
Oppgave 1 — 25%

a) (5%) Bruk

$$(y - 2)(y - 1) = y^2 - 3y + 2 = 0 \quad (1)$$

til å vise, ved regning, at løsningen til

$$(e^{5x})^2 - 3(e^{5x}) + 2 = 0 \quad (2)$$

er

$$x = \frac{\ln(2)}{5} \quad \text{eller} \quad x = 0 \quad (3)$$

b) (7.5%) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: ¹

$$f(y) = y^2 - 3y + 2 < 0 \quad (4)$$

c) (7.5%) Gitt følgen $a_1, a_2, a_3, \dots$ bestemt ved

$$-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots \quad (5)$$

i) Begrunn hvorfor følgen i lign.(5) er en aritmetisk følge.

ii) Hva er a_{27} ?

iii) La S_n være summen av den tilhørende aritmetiske rekken, dvs. la:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (6)$$

Regn ut S_{20} .

¹Bruk faktoriseringen i lign.(1).

d) (5%) Løs ligningsystemet

$$x - 3y = -25 \quad (7)$$

$$4x + 5y = 19 \quad (8)$$

Kontroller at svaret er rett ved å sette løsningen inn i lign.(7) og (8) og sjekk at begge ligningene er oppfylte.

■

Oppgave 2 — 25%

- a) (5%) Deriver funksjonene:

$$i) \quad f(x) = x^3 - e^x \quad (9)$$

$$ii) \quad f(x) = \sqrt{x^3 - e^x} \quad (10)$$

- b) (2.5%) Forenkle funksjonen og avgjør om den er rasjonal eller ei.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x + 2} \quad (11)$$

- c) (7.5%) Ved oppsparingsannuitet så setter man av det samme konstante beløpet K i banken ved begynnelsen av hver termin. Anta en termin er 4 uker og anta renten er r per termin.

Oppspart kapital etter 12 terminer som følge av innskudd K i termin nr. i gir den **geometriske** følgen

$$K(1+r)^{12}, \quad \frac{K(1+r)^{12}}{1+r}, \quad \frac{K(1+r)^{12}}{(1+r)^2}, \quad \frac{K(1+r)^{12}}{(1+r)^3}, \quad \dots, \quad \frac{K(1+r)^{12}}{(1+r)^{11}}$$

- i) Skriv ned, uten utregning, et uttrykk for kapitalen K_i oppspart etter i terminer. ²

- ii) Vis at summen $S_{12} = \sum_{i=1}^{12} K_i$ er gitt ved ³

$$S_{12} = K(1+r) \frac{(1+r)^{12} - 1}{r} \quad (13)$$

²Bestem startleddet K_1 og vekstfaktoren $k = \frac{K_{i+1}}{K_i}$ og deretter bruk en formel fra kompendiet.

³Bruk at summen av en geometrisk rekke er gitt ved

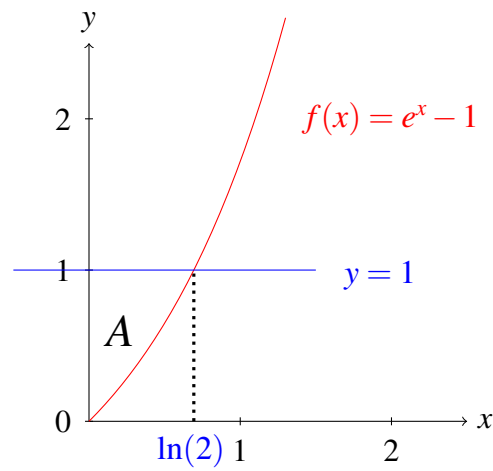
$$S_{12} = K_1 \frac{k^{12} - 1}{k - 1} \quad (12)$$

hvor K_1 er startleddet og k er vekstfaktoren.

- d) (5%) Finn, ved hjelp av integrasjon, arealet A av området avgrenset av den horisontale linjen $y = 1$ og funksjonen:

$$f(x) = e^x - 1 \quad (14)$$

som ligger i første kvadrant, se figur 1.



Figur 1: Arealet A.

e) (5%) Gitt funksjonen

$$f(x, y) = \ln(xy^2) \quad (15)$$

Man kan bruke kjerneregelen når man skal partiell derivere denne funksjonen. Det skal dere ikke.

