



**Høgskolen i Molde**

Vitenskapelig høyskole i logistikk

## 6. Logikk

### Dag 5: Oppgaver

“MAT100 Matematikk”, 2021

versjon 01

- Disse oppgavene er de vi har planlagt skal jobbes med på dag 1 i kurset.
- Hvis man ikke får gjennomført alle oppgavene i løp av dagen, *ikke noe problem!* Det er ikke om å gjøre å komme lengst mulig, det viktigste er at man prøver selv så godt man kan. Gå heller gjennom oppgavene ved en senere anledning.
- Hvis man sitter fast, spør på Discord under den tråden som omhandler oppgaven du sitter fast på. Der får du raskt hjelp av enten medstudenter eller hjelpelærer/faglærere.
- Når man spør om hjelp, ta bilde av hva du har gjort og paste dette inn i tråden. Da blir det mye enklere å hjelpe deg. Vi har en funksjon som kan gjøre deg anonym, dersom du foretrekker det, bare skriv "&" foran meldingen din.
- *Ikke* spør om få hjelp på en oppgave du ikke har prøvd selv på. Det gir lite læringsutbytte.
- Hvis du sitter fast og får ikke startet, spør om retningshjelp". Retningshjelp betyr at vi gir deg et puff i rett retning.

## 6 Logikk

### Oppgave 6.1 — Logiske utsagn og konnektiver

Anta vi har gitt følgende simple *utsagn*:

$$p : \text{Bård er sterkere enn Per.} \quad (6.1)$$

$$q : \text{Per er raskere enn Bård.} \quad (6.2)$$

Uttrykk følgende *sammensatte uttrykk* matematisk: <sup>1</sup>

- a) Per er *ikke* raskere enn Bård.
  - b) Bård er sterkere enn Per og Per er *ikke* raskere enn Bård.
  - c) Bård er *ikke* sterkere enn Per eller Per er raskere enn Bård.
  - d) Hvis Bård er sterkere enn Per så Per er raskere enn Bård.
- 

### Oppgave 6.2 — Logiske utsagn og konnektiver

Bruk utsagnene i lign.(6.1) og beskriv følgende *matematiske uttrykk* med ord:

- a)  $\neg q$
  - b)  $p \wedge q$
  - c)  $p \vee q$
  - d)  $\neg q \rightarrow p$
  - e)  $\neg q \vee \neg p$
  - f)  $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
- 

---

<sup>1</sup>Dvs. bruk  $p$  og  $q$  og konnektivene  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  eller  $\rightarrow$ .

**Oppgave 6.3 — Logiske utsagn og konnektiver**

Anta nå at:

$$p \text{ er sann} \quad , \quad q \text{ er sann} \quad (6.3)$$

Avgjør om hvert av *utsagnene* er sant eller usant:

**a)**  $\neg q$

**b)**  $p \wedge q$

**c)**  $p \vee q$

**d)**  $p \vee q$

**e)**  $q \vee p$

**f)**  $\neg\neg q$

■

**Oppgave 6.4 — Kvantorer**

La  $x$  representere alle mulige personer, og definer følgende simple *utsagn*:

$$Student(x) : \text{person } x \text{ er en student} \quad (6.4)$$

$$Smart(x) : \text{person } x \text{ er smart} \quad (6.5)$$

Uttrykk følgende *utsagn* på *matematisk form*:<sup>2</sup>

**a)** Alle personer er studenter

**b)** Det finnes en person som er student.

**c)** Det finnes ingen studenter.

**d)** Det finnes en person som ikke er student.

**e)** Alle studenter er smarte.

---

<sup>2</sup>Dvs. bruk  $x$  og konnektivene  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  eller  $\rightarrow$  og kvantorene  $\forall$  og  $\exists$ .

Beskriv følgende *matematiske uttrykk* med ord:

**f)**  $\exists x (Student(x) \wedge Smart(x))$

**g)**  $\forall x (Student(x) \rightarrow Smart(x))$

**h)**  $\neg \forall x (Smart(x) \rightarrow Student(x))$

Vi har gitt følgende setning (dvs. teorem) om uendelig store naturlige tall:

*For ethvert positivt reelt tall  $x \in \mathbb{R}$  finnes et naturlig tall  $n \in \mathbb{N}$  slik at  $x < n$ .* (6.6)

**i)** Beskriv setningen i lign.(6.6) matematisk. <sup>3</sup>

■

---

<sup>3</sup>Dvs. bruk  $x$  og konnektivene  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  eller  $\rightarrow$  og kvantorene  $\forall$  og  $\exists$ .



