Ny og bedre versjon 2018

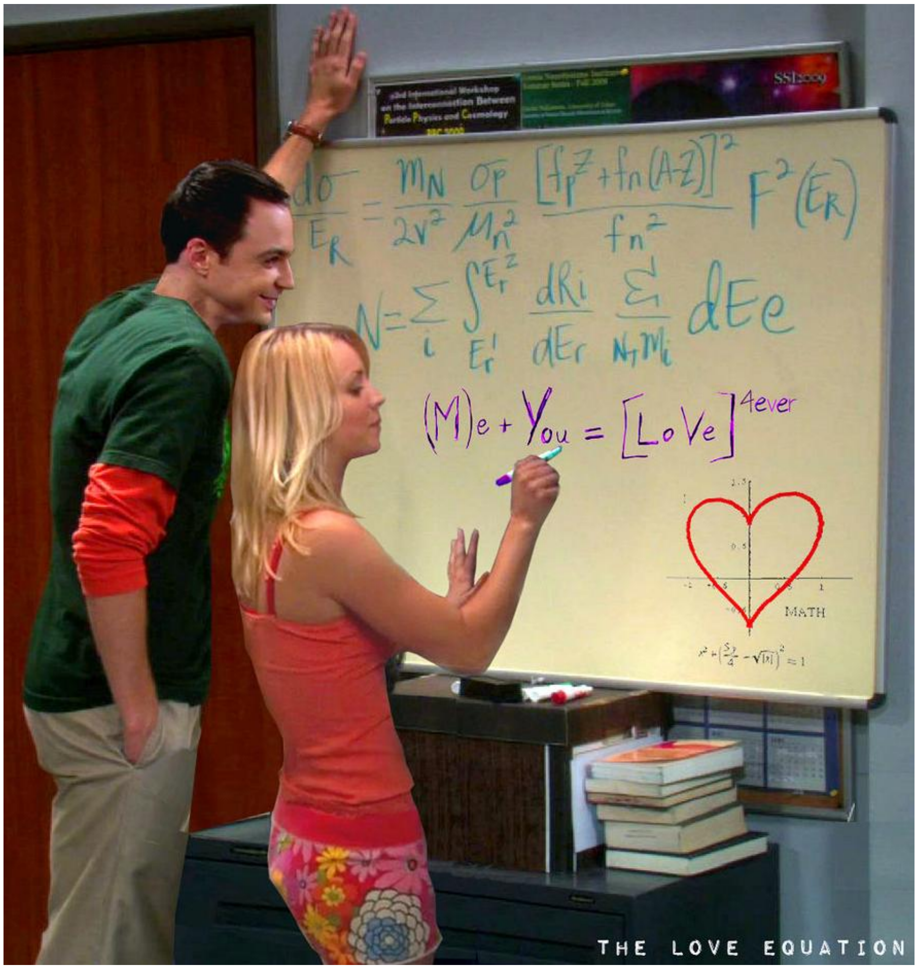
MAT100

Matematikk

Kompendium 2018, del 1

Per Kristian Rekdal og Bård-Inge Pettersen

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

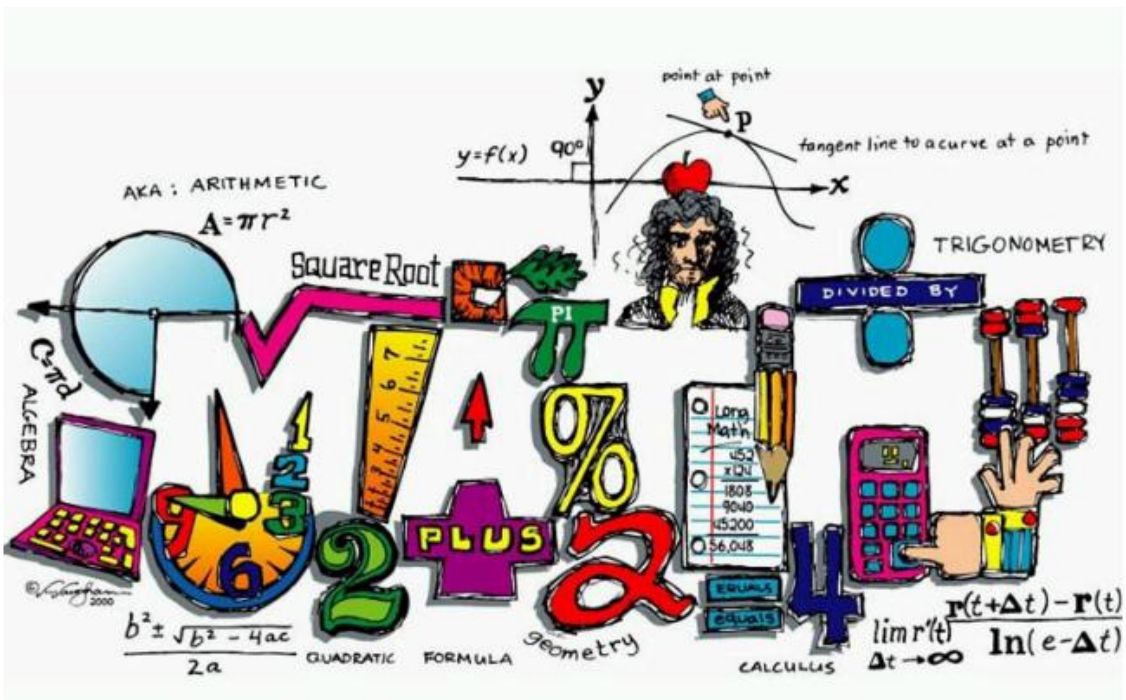


Figur 1: Matematikk er viktig.

Innhold

Kapittel 1

Grunnleggende emner



Figur 1.1: Grunnleggende emner i matematikk.

1.1 Tall og tallsystemer

Mengdesymbol, listeform:

$$M \quad = \quad \{\ 3, 6, 7, 9\ \} \qquad \text{(endelig mengde)} \tag{1.1}$$

$$M \quad = \quad \{\ 3, 6, 7, 9, ...\ \} \qquad \text{(uendelig mengde)} \tag{1.2}$$

Mengden kan altså være endelig eller uendelig.

Noen fundamentale tallmengder:

$$\mathbb{N} \quad = \quad \{\ 0, 1, 2, 3, 4,\ \ ...\ \} \qquad \text{(naturlige tall)} \tag{1.3}$$

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{\ ...\ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,\ \ ...\ \} \qquad \text{(hele tall)} \tag{1.4}$$

$$\mathbb{Q} \quad = \quad \left\{\ \frac{a}{b} \middle|\ a \in Z\ \ \wedge\ \ b \in N\ \right\} \qquad \text{(rasjonale tall)} \tag{1.5}$$

$$\mathbb{R} \quad = \quad \text{mengden av reelle tall} \qquad \text{(alle tall på tall-linja)} \tag{1.6}$$

Mengdesymbol, intervall:

$$[\,a,b\,] \quad = \quad \{\ x \mid a \leq x \leq b\ \} \tag{1.7}$$

(alle reelle tall mellom a og b)
(lukket intervall)

$$\langle\,a,b\,\rangle \quad = \quad \{\ x \mid a < x < b\ \} \tag{1.8}$$

(ingen endepunkt mellom a og b)
(åpent intervall)

$$\langle\,a,b\,] \quad = \quad \{\ x \mid a < x \leq b\ \} \tag{1.9}$$

(bare ett endepunktet er med mellom a og b)
(halvåpent intervall)

$$[\,a,b\,\rangle \quad = \quad \{\ x \mid a \leq x < b\ \} \tag{1.10}$$

(bare ett endepunktet er med mellom a og b)
(halvåpent intervall)

1.2 Algebraiske uttrykk

Generelle regler for algebra: (algebra = regler for operasjonene "$\cdot$" og "+")

$$\overbrace{a+a}^{\text{like ledd}} = 2a \tag{1.11}$$

$$\underbrace{a+b}_{\text{ulike ledd}} = b+a \tag{1.12}$$

$$-(a+b) = -a-b \tag{1.13}$$

$$-(a-b) = -a+b \tag{1.14}$$

Ved regning med flerleddede uttrykk:

1) Samle sammen $\overbrace{\underline{\text{like ledd}}}^{\text{"samme familie"}}$ ved å summere koeffisientene

2) Løs opp parenteser

- + foran parentes: ingen fortegnsendring
- − foran parentes: skifte alle fortegn i parentesen

Eksempel: (samle sammen like ledd)

$$\underline{\underline{ab - 3a + b - 5ab + 4b}} \quad = \quad \underline{\underline{-4ab - 3a + 5b}} \tag{1.15}$$

■

Eksempel: (løse opp parenteser og samle sammen like ledd)

$$\underline{\underline{(3ab + b) \overbrace{- (ab + 2b + c)}^{\text{minus foran parentes}}}} \quad = \quad 3ab + b - ab - 2b - c \quad = \quad \underline{\underline{2ab - b - c}} \tag{1.16}$$

■

Multiplikasjonstegn eller ikke

1) Når man multipliserer parametre eller variabler så droppes ofte multiplikasjonstegn:

$$\boxed{a \cdot b \quad \text{skrives som oftest} \quad ab \qquad (1.17)}$$

$$\boxed{x \cdot y \quad \text{skrives som oftest} \quad xy \qquad (1.18)}$$

2) Men når man multipliserer tall så er multiplikasjonstegn som oftest med:

$$\boxed{5 \cdot 2 = 10 \qquad (1.19)}$$

3) Når det er parentes mellom tallene så droppes imidlertid oftest multiplikasjonstegnet:

$$\boxed{(-4)(-3) = 12 \qquad (1.20)}$$

1.2.1 Distributive Lov ("pilmetoden")

Denne "parentesreglen" kalles den distributive lov:

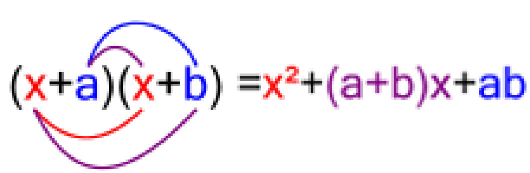
$$\boxed{a(b+c) = ab+ac \qquad (1.21)}$$

Fra den distributive lov følger at:

$$\boxed{(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd \qquad (1.22)}$$

Lign.(1.21) og (1.22) er en svært viktige regneregler.
Sistnevnte er så viktig at det er tre spesialtilfeller av denne ligningen som har egne navn.
Disse skal vi se på i neste avsnitt.

Greier du å vise hvorfor lign.(1.22) er riktig?



Figur 1.2: "Pilmetoden".

Husk, når man **multipliserer** [1] ut parenteser:

- $(+) \cdot (+) \;=\; +$
- $(+) \cdot (-) \;=\; -$
- $(-) \cdot (+) \;=\; -$
- $(-) \cdot (-) \;=\; +$

Husk også:

$$\boxed{\begin{array}{rclr} -a & = & (-1)\,a & (1.23) \\ \\ a-b & = & a+(-b) & (1.24) \\ \\ a\,b & = & b\,a & (1.25) \end{array}}$$

Eksempel: (løse opp parenteser og samle sammen like ledd)

$$\underline{\underline{(2xy+x)(4xy-x) \; \overbrace{-4x^2(1-y)}^{\text{- tegn foran parentes}} \; + \; x^2}} \;=\; 8x^2y^2 - 2x^2y + 4x^2y - \cancel{x^2} \;\; - 4x^2 + 4x^2y \; + \; \cancel{x^2}$$

$$= \underline{\underline{8x^2y^2 + 6x^2y - 4x^2}} \qquad (1.26)$$

■

[1]Det er IKKE slik at f.eks. $\underbrace{-6-6=+12}_{\text{galt}}$.

1.3 Kvadratsetningene og konjugatsetningen

Lign.(1.22) har følgende spesialtilfeller: (kvadratsetningene)

$$\overbrace{(a+b)^2}^{\text{faktorisert form}} = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(1. kvadratsetning)} \tag{1.27}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{(2. kvadratsetning)} \tag{1.28}$$

$$\underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{faktorisert form}} = a^2 - b^2 \qquad \text{(konjugatsetningen)} \tag{1.29}$$

hvor konjugatsetningen, dvs. lign.(1.29), forklares via:

$$\underline{\underline{(a+b)(a-b)}} = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 = \underline{\underline{a^2 - b^2}} \tag{1.30}$$

1.4 Brøkregning

Definisjon: (brøk)

En brøk er:

$$\boxed{\text{brøk} \;=\; \frac{\text{teller}}{\text{nevner}} \;=\; \frac{a}{b} \qquad (1.31)}$$

hvor a og b er tall.

■

Husk:

$$\boxed{\text{Man kan } \underline{\text{aldri}} \text{ dividere med} \quad 0.}$$

1.4.1 Forkorte og utvide brøker

Forkorting av en brøk: (brøkregning)

$$\frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b} \qquad \text{(forkorting av en brøk)} \qquad (1.32)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,c}{b\,c} \qquad \text{(utvidelse av en brøk)} \qquad (1.33)$$

hvor den siste ligningen kan forstås via

$$\underline{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{a}{b}\,\frac{c}{c} = \underline{\frac{a\,c}{b\,c}} \qquad (1.34)$$

siden $1 = \frac{c}{c}$.

Husk: man kan <u>aldri dividere med null</u>, dvs. $b, c \neq 0$.

<u>**Eksempel**</u>:

$$\underline{\underline{\frac{10}{6}}} \overset{\text{faktoriser}}{=} \frac{\cancel{2} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 3} \overset{\text{forkort}}{=} \underline{\underline{\frac{5}{3}}} \tag{1.35}$$

$$\underline{\underline{\frac{a^2 - ab}{3a - 3b}}} \overset{\text{faktoriser}}{=} \frac{a\,\cancel{(a-b)}}{3\,\cancel{(a-b)}} \overset{\text{forkort}}{=} \underline{\underline{\frac{a}{3}}} \tag{1.36}$$

■

1.4.2 Sum av brøker

Sum av brøk med $\overbrace{\text{samme nevner}}^{\text{felles nevner}}$:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad (1.37)}$$

Eksempel: (Ved sum av brøker, utvid hver brøk slik at man får fellesnevner)

$$\frac{4}{7} + \frac{11}{7} \overset{\text{fellesnevner}}{=} \frac{4+11}{7} = \frac{15}{7} \tag{1.38}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \overset{\text{fellesnevner}}{=} \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \tag{1.39}$$

Dersom brøkene ikke har fellesnevner så må man finne den først:

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \overset{\text{utvid}}{=} \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 6} - \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} \overset{\text{fellesnevner}}{=} \frac{10}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} \tag{1.40}$$

$$\overset{\text{sum}}{=} \frac{10-6+9}{12} = \frac{13}{12} \tag{1.41}$$

$$\frac{1}{3ab} - \frac{a}{6b} + \frac{a}{9b} \overset{\text{utvid}}{=} \frac{6}{6 \cdot 3ab} - \frac{3a\,a}{3a\,6b} + \frac{2a\,a}{2a\,9b} \overset{\text{fellesnevner}}{=} \frac{6}{18ab} - \frac{3a^2}{18ab} + \frac{2a^2}{18ab} \tag{1.42}$$

$$\overset{\text{sum}}{=} \frac{6-3a^2+2a^2}{18ab} = \frac{6-a^2}{18ab} \tag{1.43}$$

■

1.4.3 Multiplikasjon og divisjon med brøker

Regler for multiplikasjon og divisjon med brøker:

$$\boxed{\begin{aligned} c\,\frac{a}{b} &= \frac{c\,a}{b} && [1] \quad \text{(Tall multiplisert med brøk)} && (1.44) \\ \frac{a}{b}\,\frac{c}{d} &= \frac{a\,c}{b\,d} && [2] \quad \text{(Brøk multiplisert med brøk)} && (1.45) \\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a\,d}{b\,c} && [3] \quad \text{(Brøk dividert med brøk)} && (1.46) \end{aligned}}$$

hvor den siste ligningen, dvs. lign.(1.46), forklares via

$$\underline{\underline{\frac{a}{b} : \frac{c}{d}}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{\text{utvid}}{=} \frac{\frac{a}{b}\,d}{\frac{c}{\cancel{d}}\,\cancel{d}} \overset{\text{regel [1]}}{=} \frac{\frac{ad}{b}}{c} \overset{\text{utvid}}{=} \frac{\frac{ad}{\cancel{b}}\,\cancel{b}}{c\,b} = \underline{\underline{\frac{a\,d}{b\,c}}} \tag{1.47}$$

Huskeregel:

$$\text{brøk} = \frac{\text{teller}}{\text{nevner}} = \frac{\text{teller}\cdot 7}{\text{nevner}\cdot 7} = \frac{\text{teller}\,(x+3)}{\text{nevner}\,(x+3)} = \frac{\text{teller}\,(a-2)}{\text{nevner}\,(a-2)} \tag{1.48}$$

Regelen er altså: Det er lov å multiplisere og dividere med samme tall i en brøk.

