
Oppgave 1 — 25%

- a)** (2.5%) Finn felles faktor og forenkle uttrykket så mye som mulig.

$$3(x+1)^2(x-1) - 3(x+1)^3 \quad (1)$$

Faktoriserer: ($3(x+1)^2$ er felles faktor)

$$\begin{aligned} 3(x+1)^2(x-1) - 3(x+1)^3 &= 3(x+1)^2(x-1-(x+1)) \\ &= 3(x+1)^2(\cancel{x}-1-\cancel{x}-1) = 3(x+1)^2(-2) = -6(x+1)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

- b)** (2.5%) Løs ulikheten:

$$f(x) = -6(x+1)^2 \geq 0 \quad (3)$$

hvor x er et reelt tall.

Siden $(x+1)^2$ er positiv eller null for alle reelle x , dvs. $(x+1)^2 \geq 0$, så er

$$x = -1 \quad (4)$$

eneste løsning til lign.(3)

- c) (2.5%) Regn ut uten bruk av kalkulator. Vis mellomregninger.

$$\frac{(32 \cdot 10^{-5})(\frac{1}{4} \cdot 10^7)}{8 \cdot 10^2} \quad (5)$$

$$\frac{(32 \cdot 10^{-5})(\frac{1}{4} \cdot 10^7)}{8 \cdot 10^2} = \frac{32}{8 \cdot 4} \cdot 10^{-5} \cdot 10^7 \cdot 10^{-2} = \frac{32}{32} \cdot 10^{-5+7-2} = 1 \cdot 10^0 = 1 \quad (6)$$

- d) (5%) Gitt følgen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$ bestemt ved

$$1, 2, 3, 4, \dots, 98, 99, 100 \quad (7)$$

- i) Begrunn hvorfor følgen i lign.(7) er en aritmetisk følge.
ii) La S_n være summen av den tilhørende aritmetiske rekken, dvs. la:

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} a_i \quad (8)$$

Regn ut S_{100} .

- i) Differens:

$$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1 \quad (9)$$

$$a_3 - a_2 = 3 - 2 = 1 \quad (10)$$

$$a_4 - a_3 = 4 - 3 = 1 \quad (11)$$

osv. så ser vi at differansen mellom to påfølgende ledd er konstant, $a_{i+1} - a_i = d$. Derfor er i lign.(7) en aritmetisk følge.

ii) Summen av en aritmetisk rekke er: (se kompendium)

$$S_n = n \left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (12)$$

Med $a_1 = 1$, $d = 1$ og $n = 100$ får vi:

$$S_{100} = 100 \left(1 + \frac{(100-1) \cdot 1}{2} \right) = 5050 \quad (13)$$

e) (7.5%) Gitt funksjonene:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^{3/2} + (x-2^2)(x-6^2) \quad , \quad g(x) = \frac{1}{8}x^{3/2} \quad (14)$$

Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene. ¹

Skjæringspunkt(en) til funksjonene er bestemt av $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = g(x) \quad \text{skjæring} \quad (15)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{8}x^{3/2}} + (x-2^2)(x-6^2) = \cancel{\frac{1}{8}x^{3/2}} \quad \Big/ -\cancel{\frac{1}{8}x^{3/2}} \quad (16)$$

$$\Downarrow$$

$$(x-2^2)(x-6^2) = 0 \quad (17)$$

som har løsningene

$$x = 2^2 = 4 \quad \vee \quad x = 6^2 = 36 \quad (18)$$

¹Husk at skjæringspunkt(en) har både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. (x, y) .

Tilhørende funksjonsverdier er:

$$g(2^2) = \frac{1}{8}(2^2)^{3/2} = \frac{1}{8}2^3 = \frac{8}{8} = 1 \quad (19)$$

$$g(6^2) = \frac{1}{8}(6^2)^{3/2} = \frac{1}{8}6^3 = \frac{216}{8} = 27 \quad (20)$$

Skjæringspunktene til $f(x)$ og $g(x)$ er dermed:

$$(x,y) = (4,1) \quad \text{og} \quad (x,y) = (36,27) \quad (21)$$

f) (5%) Løs ligningsystemet

$$x + 5y = 2 \quad (22)$$

$$3x + 5y = 26 \quad (23)$$

Det er flere måter å løse et lineær ligningsystem på, blant annet via “innsetningsmetoden” eller “addisjonsmetoden.” I dette tilfellet velger vi “innsetningsmetoden”.

