



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

4. Potenser

Dag 3: Oppgaver

“MAT100 Matematikk”, 2021

versjon 01

- Disse oppgavene er de vi har planlagt skal jobbes med på dag 1 i kurset.
- Hvis man ikke får gjennomført alle oppgavene ila dagen, *ikke noe problem!* Det er ikke om å gjøre å komme lengst mulig, det viktigste er at man prøver selv så godt man kan. Gå heller gjennom oppgavene ved en senere anledning.
- Hvis man sitter fast, spør på Discord under den tråden som omhandler oppgaven du sitter fast på. Der får du raskt hjelp av enten medstudenter eller hjelpelærer/faglærere.
- Når man spør om hjelp, ta bilde av hva du har gjort og paste dette inn i tråden. Da blir det mye enklere å hjelpe deg. Vi har en funksjon som kan gjøre deg anonym, dersom du foretrekker det, bare skriv "&" foran meldingen din.
- *Ikke* spør om få hjelp på en oppgave du ikke har prøvd selv på. Det gir lite læringsutbytte.
- Hvis du sitter bom fast og får ikke startet, spør om retningehjelp". Retningshjelp betyr at vi gir deg et puff i rett retning.

4 Potenser

Oppgave 4.1 — Potenser

Regn ut og skriv svaret som potenser.

a) $7^8 7^{-6}$

b) $(2^{-2})^3$

c) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$

d) $\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$

e) $(a^2 - b^3)(a^2 + b^3)$

■

Oppgave 4.2 — Slå sammen potenser

Regn ut uten kalkulator:

a) $\frac{(4 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{-3})}{(6 \cdot 10^{-6})}$

b) $\frac{(8 \cdot 10^3)(5 \cdot 10^{-3})}{4 \cdot 10^6}$

c) $\frac{(16 \cdot 10^{-3})(5 \cdot 10^4)}{8 \cdot 10^{-6}}$

■

Oppgave 4.3 — Skriv på standardform

Skriv tallene nedenfor på standardform:

a) 570 000 000 000

b) 0,000 000 093

■

Oppgave 4.4 — Potenser av summer

Som nevnt i teoridelen i denne boken har vi følgende potensregel:

Definisjon 4.1 For alle reelle tall a og b og heltall $n \in \mathbb{N}$ gjelder:

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (4.1)$$

For eksempel har vi at

$$(6 \cdot 7)^{10} = 6^{10} \cdot 7^{10} \quad (4.2)$$

For addisjon er tilsvarende formel ikke gyldig:

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n \quad (4.3)$$

Ta for eksempel

$$\overbrace{(5+5)^2}^{=100} \neq \overbrace{5^2+5^2}^{=50} \quad (4.4)$$

Denne oppgaven handler om hvordan vi faktisk regner ut en potens av summer:

Definisjon 4.2 For alle reelle tall a og b og heltall $n \in \mathbb{N}$ gjelder:

$$(a + b)^n = ? \quad (4.5)$$

Svaret på dette spørsmålet er *betraktelig* vanskeligere enn for den tilsvarende formelen for multiplikasjon. Til tross for at svaret er komplisert, er formelen svært sentral i flere sammenhenger.¹

Vi skal ikke gå inn på den komplette formelen her, men vi skal tilnærme oss formelen på en litt interessant måte:

¹Å kunne regne ut uttrykk av formen $(a + b)^n$ er f.eks. svært viktig i mange disipliner som bruker matematikk og statistikk som logistikk og økonomi.

Strategi:

Siden n kan være et *vilkårlig* heltall kan vi regne ut uttrykket $(a + b)^n$ for *små* potenser n og på veien lete etter et *mønster* som forteller oss hvordan uttrykket blir for større potenser:

$n = 0$:

$$(a + b)^0 = 1 \quad (4.6)$$

$n = 1$:

$$(a + b)^1 = a + b \quad (4.7)$$

$n = 2$:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1. \text{ kvadratsetning}) \quad (4.8)$$

a) Vis ved å bruke *pilmetoden* at $(a + b)^n$ for $n = 3$ er gitt ved: ²

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (4.9)$$

b) Vis ved å bruke *pilmetoden* at $(a + b)^n$ for $n = 4$ er gitt ved: ³

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad (4.10)$$

Som du sikkert skjønner fører ikke pilmetoden helt frem dersom vi skal regne ut

$$(a + b)^n \quad (4.11)$$

for høye potenser n .

Vi skal likevel ta mål av oss om å finne en måte å regne ut lign.(4.11) for høye potenser n . Men la oss oppsummere de formelene vi har funnet så langt: ⁴

²Bruk at $(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$.

³Bruk at $(a + b)^4 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$.

⁴For at det skal bli enklere å se mønsteret, la oss skrive:

a som a^1 og b som b^1 .

Funnet så langt:

$$(a+b)^0 = 1 \quad (n=0) \quad (4.12)$$

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 \quad (n=1) \quad (4.13)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a^1b^1 + b^2 \quad (n=2) \quad (4.14)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + b^3 \quad (n=3) \quad (4.15)$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + b^4 \quad (n=4) \quad (4.16)$$

Ser du et mønster i potensene nå? Stirr på uttrykkene før du går videre.

Hva er *summen* av potensene for hvert ledd? ⁵

Lik den tilsvarende n , ja, stemmer!