Huskeregelen ovenfor kan formuleres på en annen måte:
Tallet 1 kan man multiplisere og dividere med som man vil, uten at det endrer på det opprinnelige uttrykket.

$$1 = \frac{7}{7} = \frac{x+3}{x+3} = \frac{a-2}{a-2} \tag{1.49}$$

Eksempel:

$$\underline{\underline{2\,\frac{x}{4}}} \overset{\text{regel [1]}}{=} \frac{2x}{4} \underset{\text{forkort}}{\overset{\text{faktoriser}}{=}} \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{x}{2}}} \tag{1.50}$$

$$\underline{\underline{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}}} \overset{\text{regel [2]}}{=} \frac{2\cdot 5}{3\cdot 7} \overset{\text{faktoriser}}{=} \underline{\underline{\frac{10}{21}}} \tag{1.51}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{5} : \frac{4}{15}}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{15}} \cdot 1 \underset{1=\frac{15}{15}}{\overset{\text{utvid}}{=}} \frac{\frac{1}{5}\cdot 15}{\cancel{\frac{4}{15}}\cdot \cancel{15}} \overset{\text{faktoriser}}{=} \frac{\frac{1}{\cancel{5}}\cdot 3\cdot \cancel{5}}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \tag{1.52}$$

■

1.5 Potenser

Definisjon: (potens)

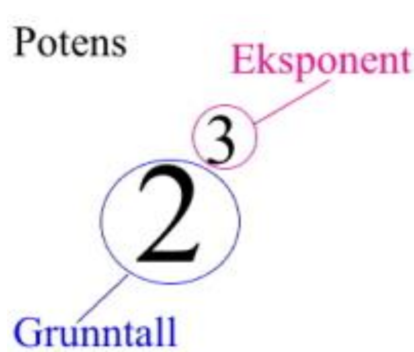
$$\boxed{a^n \quad = \quad \underbrace{a\,a\,a\ldots a}_{=\ n\ \text{faktorer}} \qquad (1.53)}$$

hvor

$$n \quad = \quad \text{heltall} \qquad (n \in N) \qquad (1.54)$$
$$a \quad = \quad \text{reellt tall} \quad (a \in R) \qquad (1.55)$$

■

n kalles *eksponenten* og a kalles *grunntallet*.



Figur 1.3: Potens: grunntall og eksponent.

Regneregler:

$$\boxed{\begin{aligned}
a^m\,a^n &= a^{m+n} && && (1.56)\\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \quad , \quad a \neq 0 && \text{kjelleromskriving} && (1.57)\\
\frac{a^m}{a^n} &= a^m a^{-n} = a^{m-n} && \text{kjelleromskriving} && (1.58)\\
(a^m)^n &= a^{mn} && && (1.59)\\
(a\,b)^n &= a^n b^n && && (1.60)\\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad b \neq 0 && && (1.61)
\end{aligned}}$$

og i tillegg:

$$\boxed{\begin{aligned}
a^0 &= 1 && (1.62)\\
a^1 &= a && (1.63)
\end{aligned}}$$

Eksempler: (potens)

$$\underline{\underline{3^2\,3^5}} \quad = \quad 3^{2+5} \;=\; \underline{\underline{3^7}} \tag{1.64}$$

$$\underline{\underline{(2^{-3})^7}} \quad = \quad 2^{-3\cdot 7} \;=\; 2^{-21} \;=\; \underline{\underline{\frac{1}{2^{21}}}} \qquad \text{(kjelleromskriving)} \tag{1.65}$$

$$\underline{\underline{\left(\frac{5}{2}\right)^3 \;=\; \frac{5^3}{2^3}}} \tag{1.66}$$

■

Eksempler: $(-)\cdot(-) = +$

$$\underline{\underline{-5^2}} \quad = \quad -5\cdot 5 \;=\; \underline{\underline{-25}} \tag{1.67}$$

$$\underline{\underline{(-5)^2}} \quad = \quad (-5)(-5) \;=\; \underline{\underline{25}} \tag{1.68}$$

■

1.5.1 Multiplikasjon VS addisjon

Husk:

1) Multipliksjon:

$$\boxed{a\,a \;=\; a^2 \qquad (1.69)}$$

2) Addisjon: [2]

$$\boxed{a + a \;=\; 2a \qquad (1.71)}$$

3) Subtraksjon: [3]

$$\boxed{-a - a \;=\; -2a \qquad (1.73)}$$

■

[2]Dette kan også skrives:

$$1a + 1a \;=\; (1+1)a \;=\; 2a \tag{1.70}$$

[3]Dette kan også skrives:

$$-1a - 1a \;=\; -(1+1)a \;=\; -2a \tag{1.72}$$

Eksempel: (stryking/kansellering KUN ved multiplikasjon)

$$\underline{\underline{\frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}}}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = \underline{\underline{7^3}} \qquad (= 343) \tag{1.74}$$

$$\underline{\underline{\frac{7+7+7+7+7}{7+7}}} = \frac{5 \cdot \cancel{7}}{2 \cdot \cancel{7}} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}} \qquad (= 2.5) \tag{1.75}$$

Konklusjon:
Man kan bare forkorte (stryke) i en brøk når man har multiplikasjon i både teller og nevner.

■

1.5.2 Cobb-Douglas produktfunksjon

I *SØK200 Mikroøkonomi* lærer man blant annet om Cobb-Douglas produktfunksjon.

Det er en funksjon som beskriver sammenhengen mellom hvor mye prduksjon y man får når man bruker kapital k og arbeidskraft l. [4].

Definisjon: (Cobb-Douglas produktfunksjon)

En Cobb-Douglas produktfunksjon er en funksjon på formen:

$$\boxed{y \;=\; a\,k^{\alpha}\,l^{\beta} \qquad (1.76)}$$

hvor

$$y \;=\; \text{produksjon} \tag{1.77}$$
$$k \;=\; \text{kapital} \tag{1.78}$$
$$l \;=\; \text{arbeidskraft} \tag{1.79}$$

$$a \;=\; \text{konstant} \tag{1.80}$$
$$\alpha \;=\; \text{konstant (potens)} \tag{1.81}$$
$$\beta \;=\; \text{konstant (potens)} \tag{1.82}$$

■

[4] Funksjoner av flere variabeler skal vi lære mer om i kapittel 2.

Eksempel: (Cobb-Douglas funksjoner)

$$
\boxed{
\begin{aligned}
y &= k\,l \qquad , \qquad \text{(kalles "enkel Cobb-Douglas")} && (1.83)\\
y &= 3.2\,k^{1.5}\,l^{3} && (1.84)\\
y &= \frac{2}{15}\,k^{2}\,l^{0.5} && (1.85)
\end{aligned}
}
$$

Nå skal vi skrive opp lign.(1.83)- (1.85) en gang til.

Vi generaliserer og sier vi har to goder x_1 og x_2, ikke nødvendigvis k og l.
Man snakker da om nytten u, ikke nødvendigvis produksjonen y.

Dermed:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u &= x_1\,x_2 \qquad , \qquad \text{(kalles "enkel Cobb-Douglas")} && (1.86)\\
u &= 3.2\,x_1^{1.5}\,x_2^{3} && (1.87)\\
u &= \frac{2}{15}\,x_1^{2}\,x_2^{0.5} && (1.88)
\end{aligned}
}
$$

Ser du at lign.(1.83)- (1.85) og lign.(1.86)- (1.88) er de samme, bare forskjellig notasjon?

■

Kommentar: (notasjon)

Nytten

$$u = 3.2 x_1^{1.5} x_2^{3} \tag{1.89}$$

er et eksempel på notasjonen som vanligvis brukes, nemlig:

$$\boxed{x_{\text{navn}}^{\text{eksponent}} \qquad (1.90)}$$

- Posisjonen øverst til høyre er forbeholdt eksponenten.
- Posisjonen nederst til høyre er brukes vanligvis til navn eller indeks.

Med eksponent lik 3 blir det

$$\begin{aligned} x_{\text{navn}}^{3} &= x_{\text{navn}}\, x_{\text{navn}}\, x_{\text{navn}} \\ &= x_2\, x_2\, x_2 \end{aligned} \tag{1.91}$$

mens "navn" er bare et navn og kan være hva som helst, f.eks. 2 slik som i lign.(1.91)

■

1.6 Prefiks

Normalform:[5] (se også liste av SI prefiks side 29)

$$1\,000 = 10^3 \tag{1.92}$$

$$1\,000\,000 = 10^6 \qquad \text{(en million)} \tag{1.93}$$

$$0,001 = 10^{-3} \qquad \text{(milli)} \tag{1.94}$$

$$0,000\,000\,063 = 6,3 \cdot 10^{-8} \tag{1.95}$$

$$452\,000\,000\,000 = \underbrace{4,52 \cdot 10^{11}}_{\text{normalform}} \tag{1.96}$$

Generelt med 10-potens:

$$\boxed{\text{tall} = a \cdot 10^n \qquad (1.97)}$$

hvor $n \in \mathbb{Z}$ og $a \in \langle -10, 10 \rangle$.

[5] Også kalt standardform.

10^n	Prefiks	Symbol	Namn	
10^{15}	peta	P	billiard	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	billion	1 000 000 000 000
10^9	giga	G	milliard	1 000 000 000
10^6	mega	M	million	1 000 000
10^3	kilo	k	tusen	1 000
10^2	hekto	h	hundre	100
10^1	deka	da	ti	10
10^{-1}	desi	d	tidel	0,1
10^{-2}	centi	c	hundredel	0,01
10^{-3}	milli	m	tusendel	0,001
10^{-6}	mikro	µ	milliondel	0,000 001
10^{-9}	nano	n	milliarddel	0,000 000 001

Figur 1.4: Prefiks.

1.7 Kvadratrot

Definisjon: (kvadratrot) ($a \geq 0$) [6]

$$\boxed{\sqrt{a} \;=\; \text{det positive tallet som, opphøyd i 2, er 'a'} \qquad (1.98)}$$

m.a.o. $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a$.

■

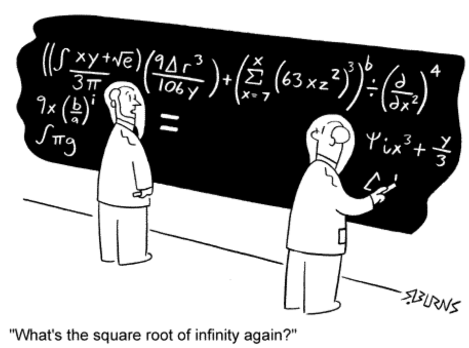
Eksempler: (kvadratrot)

$$\underline{\underline{\sqrt{9}}} \;=\; \sqrt{3^2} \;=\underline{\underline{3}} \qquad (\text{m.a.o.}: \quad 3^2 = 9) \tag{1.99}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{5}}} \;=\; \sqrt{(2.236\,...)^2} \;=\underline{\underline{2.236\,...}} \qquad (\text{m.a.o.}: \quad (2.236\,...)^2 = 5) \tag{1.100}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{-2}}} \;=\; \text{går ikke} \quad , \quad (\text{komplekse tall ikke tema i dette kurset.}) \tag{1.101}$$

■



Figur 1.5: Kvadratrot.

[6] Man kan **ikke** ta kvadratroten av et negativt tall. (Komplekse tall er ikke et tema i dette kurset.)

Regneregler: $\quad (\; a, b \geq 0 \;)$

$$\boxed{\begin{aligned}
\sqrt{a} &= \sqrt[2]{a} \; = \; a^{\frac{1}{2}} && (1.102)\\
\sqrt{a^2} &= a && (1.103)\\
(\sqrt{a})^2 &= a && (1.104)\\
\sqrt{a\,b} &= \sqrt{a}\sqrt{b} && (1.105)\\
\sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \qquad b \neq 0 && (1.106)
\end{aligned}}$$

PS:

Dette er samme regnereglene som for potenser på side 21, men med $n = \frac{1}{2}$:

$$a^n \;=\; a^{\frac{1}{2}} \;=\; \sqrt{a} \tag{1.107}$$

Huskeregl:

Kvadratrot $\sqrt{\text{noe}}$ er bare en "fancy" måte å skrive $\text{noe}^{1/2}$ på:

$$\boxed{\sqrt{\text{noe}} \;=\; (\text{noe})^{1/2} \qquad (1.108)}$$

Eksempler:

$$\underline{\underline{\sqrt{9\cdot 16}}} \;=\; \sqrt{9}\,\sqrt{16} \;=\; 9^{\frac{1}{2}}16^{\frac{1}{2}} \;=\; 3\cdot 4 \;=\; \underline{\underline{12}} \tag{1.109}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{\frac{9}{16}}}} \;=\; \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} \;=\; \frac{9^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{3}}} \;=\; \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \tag{1.110}$$

■

Definisjon: (generalisering av kvadratrot)

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \qquad , \qquad a \geq 0 \qquad\qquad (1.111)}$$

hvor

$$\overbrace{n \;=\; \text{heltall}}^{\text{roteksponenten}} \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.112}$$

$$\underbrace{a \;=\; \text{reellt tall}}_{\text{radikand}} \qquad\qquad (a \in \mathbb{R}) \tag{1.113}$$

■

Regneregler: $\quad (a \geq 0)$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}} && (1.114) \\ (\sqrt[n]{a})^n &= \sqrt[n]{a^n} = a && (1.115) \\ a^{\frac{m}{n}} &= (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m && (1.116) \\ a^{-\frac{m}{n}} &= \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{(a^{\frac{1}{n}})^m} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} && (1.117) \end{aligned}}$$

hvor lign.(1.115), forklares via $\quad (\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n}} = a^1 = a.$

Legg merke til at for $n = 2$ i lign.(1.114) og (1.115), så reproduserer man lign.(1.102) og (1.103):

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{a} &= a^{\frac{1}{2}} && (1.118) \\ (\sqrt{a})^2 &= a && (1.119) \end{aligned}}$$

<u>**Eksempler**</u>: (kvadratrøtter)

Fjerner kvadratroten i nevneren ved å utvide en brøken:

$$\underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}} \overset{\text{utvid}}{=} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}} \tag{1.120}$$

$$\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}} \overset{\text{utvid}}{=} \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{2}}{3-2} = \underline{\underline{\sqrt{6}-2}} \tag{1.121}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}} \overset{\text{utvid}}{=} \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \underline{\underline{2+\sqrt{3}}} \tag{1.122}$$

hvor konjugatsetningen, dvs. lign.(1.29), har blitt brukt i de to siste ligningene.

■

Eksempel: (generalisert kvadratrot , potenser , *BØK300 Finansiell- og økonomisk styring*)

Senere i dette kurset, skal vi lære om hvorfor renteformelen for rentes rente er på følgende form: [7]

$$\boxed{K_n = K_0(1+r)^n \qquad (1.123)}$$

Kapitalen $K_0 = 100\,000$ NOK plasseres i år null i banken.
Etter 4 år er den totale kapitalen - rente inkludert - vokst til $K_4 = 125\,000$ NOK.

Finn renten r.

Figur 1.6: Ole setter penger i banken.

[7] I denne oppgaven skal vi bare ta formelen i lign.(1.123) for gitt, og regne på den via de regnereglene som vi har lært om så langt.

Løsning:

Med renten r etter 4 år skal man få $K_4 = 125\,000$:

$$K_4 = K_0 \overbrace{(1+r)^4}^{\text{vekstfaktor}} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{K_0} \tag{1.124}$$

$$\frac{K_4}{K_0} = (1+r)^4 \tag{1.125}$$

$$\sqrt[4]{\frac{K_4}{K_0}} = \sqrt[4]{(1+r)^4} \qquad \text{ta 4. kvadratrot} \tag{1.126}$$

$$\left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} = \left((1+r)^4\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \text{som er det samme som å opphøye alt i } \frac{1}{4} \text{ potens} \tag{1.127}$$

$$\left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} = (1+r)^{4\cdot\frac{1}{4}} \tag{1.128}$$

$$\left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} = (1+r)^1 \tag{1.129}$$

$$1+r = \left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{1.130}$$

$$\underline{r} = \left(\frac{K_4}{K_0}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(\frac{125\,000\ \cancel{\text{NOK}}}{100\,000\ \cancel{\text{NOK}}}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = \underline{0.0574} \tag{1.131}$$

Dersom renten er $\underline{\underline{r = 5.74\ \%}}$ så øker kapitalen fra 100 000 NOK til 125 000 NOK i løpet av 4 år.

■

1.8 Faktorisering

Definisjon: (faktorisering)

Faktorisering = dekomponering av algebraiske uttrykk (f.eks. tall uttrykk) til et produkt av faktorer.

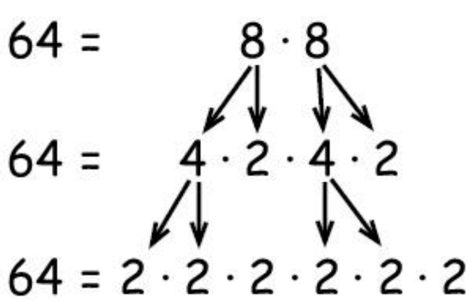
■

Eksempel: (enkeltstående uttrykk)

$$54 = \overbrace{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{\text{faktorisering av 54}} \tag{1.132}$$

$$\overbrace{6x^2y}^{\text{ledd}} = \overbrace{6\,x\,x\,y}^{\text{faktorisert form}} \tag{1.133}$$

■



Figur 1.7: Faktorisering.

Eksempel: (flerleddede uttrykk)

$$ab + ac - ad \;=\; \overbrace{a(b + c - d)}^{\text{faktorisert form}} \tag{1.134}$$

(felles faktor a i flerleddede uttrykk)

$$\underline{\underline{2a^2b - 4ab}} \;=\; 2\,a\,a\,b - 2 \cdot 2\,a\,b \;=\; \underline{\underline{\overbrace{2\,a\,b\,(a-2)}^{\text{faktorisert form}}}} \tag{1.135}$$

■

Eksempel: (kvadratsetningene og konjugatsetningen er faktoriseringer)

$$a^2 + 2ab + b^2 \;=\; (a+b)(a+b) \;=\; \overbrace{(a+b)^2}^{\text{faktorisert form}} \qquad \text{(1. kvadratsetning)} \tag{1.136}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \;=\; (a-b)(a-b) \;=\; \overbrace{(a-b)^2}^{\text{faktorisert form}} \qquad \text{(2. kvadratsetning)} \tag{1.137}$$

$$a^2 - b^2 \;=\; \overbrace{(a+b)(a-b)}^{\text{faktorisert form}} \qquad \text{(konjugatsetningen)} \tag{1.138}$$

■

Eksempel:

$$\underline{\underline{4a^2 - 20ab + 25b^2 \;=\; \overbrace{(2a-5b)^2}^{\text{faktorisert form}}}} \tag{1.139}$$

$$\underline{\underline{8x^4y^4 - 2}} \;=\; 2\,(4x^4y^4 - 1) \;=\; \underline{\underline{\overbrace{2\,(2x^2y^2 - 1)(2x^2y^2 + 1)}^{\text{faktorisert form}}}} \tag{1.140}$$

■

1.8.1 Faktorisert form eller ikke

1) Faktorsert form:

$$\boxed{a \cdot b \cdot c \cdot ... \qquad (1.141)}$$

men hvor hver av faktorene a, b, c... kan, men må ikke, ha addisjon og subtrasjon "internt", f.eks. $a = x^2 + 3y - 2z$.

