Oppgave 1 — 25%

a) (5%) Bruk

$$(y-2)(y-1) = y^2 - 3y + 2 = 0 \tag{1}$$

til å vise, ved regning, at løsningen til

$$\left(e^{5x}\right)^2 - 3\left(e^{5x}\right) + 2 = 0 \tag{2}$$

er

$$x = \frac{\ln(2)}{5} \quad \text{eller} \quad x = 0 \tag{3}$$

<u>Løsning:</u>

Siden

$$(y-2)(y-1) = \overbrace{y^2 - 3y + 2}^{\text{2. gradsligning}} = 0 \tag{4}$$

så vet vi fra fundamentalsetningen for algebra at

$$y = 2 \;\; \text{og} \;\; y = 1 \tag{5}$$

er løsningene av lign.(4).

Men 2. gradsligningen i lign.(4) er samme ligning som

$$\left(e^{5x}\right)^2 - 3\left(e^{5x}\right) + 2 = 0 \tag{6}$$

med $y = e^{5x}$. Men siden $y = 2$ og $y = 1$ er løsning til ligningen så er :

$$e^{5x} = 2 \;\; \text{og} \;\; e^{5x} = 1 \tag{7}$$

1) Første ligning:

$$
\begin{aligned}
e^{5x} &= 2 && \Big/ \ln && (8)\\
&\Updownarrow \\
\ln\left(e^{5x}\right) &= \ln(2) && && (9)\\
&\Updownarrow \\
5x &= \ln(2) && \Big/ \cdot \frac{1}{5} && (10)\\
&\Updownarrow \\
x &= \frac{\ln(2)}{5} && && (11)
\end{aligned}
$$

2) Andre ligning:
Samme løsning som “første ligning” ovenfor, men med høyre side lik 1 istedet for 2:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\overbrace{\ln(1)}^{=0}}{5} && (12)\\
&\Updownarrow \\
x &= 0 && (13)
\end{aligned}
$$

siden $\ln(1) = 0$.

b) (7.5%) Løs ulikheten ved hjelp av fortegnsskjema: [1]

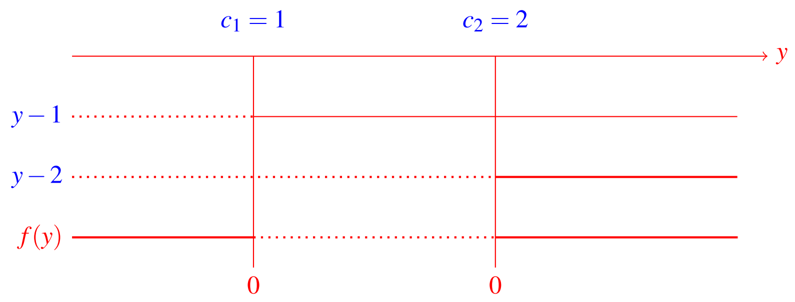
$$f(y) = y^2 - 3y + 2 < 0 \tag{14}$$

Løsning:

Faktoriseringen fra lign.(1) gir:

$$f(y) = y^2 - 3y + 2 = (y-2)(y-1) < 0 \tag{15}$$

Med nullpunktene $c_1 = 1$ og $c_2 = 2$ setter vi opp fortegnsskjemaet:



Figur 1: Fortegnsskjema.

Løsningsmengden når $f(y) < 0$:

$$\mathscr{L} = \langle 2, 3 \rangle \tag{16}$$

[1]Bruk faktoriseringen i lign.(1).

c) (7.5%) Gitt følgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bestemt ved

$$-2 \;,\; 1 \;,\; 4 \;,\; 7 \;,\; 10 \;,\; 13 \;,\; 16 \;,\; \ldots \tag{17}$$

i) Begrunn hvorfor følgen i lign.(17) er en aritmetisk følge.

ii) Hva er a_{27}?

iii) La S_n være summen av den tilhørende aritmetiske rekken, dvs. la:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{18}$$

Regn ut S_{20}.

Løsning:

i) Differens:

$$a_2 - a_1 = 1 - (-2) = 3 \tag{19}$$

$$a_3 - a_2 = 4 - 1 = 3 \tag{20}$$

$$a_4 - a_3 = 7 - 4 = 3 \tag{21}$$

osv. så ser vi at differansen mellom to påfølgende ledd er konstant, $a_{i+1} - a_i = d$. Derfor er i lign.(17) en aritmetisk følge.

ii) Siden

$$a_1 = -2 \tag{22}$$

og

$$d = 3 \tag{23}$$

så bruker vi formelen $a_n = a_1 + (n-1)d$ for en aritmetisk følge (se kompendium) og finner:

$$a_{27} = a_1 + (27-1)d = -2 + 26 \cdot 3 = 76 \tag{24}$$

iii) Summen av en aritmetisk rekke er: (se kompendium)

$$S_n = n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right) \tag{25}$$

Med $a_1 = -2$ og $d = 3$ får vi:

$$S_{20} = 20\left(-2 + \frac{(20-1)\cdot 3}{2}\right) = 530 \tag{26}$$

d) (5%) Løs ligningsystemet

$$x - 3y = -25 \tag{27}$$
$$4x + 5y = 19 \tag{28}$$

Kontroller at svaret er rett ved å sette løsningen inn i lign.(27) og (28) og sjekk at begge ligningene er oppfylte.