Løser m.h.p. x alene i lign.(22).

$$x = 2 - 5y \quad (24)$$

Setter dette uttrykket for x inn i lign.(23):

$$3x + 5y = 26 \quad \text{innsatt for } x \quad (25)$$

$$\Downarrow$$

$$3(2 - 5y) + 5y = 26 \quad \text{“pilmetoden”} \quad (26)$$

$$\Downarrow$$

$$6 - 15y + 5y = 26 \quad (27)$$

$$\Downarrow$$

$$-10y = 26 - 6 \quad / -\frac{1}{10} \quad (28)$$

$$\Downarrow$$

$$y = -2 \quad (29)$$

Via lign.(24) finner vi da x :

$$x = 2 - 5(-2) \qquad \text{innsatt for } y = -2 \qquad (30)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 2 + 10 \qquad (31)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 12 \qquad (32)$$

Løsningen til ligningsystemet er dermed: $(x, y) = (12, -2)$.

■

Oppgave 2 — 25%

- a) (5%) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{12} e^{\frac{3}{2}x^2} \quad (33)$$

i punktet $x = 2$. Skriv svaret på eksakt form.

Sammensatt funksjon:

$$f(x) = \frac{1}{12} e^{\frac{3}{2}x^2} \quad (34)$$

hvor

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \quad (35)$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjernen)} \quad (36)$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(u(x)) \quad (37)$$

hvor

$$g(u) = \frac{1}{12} e^u \quad (\text{ytre funksjon}) \quad (38)$$

$$u(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad \underbrace{(\text{indre funksjon})}_{\text{kjerne}} \quad (39)$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\left(\text{ytre} \right)' \left(\text{indre} \right)'}^{\text{kjerneregelen}} \quad \text{kjerneregelen} \quad (40)$$

$$= g'(u) u' \quad \text{kjerneregelen} \quad (41)$$

$$= \left(\frac{1}{12} e^u \right)' \left(\frac{3}{2}x^2 \right)' \quad (42)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12} e^u \right)' \left(\frac{3}{2} x^2 \right)' \quad (43)$$

$$= \frac{1}{12} e^u 3x \quad \text{sett inn } u = \frac{3}{2} x^2 \quad (44)$$

$$= \frac{x}{4} e^{\frac{3}{2} x^2} \quad (45)$$

Innsatt for $x = 2$ gir oss stigningstallet i punktet:

$$f'(2) = \frac{2}{4} e^{\frac{3}{2} 2^2} = \frac{1}{2} e^6 \quad (46)$$

b) (2.5%) Bruk fundamentalsetningen for aritmetikk og faktoreriser følgende naturlige tall:

$$i) \quad 8 \quad (47)$$

$$ii) \quad 9 \quad (48)$$

$$iii) \quad 8 \quad (49)$$

$$iv) \quad 21 \quad (50)$$

$$i) \quad 8 = 2^3 \quad (2 \text{ er primtall}) \quad (51)$$

$$ii) \quad 9 = 3^2 \quad (3 \text{ er primtall}) \quad (52)$$

$$iii) \quad 12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2 \quad (3 \text{ og } 2 \text{ er primtall})$$

$$iv) \quad 21 = 3 \cdot 7 \quad (3 \text{ og } 7 \text{ er primtall}) \quad (53)$$

- c) (7.5%) Anta at vi setter inn kapitalen $K(0)$ i banken år 0. Renten r er konstant. Anta videre at kapitalen $K(i)$ ved år nr. i , rente inkludert, følger mønsteret

$$K(0)(1+r), K(0)(1+r)^2, K(0)(1+r)^3, \dots, K(0)(1+r)^i, \dots \quad (54)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

- i) Skriv ned, uten utregning, et uttrykk for kapitalen $K(i)$ etter i år. Dette uttrykket kalles ofte “*renteformelen*”.
- ii) Hva slags type følge utgjør lign.(54)? Hva er vekstfaktoren i dette tilfellet?
- iii) Finn et uttrykk for summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n K(i) \quad (55)$$

- i) Uttrykk for kapitalen $K(i)$ etter i år er:

$$K(i) = K(0)(1+r)^i \quad (56)$$

som altså kalles “*renteformelen*”.