2) Ikke-faktorsert form:

$$\boxed{a + b - c + ... \qquad (1.142)}$$

1.8.2 Faktorisering viktig

Faktorisering er viktig og brukes blant annet til:

1) Nullpunkter og polynomer: fundamentalteoremet for algebra - (se f.eks. side 60)

2) Primfaktorisering: fundamentalteoremet for aritmetikk

1.9 Likninger

I dette kurset skal vi blant annet lære om følgende ligninger:

1) 1. gradsligninger:

a)	$x + 5 = 9$	(En variabel, løsningsmengden er ett punkt)
b)	$y = 4x + 6$	(To variabler, løsningsmengden er en linje i planet)
c)	$z = 3x - 5y + 8$	(Tre variabler, løsningsmengden er en linje i rommet)

2) 2. gradsligninger:

a)	$x^2 - 3x + 5 = 9$	(En variabel, løsningsmengden er to punkt)
b)	$y = 4x^2 + 6$	(To variabler, løsningsmengden er en parabel i planet)
c)	$z = 3x^2 - 5y + 8$	(Tre variabler, ikke pensum)

3) 3. gradsligninger:

a)	$x^3 - x^2 + 5x = 9$	(En variabel, løsningsmengden er tre punkt)
b)	$y = 4x^3 + -3x + 5y - 6$	(To variabler, ikke pensum)
c)	$z = 3x^3 - 5y^2 + 8$	(Tre variabler, ikke pensum)

1.9.1 Lovlige operasjoner

Følgende operasjoner er lov i matematikk når man løser en **generell ligning**:

VS = venstre side , HS = høyre side

Addere med samme tall på begge sider

$$\begin{aligned} \text{VS} &= \text{HS} \\ \text{VS} + 4 &= \text{HS} + 4 \end{aligned} \tag{1.143}$$

Subtrahere med samme tall på begge sider

$$\begin{aligned} \text{VS} &= \text{HS} \\ \text{VS} - 6 &= \text{HS} - 6 \end{aligned} \tag{1.144}$$

Multiplisere ($\neq 0$) med samme tall på begge sider

$$\begin{aligned} \text{VS} &= \text{HS} \\ \frac{4}{3} \cdot \text{VS} &= \frac{4}{3} \cdot \text{HS} \end{aligned} \tag{1.145}$$

Dividere ($\neq 0$) med samme tall på begge sider

$$\begin{aligned} \text{VS} &= \text{HS} \\ \frac{\text{VS}}{2} &= \frac{\text{HS}}{2} \end{aligned} \tag{1.146}$$

Huskeregel:

Dersom man gjøre noe på den **ene siden** av ligningen så må man også gjøre det samme på den **andre siden**.

1.9.2 To måter å føre ligninger på

Føringsmessig er det to måter å føre ligninger på:

1) Føringsmåte 1:

Gjelder for manipulasjon av både **høyre** og **venstre** side av ligningen.

$$\text{VS} = \text{HS} \tag{1.147}$$

$$\text{VS} = \text{HS} \tag{1.148}$$

$$\text{VS} = \text{HS} \tag{1.149}$$

$$\text{VS} = \text{HS} \tag{1.150}$$

$$\underline{\underline{\text{VS} = \text{HS}}} \tag{1.151}$$

2) Føringsmåte 2: [8]

Gjelder for kun for manipulasjon av **høyre** side av ligningen.

$$\underline{\underline{\text{VS}}} = \text{HS} \tag{1.152}$$

$$= \text{HS} \tag{1.153}$$

$$= \text{HS} \tag{1.154}$$

$$= \underline{\underline{\text{HS}}} \tag{1.155}$$

[8] Dette brukes ofte ved utledninger og ved omskrivinger av uttrykk.

Eksempel: (enkeltstående ledd VS hele ligningen)

1) Føringsmåte 1: ($\overbrace{\text{hele ligningen}}^{\text{begge sider}}$)

Multipliserer hele ligningen, dvs. begge sider, med fellesnevneren 3:

$$\frac{x}{3} = 5 \tag{1.156}$$

$$\frac{x}{3} = 5 \quad \Big| \cdot 3 \tag{1.157}$$

$$\overbrace{3\,\frac{x}{3} = 3 \cdot 5}^{\text{begge sider}} \tag{1.158}$$

$$\cancel{3}\,\frac{x}{\cancel{3}} = 3 \cdot 5 \tag{1.159}$$

$$\underline{\underline{x = 15}} \tag{1.160}$$

2) Føringsmåte 2: ($\overbrace{\text{enkeltstående ledd}}^{\text{kun ene side av lign.}}$)

Multipliserer enkeltstående ledd med samme tall oppe og oppe og nede:

$$\underline{\underline{x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \tag{1.161}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2}}_{\text{kun høyre side}} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}} \tag{1.162}$$

1.10 1. gradsligninger

Som nevnt i oversikten på side , ligninger av 1. grad kan ha en eller flere variabler:

1) 1. gradsligninger:

a) $x + 5 = 9$ (En variabel, løsningsmengden er ett punkt)
b) $y = 4x + 6$ (To variabler, løsningsmengden er en linje i planet)
c) $z = 3x - 5y + 8$ (Tre variabler, løsningsmengden er en linje i rommet)

1.10.1 1. gradsligninger med èn variabel

Løsningsmengden for 1. gradsligninger med èn variabel er et punkt.

Eksempel: (1. gradsligning, en variabel)

Løs ligningen:

$$3x + 4 = 2x + 7 \tag{1.163}$$

Løsning:

$$3x + 4 = 2x + 7 \tag{1.164}$$

$$3x - 2x = 7 - 4 \tag{1.165}$$

$$\underline{\underline{x = 3}} \tag{1.166}$$

■

1.10.2 1. gradsligninger med to variabler

Løsningsmengden for 1. gradsligninger med to variabeler er en linje i planet.

Definisjon: (1. gradsligning)

Et uttrykk på formen:

$$\boxed{y = \; ax \; + \; b \qquad\qquad (1.167)}$$

kalles et 1. gradsligning. Her er a og b reelle tall.

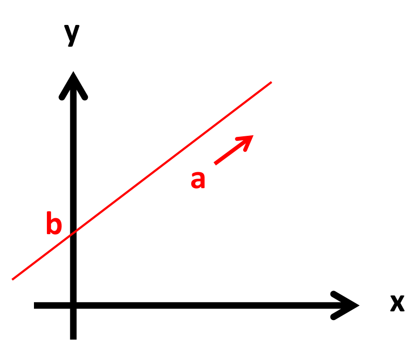
■

GEOMETRISK sett er lign.(1.167):

- en rett linje
- a = stigningstall
- b = skjæring med y-aksen

Lign.(1.167) er en definisjon hvor:

- variabelen x er i 1. potens, dvs. $x = x^1$



Figur 1.8: 1. gradspolynom, dvs. en linje.

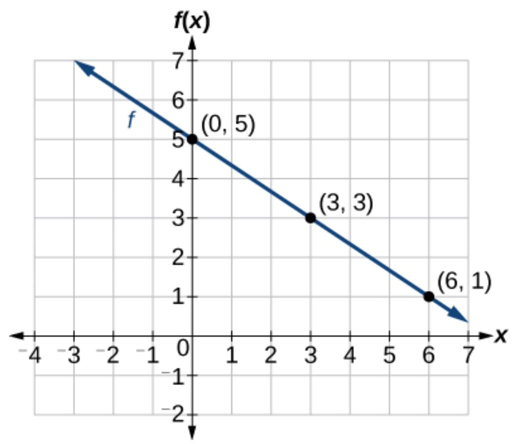
Eksempel: (1. gradsligning)

1. gradsligningen

$$y = -\frac{2}{3}x + 5 \tag{1.168}$$

fra forrige side har en geometrisk tolkning:

De punktene (x, y) i planet som løser lign.(1.168) er en LINJE som krysser y-aksen i punktet $b = 5$ og med stigningstallet $a = -\frac{2}{3}$.



Figur 1.9: Funksjonen $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

∎

Eksempel: (to 1. gradsligninger med to ukjente)

Førstegradsligninger med to ukjente x og y, dvs. en rett linje, skrives ofte slik:

$$y = -x + 1 \tag{1.169}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \tag{1.170}$$

Disse to linjene skjærer hverandre i (x, y)-planet.

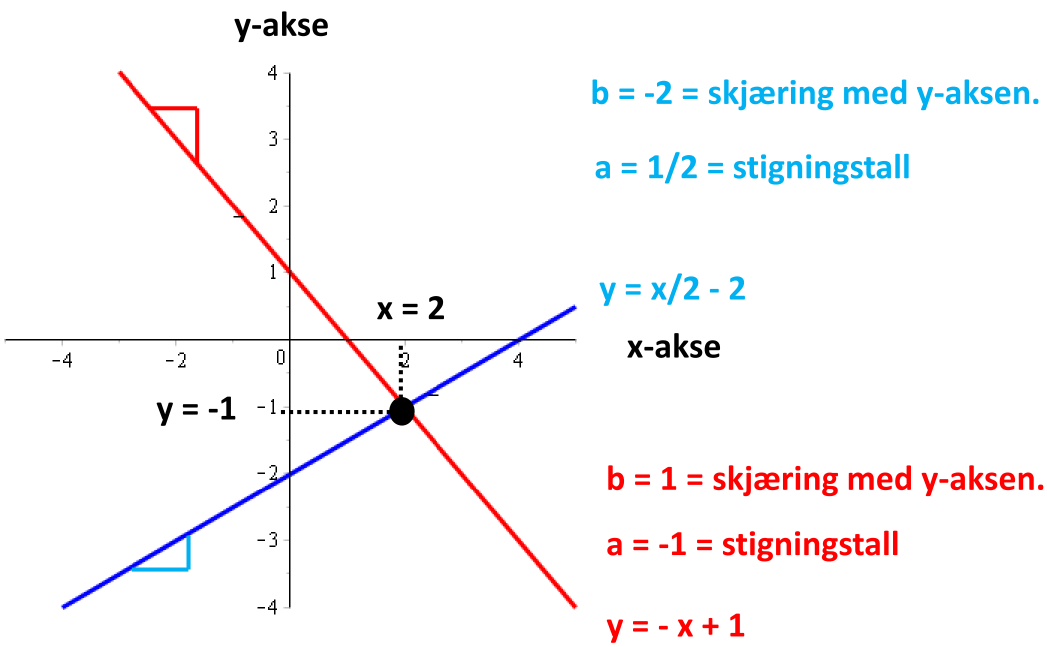
a) Finn skjæringspunktet til linjene grafisk. [9]

b) Finn skjæringspunktet til linjene ved regning.

[9]Grafisk, dvs. ved å tegne linjene i et (x, y)-koordinatsystem og finne svaret kun ved å lese av figuren, altå ingen utregninger behøves.

Løsning:

a) Grafisk løsning:



Figur 1.10: Plott av linjene $y = -x + 1$ og $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Av figuren ser vi at grafene skjærer hverandre når:

$$\underline{\underline{x = 2 \quad , \quad y = -1}} \tag{1.171}$$

b) <u>Ved regning:</u>

$$y = y \qquad \text{(skjæring når linjene har felles punkt)} \tag{1.172}$$

$$-x + 1 = \frac{1}{2}x - 2 \tag{1.173}$$

$$-x - \frac{1}{2}x = -1 - 2 \qquad \text{(samle } x\text{-leddene på venstre side og tallene på høyre)} \tag{1.174}$$

$$-\frac{2x}{2} - \frac{1}{2}x = -3 \qquad \text{(fellesnevner på hver side)} \tag{1.175}$$

$$-\frac{2x + x}{2} = -3 \tag{1.176}$$

$$-\frac{3x}{2} = -3 \tag{1.177}$$

$$\underline{\underline{x = 2}} \tag{1.178}$$

Dette er den x-verdien hvor linjene skjærer hverandre, (se fig.(1.10)).
Dermed finnes tilhørende y-verdi:

$$\underline{\underline{y}} = -x + 1 \quad \text{når } x = 2 \tag{1.179}$$

$$= \frac{1}{2}x - 2 \quad \text{når } x = 2 \tag{1.180}$$

$$= \frac{1}{2}2 - 2 = 1 - 2 = \underline{\underline{-1}} \tag{1.181}$$

dvs. <u>samme løsning som den grafiske</u>, som det skal være.

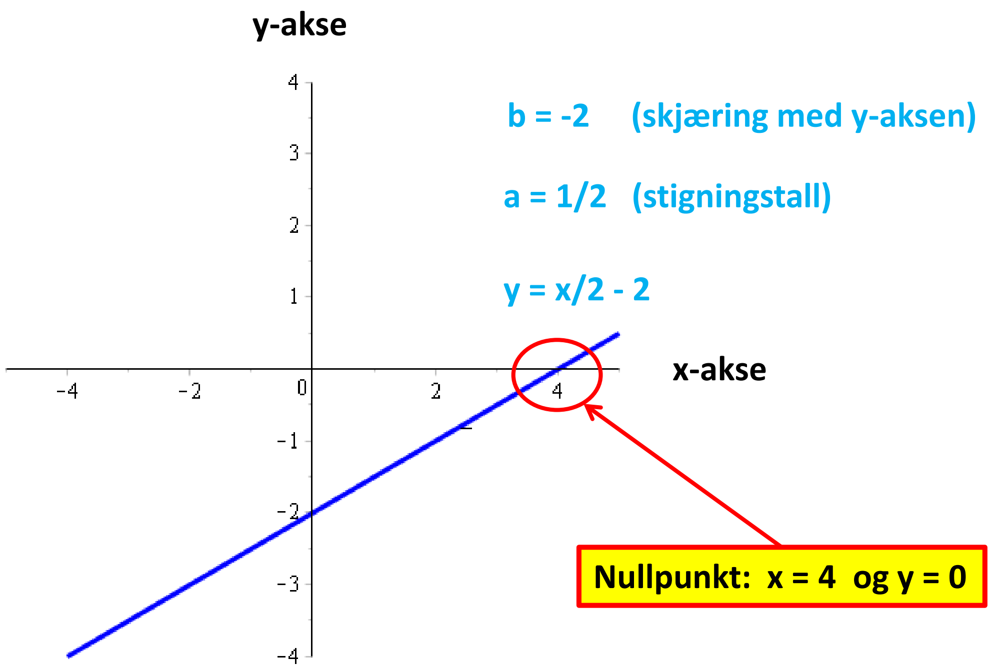
■

Eksempel: (skjæring med x-aksen for linjen $y = ax + b$)

La oss igjen se på linjen fra forrige eksempel.

$$y \;=\; \frac{1}{2}x - 2 \tag{1.182}$$

Finn skjæringen med x-aksen ved regning.



Figur 1.11: Nullpunktet for $y = \frac{1}{2}x - 2$ er $x = 4$.

<u>**Løsning**</u>:

Skjæring med x-aksen er bestemt ved:

$$y = 0 \tag{1.183}$$

Dermed:

$$\frac{1}{2}x - 2 \;=\; 0 \tag{1.184}$$

$$\frac{1}{2}x \;=\; 2 \quad \Big| \cdot 2 \tag{1.185}$$

$$\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}x \;=\; 2 \cdot 2 \tag{1.186}$$

$$\underline{x = 4} \tag{1.187}$$

Skjæring med x-aksen: $\underline{\underline{x = 4 \;\text{ og }\; y = 0}}$.

■

Hvor mange skjæringer med x-aksen kan en linje maksimalt ha?

Kan en linje ha ingen skjæring med x-aksen?

1.10.3 1. gradsligninger med tre variabler (ligningssystemer)

Løsningsmengden for 1. gradsligninger med tre variabeler er en linje i rommet.

<u>**Eksempel**</u>: (lineært ligningssystem)

1. gradsligningen

$$5x + 2y + 2z \;=\; 27 \tag{1.188}$$

kan omskrives med z alene på venstre side:

$$z \;=\; -y - \frac{5}{2}y - \frac{27}{2} \tag{1.189}$$

L o sningsmengden for denne ligningen er en en linje i rommet.

■

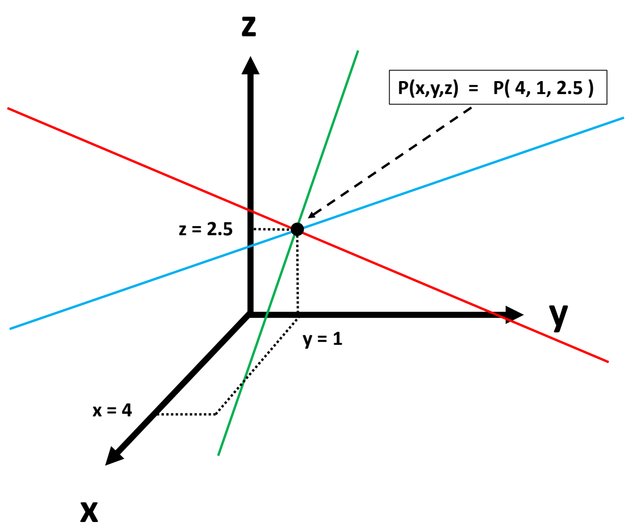
Eksempel: (lineært ligningssystem)

Følgende lineære ligningssystem har **tre** ligninger med **tre** ukjente x, y og z :

$$5x + 2y + 2z = 27 \tag{1.190}$$
$$11x + 8y + 2z = 57 \tag{1.191}$$
$$-3x + 1y - 2z = -16 \tag{1.192}$$

Her er det like mange ligninger som ukjente. Da kan finnes det en entydig løsning. [10]
Denne løsningen tilsvarer at linjene krysser hverandre, se figur 1.12.
Løsningen er:

$$x = 4 \tag{1.195}$$
$$y = 1 \tag{1.196}$$
$$z = 2.5 \tag{1.197}$$



Figur 1.12: Tre linjer krysser hverandre.