Høgskolen i Molde

Vitenskapelig høyskole i logistikk

## 7. Mengdelære

### 7 Mengdelære

#### Oppgave 7.1 — Konstruksjon av delmengder

Vi skal i denne oppgaven jobbe med konstruksjon av delmengder av de vanlige tallmengdene  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  og  $\mathbb{R}$ .

a) Konstruer delmengdene: <sup>1</sup> <sup>2</sup> <sup>3</sup>

i) Delmengden av  $\mathbb{N}$  bestående av alle partall. (7.1)

ii) Delmengden av  $\mathbb{N}$  bestående av alle partall mindre enn 100. (7.2)

iii) Delmengden av  $\mathbb{Z}$  bestående av alle negative heltall. (7.3)

iv) Delmengden av  $\mathbb{Q}$  bestående av alle brøker hvor telleren er et partall. (7.4)  
(7.5)

iii) Delmengden av  $\mathbb{Q}$  bestående av alle brøker mellom 0 og 1. (7.6)

b) Konstruer løsningsmengden  $\mathcal{L}$  av Pythagoras ligning, dvs. lign.(7.7), som mengden av alle tupler  $(a, b, c)$  slik at ligningen

<sup>1</sup>Dere skal bruke formen  $A = \{x \in A \mid p(x)\}$  hvor  $p(x)$  er en logisk formel som er oppfylt for alle elementene  $x$  i mengden. Her må dere altså finne de korrekte logiske formlene.

<sup>2</sup>Et naturlig tall  $n$  er et *partall* dersom det finnes et heltall  $m$  slik at  $n = 2m$ .

<sup>3</sup>I en brøk  $\frac{a}{b}$ , kalles  $a$  telleren og  $b$  nevneren.

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (7.7)$$

hvor  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .

■

### Oppgave 7.2 — Snitt, union og differanse mellom intervaller

Vi har gitt intervallene:

$$I_1 = [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\} \quad (7.8)$$

$$I_2 = [0, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\} \quad (7.9)$$

$$I_3 = [2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\} \quad (7.10)$$

$$I_4 = \langle 0.9, 1.1 \rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid 0.9 < x < 1.1\} \quad (7.11)$$

Finn mengdene: <sup>4</sup>

**a)**  $I_1 \cap I_2$

**b)**  $I_1 \cup I_2$

**c)**  $I_1 - I_4$

**d)**  $I_2 \cap I_3$

**e)**  $(I_2 \cap I_3) - I_1$

■

---

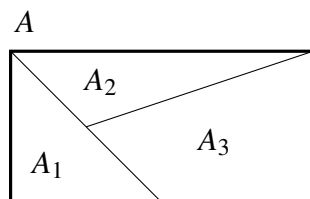
<sup>4</sup>Tegn gjerne intervallene langs tallinjen.

**Oppgave 7.3 — Disjunkte delmengder - partisjoner**

En 3-partisjon av en mengde  $A$ , er 3 *disjunkte* delmengder  $A_1$ ,  $A_2$  og  $A_3$  slik at

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3. \quad (7.12)$$

se figur 7.1.<sup>5</sup>



Figur 7.1: Venn-diagram av en 3-partisjon.

Anta vi har gitt mengden

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}. \quad (7.13)$$

- a)** Finn alle mulige 3-partisjoner av mengden  $A$ .

■

---

<sup>5</sup>Ingen av delmengdene  $A_1$ ,  $A_2$  og  $A_3$  kan være den tomme mengden  $\emptyset$ .

**Oppgave 7.4 — Mengde, løsningsmengde**

Vi har lært at mengder hvor *rekkefølgen* spiller en rolle, uttrykkes som  $n$ -tupler

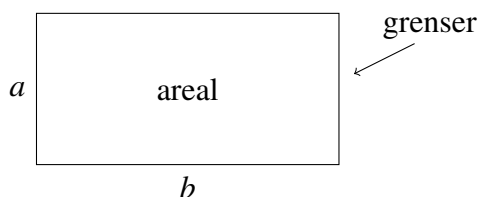
$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (7.14)$$

hvor  $a_1, a_2, \dots, a_n$  er elementene i mengden.

Et klassisk eksempel på bruk av  $n$ -tupler er når vi trenger *koordinater* for å spesifisere en posisjon i planet.

Et typisk eksempel er *arealplanlegging*. Anta du har kjøpt en eiendom og ønsker å definere nøyaktig hvilket *areal* som er ditt i forhold til dine naboer. Her er ikke bare *størrelsen* på arealet viktig, men også *formen* på området som arealet omspennner.

Anta du eier et stykke rektangulært land med bredde  $a$  og lengde  $b$  som vist i figur 7.2. Denne oppgaven handler om hvordan vi spesifiserer slik områder i planet.



Figur 7.2: Areal og grenser.