Ta for eksempel lign.(4.16), dvs $n = 4$:

$$a^4 = a^4b^0 \quad \text{summen av potensene er } 4 + 0 = 4 \quad (4.17)$$

$$a^3b^1 \quad \text{summen av potensene er } 3 + 1 = 4 \quad (4.18)$$

$$a^2b^2 \quad \text{summen av potensene er } 2 + 2 = 4 \quad (4.19)$$

$$a^1b^3 \quad \text{summen av potensene er } 1 + 3 = 4 \quad (4.20)$$

$$b^4 = a^0b^4 \quad \text{summen av potensene er } 0 + 4 = 4 \quad (4.21)$$

c) Dersom vi skal regne ut uttrykket

$$(a+b)^5 \quad (4.22)$$

hvilke type *ledd* har vi?

⁵Leddene for lign.(4.16) er gitt ved a^4 , a^3b^1 , a^2b^2 , a^1b^3 og b^4 .

Vi har nå funnet ut at $(a+b)^5$ er en sum av leddene vi fant fra oppgave c). Det vi mangler er *koeffisientene* foran leddene.⁶

$$(a+b)^5 = \boxed{?}a^5 + \boxed{?}a^4b^1 + \boxed{?}a^3b^2 + \boxed{?}a^2b^3 + \boxed{?}a^1b^4 + \boxed{?}b^5 \quad (4.23)$$

Å finne koeffisientene er mer sammensatt, men ikke umulig selv med våre tidlige matematikkunnskaper.

La oss prøve.⁷

Trikset er å skrive ut uttrykket $(a+b)^5$ som en multiplikasjon:

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \quad (4.24)$$

Vi skal nå finne koeffisientene en etter en ved hjelp av *telling*, ikke regning!

Vi vet at pilmetoden sier at hver a i en parentes skal multipliseres én gang med *alle* de andre a -ene og b -ene i de andre parentesene.

Koeffisienten foran leddet a^5 er lik 1:

Vi teller hvor mange forskjellige måter kan vi velge én a fra hver parentes:

Svar: Kun 1 måte, nemlig de 5 a -ene i hver sin parentes.

Koeffisienten foran leddet a^4b^1 er lik 5:

Vi teller hvor mange forskjellige måter kan vi velge én b og 4 a -er på fra hver parentes:

Svar: Det er 5 måter, nemlig

$$b - a - a - a - a$$

$$a - b - a - a - a$$

$$a - a - b - a - a$$

$$a - a - a - b - a$$

$$a - a - a - a - b$$

⁶Koeffisientene i lign.(4.16) er tallene som står foran leddene: $1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$

⁷En svært god holdning til all læring er å alltid ha en positiv innstilling til vanskelige oppgaver. Husk at prosessen er målet! Yes! Nå skal vi lære noe nytt! Ikke gi opp før man har skjønnet svaret.

Så langt har vi funnet ut at

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + \boxed{?}a^3b^2 + \boxed{?}a^2b^3 + \boxed{?}a^1b^4 + \boxed{?}b^5 \quad (4.25)$$

Vi har nå funnet ut at $(a+b)^5$ er en sum av leddene vi fant fra oppgave c). Det vi mangler er *koeffisientene* foran leddene.⁸

$$(a+b)^5 = \boxed{?}a^5 + \boxed{?}a^4b^1 + \boxed{?}a^3b^2 + \boxed{?}a^2b^3 + \boxed{?}a^1b^4 + \boxed{?}b^5 \quad (4.26)$$

Å finne koeffisientene er mer sammensatt, men ikke umulig selv med våre tidlige matematikkunnskaper.

La oss prøve.⁹

Trikset er å skrive ut uttrykket $(a+b)^5$ som en multiplikasjon:

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \quad (4.27)$$

Vi skal nå finne koeffisientene en etter en ved hjelp av *telling*, ikke regning!

Vi vet at pilmetoden sier at hver a i en parentes skal multipliseres én gang med *alle* de andre a -ene og b -ene i de andre parentesene.

Koeffisienten foran leddet a^5 er lik 1:

Vi teller hvor mange forskjellige måter kan vi velge én a fra hver parentes:

Svar: Kun 1 måte, nemlig de 5 a -ene i hver sin parentes.

Koeffisienten foran leddet a^4b^1 er lik 5:

Vi teller hvor mange forskjellige måter kan vi velge én b og 4 a -er på fra hver parentes:

⁸Koeffisientene i lign.(4.16) er tallene som står foran leddene: $1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$

⁹En svært god holdning til all læring er å alltid ha en positiv innstilling til vanskelige oppgaver. Husk at prosessen er målet!. Yes! Nå skal vi lære noe nytt! Ikke gi opp før du har skjønnet svaret.

Svar: Det er 5 måter, nemlig

$$\begin{aligned} b - a - a - a - a \\ a - b - a - a - a \\ a - a - b - a - a \\ a - a - a - b - a \\ a - a - a - a - b \end{aligned}$$

Så langt har vi funnet ut at

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + \boxed{?}a^3b^2 + \boxed{?}a^2b^3 + \boxed{?}a^1b^4 + \boxed{?}b^5 \quad (4.28)$$

- d)** Finn de resterende koeffisientene foran leddene i lign.(4.28) på samme måte som over, nemlig ved telling.
- e)** Hva blir $(a + b)^5$?

■