■

[10] At ligningene er avhengige betyr at en av ligningene er en lineær kombinasjon av de to andre.
For lineære ligninger med to variabler tilsvarer det at ligningene er parallelle.
At de er parallelle tilsvarer at den ene ligningen er et multiplum av den andre. Eksempel:

$$x + y = 1 \tag{1.193}$$
$$2x + 2y = 2 \tag{1.194}$$

Hvor den ene ligningen bare er 2 ganger den andre. Ligningene er dermed parallelle, dvs. avhengige.
For linære ligningen med tre variabeler skjer dette når to av linjene ligger i samme plan.

Setning: (løsningsmengde)

Tre mulig situasjoner for løsningsmengden for et linært ligningssystem: [11]

1) Èn entydig løsning:

Like mange uavhengige ligninger som ukjente.
(kvadratisk system)

2) Uendelig mange løsninger:

Færre uavhengige ligninger enn ukjente.
(underbestemt system)

3) Ingen løsninger:

Flere uavhengige ligninger enn ukjente.
(overbestemt system)

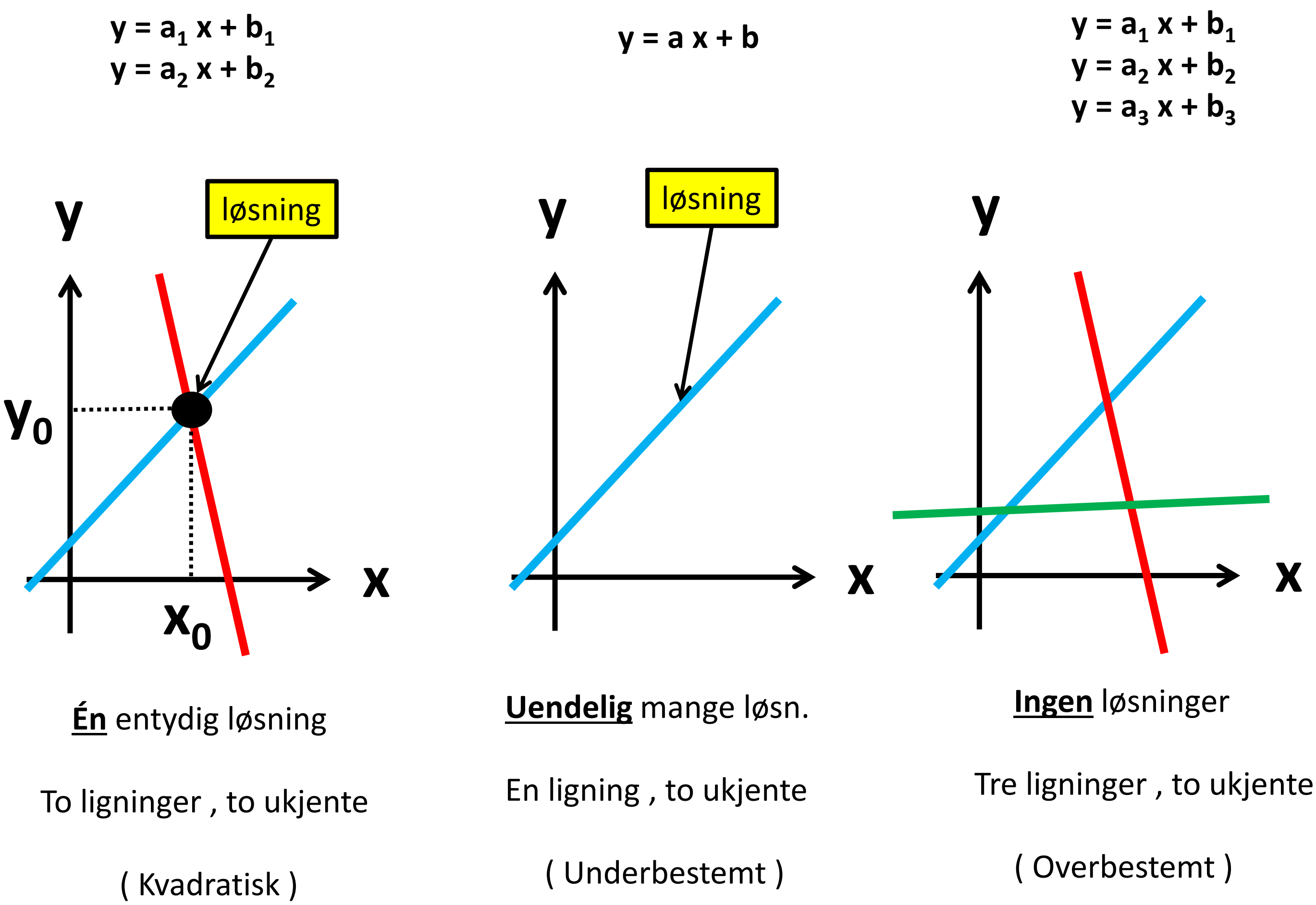
■

[11] To kommentarer:

1) At ligningene er lineært uavhengige betyr at den ene kan skrives som en linækombinasjon av de andre.

2) Når ligningen er uavhengige så inneholder hver ligningen ny informasjon av variablene.
Å fjerne noen av ligingene betyr at man øker størrelsen på løsingdmengden.

La oss illustrere disse tre alternativene for et ligningsystem med to ukjente: [12]



Figur 1.13: Lineært ligningsystem med to ukjente x og y.

[12]Vi antar at ligningene i dette eksemplet er uavhengige.

Eksempel: (lineært ligningssystem)

Løs ligningssystemet:

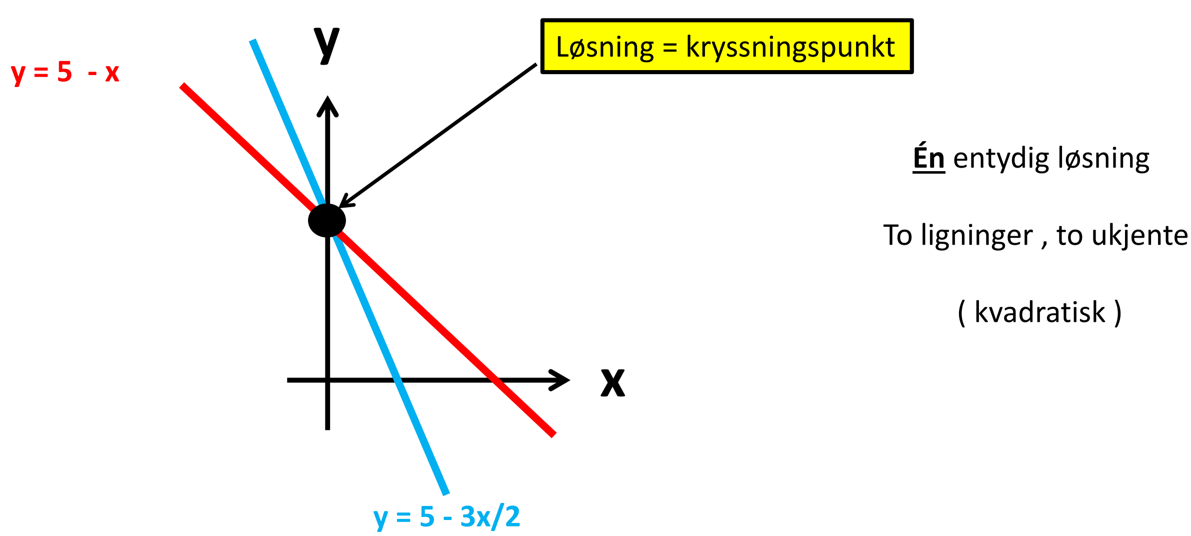
$$x + y = 5 \tag{1.198a}$$
$$3x + 2y = 10 \tag{1.198b}$$

PS:

1) Linjene krysser hverandre, dvs. de er ikke parallelle (altså uavhengige)

2) Strategi: Skriv ligningene som to linjer. I krysningspunktet må de ha samme verdier.

3) Dette er et ligningssystem med **to** uavhengige ligninger med **to** ukjente x og y.
Da finnes det èn entydig løsning, se også side 54.



Figur 1.14: Løsninger er hvor linjene krysser hverandre.

<u>**Løsning**</u>:

Steg 1: Skriv ligningene på formen til to linjer:

$$x + y = 5 \qquad \Rightarrow \qquad y = 5 - x \tag{1.199}$$

$$3x + 2y = 10 \qquad \Rightarrow \qquad y = 5 - \frac{3}{2}x \tag{1.200}$$

Steg 2: I kryssningspunktet har linjene samme verdier, dvs. samme koordinater:

$$y = y \tag{1.201}$$

$$5 - x = 5 - \frac{3}{2}x \tag{1.202}$$

Samler x'ene på venste side og tallene på høyre:

$$5 - x = 5 - \frac{3}{2}x \tag{1.203}$$

$$-x - \frac{3}{2}x = 5 - 5 \tag{1.204}$$

$$-\frac{5}{2}x = 0 \tag{1.205}$$

$$\underline{x = 0} \tag{1.206}$$

Finner tilhørende y-verdi ved å sette inn i lign.(1.199) eller lign.(1.200): [13]

$$\underline{y} = 5 - \frac{3}{2} \cdot 0 = \underline{5} \tag{1.207}$$

[13] I krysningspunktet er x-verdien til kurvene være like. Og det samme gjelder for y-verdiene. I kryssningspunktet kan vi derfor velge om vi vil regne ut y-verdien med den ene eller andre linjen.

Konklusjon:

Løsningen av ligningssystemet er:

$$\underline{\underline{x \ = \ 0 \qquad , \qquad y \ = \ 5}} \tag{1.208}$$

Linjene krysser hverandre i punktet $x = 0$ og $y = 5$, som er løsningen av ligningsystemet.

$\blacksquare$

1.11 2. gradsligninger

1.11.1 2. gradsligninger med en variabel - ABC-formelen

Løsningen av en 2. gradsligning med èn variabel har maksimalt to løsninger.
Disse løsningene finnes via ABC-formelen.

Setning: (ABC-formelen) [14]

Løsnginen av en 2. gradsligning med en variabel:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1.209)}$$

er gitt ved den såkalte ABC-formelen

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1.210)}$$

Da kan 2. gradsligningen FAKTORISERES slik:

$$\boxed{a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \qquad (1.211)}$$

■

[14] Denne læresetningen viser sammenheng mellom nullpunkter og faktorisering.

Eksempel:

Løs ligningen:

$$x^2 - 6x + 5 \;=\; 0 \tag{1.212}$$

Løsning:

Vi har gitt 2. gradsligningen:

$$x^2 - 6x + 5 \quad = \quad 0 \tag{1.213}$$

Her kan vi bruke ABC-formelen i lign.(1.210).
For vårt tilfelle i lign.(1.213) er $a = 1$, $b = -6$ og $c = 5$. Dermed:

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \quad , \quad x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \tag{1.214}$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2} \tag{1.215}$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} \tag{1.216}$$

$$x_1 = \frac{6 - 4}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{6 + 4}{2} \tag{1.217}$$

$$\underline{\underline{x_1 \;=\; 1}} \quad , \quad \underline{\underline{x_2 \;=\; 5}} \tag{1.218}$$

Løsningsmengde:

Tre mulige situasjoner for løsningsmengden for ABC-formelen: [15]

ABC-formelen $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	
$b^2 - 4ac > 0$	**2 løsninger**
$b^2 - 4ac = 0$	**1 løsning**
$b^2 - 4ac < 0$	**ingen løsning**

Figur 1.15: Løsningsmengde for *ABC*-formelen.

PS:

ABC-formlen dreier seg kun om $\overbrace{\text{2. gradsligninger}}^{\text{parabel}}$ - intet annet.

[15] Man kan utlede (dvs. bevise) ABC-formelen ved å omskrive $ax^2 + bx + c = 0$ til et fullstendig kvadrat og bruke 1. kvadratsetning. Detaljene går vi ikke gjennom i dette kompendiet, men utledningen finner du her.

1.11.2 Faktorisering og løsning av 2. gradsligninger

Hva er sammenhengen mellom faktorisering og 2. gradsligninger?

Svar:

Fra eksemplet på side 60 fant vi at 1 og 5 er løsningen til $x^2 - 6x + 5 = 0$.
Dermed:

$$x^2 - 6x + 5 \;=\; \overbrace{(x - 1)(x - 5)}^{\text{faktotrisert form}} \;=\; 0 \tag{1.219}$$

Dersom vi har ligningen på faktorisert form så ser vi umiddelbart hva som er løsningen til ligningen, uten å gjøre noen regning: ("stirremetoden")

$$\underline{\underline{x_1 \;=\; 1}} \qquad , \qquad \underline{\underline{x_2 \;=\; 5}} \tag{1.220}$$

Setning: (polynomer, nullpunkter og faktorisering: *The fundamentalteoremet for algebra*)

Dersom et en ligning er på faktorisert form

$$(x - a_1)(x - a_2) \ \ \ldots \ \ (x - a_n) = 0 \tag{1.221}$$

så er løsningene gitt ved:

$$a_1 \quad , \quad a_2 \quad , \quad \ldots \quad , a_n \tag{1.222}$$

■

Eksempel: (faktorisering: *The fundamentalteoremet for algebra*)

Det er generelt veldig vanskelig å faktorisere 4. gradsligningen.
Du trenger ikke faktorisere denne ligningen $x^4 + 7x^3 - 94x^2 - 400x + 96 = 0$, vi gir deg bare svaret:

$$x^4 + 7x^3 - 94x^2 - 328x + 960 \ = \ (x - 2)(x + 5)(x - 8)(x + 12) \ = \ 0 \tag{1.223}$$

Når har faktorisert en 4. gradsligningen så vet vi også løsningen:

$$\underline{\underline{x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -5 \quad , \quad x_3 = 8 \quad , \quad x_4 = -12}} \tag{1.224}$$

■

1.12 Ulikheter

Ulikhetstegn:

$>$	større enn
$<$	mindre enn

og

$\geq$	større enn eller lik
$\leq$	mindre enn eller lik

<u>**Eksempel**</u>:

$$
\begin{aligned}
2x + 5 &> 7 && (1.225)\\
3 &< 5 && (1.226)\\
-3 &> -5 && (1.227)
\end{aligned}
$$

■

Figur 1.16: Ulikheter.

Operasjoner: (for å løse ulikheter)

Addere med samme tall på begge sider	$$\begin{aligned} 5 &> 3 \\ 5+2 &> 3+2 \end{aligned}$$	(1.228)
Subtrahere med samme tall på begge sider	$$\begin{aligned} 5 &> 3 \\ 5-2 &> 3-2 \end{aligned}$$	(1.229)
Multiplisere med positivt tall (>0) på begge sider	$$\begin{aligned} 5 &> 3 \\ 2\cdot 5 &> 2\cdot 3 \end{aligned}$$	(1.230)
Dividere med positivt tall (>0) på begge sider	$$\begin{aligned} 5 &> 3 \\ \frac{5}{2} &> \frac{3}{2} \end{aligned}$$	(1.231)

Eksempel:

$$3x + 2 > x + 3 \qquad \text{(samle } x\text{-leddene på venstre side og tallene på høyre)} \tag{1.232}$$

$$3x - x > 3 - 2 \tag{1.233}$$

$$2x > 1 \qquad \text{(divider med 2 på hver side)} \tag{1.234}$$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} > \frac{1}{2} \tag{1.235}$$

$$\underline{\underline{x > \frac{1}{2}}} \tag{1.236}$$

■

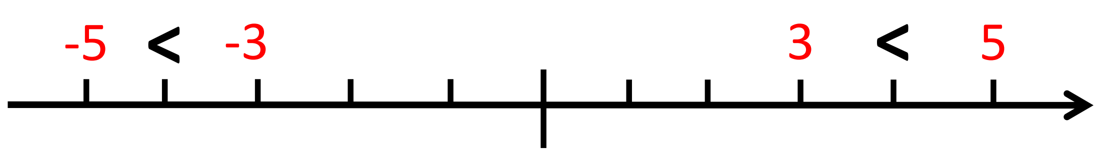
For ulikheter har vi i tillegg følgende regler:

Multiplisere med <u>negativt</u> tall (< 0), SNU ulikhetstegnet

$$\begin{aligned} 5 &> 3 \\ (-1)\cdot 5 &< (-1)\cdot 3 \\ -5 &< -3 \end{aligned} \tag{1.237}$$

Dividere med <u>negativt</u> tall (< 0), SNU ulikhetstegnet

$$\begin{aligned} 5 &> 3 \\ \frac{5}{(-1)} &< \frac{3}{(-1)} \\ -5 &< -3 \end{aligned} \tag{1.238}$$



Figur 1.17: Tallinje.

