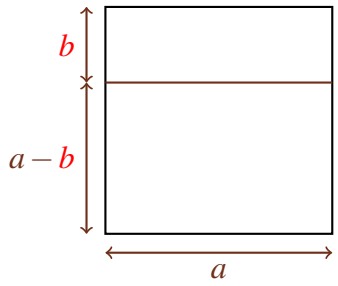
(a) Vi deler opp rektangelet i *to* deler som vist i figur 1.9.

(b) Deretter *klipper* vi av det øvre rektangelet og legger delen loddrett inntil høyresiden til det opprinnelige kvadratet, som vist i figur 1.10.

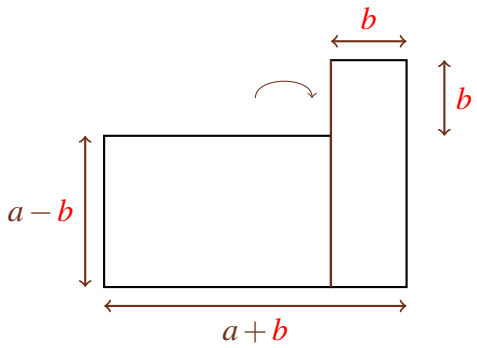
(c) Vi identifiserer at arealet av det skraverte rektanglet i figur 1.11 er gitt ved $(a-b)(a+b)$.

(d) Siden vi startet med et totalt areal på a^2, må den resterende delen av arealet være gitt ved det lille kvadratet oppe til høyre. Arealet til dette kvadratet er b^2, som vist i figur 1.12.

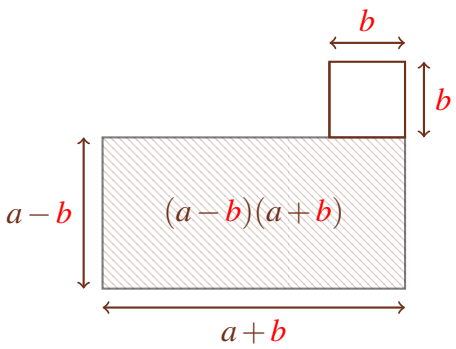
[4] Dersom $a < b$ kan vi bare bytte rollene til a og b i beviset.



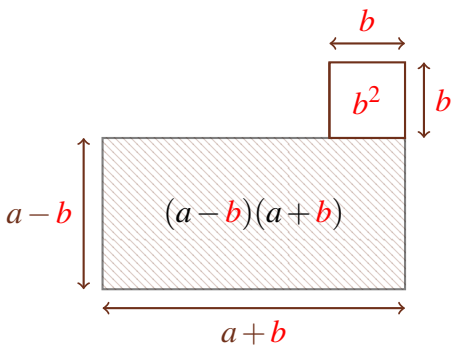
Figur 1.9: Vi deler opp kvadratet i 2 mindre deler.



Figur 1.10: Klipper av det øvre rektangelet og vrir det.



Figur 1.11: Vi identifiserer rektangelet med sidene $a-b$ og $a+b$.



Figur 1.12: Det overflødige arealet er gitt ved b^2.

Dermed:

$$\text{totalt areal} = a^2 \tag{1.31}$$

$$\underbrace{\text{areal 1} + \text{areal 2}}_{\text{arealene i figur 1.12}} = a^2 \tag{1.32}$$

$$(a-b)(a+b)+b^2 = a^2 \tag{1.33}$$

Flytter b^2 på høyre side:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \tag{1.34}$$

som beviser konjugatsetningen (3. kvadratsetning).

■