Løsning:

Det er flere måter å løse et lineær ligningsystem på, blant annet via "innsettingsmetoden" eller "addisjonsmetoden." I dette tilfellet velger vi "innsettingsmetoden".

Løser m.h.p. x alene i lign.(27).

$$x = 3y - 25 \tag{29}$$

Setter dette uttrykket for x inn i lign.(28):

$$4x + 5y = 19 \qquad \text{innsatt for } x \tag{30}$$
$$\Updownarrow$$
$$4(3y - 25) + 5y = 19 \qquad \text{“pilmetoden”} \tag{31}$$
$$\Updownarrow$$
$$12y - 100 + 5y = 19 \tag{32}$$
$$\Updownarrow$$
$$17y = 119 \qquad \Big/ \frac{1}{17} \tag{33}$$
$$\Updownarrow$$
$$y = 7 \tag{34}$$

Via lign.(29) finner vi da x:

$$x = 3y - 25 \qquad \text{innsatt for } y = 7 \tag{35}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 3 \cdot 7 - 25 \tag{36}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -4 \tag{37}$$

Løsningen til ligningsystemet er dermed: $(x,y) = (-4,7)$.

Kontroll:

Setter inn $(x,y) = (0,-2)$ i lign.(27):

$$x - 3y = 25 \qquad\qquad (x,y) = (-4,7) \tag{38}$$
$$\Updownarrow$$
$$-4 - 3 \cdot 7 = -25 \tag{39}$$
$$\Updownarrow$$
$$-25 = -25 \tag{40}$$

dvs. løsningen oppfyller lign.(27). Tilsvarende:

Setter inn $(x,y) = (-4,7)$ i lign.(28):

$$4x + 5y = 19 \qquad\qquad (x,y) = (-4,7) \tag{41}$$
$$\Updownarrow$$
$$4 \cdot (-4) + 5 \cdot 7 = 19 \tag{42}$$
$$\Updownarrow$$
$$-16 + 35 = 19 \tag{43}$$
$$\Updownarrow$$
$$19 = 19 \tag{44}$$

dvs. løsningen oppfyller lign.(28).

$\blacksquare$

Oppgave 2 — 25%

a) (5%) Deriver funksjonene:

$$i)\quad f(x) = x^3 - e^x \tag{45}$$

$$ii)\quad f(x) = \sqrt{x^3 - e^x} \tag{46}$$

Løsning:

i) Deriver:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - e^x\right) = 3x^2 - e^x \tag{47}$$

ii) Sammensatt funksjon:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - e^x} \tag{48}$$

hvor

$$\text{rød} = \text{ytre funksjon} \tag{49}$$

$$\text{blå} = \text{indre funksjon (kjernen)} \tag{50}$$

Matematisk kan vi skrive:

$$f(x) = g(\,u(x)\,) \tag{51}$$

hvor

$$g(u) = u^{1/2} \qquad \text{(ytre funksjon)} \tag{52}$$

$$u(x) = x^2 - 2x \qquad \underbrace{\text{(indre funksjon)}}_{\text{kjerne}} \tag{53}$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$f'(x) = \overbrace{\Big(\text{ytre}\Big)'\Big(\text{indre}\Big)'}^{\text{kjerneregelen}} \qquad \text{kjerneregelen} \tag{54}$$

$$= g'(u)\,u' \qquad \text{kjerneregelen} \tag{55}$$

$$= \Big(u^{1/2}\Big)'\,(x^3 - e^x)' \tag{56}$$

$$= \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot (3x^2 - e^x) \tag{57}$$

$$= \frac{1}{2}(x^3 - e^x)^{-1/2}(3x^2 - e^x) \qquad \text{sett inn } u = 3x^2 - e^x \tag{58}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^3 - e^x}}(3x^2 - e^x) \tag{59}$$

$$= \frac{3x^2 - e^x}{2\sqrt{x^3 - e^x}} \tag{60}$$

b) (2.5%) Forenkle funksjonen og avgjør om den er rasjonal eller ei.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x + 2} \tag{61}$$

Løsning:

Forenkeler ved å faktorisere og deretter forkorte:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x + 2} \tag{62}$$

$$= \frac{3x\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}} \qquad \text{faktorisering og forkorting} \tag{63}$$

$$= 3x \tag{64}$$

altså $f(x)$ er ikke en rasjonal funksjon. Den er lineær.

c) (7.5%) Ved oppsparingsannuitet så setter man av det samme konstante beløpet K i banken ved begynnelsen av hver termin. Anta en termin er 4 uker og anta renten er r per termin.