Eksempel:

Løs ulikheten:

$$-4(x-2)+3(x+4) \quad > \quad 5x-(x-1) \tag{1.239}$$

Løsning:

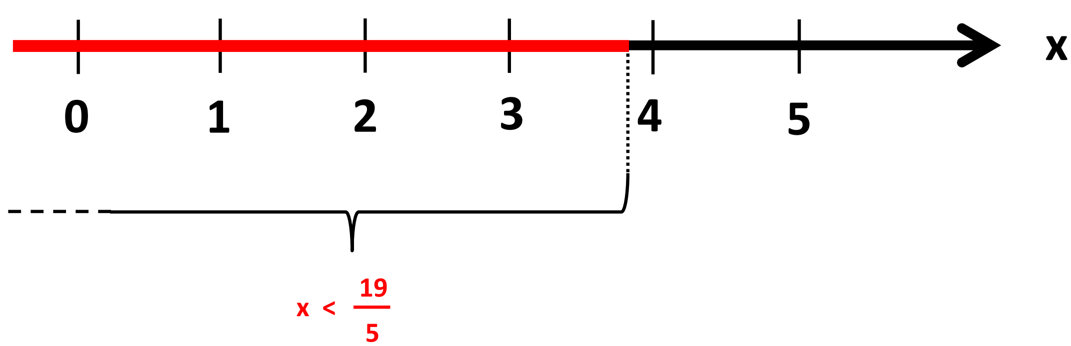
$$-4(x-2)+3(x+4) \quad > \quad 5x-(x-1) \qquad \text{(Løs opp parentesene)} \tag{1.240}$$

$$-4x+8+3x+12 \quad > \quad 5x-x+1 \qquad \text{(Samle } x\text{-leddene på venstre side og tallene på høyre)} \tag{1.241}$$

$$-5x \quad > \quad -19 \tag{1.242}$$

$$\frac{-5x}{\color{red}{-5}} \quad \color{red}{<} \quad \frac{-19}{\color{red}{-5}} \qquad (\color{red}{\text{Dividere}}\text{ med } (-5), \ \color{red}{\text{SNU}}\text{ tegnet}) \tag{1.243}$$

$$\underline{\underline{x \; < \; \frac{19}{5}}} \qquad \left(\frac{19}{5} \; = \; 3.8\right) \tag{1.244}$$



Figur 1.18: Tallinje.

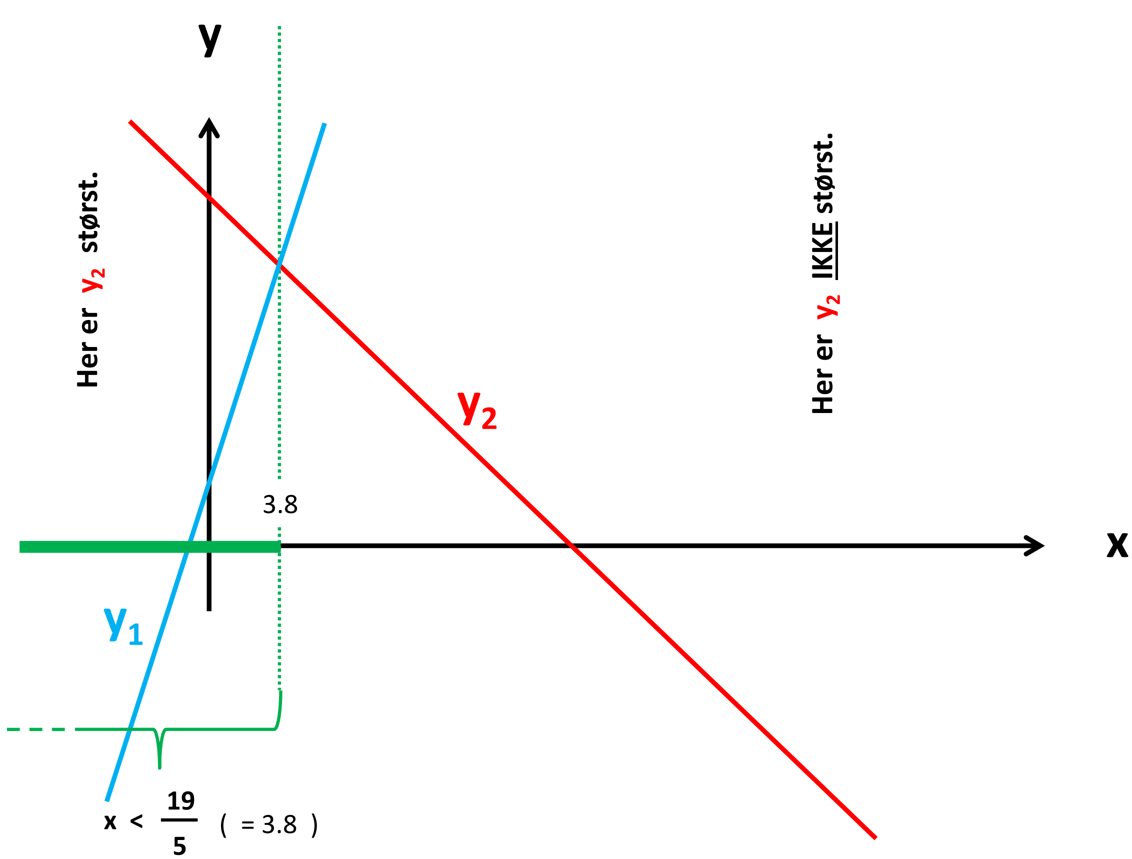
Geometrisk tolkning:

Løs ulikheten:

$$\overbrace{-4(x-2)+3(x+4)}^{y_2} \quad > \quad \overbrace{5x-(x-1)}^{y_1} \tag{1.245}$$

$$y_2 \quad > \quad y_1 \tag{1.246}$$

betyr at vi skal finne ut når den ene linjen er større enn den andre.
Altså vi skal finne de x-verdiene når den ene linjen er større enn den andre.



Figur 1.19: Geometrisk tolkning av $y_2 > y_1$.

■

For ulikheter, har vi også følgende regel:

$$\boxed{\text{Aldri multiplisere eller dividere med uttrykk som inneholder den }\underline{\text{u}}\text{kjente.}} \tag{1.247}$$

Dette fordi vi ikke vet om den ukjente er 0 eller negativ. [16]

Men:

$$\boxed{\text{Det er lov å }\underline{\text{legge til}}\text{ et negativt tall på begge sider av ulikheten!}} \tag{1.248}$$

[16] Men dersom man antar at det ukjente uttrykket er positivt eller negativt så kan man likevel multiplisere eller dividere med det.

Eksempel: (løser først en ligning, og deretter (på neste side) tilsvarende ulikhet)

Løs ligningen:

$$\frac{2x-5}{x-1} \;=\; 1 \tag{1.249}$$

Løsning:

$$\frac{2x-5}{x-1} \;=\; 1 \qquad \Big|\cdot (x-1) \tag{1.250}$$

$$\frac{2x-5}{\cancel{(x-1)}}\cancel{(x-1)} \;=\; 1\cdot(x-1) \tag{1.251}$$

$$2x - x \;=\; -1+5 \tag{1.252}$$

$$\underline{\underline{x \;=\; 4}} \tag{1.253}$$

Altså: en slik førstegrads**ligning** med en ukjent har èn løsning.

■

Eksempel:

Løs ulikheten:

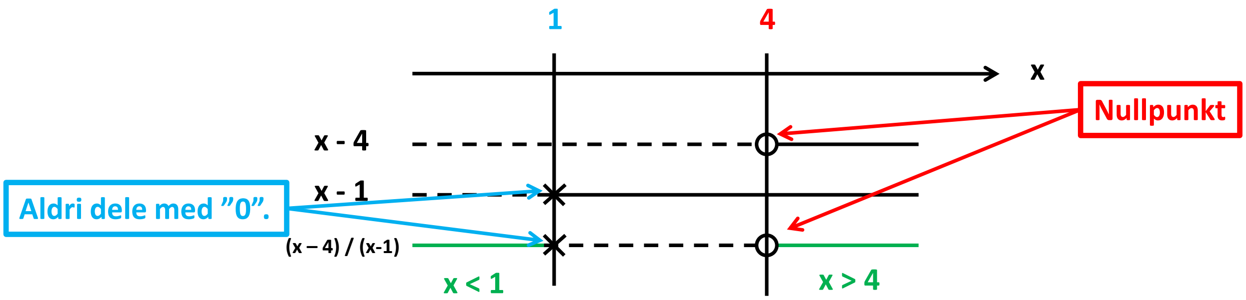
$$\frac{2x-5}{x-1} \ > \ 1 \tag{1.254}$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-5}{x-1} \quad &> \quad 1 && \text{(Kan ikke multiplisere med "$x-1$"} && (1.255)\\
& && \text{siden fortegnet er ukjent)} \\
\frac{2x-5}{x-1} - 1 \quad &> \quad 0 && \text{(Samle alle ledd på samme side)} && (1.256)\\
\frac{2x-5}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} \quad &> \quad 0 && \text{(Fellesnevner)} && (1.257)\\
\frac{2x-5-(x-1)}{x-1} \quad &> \quad 0 && && (1.258)\\
\frac{2x-5-x+1}{x-1} \quad &> \quad 0 && && (1.259)
\end{aligned}$$

$$\underline{\frac{x-4}{x-1} \ > \ 0} \tag{1.260}$$

Denne ulikheten løses med et fortegnsskjema/(drøftingsskjema): [17]



Figur 1.20: Fortegnsskjema for lign.(1.260).

og løsningen er

$$\underline{\underline{x < 1 \quad \text{eller} \quad x > 4}} \tag{1.261}$$

Altså: det er uendelig mange løsninger av ulikheten,
mens tilsvarende ligning hadde kun èn løsning, se lign.(1.253).

■

[17] Vi kan drøfte fortegnet til et brøken i lign.(1.255) ved å faktorisere den, drøfte fortegnet for hver av faktorene, og bruke fortegnsreglene ovenfor på side 12.

Alternativ løsningsmetode:

Vi kan løse ulikheten

$$\frac{2x-5}{x-1} \; > \; 1 \tag{1.262}$$

på samme måte som vi løste tilsvarende ligning.
Da må vi først anta at $x-1$ er positiv, dvs. $x>1$, og deretter se på når $x-1$ er negativ, dvs. $x<1$.

1) $\underline{x > 1}$: (antagelse 1)

Dersom vi kun ser på tilfellet når $x-1$ er positiv, dvs. $x>1$, så kan vi multiplisere med $x-1$ på begge sider.

Siden $x-1$ er positiv så trenger vi ikke å snu ulikhetstegnet:

$$\frac{2x-5}{x-1} \quad > \quad 1 \qquad \Big| \cdot (x-1) \tag{1.263}$$

$$\frac{2x-5}{\cancel{(x-1)}}\cancel{(x-1)} \quad > \quad 1 \cdot (x-1) \tag{1.264}$$

$$2x-5 \quad > \quad x-1 \tag{1.265}$$

$$2x-x \quad > \quad -1+5 \tag{1.266}$$

$$\underline{x \; > \; 4} \tag{1.267}$$

Vi skal både ha $\underbrace{x>1 \;\text{ og }\; x>4}_{x>4}$ som er: $\underline{x>4}$

2) $\underline{x < 1}$: (antagelse 2)

Dersom vi kun ser på tilfellet når $x-1$ er negativ, dvs. $x<1$, så kan vi fortsatt multiplisere med $x-1$ på begge sider. Men:

Siden $x-1$ er negativ så må vi snu ulikhetstegnet:

$$\frac{2x-5}{x-1} > 1 \quad \Big| \cdot (x-1) \tag{1.268}$$

$$\frac{2x-5}{\cancel{(x-1)}}\cancel{(x-1)} < 1 \cdot (x-1) \tag{1.269}$$

$$2x-5 < x-1 \tag{1.270}$$

$$2x-x < -1+5 \tag{1.271}$$

$$\underline{x < 4} \tag{1.272}$$

Vi skal både ha $\underbrace{x<1 \;\text{ og }\; x<4}_{x<1}$ som er: $\underline{x<1}$

Altså løsningen er:

$$\underline{\underline{x < 1 \quad \text{eller} \quad x > 4}} \tag{1.273}$$

■

1.12.1 Fortegnsskjema

Ved å skrive en ulikhet på faktorisert form større enn null:

$$\boxed{A \cdot B \ > \ 0 \qquad (1.274)}$$

eller

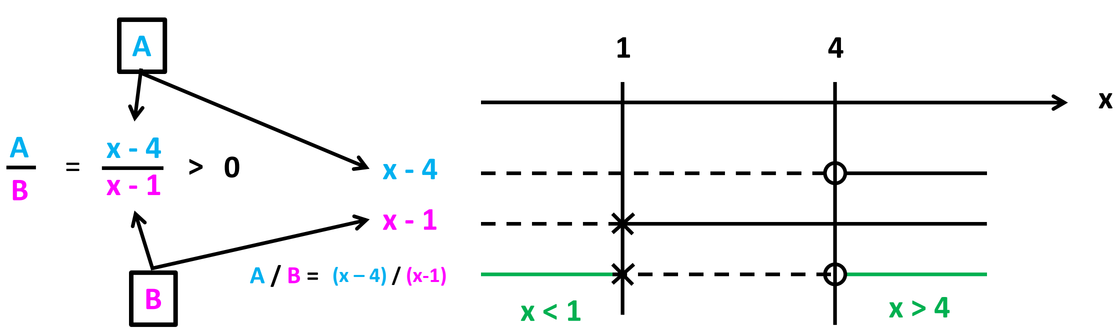
$$\boxed{\frac{A}{B} \ > \ 0 \qquad (1.275)}$$

så innser vi at det er to mulige løsninger:

$$1)\ \text{Løsning 1:} \quad A = \text{positiv} \quad \text{og} \quad B = \text{positiv}: \qquad A \cdot B = \text{positiv} \qquad (1.276)$$
$$\frac{A}{B} = \text{positiv}$$

$$2)\ \text{Løsning 2:} \quad A = \text{negativ} \quad \text{og} \quad B = \text{negativ}: \qquad A \cdot B = \text{positiv} \qquad (1.277)$$
$$\frac{A}{B} = \text{positiv}$$

I vårt tilfelle er $A = x - 4$ og $B = x - 1$.
For å finne ut når A og B er positiv og negativ så er det lurt å sette opp <u>fortegnsskjema</u>:



Figur 1.21: Fortegnsskjema.

1.13 Absoluttverdi

Absoluttverdi:

$$|-3| = 3 \tag{1.278}$$

$$|3| = 3 \tag{1.279}$$

dvs. en absoluttverdi er alltid positiv (eller 0).

Generelt:

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & , \text{ når } a \geq 0 \\ -a & , \text{ når } a < 0 \end{cases} \tag{1.280}}$$

Eksempel:

$$|-17| = 17 \tag{1.281}$$

$$|0| = 0 \tag{1.282}$$

$$|145| = 145 \tag{1.283}$$

■

Eksempel:

$\overbrace{\text{Plott}}^{\text{tegn}}$ ligningen:

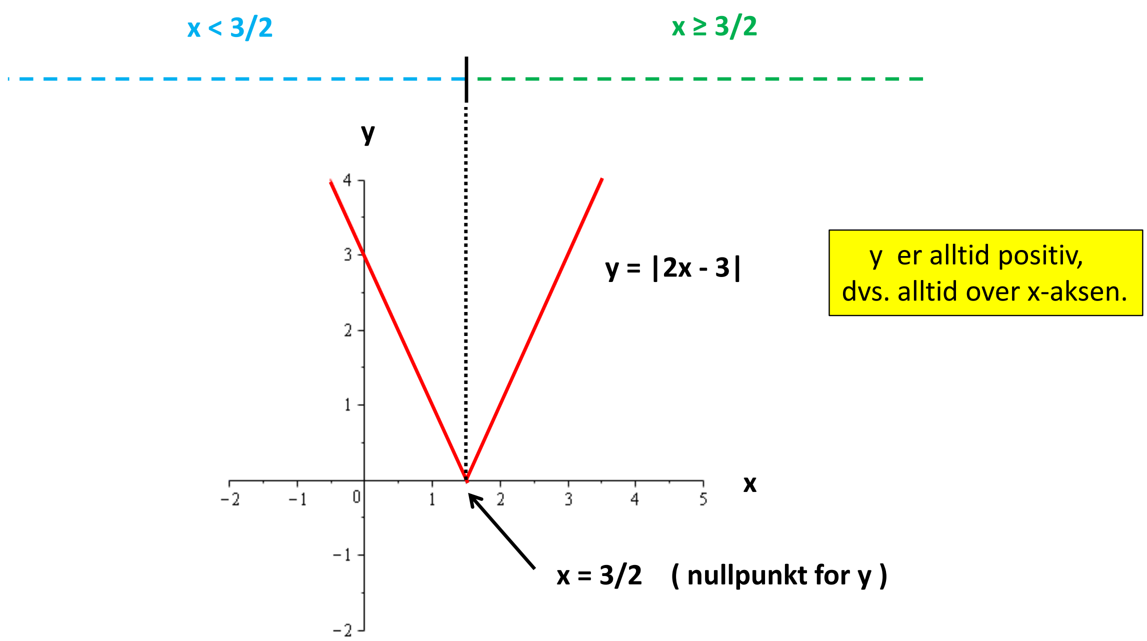
$$y \;=\; \overbrace{|2x-3|}^{\text{alltid positivt}} \tag{1.284}$$

Løsning:

Før vi kan tegne opp ligningen kan det være lurt å skrive den om:
Siden $y = |2x-3| = 0$ for $x = \frac{3}{2}$, dvs. nullpunktet inntreffer for $x = \frac{3}{2}$, så må vi skille mellom når $x \geq \frac{3}{2}$ og $x < \frac{3}{2}$.