- ii) Siden

$$k = \frac{K(i+1)}{K(i)} = 1+r \quad (57)$$

så er dette en geometrisk rekke med $k = 1+r$ som vekstfaktor.

iii) Summen av en geometrisk rekke: (se boken)

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (58)$$

Med $k = 1 + r$ og $a_1 = K(0)(1 + r)$:

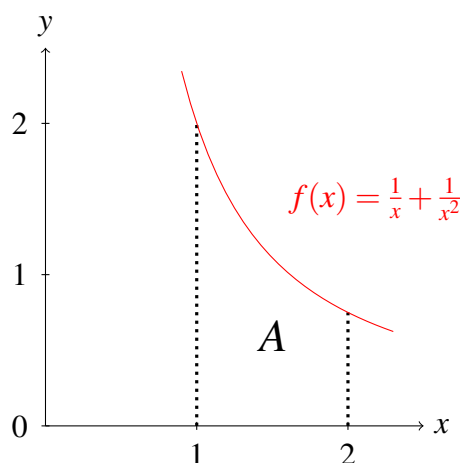
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n K(i) = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \\ &= K(0)(1 + r) \frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1} = K(0)(1 + r) \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \end{aligned} \quad (59)$$

d) (5%) Finn arealet A avgrenset av funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (60)$$

og intervallet $[a, b] = [1, 2]$, dvs. finn:

$$A = \int_1^2 f(x) dx \quad (61)$$



Figur 1: Arealet A .

Den antideriverte av $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ er:

$$F(x) = \ln x - x^{-1} + c = \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (62)$$

hvor c er en konstant.

Dette innser vi ved å gå baklengs: $F'(x) = (\ln x - x^{-1} + c)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

Fundamentalsetningen for integral gir da:

$$A = \int_1^2 f(x) dx \quad (63)$$

$$= F(2) - F(1) \quad (64)$$

$$= \left(\ln 2 - \frac{1}{2} + c \right) - \left(\underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{1} + c \right) \quad (65)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \quad (66)$$

e) (5%) Gitt funksjonen:

$$f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3 + \ln(2xy) \quad (67)$$

Finn de partiellderiverte.

Bruker regnereglene for logaritmefunksjoner: ²

$$f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3 + \ln(2xy) = \frac{1}{6}x^2y^3 + \ln(2) + \ln(x) + \ln(y) \quad (68)$$

Siden $\partial \ln(x)/\partial x = 1/x$ så er:

²Man kan også bruke kjereregelen for å regne ut den partiell deriverte av $\ln$ -leddet, men det er enklere og mindre regning å heller bruke regneregelen $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ i dette tilfellet.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{6}x^2y^3 + \ln(2) + \ln(x) + \ln(y) \right) = \frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{x} \quad (69)$$

Siden $\partial \ln(y)/\partial y = 1/y$ så er:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{6}x^2y^3 + \ln(2) + \ln(x) + \ln(y) \right) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{y} \quad (70)$$

■

Oppgave 3 — 35%

Nåværende president i USA, Donald Trump, hadde i 2020 en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 2: Donald Trump.

Anta det er 30 dager igjen til valgdagen.

Valgledelsen vet at en av de viktigste vippestatene er Pennsylvania. De ønsker derfor å analysere hvor mye penger de skal investere i Pennsylvania den neste 30 dagene frem til valgdagen.

I Pennsylvania er det anslått at Donald Trump har 3 mill. sikre stemmer. Målet med investeringene er dermed å mobilisere flere stemmer utover de 3 mill. sikre stemmene.

For hver dag i de neste 30 dagene bestemmer et visst antall nye personer seg for å stemme på Donald Trump.



Figur 3: Vippestaten Pennsylvania.

