
Oppgave 1 — 25%

- a)** (2.5%) Finn felles faktor og forenkle uttrykket så mye som mulig.

$$3(x+1)^2(x-1) - 3(x+1)^3 \quad (1)$$

- b)** (2.5%) Løs ulikheten:

$$f(x) = -6(x+1)^2 \geq 0 \quad (2)$$

hvor x er et reelt tall.

- c)** (2.5%) Regn ut uten bruk av kalkulator. Vis mellomregninger.

$$\frac{(32 \cdot 10^{-5})(\frac{1}{4} \cdot 10^7)}{8 \cdot 10^2} \quad (3)$$

- d)** (5%) Gitt følgen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}, a_{100}$ bestemt ved

$$1, 2, 3, 4, \dots, 98, 99, 100 \quad (4)$$

- i)** Begrunn hvorfor følgen i lign.(4) er en aritmetisk følge.

- ii)** La S_n være summen av den tilhørende aritmetiske rekken, dvs. la:

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} a_i \quad (5)$$

Regn ut S_{100} .

- e)** (7.5%) Gitt funksjonene:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^{3/2} + (x-2^2)(x-6^2) \quad , \quad g(x) = \frac{1}{8}x^{3/2} \quad (6)$$

Finn skjæringspunkt(en) til funksjonene. ¹

¹Husk at skjæringspunkt(en) har både en x -koordinat og en y -koordinat, dvs. (x, y) .

f) (5%) Løs ligningsystemet

$$x + 5y = 2 \quad (7)$$

$$3x + 5y = 26 \quad (8)$$

■

Oppgave 2 — 25%

- a) (5%) Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{12}e^{\frac{3}{2}x^2} \quad (9)$$

i punktet $x = 2$. Skriv svaret på eksakt form.

- b) (2.5%) Bruk fundamentalsetningen for aritmetikk og faktoreriser følgende naturlige tall:

$$i) \quad 8 \quad (10)$$

$$ii) \quad 9 \quad (11)$$

$$iii) \quad 8 \quad (12)$$

$$iv) \quad 21 \quad (13)$$

- c) (7.5%) Anta at vi setter inn kapitalen $K(0)$ i banken år 0. Renten r er konstant. Anta videre at kapitalen $K(i)$ ved år nr. i , rente inkludert, følger mønsteret

$$K(0)(1+r), K(0)(1+r)^2, K(0)(1+r)^3, \dots, K(0)(1+r)^i, \dots \quad (14)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

- i) Skriv ned, uten utregning, et uttrykk for kapitalen $K(i)$ etter i år. Dette uttrykket kalles ofte “renteformelen”.
- ii) Hva slags type følge utgjør lign.(14)? Hva er vekstfaktoren i dette tilfellet?
- iii) Finn et uttrykk for summen

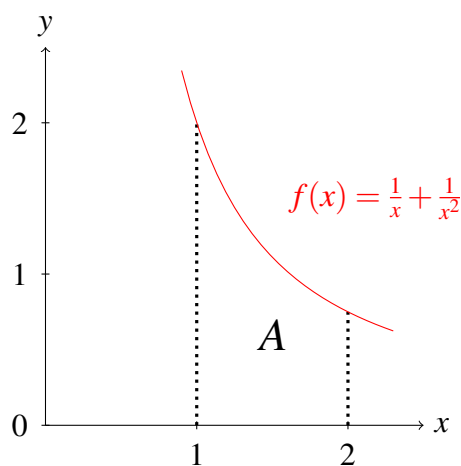
$$S_n = \sum_{i=1}^n K(i) \quad (15)$$

- d) (5%) Finn arealet A avgrenset av funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad (16)$$

og intervallet $[a, b] = [1, 2]$, dvs. finn:

$$A = \int_1^2 f(x) \, dx \quad (17)$$



Figur 1: Arealet A .