Delt forskrift:

$$y \;=\; |2x-3| \;=\; \begin{cases} 2x-3 & , \quad \text{når } x \;\geq\; \frac{3}{2} \\ -(2x-3) & , \quad \text{når } x \;<\; \frac{3}{2} \end{cases} \tag{1.285}$$



Figur 1.22: Plott av $y = |2x-3|$.

■

Eksempel:

Dersom vi først kvadrerer et tall, f.eks. $(-3)^2$, og deretter tar kvadratroten så får man absoluttverdien av tallet:

$$\sqrt{(-3)^2} \;=\; 3 \tag{1.286}$$

Dette gjelder uansett om tallet er negativt eller positivt:

$$\sqrt{3^2} \;=\; 3 \tag{1.287}$$

Dette gjelder også mer generelt:

$$\boxed{\sqrt{x^2} \;=\; |x| \qquad (1.288)}$$

uansett om x er positiv eller negativ.

■

Eksempel:

La oss se på:

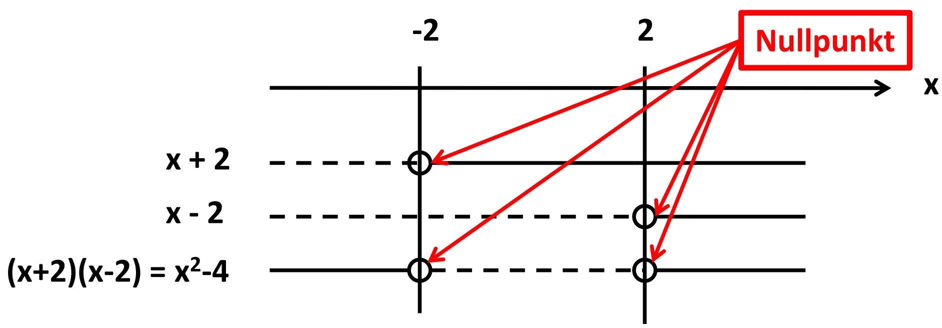
$$y = |x^2 - 4| + 2x + 1 \tag{1.289}$$

og la oss løse ligningen :

$$\boxed{y = 0 \qquad (1.290)}$$

Løsning:

Vi må da først se på leddet $(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$:



Figur 1.23: Fortegnsskjema for $x^2 - 4$.

Dvs. vi må splitte $|x^2 - 4|$ i 3 intervall:

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & , \text{ når } x \geq 2 \\ -(x^2 - 4) & , \text{ når } -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & , \text{ når } x \leq -2 \end{cases} \tag{1.291}$$

Legg merke til at intervallene $x \leq -2$ og $x \geq 2$ gir samme uttrykk, se lign.(1.291).

i) $\underline{x \leq -2 \text{ og } x \geq 2}$:

$$y = 0 \tag{1.292}$$

$$x^2 - 4 + 2x + 1 = 0 \tag{1.293}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \tag{1.294}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \tag{1.295}$$

$$\cancel{x = 1} \quad \vee \quad \underline{x = -3} \tag{1.296}$$

ii) $\underline{-2 < x < 2}$:

$$y = 0 \tag{1.297}$$

$$-(x^2 - 4) + 2x + 1 = 0 \tag{1.298}$$

$$-x^2 + 2x + 5 = 0 \tag{1.299}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{-2} \tag{1.300}$$

$$\cancel{x = 1 + \sqrt{6}} \quad \vee \quad \underline{x = 1 - \sqrt{6}} \tag{1.301}$$

Alt i alt, løsningen er

$$\underline{\underline{x = -3 \quad \vee \quad x = 1 - \sqrt{6}}} \tag{1.302}$$

■

1.14 Regning med prosent

Definisjon: (prosent)

Forholdet mellom a og b kan uttrykkes i prosent, dvs. "av hundre prosent": [18]

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot 100\ \% \qquad (1.303)}$$

■

Eksempel:

$$\underline{\underline{25\ \%}} = \frac{25}{100} = \frac{\cancel{25}}{4 \cdot \cancel{25}} = \underline{\underline{\frac{1}{4} = 0.25}} \tag{1.304}$$

$$\underline{\underline{80 \cdot 25\,\%}} = 80 \cdot \frac{1}{4} = \frac{80 \cdot 1}{4} = \frac{20 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} = \underline{\underline{20}} \tag{1.305}$$

$$\underline{\underline{25\,\% \cdot 25\,\%}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 4} = \underline{\underline{\frac{1}{16} = 0.0625}} \tag{1.306}$$

■

[18] Hva er promille ‰?

Eksempel:

Anta at du har kapitalen

$$K = 100\,000 \quad \text{NOK} \tag{1.307}$$

i banken. Renten på kapitalen er

$$r = 5\,\% = \frac{5}{100} = 0.05 \tag{1.308}$$

per år.

Hva er den totale kapitalen etter ett år (dvs. etter en rentetermin)? [19]

Figur 1.24: Kapital.

[19] En rentetermin er ikke alltid, men veldig ofte, ett år.

Løsning:

Ny kapital etter ett år er den kapitalen du setter i banken + renten du får for å ha pengene i banken det året:

$$\text{ny kapital} \;=\; \text{kapital} \;+\; \text{rente} \tag{1.309}$$

som, på matematisk form, kan skrives:

$$\boxed{K_1 \;=\; K \;+\; \text{rente} \qquad (1.310)}$$

Det er av kapitalen K $(= 100\,000$ NOK$)$ man får rente av. Dermed er renten:

$$\text{rente} = K\,r \tag{1.311}$$

Dette innsatt i lign.(1.310):

$$K_1 \;=\; K \;+\; K\,r \tag{1.312}$$

$$K_1 \;=\; K\big(1 \;+\; r\big) \qquad \text{(faktorisering)} \tag{1.313}$$

Til slutt setter vi inn tall:

$$\underline{\underline{K_1}} \;=\; K\big(1 \;+\; r\big) \;=\; 100\,000\big(1 + 0.05\big)\ \text{NOK} \;=\; \underline{\underline{105\,000\ \text{NOK}}} \tag{1.314}$$

som altså er total kapital etter èn rentetermin.

■

Eksempel:

Brunvoll AS er en leverandør av thrustersystemer for manøvrering av skip.

Anta at Bruvoll ønsker å kjøpe en ekstra server til sin allerede store serverpark. Serveren de har bestemt seg for å kjøpe koster $K = 68\,200$ NOK.

MVA er altså inkludert i prisen $K = 68\,200$ NOK.
Anta at MVA er på $p = 25\,\% = \frac{25}{100} = 0.25$.

a) Hvor mye koster serveren uten moms?

b) Hvor mye betaler du i merverdiavgift MVA?

Figur 1.25: Serverpark.

<u>**Løsning**</u>:

a) La

$$x \;=\; \text{prisen på serveren } \underline{\text{uten}} \text{ MVA} \tag{1.315}$$

Siden MVA er inkludert i $K = 68\,200$ NOK så er:

$$\boxed{K \;=\; x + \underbrace{\text{MVA}}_{x\,p} \qquad (1.316)}$$

Det er beløpet x vi betaler merverdiavgift av, dvs. $\text{MVA} = x\,p$. Dette innsatt i lign.(1.316) gir:

$$K \;=\; x \;+\; x\,p \tag{1.317}$$

$$K \;=\; (\,1 \;+\; p\,)\;x \tag{1.318}$$

hvor vi kan løse ut x, dvs. prisen på serveren <u>uten</u> MVA:

$$\underline{\underline{x}} \;=\; \frac{K}{1+p} \;=\; \frac{68\,200}{1+0.25}\ \text{NOK} \;=\; \underline{\underline{54\,560\ \text{NOK}}} \tag{1.319}$$

b) MVA blir da, ved å bruke lign.(1.316):

$$\underline{\underline{\text{MVA}}} \;=\; K - x \;=\; \big(68\,200 - 54\,560\big)\ \text{NOK} \;=\; \underline{\underline{13\,640\ \text{NOK}}} \tag{1.320}$$

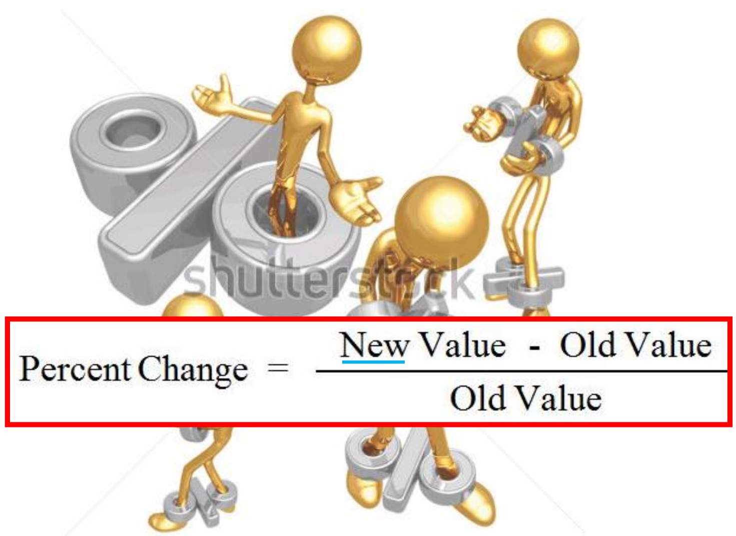
■

Setning: (%-vis endring)

Når et tall endres fra a til b så er den %-vise endringen iforhold til a:

$$\boxed{\%\text{-vis endring} \ = \ \frac{b-a}{a} \cdot 100 \ \% \qquad (1.321)}$$

■

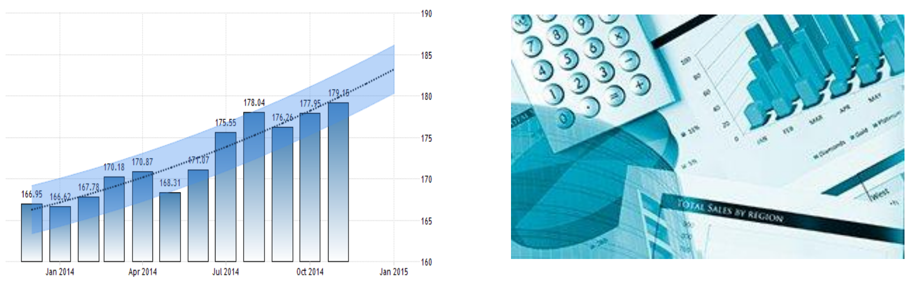


Figur 1.26: %-vis endring.

Eksempel: (%-vis endring , *SØK100 Makroøkonomi*)

I *SØK100 Makroøkonomi* lærer man om *konsumprisindeksen* KPI.

Anta at $KPI_{10} = 150$ i år 10 og $KPI_{11} = 165$ året etter.
Hvor mye er den %-vise endringen?



Figur 1.27: Konsumprisindeks.

Løsning:

%-vis endring fra $KPI_{10} = 150$ og $KPI_{11} = 165$:

$$\underline{\underline{\text{\%-vis endring}}} \quad = \quad \frac{KPI_{11} - KPI_{10}}{KPI_{10}} \cdot 100\ \% \quad = \quad \frac{165 - 150}{150} \cdot 100 \quad = \quad \underline{\underline{10\ \%}} \tag{1.322}$$

$\blacksquare$

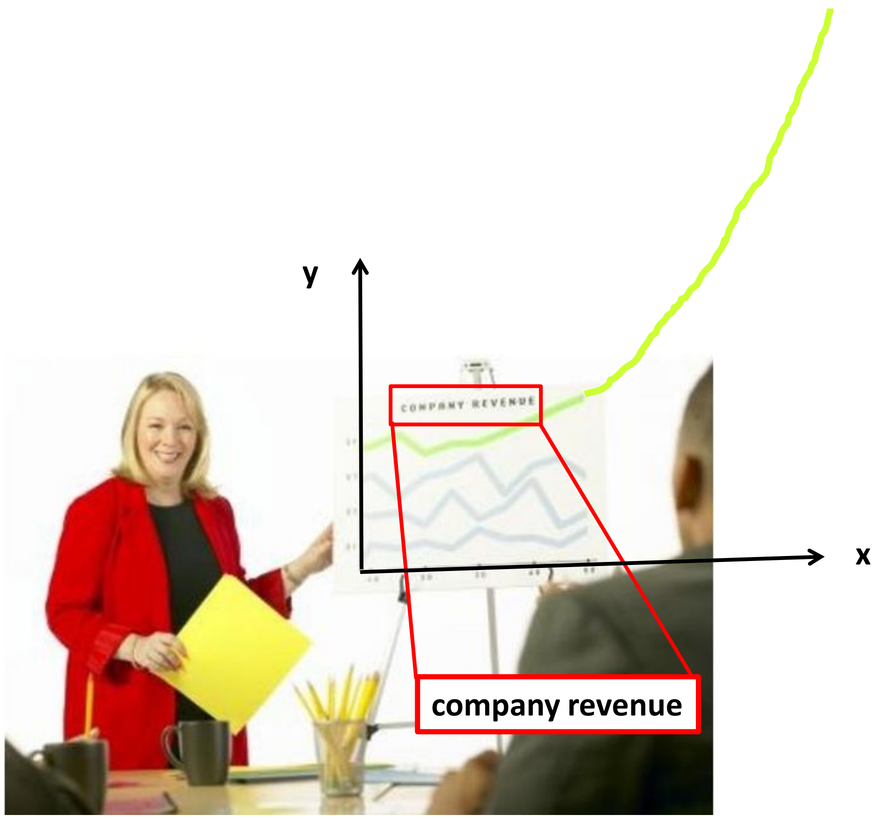
Husk:

1) Man kan ikke yte mer enn 100 %.

2) Men en endring kan være mer enn 100 %.

Kapittel 2

Funksjoner



Figur 2.1: Funksjoner.

2.1 Funksjoner

Eksempel: (funksjon)

La oss igjen se på linjen fra side 51:

$$\boxed{y \;=\; \frac{1}{2}x - 2 \qquad (2.1)}$$

Løsningsmengden til denne ligningen var et sett med punkter (x, y) som gav en linje i planet.
For en gitt x finnes en entydig y slik at $y = \frac{1}{2}x - 2$, f.eks. med $x = 10$ så er tilhørende $y = 3$:

$$\underline{y} \;=\; \frac{1}{2} \cdot 10 - 2 \;=\; 5 - 2 \;=\; \underline{3} \tag{2.2}$$

Slik kan vi fortsette med alle mulige verdier for x.
Vi kan derfor si at vi har en funksjon

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{1}{2}x - 2 \qquad (2.3)}$$

slik at for hver x har funksjonen en verdi "$\frac{1}{2}x - 2$".
Vi skriver funksjonen som

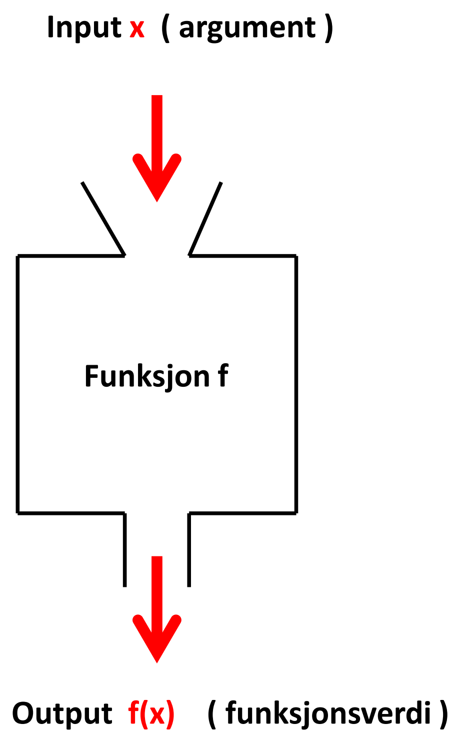
$$\boxed{y \;=\; f(x) \qquad (2.4)}$$

for vise verdien tilhørende x-variabelen.
Vi kan da skrive:

$$f(10) \;=\; \frac{1}{2} \cdot 10 - 2 \;=\; 3 \tag{2.5}$$

$$f(20) \;=\; \frac{1}{2} \cdot 20 - 2 \;=\; 8 \tag{2.6}$$

■



Figur 2.2: Visualisering av en funksjon f.

Definisjon: (funksjon) [1]

$$\boxed{\text{funksjon } f \quad = \quad \text{entydig assosiasjon fra en størrelse } x \text{ til en annen } f}$$

hvor x ofte kalles den *uavhengige variabelen* eller bare *argumentet*, og $y = f(x)$ kalles ofte *funksjonsverdien*.