Bruk istedet *regnereglene for logaritmefunksjoner* og finn de partiell deriverte til funksjonen $f(x, y)$.

■

Oppgave 3 — 35%

Nåværende president i USA, Donald Trump, har i 2020 hatt en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 2: Donald Trump.

Anta det er 30 dager igjen til valgdagen.

Valgledelsen vet at en av de viktigste vippestatene er Pennsylvania. De ønsker derfor å analysere hvor mye penger de skal investere i Pennsylvania den neste 30 dagene frem til valgdagen.

I Pennsylvania er det anslått at Donald Trump har 3 mill. sikre stemmer. Målet med investeringene er dermed å mobilisere flere stemmer utover de 3 mill. sikre stemmene.

For hver dag i de neste 30 dagene bestemmer et visst antall nye personer seg for å stemme på Donald Trump.



Figur 3: Vippestaten Pennsylvania.

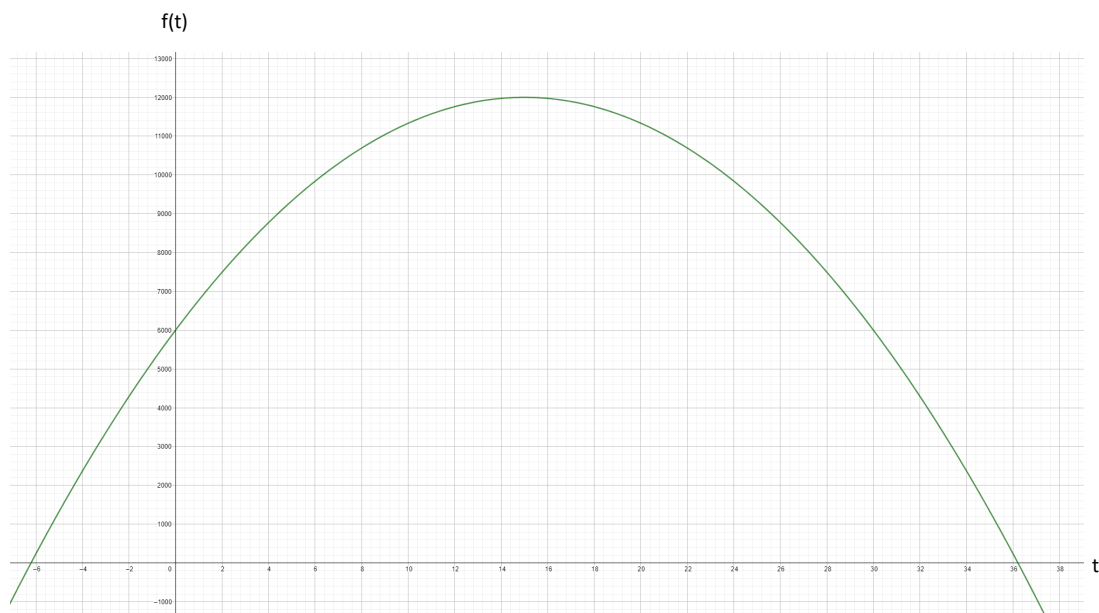
Anta antall nye stemmer Donald får ved tiden t er estimert av valganalytikerne ved funksjonen:

$$f(t) = 12000 - 6000 \left(\frac{t-a}{30-a} \right)^2 \quad t \in [0, 30] \quad (16)$$

hvor

$$a = \text{er styringsparameteren til valgledelsen} \quad a \in [0, 30] \quad (17)$$

Legg merke til at valgledelsen har restriktet styringsparameteren a til å ligge mellom 0 og 30. Figur 4 illustrerer $f(t)$ når $a = 15$.⁴



Figur 4: $f(t)$ med styringsparameteren $a = 15$.

⁴En *styringsparameter* er en beslutning eller størrelse som valgledelsen tar for å styre valgkampanjen.

a) (12.5%)

Anta at $f(t)$ oppnår sitt maksimum akkurat når Donald Trump holder tale i Pennsylvania. Vis at a kan tolkes som:

$$a = \text{tidspunktet for når Donald Trump holder tale i Pennsylvania,} \quad (18)$$

dvs. vis at $f(t)$ er maksimal for $t = a$.⁵

b) (10%) Med $a = 15$, hvor mange nye stemmer N har Donald Trump fått i Pennsylvania totalt ila. de siste 30 dagene?⁶

⁵Dvs. vis at toppunktet til f er gitt ved $t = a$. Bruk 1.derivasjonstesten for å finne de mulige kandidatene og bruk 2.derivasjonstesten til å avgjøre om kandidatene er topp- eller bunnpunkt hhv.