Oppspart kapital etter 12 terminer som følge av innskudd K i termin nr. i gir den gometriske følgen

$$K(1+r)^{12} \;,\; \frac{K(1+r)^{12}}{1+r} \;,\; \frac{K(1+r)^{12}}{(1+r)^2} \;,\; \frac{K(1+r)^{12}}{(1+r)^3} \;,\; \cdots \;,\; \frac{K(1+r)^{12}}{(1+r)^{11}}$$

i) Skriv ned, uten utregning, et uttrykk for kapitalen K_i oppspart etter i terminer. [2]

ii) Vis at summen $S_{12} = \sum_{i=1}^{12} K_i$ er gitt ved [3]

$$S_{12} = K(1+r)\frac{(1+r)^{12}-1}{r} \tag{66}$$

[2]Bestem startleddet K_1 og vekstfaktoren $k = \frac{K_{i+1}}{K_i}$ og deretter bruk en formel fra kompendiet.

[3]Bruk at summen av en geometrisk rekke er gitt ved

$$S_{12} = K_1\frac{k^{12}-1}{k-1} \tag{65}$$

hvor K_1 er startleddet og k er vekstfaktoren.

Løsning:

i) Startleddet er gitt ved

$$K_1 = K(1+r)^{12} \tag{67}$$

mens vekstfaktoren k er gitt ved

$$k = \frac{K_{i+1}}{K_i} = \frac{1}{1+r} \tag{68}$$

Kapitalen oppspart etter 12 terminer som følge av innskudd K i termin i er dermed:

$$K_i = K_1 k^{i-1} = K(1+r)^{12} \frac{1}{(1+r)^{i-1}} \qquad i = 1,2,3,\ldots,12 \tag{69}$$

ii) Summen av en geometrisk rekke: (se kompendiet)

$$S_{12} = K_1 \frac{k^{12}-1}{k-1} \tag{70}$$

Med $K_1 = K(1+r)^{12}$ og $k = \frac{1}{1+r}$:

$$S_{12} = K_1 \frac{k^n - 1}{k-1} = K(1+r)^{12} \frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{1+r} - 1} \tag{71}$$

$$= K \frac{\frac{\cancel{(1+r)^{12}}}{\cancel{(1+r)^{12}}} - (1+r)^{12}}{\frac{\cancel{1}}{1+r} - \frac{\cancel{1}+r}{1+r}} \tag{72}$$

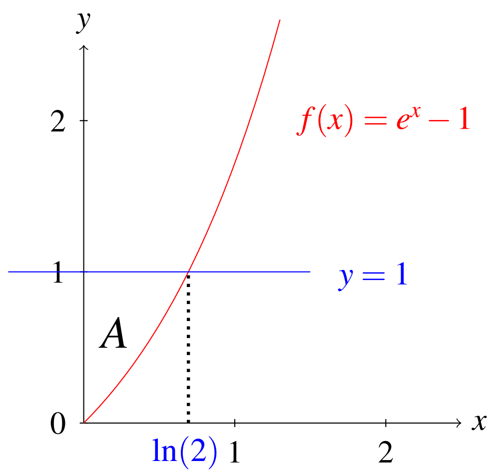
$$= K \frac{1-(1+r)^{12}}{\frac{-r}{1+r}} \tag{73}$$

$$= K(1+r)\frac{(1+r)^{12}-1}{r} \tag{74}$$

d) (5%) Finn, ved hjelp av integrasjon, arealet A av området avgrenset av den horisontale linjen $y = 1$ og funksjonen:

$$f(x) = e^x - 1 \tag{75}$$

som ligger i første kvadrant, se figur 2.



Figur 2: Arealet A.