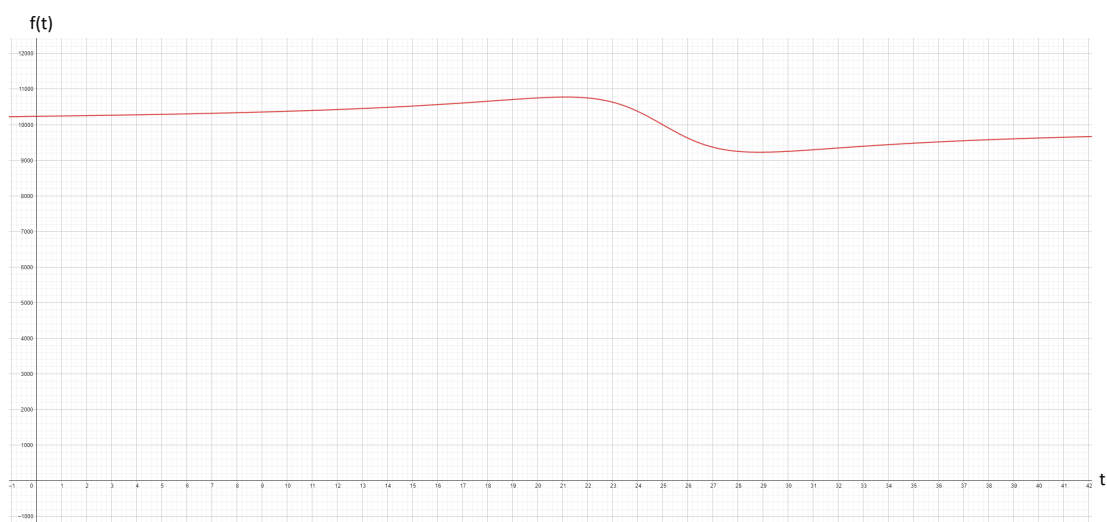
Anta antall nye stemmer Donald får ved tiden t er estimert av valganalytikerne ved funksjonen:

$$f(t) = 10000 - 6000 \frac{t - a - 10}{15 + (t - a - 10)^2} \quad t \in [0, 30] \quad (71)$$

hvor

$$a = \text{er styringsparameteren til valgledelsen} \quad a \in [0, 30] \quad (72)$$

Legg merke til at valgledelsen har restriktet styringsparameteren a til å ligge mellom 0 og 30. Figur 4 illustrerer $f(t)$ når $a = 15$.³



Figur 4: $f(t)$ med styringsparameteren $a = 15$.

a) (10%) Vis at den deriverte av f er gitt ved⁴

$$\frac{df(t)}{dt} = -6000 \frac{15 - (t - a - 10)^2}{(15 + (t - a - 10)^2)^2} \quad (73)$$

³En *styringsparameter* er en beslutning eller størrelse som valgledelsen tar for å styre valgkampanjen.

⁴Bruk kjerneregelen med kjerne $u = t - a - 10$, og deretter bruk kvotientformelen for derivasjon.

Kjerneregelen: (skriver f på kjerneform)

$$f(t) = 10000 - 6000 \frac{t - a - 10}{15 + (t - a - 10)^2} \quad (74)$$

$$= 10000 - 6000 \frac{u}{15 + u^2} \quad (75)$$

Definerer:

$$u(t) = t - a - 10 \quad \text{indre funksjon} \quad (76)$$

$$g(u) = 10000 - 6000 \frac{u}{15 + u^2} \quad \text{ytre funksjon} \quad (77)$$

Finner de deriverte:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(t - a - 10) = 1 \quad (78)$$

og

$$\frac{dg(u)}{du} = \frac{d}{du} \left(10000 - 6000 \frac{u}{15 + u^2} \right) \quad (79)$$

$$= \frac{d}{du}(10000) - 6000 \frac{d}{du} \left(\frac{u}{15 + u^2} \right) \quad (80)$$

$$= -6000 \frac{1 \cdot (15 + u^2) - u(2u)}{(15 + u^2)^2} \quad (81)$$

$$= -6000 \frac{15 + u^2 - 2u^2}{(15 + u^2)^2} \quad (82)$$

$$= -6000 \frac{15 - u^2}{(15 + u^2)^2} \quad (83)$$

$$(84)$$

Kjerneregelen for derivasjon:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{dg(u)}{du} \frac{du(t)}{dt} \quad (85)$$

$$= -6000 \frac{15 - u^2}{15 + u^2} \cdot 1 \quad (86)$$

$$= -6000 \frac{15 - u^2}{(15 + u^2)^2} \quad / u = t - a - 10 \quad (87)$$

$$= -6000 \frac{15 - (t - a - 10)^2}{(15 + (t - a - 10)^2)^2} \quad (88)$$

som skulle vises.

- b) (15%) Anta at $f(t)$ oppnår sitt maksimum akkurat når Donald Trump holder tale i Pennsylvania.

I etterkant av talen faller f til et minimum som en følge av talen.