Prosessen for å definere området har to steg:

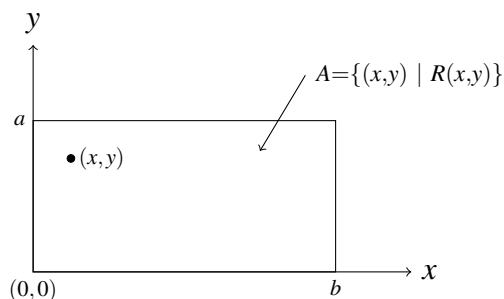
1. Du plasserer et  $(x,y)$ -koordinatsystem på en hensiktsmessig plass i planet, som vist i figur 7.3. Ethvert punkt i planet kan da representeres som en 2-tupel:  $(x,y)$ .

Punktet  $(0,0)$  kalles *origo* og bestemmer hvor koordinatsystemet er plassert.

2. Du definerer en *mengde*

$$A = \{(x,y) \mid R(x,y)\} \quad (7.15)$$

som representerer arealet du eier. Uttrykket  $R(x,y)$  restrikerer de punktene  $(x,y)$  som akkurat faller inn under området du eier og er derfor avhengig av grensene.



Figur 7.3: Koordinatsystem og mengden  $A$  definerer området du eier.

La oss definere arealet  $A$  for det rektangulære området vist i figur 7.3. Vi spør oss selv: Hvilke verdier kan koordinatene  $x$  og  $y$  ta henholdsvis?

**x-aksen:** Siden rektangelet spanner seg fra 0 til  $b$  langs  $x$ -aksen, må

$$0 \leq x \leq b \quad (7.16)$$

**y-aksen:** Siden rektangelet spanner seg fra 0 til  $a$  langs  $y$ -aksen, må

$$0 \leq y \leq a \quad (7.17)$$

Restriksjonen  $R(x,y)$  er dermed gitt ved det logiske utsagnet:

$$R(x,y) = 0 \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq a \quad (7.18)$$

Arealet  $A$  kan dermed defineres ved:

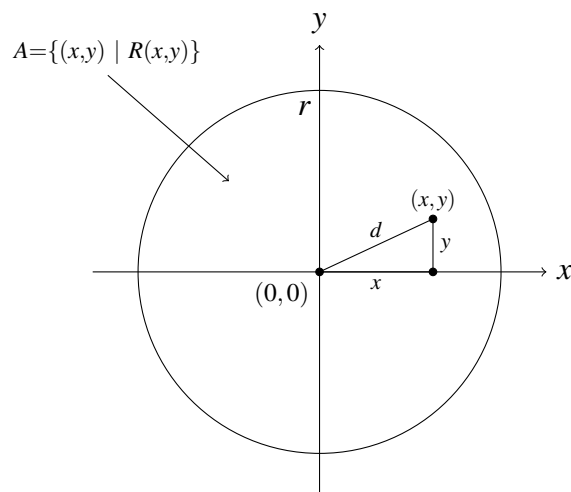
$$A = \left\{ (x,y) \mid \overbrace{0 \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq a}^{R(x,y)} \right\} \quad (7.19)$$

- a)** Anta du er eier et *sirkulært* område  $A$  med radius  $r$ . Plasser et  $(x,y)$ -koordinatsystem midt i sirkelen, som vist i figur 7.4.<sup>6</sup>

Bestem mengden  $A = \{(x,y) \mid R(x,y)\}$  som definerer det sirkulære området i figur 7.4.

<sup>6</sup>Bruk at avstanden  $d$  mellom origo og et punkt  $(x,y)$  er gitt ved

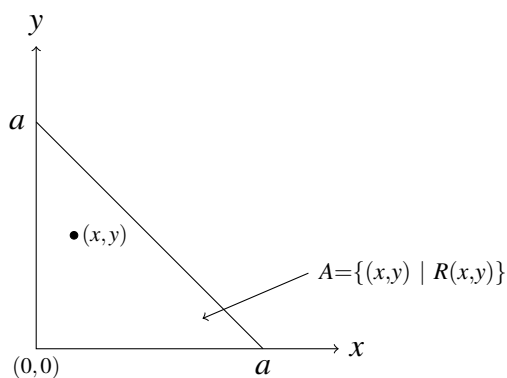
$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (7.20)$$



Figur 7.4: Sirkulært område.

- b)** Anta du eier et *triangulært* område  $A$  som utgjør en rettvinklet likebeint trekant hvor katetene (de korte sidene) har lengde  $a$ . Plasser  $(x,y)$ -koordinatsystemet hvor origo ligger i hjørnet hvor katetene krysser, som vist i figur 7.5.

Definer mengden  $A = \{(x,y) \mid R(x,y)\}$ .<sup>7</sup>



Figur 7.5: Triangulært område.

<sup>7</sup>Bruk at den lengste siden (hypotenusen) er gitt ved punktene  $(x,y)$  som oppfyller ligningen

$$y = -x + a \quad (7.21)$$