Løsning:

Arealet:

$$A = \int_0^{\ln(2)} \Big(1 - f(x)\Big) dx \tag{76}$$

$$= \int_0^{\ln(2)} \Big(1 - (e^x - 1)\Big) dx \tag{77}$$

$$= \int_0^{\ln(2)} \Big(1 - e^x + 1\Big) dx \tag{78}$$

$$= \int_0^{\ln(2)} (2 - e^x) dx \tag{79}$$

Anti-derivert: (La oss definere: $h(x) = 2 - e^x$)

$$H(x) = 2x - e^x + c \tag{80}$$

Dermed: (integralsetningens fundamentalsats)

$$A = \int_0^{\ln(2)} e^x dx \tag{81}$$

$$= H\big(\ln(2)\big) - H(0) \tag{82}$$

$$= \Big(2\ln(2) - e^{\ln(2)} + \cancel{c}\Big) - \big(2 \cdot 0 - e^0 + \cancel{c}\big) \tag{83}$$

$$= \Big(2\ln(2) - 2 + 1\Big) \tag{84}$$

$$= 2\ln(2) - 1 \tag{85}$$

e) (5%) Gitt funksjonen

$$f(x,y) = \ln\left(xy^2\right) \tag{86}$$

Man kan bruke kjerneregelen når man skal partiell derivere denne funksjonen. Det skal dere ikke.

Bruk istedet *regnereglene for logaritmefunksjoner* og finn de partiell deriverte til funksjonen $f(x,y)$.

Løsning:

Bruker regnereglene for logaritmefunksjoner:

$$f(x,y) = \ln\left(xy^2\right) = \ln(x) + \ln\left(y^2\right) = \ln(x) + 2\ln(y) \tag{87}$$

Siden $\partial \ln(x)/\partial x = 1/x$ så er:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln(x) + 2\ln(y)\Big) = \frac{1}{x} \tag{88}$$

Siden $\partial \ln(y)/\partial y = 1/y$ så er:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\ln(x) + 2\ln(y)\Big) = \frac{2}{y} \tag{89}$$

■

Oppgave 3 — 35%

Nåværende president i USA, Donald Trump, har i 2020 hatt en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.

Figur 3: Donald Trump.

Anta det er 30 dager igjen til valgdagen.

Valgledelsen vet at en av de viktigste vippestatene er Pennsylvania. De ønsker derfor å analysere hvor mye penger de skal investere i Pennsylvania den neste 30 dagene frem til valgdagen.

I Pennsylvania er det anslått at Donald Trump har 3 mill. sikre stemmer. Målet med investeringene er dermed å mobilisere flere stemmer utover de 3 mill. sikre stemmene.

For hver dag i de neste 30 dagene bestemmer et visst antall nye personer seg for å stemme på Donald Trump.

Figur 4: Vippestaten Pennsylvania.

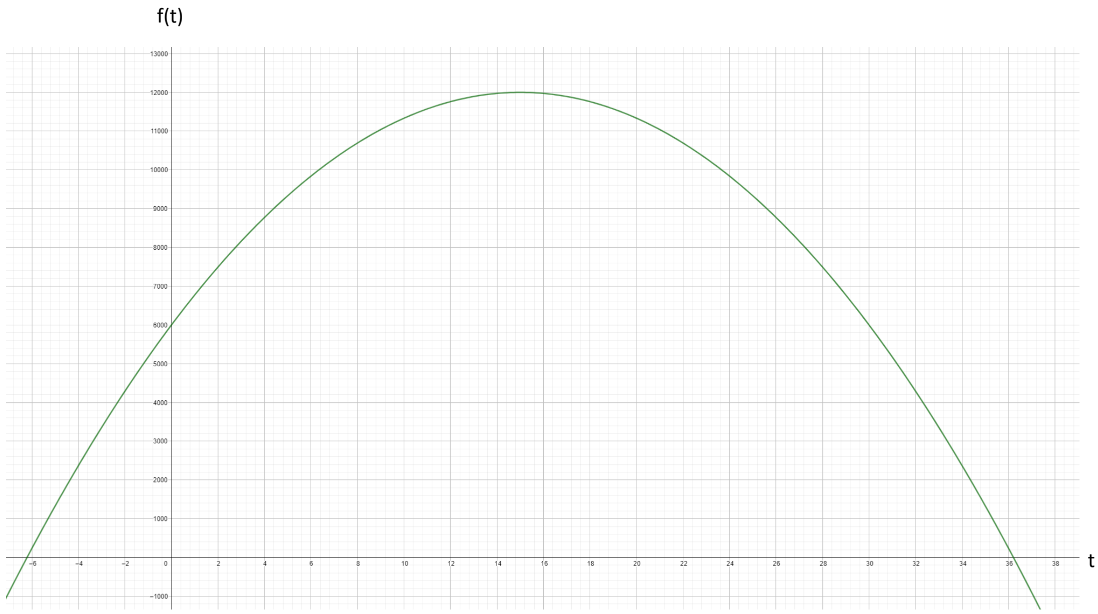
Anta antall nye stemmer Donald får ved tiden t er estimert av valganalytikerne ved funksjonen:

$$f(t) = 12000 - 6000\left(\frac{t-a}{30-a}\right)^2 \qquad t \in [0,30] \tag{90}$$

hvor

$$a = \text{er styringsparameteren til valgledelsen} \qquad a \in [0,30] \tag{91}$$

Legg merke til at valgledelsen har restriktert styringsparameteren a til å ligge mellom 0 og 30. Figur 5 illustrerer $f(t)$ når $a = 15$. [4]



Figur 5: $f(t)$ med styringsparameteren $a = 15$.