Finn når Trump holder talen sin og finn når oppslutningen er minimal, dvs. finn når toppunkt og bunnpunkt for f .^{5 6}

Fra oppgave 3a) har vi at den deriverte er gitt ved

$$\frac{df(t)}{dt} = -6000 \frac{15 - (t - a - 10)^2}{(15 + (t - a - 10)^2)^2} \quad (90)$$

Setter den deriverte lik null (1. derivasjonstesten):

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \quad (91)$$

$\Downarrow$

$$-6000 \frac{15 - (t - a - 10)^2}{(15 + (t - a - 10)^2)^2} = 0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{(15 + (t - a - 10)^2)^2}{-6000}$$

$\Downarrow$

$$15 - (t - a - 10)^2 = 0 \quad (92)$$

$\Downarrow$

$$15 = (t - a - 10)^2 \quad (93)$$

$\Downarrow$

$$t - a - 10 = \pm \sqrt{15} \quad (94)$$

$\Downarrow$

$$t = a + 10 \pm \sqrt{15} \quad (95)$$

Førstederivasjonstesten gir oss dermed *to* kandidater:

$$t_1 = a + 10 - \sqrt{15} \quad t_2 = a + 10 + \sqrt{15} \quad (96)$$

⁵Bruk 1. derivasjonstesten for å finne de mulige kandidatene og bruk 2. derivasjonstesten til å avgjøre om kandidatene er topp- eller bunnpunkt hhv.

⁶Bruk at

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = -6000 \frac{2u^3 - 90u}{u^6 + 45u^4 + 675u^2 + 3375} > -6000(2u^3 - 90u), \quad \text{hvor } u = t - a - 10 \quad (89)$$

For å bestemme om vi har topp- eller bunnpunkt, kan vi bruke 2.derivasjonstesten. Vi har oppgitt fra fotnoten den 2. deriverte av $f(t)$:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -6000 \frac{2u^3 - 90u}{u^6 + 45u^4 + 675u^2 + 3375}, \quad \text{hvor } u = t - a - 10 \quad (97)$$

Siden fotnoten hintet til at vi skal bruke u -variabelen, så regner vi om kandiadatene til u -variabler:

$$u_1 = t_1 - a - 10 = a + 10 - a - 10 - \sqrt{15} = -\sqrt{15} \quad (98)$$

$$u_2 = t_2 - a - 10 = a + 10 - a - 10 + \sqrt{15} = \sqrt{15} \quad (99)$$

t_1 :

Siden nevneren i lign.(97) alltid er positiv har vi

$$\frac{d^2 f(t_1)}{dt^2} = -6000 \frac{2u_1^3 - 90u_1}{u_1^6 + 45u_1^4 + 675u_1^2 + 3375} \quad (\text{fotnote}) \quad (100)$$

$$> -6000(2u_1^3 - 90u_1) \quad (101)$$

$$= -6000u_1(2u_1^2 - 90) \quad (\text{faktorisering}) \quad (102)$$

$$= -6000(-\sqrt{15})(2(-\sqrt{15})^2 - 90) \quad u_1 = -\sqrt{15} \quad (103)$$

$$= -6000(-\sqrt{15})(2 \cdot 15 - 90) \quad (104)$$

$$= -6000(-\sqrt{15})(-60) \quad (105)$$

$$= -6000 \cdot \sqrt{15} \cdot 60 \quad (106)$$

$$< 0 \quad (107)$$

Siden $f''(t_1) < 0$ kan vi fra 2. derivasjonstesten konkludere at $t_1 = a + 10 - \sqrt{15}$ er et *toppunkt*.

t_2 :

Siden nevneren i lign.(97) alltid er positiv har vi

$$\frac{d^2 f(t_2)}{dt^2} = -6000 \frac{2u_2^3 - 90u_2}{u_2^6 + 45u_2^4 + 675u_2^2 + 3375} \quad (\text{fotnote}) \quad (108)$$

$$> -6000(2u_2^3 - 90u_2) \quad (109)$$

$$= -6000u_2(2u_2^2 - 90) \quad (\text{faktorisering}) \quad (110)$$

$$= -6000(\sqrt{15}) \left(2(\sqrt{15})^2 - 90 \right) \quad u_2 = \sqrt{15} \quad (111)$$

$$= -6000(\sqrt{15}) (2 \cdot 15 - 90) \quad (112)$$

$$= -6000(\sqrt{15}) (-60) \quad (113)$$

$$= 6000 \cdot \sqrt{15} \cdot 60 \quad (114)$$

$$> 0 \quad (115)$$

Siden $f''(t_2) > 0$ kan vi fra 2. derivasjonstesten konkludere at $t_1 = a + 10 - \sqrt{15}$ er et *bunnunkt*.