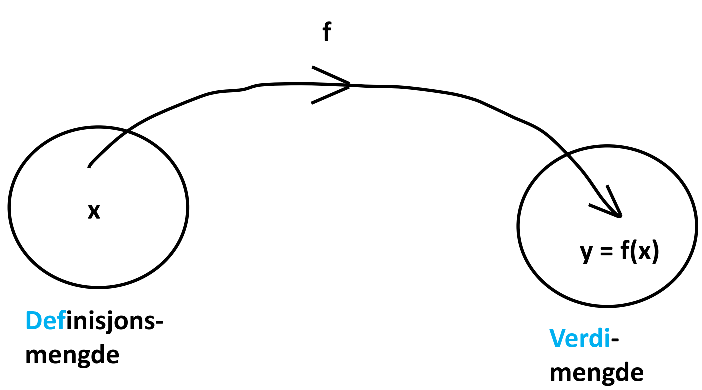
■

Definisjon: (definisjonsmengde og verdimengde)

$$\text{definisjonsmengde} \quad = \quad \text{alle mulige } \underline{\textit{tillatte}} \text{ verdier av } x \tag{2.7}$$

$$\text{verdimengde} \quad = \quad \text{alle mulige funksjonsverdier til } y = f(x) \text{ tilhørende alle } \underline{\textit{tillatte}} \text{ verdier av } x \tag{2.8}$$

■



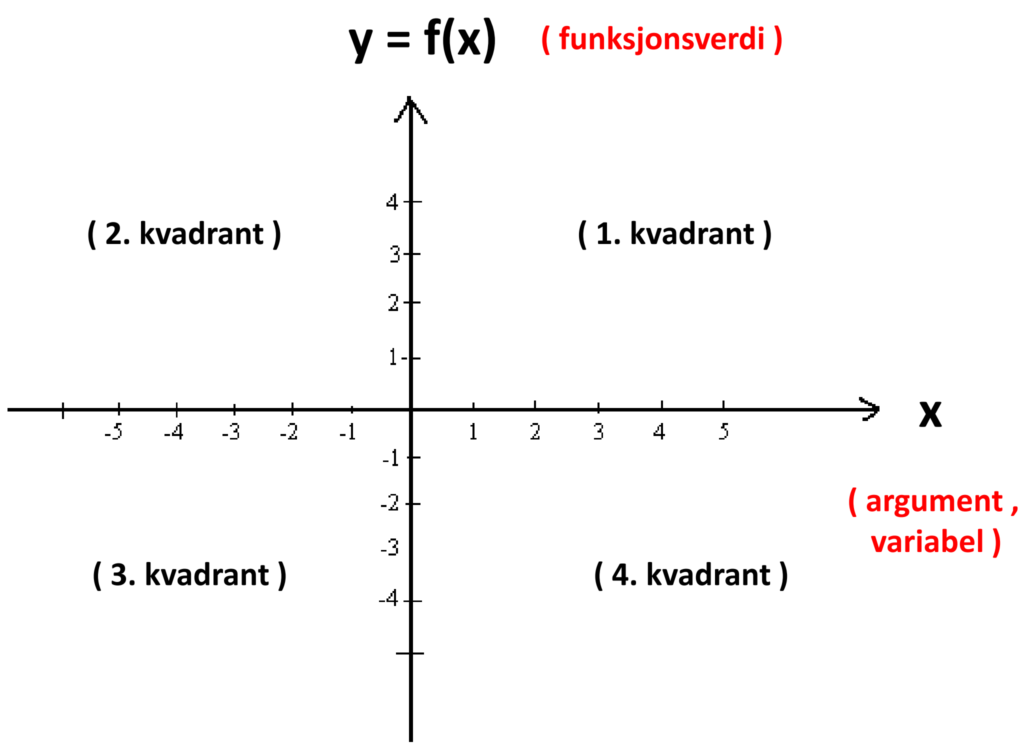
Figur 2.3: Funksjon $y = f(x)$.

[1] Isteden for "èn og bare èn verdi" kunne vi like gjerne sagt "*entydig*".

2.2 Koordinatsystem

Et koordinatsystem i planet består av to akser (koordinatakser), x- aksen og y-aksen. x-aksen er horisontal (vannrett) og y-aksen er vertikal (loddrett).

Punktet der aksene krysser kalles for origo. Koordinatsystemet gir oss muligheten til å presentere punkter i planet i form av to tallverdier (x, y).



Figur 2.4: Koordinatsystem.

2.3 Lineære funksjoner (rette linjer)

I avsnitt 1.10 lærte vi om 1. gradsligninger, dvs. lineære funksjoner.

Definisjon: (lineær funksjon)

En $\overbrace{\text{lineær funksjon}}^{\text{rett linje}}$ $y = f(x)$ har formen:

$$\boxed{f(x) \;=\; ax + b \qquad (2.9)}$$

Her er a og b reelle tall.

■

I avsnitt 1.11.1 (se side 60) lærte vi hvordan man kan finne løse nullpunktene $f(x) = 0$ til slike lineære funksjoner. Nå skal vi $\underbrace{\text{plotte}}_{\text{tegne}}$ og studere dem mer.

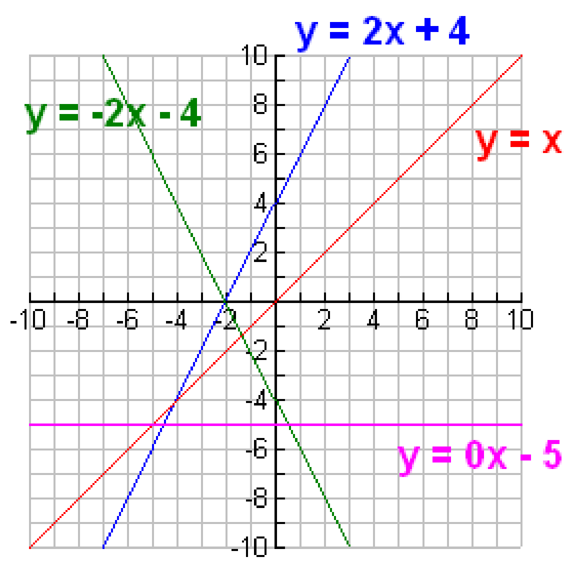
Eksempel: ($\overbrace{\text{lineære funksjoner}}^{\text{rette linjer}}$)

$$f(x) = 2x + 4 \tag{2.10}$$

$$g(x) = x + 0 \tag{2.11}$$

$$h(x) = -2x - 4 \tag{2.12}$$

$$i(x) = 0\,x - 5 = -5 \tag{2.13}$$



Figur 2.5: Eksempler på lineære funksjoner.

■

Eksempel: ($\overbrace{\text{lineær funksjon}}^{\text{rett linje}}$)

a) Plott funksjonen

$$f(x) = 2x - 1 \tag{2.14}$$

b) Finn stigningstallet a.

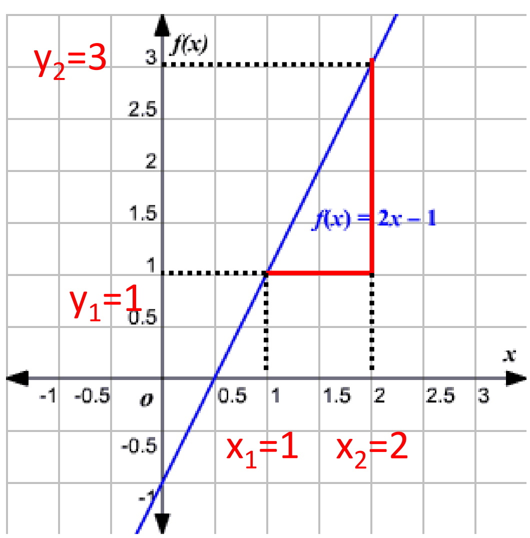
c) Skjærer linjen y-aksen? Dersom den gjør det, for hvilken verdi gjør den det?

Løsning:

a) Når man skal $\overbrace{\text{plotte}}^{\text{tegne}}$ funksjoner, lag en verditabell:

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	-1	0	1	2	3

Figur 2.6: Verditabell for $f(x) = 2x - 1$.



Figur 2.7: Plott av $f(x) = 2x - 1$.

Kommentar angående plotting av en rett linje:

For en rett linje er det tilstrekkelig med bare to funkjonsverdier når den skal $\overbrace{\text{plottes}}^{\text{tegnes}}$. Da er den rette, lineære linjen entydig bestemt. Men av "sikkerhetsmessige" grunner er det lurt å ha flere verdier som f.eks. i tabellen i figur (2.6).

b) For en rett linje er det tilstrekkelig med bare to funkjonsverdier når den skal plottes. Stigningstallet a :

$$\underline{\underline{a}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.15}$$

$$= \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}} \tag{2.16}$$

At stigningstallet er $a = 2$ kan man innse direkte, uten regning, via $f(x) = 2x - 1$.

c) Fra figur (2.7) ser vi at linjen skjærer y-aksen for $y = -1$.
Også dette kan vi innse direkte ut fra ligningen, via $f(x) = 2x-1$:

$$\underline{\underline{y}} = f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = \underline{\underline{-1}} \tag{2.17}$$

■

Det er to måter en lineær funksjon kan bestemmes på:

1. stigningstallet a er kjent og ett punkt (x_1, y_1)

2. to punkt (x_1, y_1) og (x_2, y_2)

2.3.1 Ett- og to-punktsformelen

1) **Setning**: $\big($ $\overbrace{\textit{ett-punktsformelen}\text{ for lineære funksjoner}}^{\text{dersom stigningstallet } a \text{ er kjent}}$ $\big)$

Dersom stigningstallet a og ett punkt (x_1, y_1) på en rett linje er kjent så er den lineære funksjonen gitt ved:

$$\boxed{f(x) \;=\; a(x - x_1) \;+\; y_1 \qquad\qquad (2.18)}$$

Denne formelen kalles *ett-punktsformelen*.

■

2) **Setning**: $\big($ $\overbrace{\textit{to-punktsformelen}\text{ for lineære funksjoner}}^{\text{dersom stigningstallet } a \text{ er ukjent}}$ $\big)$

Dersom to punkt (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er kjent på en rett linje, så er den lineære funksjonen gitt ved:

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \;+\; y_1 \qquad\qquad (2.19)}$$

Denne formelen kalles *to-punktsformelen*. Stigningstallet er da $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

■

Eksempel: (ett- og to-punktsformelen for lineære funksjoner)

a) Finn ligningen for den rette linjen som går gjennom punktet P og har stigningstallet a:

$f(x)$: $P = (-3, 2)$ og $a = 5$

b) Finn ligningen til den rette linjen som går gjennom punktene:

$g(x)$: $(x_1, y_1) = (8, 1)$ og $(x_2, y_2) = (4, 3)$

Løsning:

a) Siden vi kjenner 1 punkt og stigningstallet a for den rette linjen så kan vi bruke *ett-punktsformelen* for lineære funksjoner:

$$\underline{\underline{f(x)}} \overset{\text{ett-pkt.formel}}{=} a(x - x_1) + y_1 \tag{2.20}$$

$$= 5\Big(x - (-3)\Big) + 2 = \underline{\underline{5x + 17}} \tag{2.21}$$

b) Siden vi kjenner 2 punkter på den rette linjen så kan vi bruke *to-punktsformelen* for lineære funksjoner:

$$\underline{\underline{g(x)}} \overset{\text{to-pkt.formel}}{=} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\big(x - x_1\big) + y_1 \tag{2.22}$$

$$= \frac{3 - 1}{4 - 0}\big(x - 8\big) + 1 = \underline{\underline{\frac{x}{2} - 3}} \tag{2.23}$$

■

Eksempel: (lineære funksjoner , *SØK100 Makroøkonomi* , ISLM modellen)

I "*SØK100 Makroøkonomi*" lærer man om IS-kurven. IS-kurven representerer alle kombinasjoner av renten r og nasjonalproduktet R som gir likevekt i produktmarkedet.

Anta at en slik IS-kurve er gitt ved:

$$r_{IS} \;=\; -\frac{1}{2000}R \;+\; \frac{1}{1000}G \;+\; \frac{3}{10} \qquad\qquad \text{(IS-kurve)} \tag{2.24}$$

hvor G = offentlige utgifter (G="government").

En LM-kurve representerer alle kombinasjoner av renten r og nasjonalproduktet R som gir likevekt i pengemarkedet. I eksemplet fra øving 1 fant vi at en slik LM-kurve var gitt:

$$r_{LM} \;=\; \frac{1}{4000}R \;-\; \frac{1}{5} \qquad\qquad \text{(LM-kurve)} \tag{2.25}$$

Figur 2.8: Makroøkonomi.

a) $\overbrace{\text{Plott}}^{\text{tegn}}$ r_{IS} sfa. [2] R, dvs. $r_{IS}(R)$ når $G = 600$.

b) Løs analytisk, dvs. ved regning:
Ved hvilken verdi for nasjonalproduktet R krysser disse linjene IS- og LM-kurven hverandre?

c) Hva betyr det, ut fra et økonomisk ståsted, at LM-kurven og IS-kurven er like?

[2] sfa. = "som funksjon av"

Løsning:

a) Når man skal $\overbrace{\text{plotte}}^{\text{tegne}}$ funksjoner, lag en verditabell:

G=600:

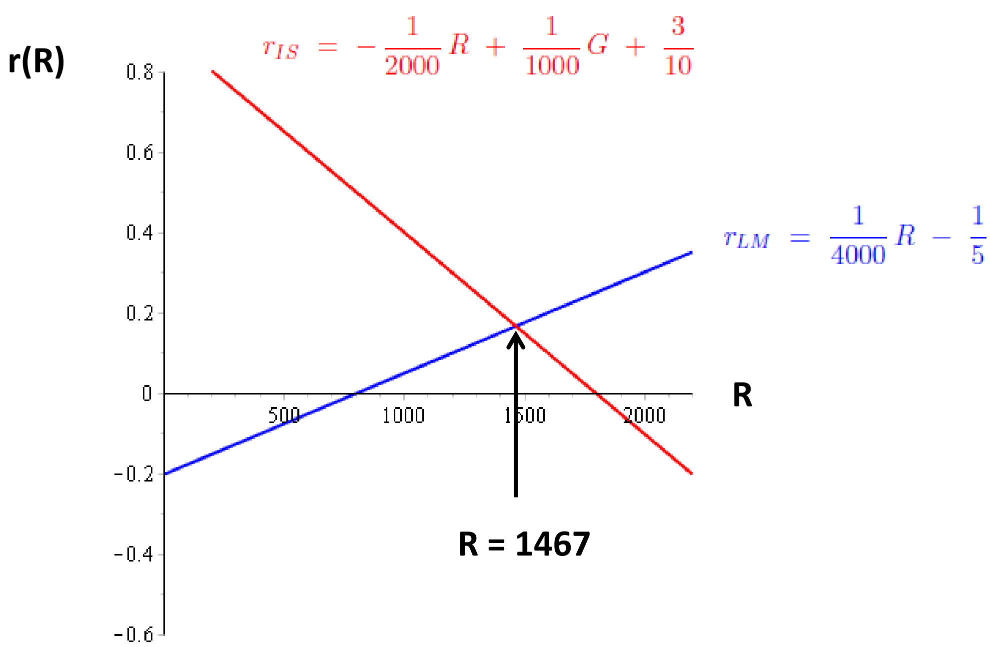
R	0	500	1000	1500	2000
r_{IS}	0.90	0.65	0.40	0.15	- 0.10

IS-kurve

R	0	500	1000	1500	2000
r_{LM}	- 0.20	- 0.075	0.05	0.175	0.30

LM-kurve

Figur 2.9: Verditabell for $r_{IS}(R)$ $(G = 600)$ og $r_{LM}(R)$.



Figur 2.10: Plott av IS-kurvene og LM-kurven.

b) IS- og LM-kurven krysser hverandre når: $G = 600$

$$r_{IS} \quad = \quad r_{LM} \tag{2.26}$$

$$-\frac{1}{2000}R + \frac{1}{1000}600 + \frac{3}{10} \quad = \quad \frac{1}{4000}R - \frac{1}{5} \tag{2.27}$$

Samler R'ene på venstre side:

$$-\frac{1\cdot 2}{2000\cdot 2}R - \frac{1}{4000}R \quad = \quad -\frac{1}{5} - \frac{6}{10} - \frac{3}{10} \tag{2.28}$$

$$-\frac{2}{4000}R - \frac{1}{4000}R \quad = \quad -\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2} - \frac{6}{10} - \frac{3}{10} \tag{2.29}$$

$$-\frac{3}{4000}R \quad = \quad -\frac{2+6+3}{10} \tag{2.30}$$

$$\underline{R \;\approx\; 1467} \tag{2.31}$$

Renten r_{IS} i produktmarkedet er sammenfallende med renten r_{LM} i pengemarkedet når nasjonalproduktet er $\underline{\underline{R \approx 1467}}$.

c) Når linjene skjærer hverandre, dvs. er like, så betyr det at det er likevekt mellom produktmarkedet og pengemarkedet.

Med andre ord: økonomien er i *makroøkonomisk likevekt*.

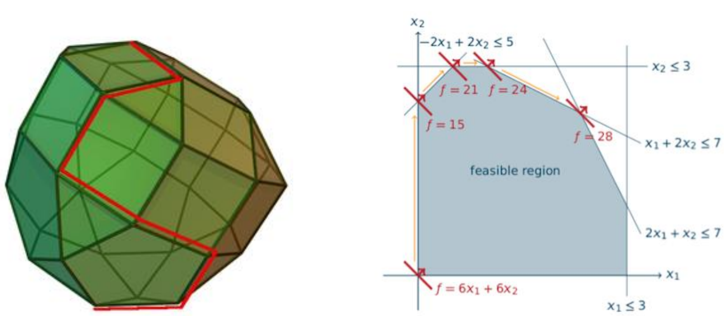
■

2.4 Simplex-algoritmen

Simplex-algoritmen er en matematisk teknikk innen optimeringsteori for numerisk løsning av lineærprogrammeringsproblemer.

Simplex-algoritmen er en komplisert algoritme som mange av dere kommer til å lære mer om senere i studiene. I *"LOG733 Exact Optimization Methods in Logistics"* lærer man blant annet om lineær programmering (LP). Men allerede nå kan vi nok matematikk til å løse et enkelt optimeringseksempel, se neste side.

En litt forenklet og kort beskrivelse av Simplex-algoritmen er hjørneløsningsmetoden.



Figur 2.11: Simplex metoden = hjørneløsningsmetoden.

Eksempel: (lineære funksjoner , *BØK205 Økonomistyring og regnskap* , LP[3] problem)

La oss se på bedriften *Møretank A/S* sitt optimeringsproblem. De produserer to typer varmtvannsberedere, type 1 and type 2. Da er det hensiktsmessig å definere beslutningsvariablene:

$$x_1 = \text{antall varmtvannsberedere av type 1} \tag{2.32}$$

$$x_2 = \text{antall varmtvannsberedere av type 2} \tag{2.33}$$

Anta at inntekten $i \equiv i(x_1, x_2)$ til bedriften er gitt ved:

$$\boxed{i(x_1, x_2) = 350\,x_1 + 300\,x_2 \qquad (2.34)}$$

Denne inntekten skal maksimeres.