[4] En *styringsparameter* er en beslutning eller størrelse som valgledelsen tar for å styre valgkampanjen.

a) (12.5%)

Anta at $f(t)$ oppnår sitt maksimum akkurat når Donald Trump holder tale i Pennsylvania. Vis at a kan tolkes som:

$$a = \text{tidspunktet for når Donald Trump holder tale i Pennsylvania,} \tag{92}$$

dvs. vis at $f(t)$ er maksimal for $t = a$. [5]

Løsning:

Mulige kandidater finnes ved å derivere f og sette denne lik null: [6]

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{93}$$

Kjerneregelen: (skriver f på kjerneform)

$$f(t) = 12000 - 6000\left(\frac{t-a}{30-a}\right)^2 \tag{94}$$

$$= 12000 - 6000u^2 \tag{95}$$

Definerer:

$$u(t) = \frac{t-a}{30-a} \qquad \text{indre funksjon} \tag{96}$$

$$g(u) = 12000 - 6000u^2 \qquad \text{ytre funksjon} \tag{97}$$

[5] Dvs. vis at toppunktet til f er gitt ved $t = a$. Bruk 1.derivasjonstesten for å finne de mulige kandidatene og bruk 2.derivasjonstesten til å avgjøre om kandidatene er topp- eller bunnpunkt hhv.

[6] Dvs. hvor stigningstallet til tangenten er flat.

Kjerneregelen for derivasjon:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{98}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(12000 - 6000u^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t-a}{30-a}\right) \tag{99}$$

$$= \left(0 - 6000 \cdot 2u\right)\left(\frac{1}{30-a}\right) \tag{100}$$

$$= -12000\frac{1}{30-a}u \tag{101}$$

$$= -12000\frac{1}{30-a}\frac{t-a}{30-a} \tag{102}$$

$$= -12000\frac{1}{(30-a)^2}(t-a) \tag{103}$$

Deriverte lik null:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{104}$$

$$\Updownarrow$$

$$-12000\frac{1}{(30-a)^2}(t-a) = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{(30-a)^2}{-12000} \tag{105}$$

$$\Updownarrow$$

$$t - a = 0 \tag{106}$$

$$\Updownarrow$$

$$t = a \tag{107}$$

Førstederivasjonstesten gir oss dermed *en* kandidat:

$$t_1 = a \tag{108}$$

For å bestemme om vi har topp- eller bunnpunkt, kan vi bruke 2.derivasjonstesten. Vi finner først 2. derivert av $f(t)$.

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{df}{dt} \tag{109}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-12000\frac{1}{(30-a)^2}(t-a)\right) \qquad \Big/ \text{(pilmetoden)} \tag{110}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-12000\frac{1}{(30-a)^2}t + \frac{12000}{(30-a)^2}a\right) \tag{111}$$

$$= -12000\frac{1}{(30-a)^2} - 0 \tag{112}$$

$$= -12000\frac{1}{(30-a)^2} \tag{113}$$

$$< 0 \tag{114}$$

Siden $f''(t) < 0$ kan vi fra 2.derivasjonstesten konkludere at $t_1 = a$ er et *toppunkt*.

Vi kan dermed tolke styringsparemeteren a som tidspunktet for når Trump taler i Pennsylvania, q.e.d.

b) (10%) Med $a = 15$, hvor mange nye stemmer N har Donald Trump fått i Pennsylvania totalt ila. de siste 30 dagene? [7]

Løsning:

Totalt antall nye stemmer N til Donald Trump i Pennsylvania ila. de siste 30 dagene er gitt ved integralet:

$$N = \int_0^{30} f(t)dt \tag{115}$$

For å beregne dette integralet må vi finne *anti-derivert* F til f når $a = 15$. Vi setter først inn $a = 15$ i $f(t)$:

$$f(t) = 12000 - 6000\left(\frac{t-15}{30-15}\right)^2 \tag{116}$$

$$= 12000 - 6000\left(\frac{t-15}{15}\right)^2 \tag{117}$$

$$= 12000 - \frac{80}{3}(t-15)^2 \tag{118}$$

$$= 12000 - \frac{80}{3}\left(t^2 - 30t + (-15)^2\right) \tag{119}$$

$$= 12000 - \frac{80}{3}t^2 + \frac{80}{3}30t - \frac{80}{3}15^2 \tag{120}$$

$$= -\frac{80}{3}t^2 + 800t + 6000 \tag{121}$$

Finner anti-derivert:

$$F(t) = -\frac{80}{3}\frac{1}{3}t^3 + 800\frac{1}{2}t^2 + 6000t + C \tag{122}$$

$$= -\frac{80}{9}t^3 + 400t^2 + 6000t + C \tag{123}$$

[7] Dere må finne arealet under grafen til f mellom 0 og 30.