⁶Dere må finne arealet under grafen til f mellom 0 og 30.

Valgkomiteen til Donald Trump er ikke helt fornøyd med valget av tidspunkt for taledagen a (dvs. at $a = 15$). De mener den kan forbedres innen intervallet $[0, 30]$.

Det ultimate målet er å vinne flest mulige nye stemmer $N(a)$ i løpet av de siste 30 dagene av valgkampanjen.

- c) (12.5%) Bestem taletidspunktet a^* som gir maksimalt antall $N^* = N(a^*)$ nye stemmer i løpet av de neste 30 dagene.^{7 8 9 10 11}

Bestem også tallverdien til N^* .

Avrund svaret opp til nærmeste heltall.

■

⁷Dette er en A-oppgave. Hopp gjerne over denne oppgaven og gjør den til slutt.

⁸Bruk at anti-derivert $F(t)$ til $f(t)$ for en generell a er gitt ved

$$F(t) = 12000t - 2000 \frac{1}{(30-a)^2} (t-a)^3 + C \quad (19)$$

⁹Bruk følgende derivasjonsformel: (derivasjon av en brøk)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{(30-x)^2} \right) = \frac{90x^2 - x^3}{(30-x)^3} \quad (20)$$

¹⁰Bruk at

$$(30-x)^3 = -x^3 + 90x^2 - 2700x + 27\,000 \quad (21)$$

¹¹Når du skal bruke 2. derivasjonstesten for å teste om kandidaten er et toppunkt eller bunnpunkt, bruk da at:

$$\frac{d^2N}{da^2} = -10\,800\,000 \frac{a}{(30-a)^4} \quad (22)$$

Oppgave 4 — 15%

Påtroppende president i USA, Joe Biden, har hatt en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 5: Joe Biden.

Anta i løpet av de siste 30 dagene av valgkampen, er det bestemt at Biden skal tilbringe totalt 12 timer i Pennsylvania. Hensikten med disse 12 timene er å vinne nye stemmer.

I Pennsylvania er det anslått at Joe Biden har 3 mill. sikre stemmer. Valgkomiteen til Biden må avgjøre hvordan han skal benytte de 12 timene for å vinne nye stemmer. Valgkomiteen deler inn de 12 timene mellom to typer *aktiviteter*:

x = antall timer Biden taler i Pennsylvania (taletimer) (23)

y = antall timer Biden hilser på folket i Pennsylvania (hilsetimer) (24)



Figur 6: Vippesstaten Pennsylvania.

Valgkomiteen vet at begge aktivitetene er vesentlige og at de ikke kan utelukke den ene fremfor den andre. Ved hjelp av data fra tidligere valgkampanjer har de kommet frem til følgende sammenheng:

$$N(x, y) = Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \quad (25)$$

hvor $N(x, y)$ er antall *nye* stemmer som Biden vinner.

For hver time Biden taler, går det med totalt 3 timer siden før- og etter forberedelser må inkluderes. Tilsvarende for hver time Biden hilser på folket går det med totalt 1 time.

Siden det allerede er bestemt at Biden ikke skal opptre mer enn 12 timer totalt i Pennsylvania, fås følgende krav som må være oppfylt:

$$3x + y = 12 \quad (26)$$

Valgkomiteen ønsker å bestemme antall taletimer x og antall hilsetimer y slik at antall nye stemmer $N(x, y)$ maksimeres under bibetingelsen i lign.(26).

- a) (2.5%) Skriv opp Lagrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(26).¹²

- b) (10%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(26) har følgende kritiske punkt:

$$x^* = 3, \quad y^* = 3 \quad (27)$$

som maksimerer antall nye stemmer.¹³

- c) (2.5%) Anta at $B = 110\,000$. Regn ut antall nye stemmer Biden får med sin optimale strategi, dvs. regn ut tallverdien til N^* . Avrund svaret opp til nærmeste heltall.

Sammenlign svaret med svaret du fikk i oppgave 3c).
Hvem hadde best valgkampanje i Pennsylvania?

■

¹²Altså her kreves ingen regning.

¹³Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.