- c) (10%) Anta Trump har bestemt at $a = 5$. Hvor mange nye stemmer N får Donald Trump fått i Pennsylvania totalt ila. de siste 30 dagene? ⁷ ⁸

Totalt antall nye stemmer N til Donald Trump i Pennsylvania ila. de siste 30 dagene er gitt ved integralet:

$$N = \int_0^{30} f(t) dt \quad (118)$$

Med $a = 5$ har vi at

$$f(t) = 10000 - 6000 \frac{t - 15}{15 + (t - 15)^2} \quad t \in [0, 30] \quad (119)$$

Anti-derivert $F(t)$ til denne funksjonen var oppgitt i fotnote:

$$F(t) = 10000t - 3000 \ln \left(\frac{1}{2}t^2 - 15t + 120 \right) + C \quad (120)$$

⁷Dere må finne arealet under grafen til f mellom 0 og 30.

⁸Bruk at funksjonen

$$f(t) = 10000 - 6000 \frac{t - 15}{15 + (t - 15)^2} \quad t \in [0, 30] \quad (116)$$

har anti-derivert

$$F(t) = 10000t - 3000 \ln \left(\frac{1}{2}t^2 - 15t + 120 \right) + C \quad (117)$$

Fundamentalsetningen for kalkulus:

$$N = \int_0^{30} f(t) dt \quad (121)$$

$$= F(30) - F(0) \quad (122)$$

$$= \left[10000 \cdot 30 - 3000 \ln \left(\frac{1}{2} 30^2 - 15 \cdot 30 + 120 \right) + C \right] - \quad (123)$$

$$\left[10000 \cdot 0 - 3000 \ln \left(\frac{1}{2} 0^2 - 15 \cdot 0 + 120 \right) + C \right] \quad (124)$$

$$= \left[10000 \cdot 30 - 3000 \ln \left(\cancel{15 \cdot 30} - \cancel{15 \cdot 30} + 120 \right) \right] - \left[-3000 \ln 120 \right]$$

$$= 300\,000 - \cancel{30000 \ln 120} + \cancel{3000 \ln 120} \quad (125)$$

$$= 300\,000 \quad (126)$$

Konklusjon

Dersom Trump velger $a = 5$ så vinner Donald Trump totalt $N = 300\,000$ nye stemmer de siste 30 dagene.

■

Oppgave 4 — 15%

Påtroppende president i USA, Joe Biden, hadde en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 5: Joe Biden.

Anta i løpet av de siste 30 dagene av valgkampen, er det bestemt at Biden skal tilbringe totalt 12 timer i Pennsylvania. Hensikten med disse 12 timene er å vinne nye stemmer.

I Pennsylvania er det anslått at Joe Biden har 3 mill. sikre stemmer. Valgkomiteen til Biden må avgjøre hvordan han skal benytte de 12 timene for å vinne nye stemmer. Valgkomiteen deler inn de 12 timene mellom to typer *aktiviteter*:

$$x = \text{antall timer Biden taler i Pennsylvania} \quad (\text{taletimer}) \quad (127)$$

$$y = \text{antall timer Biden hilser på folket i Pennsylvania} \quad (\text{hilsetimer}) \quad (128)$$



Figur 6: Vippestaten Pennsylvania.

Valgkomiteen vet at begge aktivitetene er vesentlige og at de ikke kan utelukke den ene fremfor den andre. Ved hjelp av data fra tidligere valgkampanjer har de kommet frem til følgende sammenheng:

$$N(x, y) = Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \quad (129)$$

hvor $N(x, y)$ er antall nye stemmer som Biden vinner.

For hver time Biden taler, går det med totalt 4 timer siden før- og etter forberedelser må inkluderes. Tilsvarende for hver time Biden hilser på folket går det med totalt 2 time.

Siden det allerede er bestemt at Biden ikke skal opptre mer enn 12 timer totalt i Pennsylvania, fås følgende krav som må være oppfylt:

$$4x + 2y = 12 \quad (130)$$

Valgkomiteen ønsker å bestemme antall taletimer x og antall hilsetimer y slik at antall nye stemmer $N(x, y)$ maksimeres under bibetingelsen i lign.(130).