Fundamentalsetningen for kalkulus:

$$N = \int_0^{30} f(t)dt \tag{124}$$

$$= F(30) - F(0) \tag{125}$$

$$= \left[-\frac{80}{9} \cdot 30^3 + 400 \cdot 30^2 + 6000 \cdot 30 + \cancel{C}\right] - \tag{126}$$

$$- \left[-\frac{80}{9} \cdot 0^3 + 400 \cdot 0^2 + 6000 \cdot 0 + \cancel{C}\right] \tag{127}$$

$$= \left[300\ 000\right] - \left[0\right] \tag{128}$$

$$= 300\ 000 \tag{129}$$

Konklusjon

Dersom Trump taler på dag $a = 15$ så vinner Donald Trump totalt $N = 300\ 000$ nye stemmer de siste 30 dagene.

Valgkomiteen til Donald Trump er ikke helt fornøyd med valget av tidspunkt for taledagen a (dvs. at $a = 15$). De mener den kan forbedres innen intervallet $[0,\ 30]$.

Det ultimate målet er å vinne flest mulige nye stemmer $N(a)$ i løpet av de siste 30 dagene av valgkampanjen.

c) (12.5%) Bestem taletidspunktet a^* som gir maksimalt antall $N^* = N(a^*)$ nye stemmer i løpet av de neste 30 dagene. [8] [9] [10] [11] [12]

Bestem også tallverdien til N^*.

Avrund svaret opp til nærmeste helltall.

[8] Dette er en A-oppgave. Hopp gjerne over denne oppgaven og gjør den til slutt.

[9] Bruk at anti-derivert $F(t)$ til $f(t)$ for en generell a er gitt ved

$$F(t) = 12000t - 2000\frac{1}{(30-a)^2}(t-a)^3 + C \tag{130}$$

[10] Bruk følgende derivasjonsformel: (derivasjon av en brøk)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3}{(30-x)^2}\right) = \frac{90x^2 - x^3}{(30-x)^3} \tag{131}$$

[11] Bruk at

$$(30-x)^3 = -x^3 + 90x^2 - 2700x + 27\,000 \tag{132}$$

[12] Når du skal bruke 2. derivasjonstesten for å teste om kandidaten er et toppunkt eller bunnpunkt, bruk da at:

$$\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}a^2} = -10\,800\,000\frac{a}{(30-a)^4} \tag{133}$$

Løsning:

For en vilkårlig taledato a har vi at totalt antall nye stemmer $N(a)$ i løpet av de siste 30 dagene av valgkampanjen er gitt ved arealet under grafen til f, dvs. et integral.

Integral:

$$N(a) = \int_0^{30} f(t)dt \tag{134}$$

$$= \int_0^{30} \left(12000 - 6000\left(\frac{t-a}{30-a}\right)^2\right)dt \tag{135}$$

$$= F(30) - F(0) \tag{136}$$

Anti-derivert: [13]

$$F(30) = 12000 \cdot 30 - 2000\frac{1}{\cancel{(30-a)^2}}(30-a)^{\cancel{3}\ 1} + C \tag{137}$$

$$= 360\ 000 - 2000(30-a) + C \tag{138}$$

$$= 300\ 000 + 2000a + C \tag{139}$$

$$F(0) = 12000 \cdot 0 - 2000\frac{1}{(30-a)^2}(0-a)^3 + C \tag{140}$$

$$= 2000\frac{a^3}{(30-a)^2} \tag{141}$$

[13] Vi bruker formelen oppgitt i fotnoten for $F(t)$ med en generell a.

Dermed:

$$N(a) = F(30) - F(0) \tag{142}$$

$$= \left[300\ 000 + 2000a + \cancel{C}\right] - \left[2000\frac{a^3}{(30-a)^2} + \cancel{C}\right]$$

$$= 300\ 000 + 2000a - 2000\frac{a^3}{(30-a)^2} \tag{143}$$

For å finne mulige kandidater for a deriverer vi N og setter lik null:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}a} = 0 \tag{144}$$

hvor

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(300\ 000 + 2000a - 2000\frac{a^3}{(30-a)^2}\right)$$

$$= 0 + 2000 - 2000\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{a^3}{(30-a)^2}\right) \tag{145}$$