- e) (5%) Gitt funksjonen:

$$f(x, y) = \frac{1}{6}x^2y^3 + \ln(2xy) \quad (18)$$

Finn de partiellderivate.

■

Oppgave 3 — 35%

Nåværende president i USA, Donald Trump, hadde i 2020 en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 2: Donald Trump.

Anta det er 30 dager igjen til valgdagen.

Valgledelsen vet at en av de viktigste vippestatene er Pennsylvania. De ønsker derfor å analysere hvor mye penger de skal investere i Pennsylvania den neste 30 dagene frem til valgdagen.

I Pennsylvania er det anslått at Donald Trump har 3 mill. sikre stemmer. Målet med investeringene er dermed å mobilisere flere stemmer utover de 3 mill. sikre stemmene.

For hver dag i de neste 30 dagene bestemmer et visst antall nye personer seg for å stemme på Donald Trump.



Figur 3: Vippestaten Pennsylvania.

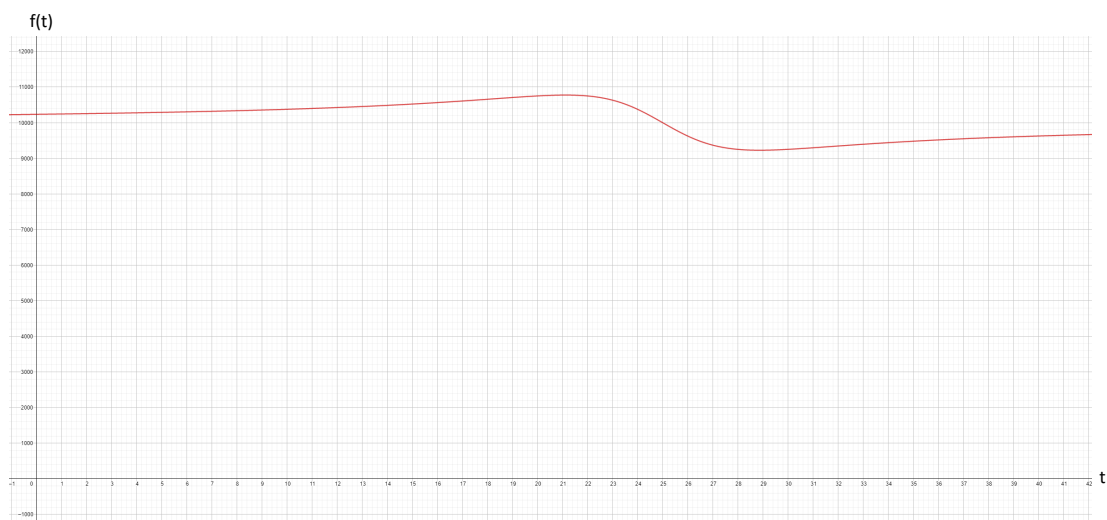
Anta antall nye stemmer Donald får ved tiden t er estimert av valganalytikerne ved funksjonen:

$$f(t) = 10000 - 6000 \frac{t - a - 10}{15 + (t - a - 10)^2} \quad t \in [0, 30] \quad (19)$$

hvor

$$a = \text{er styringsparameteren til valgledelsen} \quad a \in [0, 30] \quad (20)$$

Legg merke til at valgledelsen har restriktert styringsparameteren a til å ligge mellom 0 og 30. Figur 4 illustrerer $f(t)$ når $a = 15$.²



Figur 4: $f(t)$ med styringsparameteren $a = 15$.

a) (10%) Vis at den deriverte av f er gitt ved³

$$\frac{df(t)}{dt} = -6000 \frac{15 - (t - a - 10)^2}{(15 + (t - a - 10)^2)^2} \quad (21)$$

²En *styringsparameter* er en beslutning eller størrelse som valgledelsen tar for å styre valgkampanjen.

³Bruk kjerneregelen med kjerne $u = t - a - 10$, og deretter bruk kvotientformelen for derivasjon.