- a) (2.5%) Skriv opp Lagrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(130).⁹

Lagrangefunksjonen:

$$L(x, y, \lambda) = N(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (131)$$

hvor $g(x, y) = 0$ er bibetingelsen, som i vårt tilfelle er

$$g(x, y) = 4x + 2y - 12 \quad (132)$$

⁹Altså her kreves ingen regning.

Dette gir:

$$L(x, y, \lambda) = N(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (133)$$

$$= Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} - \lambda (4x + 2y - 12) \quad (134)$$

- b) (10%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(130) har følgende kritiske punkt:

$$x^* = \frac{9}{4}, \quad y^* = \frac{3}{2} \quad (135)$$

som maksimerer antall nye stemmer.¹⁰

De kritiske punktene for $f(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = 0$ oppfyller ligningssystemet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (136)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (137)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (138)$$

hvor

$$\lambda = \text{Lagrange-multiplikatoren} \quad (139)$$

¹⁰Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

Partiellderiverte:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} - \lambda(4x + 2y - 12) \right) \quad (140)$$

$$= B\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}y^{\frac{1}{4}} - 4\lambda \quad (141)$$

$$= \frac{3B}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - 4\lambda \quad (142)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} - \lambda(2x + 2y - 12) \right) \quad (143)$$

$$= Bx^{\frac{3}{4}}\frac{1}{4}y^{\frac{1}{4}-1} - 2\lambda \quad (144)$$

$$= \frac{B}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} - 2\lambda \quad (145)$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ med hensyn på λ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (146)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3B}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - 4\lambda = 0 \quad (147)$$

$$\Downarrow$$

$$4\lambda = \frac{3B}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} \quad / : 4 \quad (148)$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{3B}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} \quad (149)$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ med hensyn på λ :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (150)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{B}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} - 2\lambda = 0 \quad (151)$$

$$\Updownarrow$$

$$2\lambda = \frac{B}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \quad / : 2 \quad (152)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = \frac{B}{8}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \quad (153)$$

Eliminerer λ :

$$\lambda = \lambda \quad (154)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{3B}{16}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = \frac{B}{8}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \quad / \cdot \frac{16}{3} \quad (155)$$

$$\Updownarrow$$

$$x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \quad / \cdot x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} \quad (156)$$

$$\Updownarrow$$

$$y^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \quad (157)$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{2}{3}x \quad (158)$$

Innsatt i bibetingelsen: (setter inn at $y = \frac{2}{3}x$)

$$4x + 2y = 12 \quad (159)$$

$$\Downarrow$$

$$4x + 2 \cdot \frac{2}{3}x = 12 \quad \quad \quad / \cdot 3 \quad (160)$$

$$\Downarrow$$

$$12x + 4x = 12 \cdot 3 \quad (161)$$

$$\Downarrow$$

$$16x = 36 \quad (162)$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \quad (163)$$

Siden $y = \frac{2}{3}x$ så er:

$$y = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad (164)$$

For å maksimere antall nye stemmer $N(x, y)$ så må Biden bruke $x^* = \frac{9}{4}$ taletimer og $y^* = \frac{3}{2}$ hilsetimer, som skulle vises.

- c) (2.5%) Anta at $B = 160\,000$. Regn ut antall nye stemmer Biden får med sin optimale strategi, dvs. regn ut tallverdien til N^* . Avrund svaret opp til nærmeste heltall.

Sammenlign svaret med svaret du fikk i oppgave 3c).
Hvem hadde best valgkampanje i Pennsylvania?

Vi setter inn $x^* = \frac{9}{4}$ og $y^* = \frac{3}{2}$ inn i N :

$$\begin{aligned} N(x^*, y^*) &= N\left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right) = B \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = B \left(\left(\frac{9}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right)^1\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= B \left(\left(\frac{3^2}{2^2}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right)^1\right)^{\frac{1}{4}} = B \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2 \cdot 3} \left(\frac{3}{2}\right)^1\right)^{\frac{1}{4}} = B \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}} \end{aligned} \quad (165)$$

Siden $B = 160\,000$, får vi at

$$N(x^*, y^*) = 160\,000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}} = 325\,297 \quad (\text{avrundet til nærmeste heltall})$$

Biden har dermed den beste strategien i Pennsylvania siden hans strategi vil gi 25 297 flere stemmer enn Trump (som vant 300 000 nye stemmer).

■