Fra fotnoten i oppgaven:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{a^3}{(30-a)^2}\right) = \frac{90a^2 - a^3}{(30-a)^3} \tag{146}$$

Dermed:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}a} = 2000 - 2000\frac{90a^2 - a^3}{(30-a)^3}$$

$$= \frac{2000(30-a)^3 - 180\ 000a^2 + 2000a^3}{(30-a)^3} \tag{147}$$

Fra den andre fotnoten i oppgaven:

$$(30-a)^3 = -a^3 + 90a^2 - 2700a + 27\ 000 \tag{148}$$

Dermed:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}a} &= \frac{2000(30-a)^3 - 180\ 000a^2 + 2000a^3}{(30-a)^3} \\
&= \frac{2000(-a^3 + 90a^2 - 2700a + 27\ 000) - 180\ 000a^2 + 2000a^3}{(30-a)^3} \qquad (149) \\
&= \frac{-\cancel{2000a^3} + \cancel{180\ 000a^2} - 5\ 400\ 000a + 54\ 000\ 000 - \cancel{180\ 000a^2} + \cancel{2000a^3}}{(30-a)^3} \\
&= \frac{-5\ 400\ 000a + 54\ 000\ 000}{(30-a)^3} \qquad (150) \\
&= 5\ 400\ 000\frac{10-a}{(30-a)^3}
\end{aligned}$$

Setter derivert lik null:

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}a} = 0 \\
\Updownarrow \\
5\ 400\ 000\frac{10-a}{(30-a)^3} = 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{(30-a)^3}{5\ 400\ 000} \\
\Updownarrow \\
10 - a = 0 \\
\Updownarrow \\
a = 10
\end{gathered}$$

1.derivasjonstesten gir dermed følgende kandidat:

$$a_1 = 10 \tag{151}$$

For å vise at a_1 representerer et *toppunkt*, må vi bruke 2.derivasjonstesten.

Fra den siste fotnoten i oppgaven har vi at

$$\frac{d^2N}{da^2} = -10\ 800\ 000 \frac{a}{(30-a)^4} \tag{152}$$

Innsatt for $a_1 = 10$:

$$\frac{d^2N}{da^2} = -10\ 800\ 000 \frac{10}{(30-10)^4} = -675 < 0 \tag{153}$$

2.derivasjonstesten sier dermed at $a_1 = 10$ faktisk er et *toppunkt*.

Innsatt i lign.(143):

$$\begin{aligned} N^* &= N(a^*) \\ &= N(10) \\ &= 300\ 000 + 2000 \cdot 10 - 2000 \frac{10^3}{(30-10)^2} \\ &= 300\ 000 + 20\ 000 - 5\ 000 \\ &= 315\ 000 \end{aligned} \tag{154}$$

Konklusjon:

Optimalt tidspunkt for talen til Trump er etter $a^* = 10$ dager. Dersom talen holdes da, vil antall nye stemmer ila. de 30 siste dagene bli $N^* = 315\ 00$ (som er 15 000 flere stemmer enn dersom talen holdes etter $a = 15$ dager).

■

Oppgave 4 — 15%

Påtroppende president i USA, Joe Biden, har hatt en omfattende valgkampanje for å vinne presidentvalget i 2020.

Figur 6: Joe Biden.

Anta i løpet av de siste 30 dagene av valgkampen, er det bestemt at Biden skal tilbringe totalt 12 timer i Pennsylvania. Hensikten med disse 12 timene er å vinne nye stemmer.

I Pennsylvania er det anslått at Joe Biden har 3 mill. sikre stemmer. Valgkomiteen til Biden må avgjøre hvordan han skal benytte de 12 timene for å vinne nye stemmer. Valgkomiteen deler inn de 12 timene mellom to typer *aktiviteter*:

$$x = \text{antall timer Biden taler i Pennsylvania} \qquad \text{(taletimer)} \tag{155}$$

$$y = \text{antall timer Biden hilser på folket i Pennsylvania} \qquad \text{(hilsetimer)} \tag{156}$$

Figur 7: Vippestaten Pennsylvania.

Valgkomiteen vet at begge aktivitetene er vesentlige og at de ikke kan utelukke den ene fremfor den andre. Ved hjelp av data fra tidligere valgkampanjer har de kommet frem til følgende sammenheng:

$$N(x,y) = Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \tag{157}$$

hvor $N(x,y)$ er antall *nye* stemmer som Biden vinner.

For hver time Biden taler, går det med totalt 3 timer siden før- og etter forberedelser må inkluderes. Tilsvarende for hver time Biden hilser på folket går det med totalt 1 time.