- b) (15%) Anta at $f(t)$ oppnår sitt maksimum akkurat når Donald Trump holder tale i Pennsylvania.

I etterkant av talen faller f til et minimum som en følge av talen.

Finn når Trump holder talen sin og finn når oppslutningen er minimal, dvs. finn toppunkt og bunnpunkt for f .^{4 5}

- c) (10%) Anta Trump har bestemt at $a = 5$. Hvor mange nye stemmer N får Donald Trump i Pennsylvania totalt ila. de siste 30 dagene?^{6 7}

■

⁴Bruk 1. derivasjonstesten for å finne de mulige kandidatene og bruk 2. derivasjonstesten til å avgjøre om kandidatene er topp- eller bunnpunkt hhv.

⁵Bruk at

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -6000 \frac{2u^3 - 90u}{u^6 + 45u^4 + 675u^2 + 3375} > -6000(2u^3 - 90u), \quad \text{hvor } u = t - a - 10 \quad (22)$$

⁶Dere må finne arealet under grafen til f mellom 0 og 30.

⁷Bruk at funksjonen

$$f(t) = 10000 - 6000 \frac{t - 15}{15 + (t - 15)^2} \quad t \in [0, 30] \quad (23)$$

har anti-derivert

$$F(t) = 10000t - 3000 \ln \left(\frac{1}{2}t^2 - 15t + 120 \right) + C \quad (24)$$

Oppgave 4 — 15%

Påtroppende president i USA, Joe Biden, hadde en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.



Figur 5: Joe Biden.

Anta i løpet av de siste 30 dagene av valgkampen, er det bestemt at Biden skal tilbringe totalt 12 timer i Pennsylvania. Hensikten med disse 12 timene er å vinne nye stemmer.

I Pennsylvania er det anslått at Joe Biden har 3 mill. sikre stemmer. Valgkomiteen til Biden må avgjøre hvordan han skal benytte de 12 timene for å vinne nye stemmer. Valgkomiteen deler inn de 12 timene mellom to typer *aktiviteter*:

x = antall timer Biden taler i Pennsylvania (taletimer) (25)

y = antall timer Biden hilser på folket i Pennsylvania (hilsetimer) (26)



Figur 6: Vippestaten Pennsylvania.

Valgkomiteen vet at begge aktivitetene er vesentlige og at de ikke kan utelukke den ene fremfor den andre. Ved hjelp av data fra tidligere valgkampanjer har de kommet frem til følgende sammenheng:

$$N(x, y) = Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \quad (27)$$

hvor $N(x, y)$ er antall nye stemmer som Biden vinner.

For hver time Biden taler, går det med totalt 4 timer siden før- og etter forberedelser må inkluderes. Tilsvarende for hver time Biden hilser på folket går det med totalt 2 time.

Siden det allerede er bestemt at Biden ikke skal opptre mer enn 12 timer totalt i Pennsylvania, fås følgende krav som må være oppfylt:

$$4x + 2y = 12 \quad (28)$$

Valgkomiteen ønsker å bestemme antall taletimer x og antall hilsetimer y slik at antall nye stemmer $N(x, y)$ maksimeres under bibetingelsen i lign.(28).

- a) (2.5%) Skriv opp Lagrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(28).⁸

- b) (10%) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $N(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(28) har følgende kritiske punkt:

$$x^* = \frac{9}{4}, \quad y^* = \frac{3}{2} \quad (29)$$

som maksimerer antall nye stemmer.⁹

- c) (2.5%) Anta at $B = 160\,000$. Regn ut antall nye stemmer Biden får med sin optimale strategi, dvs. regn ut tallverdien til N^* . Avrund svaret opp til nærmeste heltall.

Sammenlign svaret med svaret du fikk i oppgave 3c).
Hvem hadde best valgkampanje i Pennsylvania?

■

⁸Altså her kreves ingen regning.

⁹Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.