Siden det allerede er bestemt at Biden ikke skal opptre mer enn 12 timer totalt i Pennsylvania, fås følgende krav som må være oppfylt:

$$3x + y = 12 \tag{158}$$

Valgkomiteen ønsker å bestemme antall taletimer x og antall hilsetimer y slik at antall nye stemmer $N(x,y)$ maksimeres under bibetingelsen i lign.(158).

a) (2.5%) Skriv opp Langrangefunksjonen $L(x,y,\lambda)$ for $N(x,y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(158). [14]

Løsning:

Lagrangefunksjonen:

$$L(x,y,\lambda) = N(x,y) - \lambda g(x,y) \tag{159}$$

hvor $g(x,y) = 0$ er bibetingelsen, som i vårt tilfelle er

$$g(x,y) = 3x + y - 12 \tag{160}$$

[14] Altså her kreves ingen regning.

Dette gir:

$$L(x,y,\lambda) = N(x,y) - \lambda g(x,y) \tag{161}$$

$$= Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} - \lambda\Big(3x+y-12\Big) \tag{162}$$

b) (10%) Vis, ved hjelp av Langrange-metoden, at $N(x,y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(158) har følgende kritiske punkt, nemlig:

$$x^* = 3 \quad , \quad y^* = 3 \tag{163}$$

som maksimerer antall nye stemmer. [15]

Løsning:

De kritiske punktene for $f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = 0$ oppfyller ligningssystemet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{164}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{165}$$

$$g(x,y) = 0 \tag{166}$$

hvor

$$\lambda = \text{Lagrange-multiplikatoren} \tag{167}$$

[15] Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

Partiellderiverte:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} - \lambda\left(3x+y-12\right)\right) \tag{168}$$

$$= B\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}y^{\frac{1}{4}} - 3\lambda \tag{169}$$

$$= \frac{3B}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - 3\lambda \tag{170}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(Bx^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} - \lambda\left(3x+y-12\right)\right) \tag{171}$$

$$= Bx^{\frac{3}{4}}\frac{1}{4}y^{\frac{1}{4}-1} - \lambda \tag{172}$$

$$= \frac{B}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} - \lambda \tag{173}$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ med hensyn på λ:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{174}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{3B}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - 3\lambda = 0 \tag{175}$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{3}\lambda = \frac{\cancel{3}B}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} \tag{176}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda = \frac{B}{4}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} \tag{177}$$

Løser $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ med hensyn på λ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial y} &= 0 && (178)\\
&\Updownarrow \\
\frac{B}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} - \lambda &= 0 && (179)\\
&\Updownarrow \\
\lambda &= \frac{B}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} && (180)
\end{aligned}$$

Eliminerer λ:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda && (181)\\
&\Updownarrow \\
\frac{\cancel{B}}{\cancel{4}}x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} &= \frac{\cancel{B}}{\cancel{4}}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} && (182)\\
&\Updownarrow \\
x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} &= x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \qquad \Big/ \cdot x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} && (183)\\
&\Updownarrow \\
y^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} &= x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} && (184)\\
&\Updownarrow \\
y &= x && (185)
\end{aligned}$$

Innsatt i bibetingelsen: (setter inn at $y = x$)

$$\begin{aligned}
3x + y &= 12 && (186)\\
&\Updownarrow \\
3x + x &= 12 && (187)\\
&\Updownarrow \\
4x &= 12 && (188)\\
&\Updownarrow \\
x &= \frac{12}{4} = 3 && (189)
\end{aligned}$$

Siden $y = x$ så er:

$$y \ = \ x = \ 3 \tag{190}$$

For å maksimere antall nye stemmer $N(x,y)$ så må Biden bruke $x^* = 3$ taletimer og $y^* = 3$ hilsetimer, som skulle vises.

c) (2.5%) Anta at $B = 110\ 000$. Regn ut antall nye stemmer Biden får med sin optimale strategi, dvs. regn ut tallverdien til N^*. Avrund svaret opp til nærmeste heltall.

Sammenlign svaret med svaret du fikk i oppgave 3**c**).
Hvem hadde best valgkampanje i Pennsylvania?

<u>Løsning</u>:

Vi setter inn $x^* = 3$ og $y^* = 3$ inn i N:

$$N(x^*,y^*) = N\big(3,3\big) = B3^{\frac{3}{4}}3^{\frac{1}{4}} = B3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 3B \tag{191}$$

Siden $B = 110\ 000$, får vi at

$$N(x^*,y^*) = 3 \cdot 110\ 000 = 330\ 000 \tag{192}$$

Biden har dermed den beste strategien i Pennsylvania siden hans strategi vil gi 3 330 000 stemmer [16] mens Trumps strategi kun gir 3 315 000 stemmer.

■

[16] Husk at Biden hadde 3 millioner sikre stemmer i tillegg til de 330 000 ny stemmene.