Figur 2.12: Møretank A/S.

[3]LP = linær programmering

Møretank A/S har kun 200 pumper, 1566 arbeidstimer og 2880 dm rør tilgjengelig. Disse restriksjonene kan man angi som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene:

$$
\text{restriksjoner} \quad : \quad \begin{cases} 1\,x_1 + 1\,x_2 \;\leq\; 200 & \text{(pumper)} \\[2ex] 9\,x_1 + 6\,x_2 \;\leq\; 1566 & \text{(arbeidstimer)} \\[2ex] 12\,x_1 + 16\,x_2 \;\leq\; 2880 & \text{(rør)} \\[4ex] x_1 \;\geq\; 0 & \\[2ex] x_2 \;\geq\; 0 & \end{cases} \tag{2.35}
$$

hvor de to siste ulikhetene stammer fra det faktum at x_1 og x_2 må være positive siden det dreier seg om mengde produsert.

Inntekten $i(x_1, x_2)$ i lign.(2.34) skal maksimeres under restriksjonene beskrevet av lign.(2.35).

a) Man kan vise matematisk at løsningen av et LP-problem inntreffer et sted når ulikhetene er likhet, i ett av hjørnene. [4]
Det betyr at løsnsingen inntreffer når en eller flere av ressursene er helt brukt opp.

Siden løsningen til LP-problemet inntreffer et sted når ulikhetene er likhet, gjør om ulikhetene til likheter og løs restriksjonene x_2 sfa.[5] x_1.

b) Plott alle restriksjonene i en og samme figur.
Bruk x_2 på y-aksen og x_1 på x-aksen.

c) Skraver det området i figuren som tilferdsstiller alle restriksjonene.

d) Dette er et LP optimeringsproblem som kan løses grafisk:

i) Indiker på grafen hvor alle "hjørneløsninger".

ii) Les av alle hjørneløsninger og regn ut tilhørende inntekt i.

iii) Hvilken kombinasjon av x_1 og x_2 gir maksimal inntekt i?

[4] Du skal ikke vise dette faktum. Bare ta det for gitt.
[5] sfa. = "som funksjon av"

<u>**Løsning**</u>:

a) Gjør om ulikhetene til likheter:

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 200 \tag{2.36}$$
$$9 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 1566 \tag{2.37}$$
$$12 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 = 2880 \tag{2.38}$$

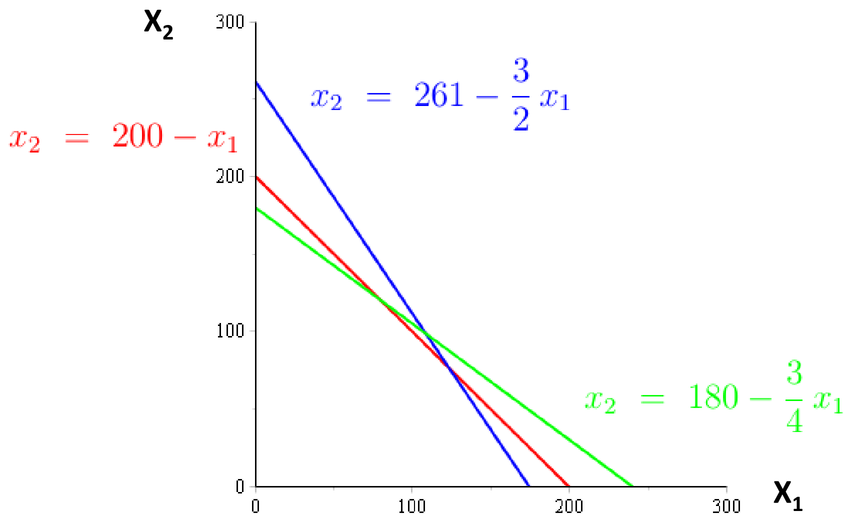
Flytter over x_1 på andre siden:

$$x_2 = 200 - x_1 \tag{2.39}$$
$$6\,x_2 = 1566 - 9\,x_1 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{6} \tag{2.40}$$
$$16\,x_2 = 2880 - 12\,x_1 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{16} \tag{2.41}$$

Løser ut x_2 alene:

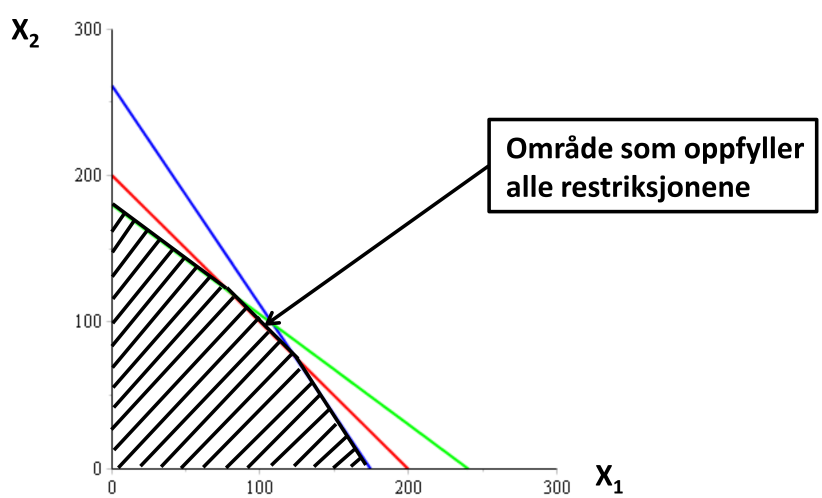
$$x_2 = 200 - x_1 \tag{2.42}$$
$$x_2 = 261 - \frac{3}{2}\,x_1 \tag{2.43}$$
$$\underline{\underline{x_2 = 180 - \frac{3}{4}\,x_1}} \tag{2.44}$$

b) $\overbrace{\text{Plotter}}^{\text{Tegner}}$ alle restriksjonene i en og samme figur:



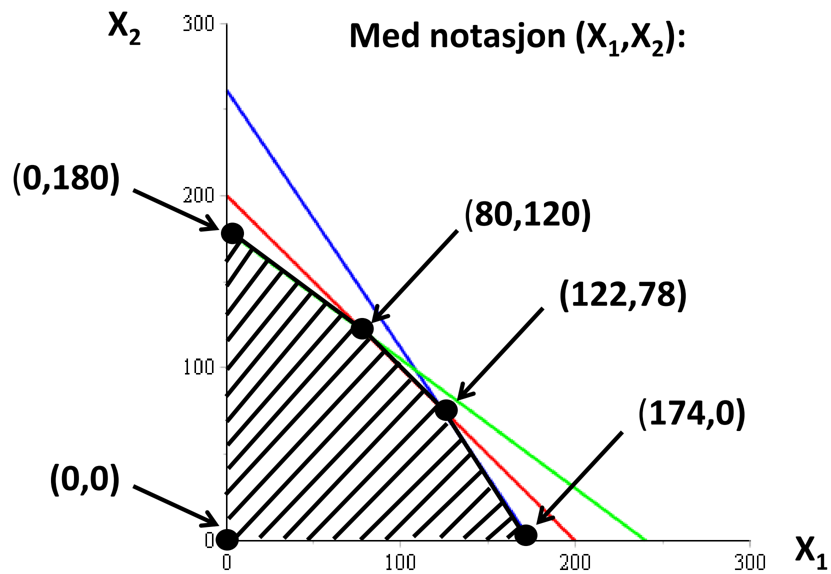
Figur 2.13: Plott av de lineære lign.(2.42)-(2.44).

c) Området i figuren som oppfyller alle restriksjonene:



Figur 2.14: Området som oppfyller alle ulikhetene lign.(2.35).

d) i) Indikerer alle "hjørneløsninger":



Figur 2.15: Totalt er det 5 hjørner, dvs. 5 hjørneløsninger.

ii) Inntekten $i \equiv i(x_1, x_2)$ ved hjørnepunktene:

$$\underline{\underline{i(0,0)}} \quad = \quad 350 \cdot 0 + 300 \cdot 0 \;=\; \underline{\underline{0}} \tag{2.45}$$

$$\underline{\underline{i(0,180)}} \quad = \quad 350 \cdot 0 + 300 \cdot 180 \;=\; \underline{\underline{54\,000}} \tag{2.46}$$

$$\underline{\underline{i(80,120)}} \quad = \quad 350 \cdot 80 + 300 \cdot 120 \;=\; \underline{\underline{64\,000}} \tag{2.47}$$

$$\underline{\underline{i(122,78)}} \quad = \quad 350 \cdot 122 + 300 \cdot 78 \;=\; \underline{\underline{66\,100}} \tag{2.48}$$

$$\underline{\underline{i(174,0)}} \quad = \quad 350 \cdot 174 + 300 \cdot 0 \;=\; \underline{\underline{60\,900}} \tag{2.49}$$

iii) Maksimal inntekt i når $\underline{\underline{x_1 = 122 \text{ og } x_2 = 78}}$: $\underline{\underline{i(122,78) \;=\; 66\,100}}$

■

2.5 Kvadratiske funksjoner (parabler)

Definisjon: (2. gradsfunksjon = parabel = kvadratisk funksjon)

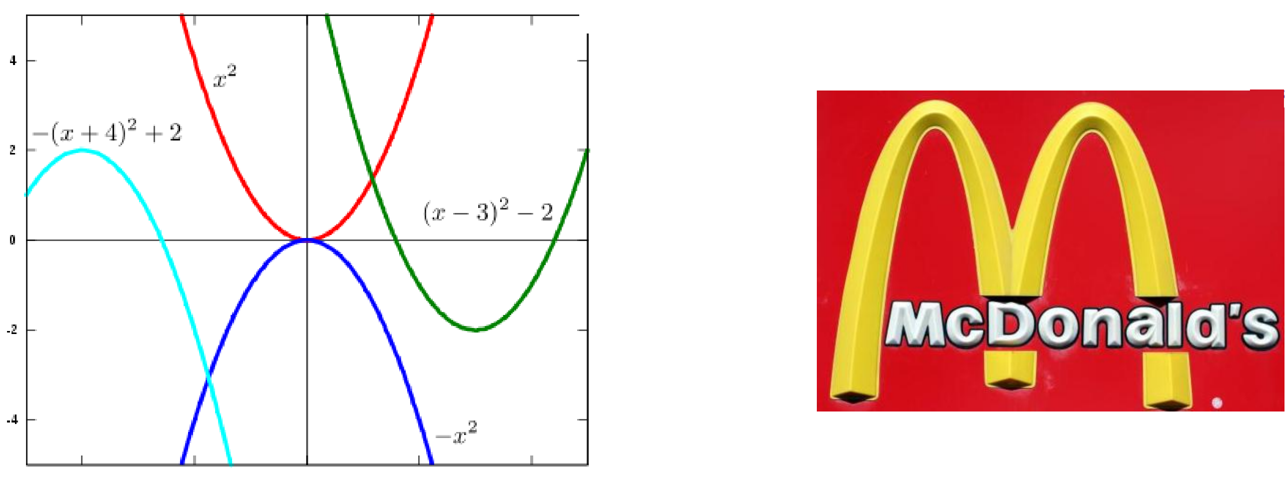
En $\overbrace{\text{2. gradsfunksjon}}^{\text{kvadratisk}}$ $y = f(x)$ har formen:

$$\boxed{f(x) \; = \; ax^2 + bx + c \qquad (2.50)}$$

hvor a, b og c er konstanter.

■

I avsnitt 1.11 på side 60 diskuterte vi hvordan man kan finne nullpunktene $f(x) = 0$ til slike kvadratiske funksjoner. Nå skal vi $\underbrace{\text{plotte}}_{\text{tegne}}$ og studere dem mer.



Figur 2.16: Kvadratiske funksjoner.

2.5.1 Noen egenskaper til kvadratiske funksjoner (parabler)

Kvadratiske funksjoner

$$f(x) \;=\; ax^2 + bx + c \tag{2.51}$$

har følgende egenskaper:

- $a > 0 \quad \Rightarrow \quad$ grafen er $\cup$-formet, "smiley face".
- $a < 0 \quad \Rightarrow \quad$ grafen er $\cap$-formet, "sad face".
- Dersom $b^2 - 4ac \geq 0$ så har $f(x)$ to nullpunkt(er), dvs. $f(x)$ skjærer x-aksen $f(x) = 0$, se figur (**??**):

$$\boxed{x_1 \;=\; \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad , \qquad x_2 \;=\; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{2.52}$$

- Dersom $b^2 - 4ac < 0$, så er det ingen nullpunkter. Vi har samtidig at:

  $a > 0:$ grafen ligger i sin helhet **over** x-aksen
  $a < 0:$ grafen ligger i sin helhet **under** x-aksen

■

Eksempel: (kvadratiske funksjoner / parabler)

Gitt de kvadratiske funksjonene:

$$f(x) = x^2 - 4x \tag{2.53}$$
$$g(x) = -x^2 + 6 \tag{2.54}$$

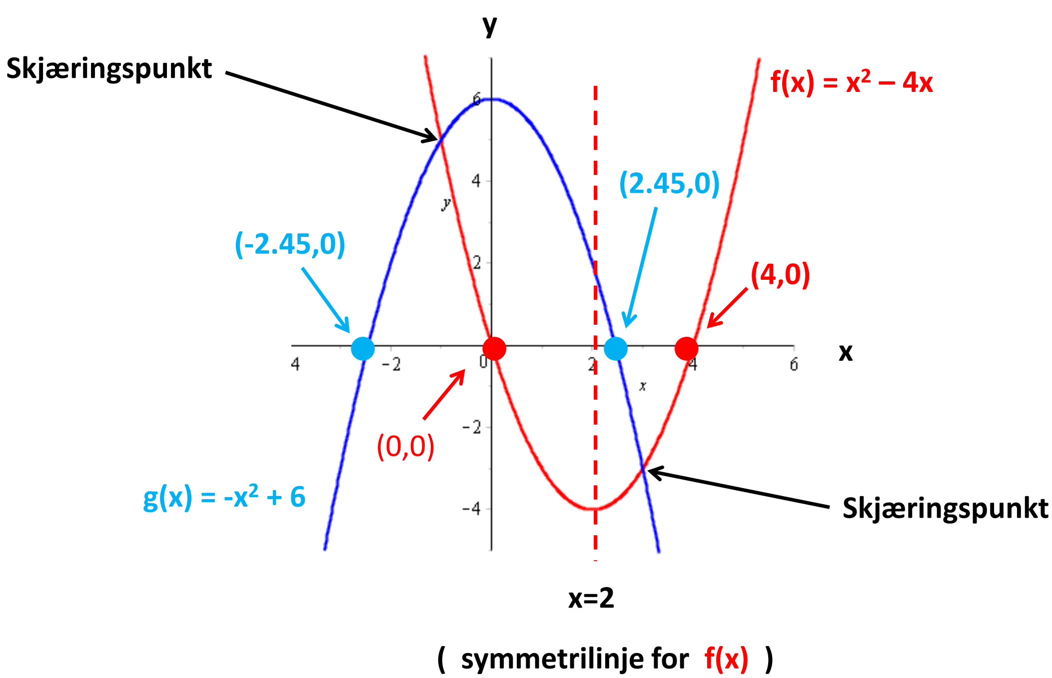
a) Plott funksjonene.

b) Finn nullpunktene til både $f(x)$ og $g(x)$. (både $\overbrace{\text{grafisk}}^{\text{lese av figuren}}$ og ved regning)

c) Finn skjæringspunkt(ene) til grafene. (både grafisk og ved regning)

Løsning:

a) Plott: [6]



Figur 2.17: Plott av parabelene $f(x) = x^2 - 4x$ og $g(x) = -x^2 + 6$.

[6] Når man plotter bør man sette opp en verditall.

Kommenterer:

- symmetri gjennom topp/bunnpunktet (se figur)
- $f(x)$ er hul $\underline{\text{opp}}$ pga. $+x^2$, dvs. $a = 1 > 0$
- $g(x)$ er hul $\underline{\text{ned}}$ pga. $-x^2$, dvs. $a = -1 < 0$

b) Nullpunkt:

Nullpunktene er bestemt av $f(x) = 0$. Disse kan finnes ved $\overbrace{\text{grafisk}}^{\text{lese av figuren}}$ løsning:

$$f(x) \;=\; 0 \;: \qquad \underline{\underline{x \;=\; 0 \;\; \text{og} \;\; x \;=\; 4}} \tag{2.55}$$

$$g(x) \;=\; 0 \;: \qquad \underline{\underline{x \;=\; -2.45 \;\; \text{og} \;\; x \;=\; 2.45}} \tag{2.56}$$

eller ved $\underline{\text{regning}}$, dvs. analytisk, (løsning av 2. gradsligning)

$$f(x) \;=\; 0: \quad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 4}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 0 \;\; \text{og} \;\; x = 4}} \tag{2.57}$$

$$g(x) \;=\; 0: \quad x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{\mp 2\sqrt{6}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -\sqrt{6} \;\; \text{og} \;\; x = \sqrt{6}}} \tag{2.58}$$

hvor $\sqrt{6} \approx 2.45$.

c) Skjæringspunkt $\color{red}{f(x)} = \color{blue}{g(x)}$:

Skjæringspunktene $f(x) = g(x)$ kan finnes ved $\overbrace{\text{grafisk}}^{\text{lese av figuren}}$ løsning:

$$\color{red}{f(x)} \quad = \quad \color{blue}{g(x)} \ : \qquad \underline{\underline{x = -1 \quad \text{og} \quad y = 5}} \quad , \quad \underline{\underline{x = 3 \quad \text{og} \quad y = -3}} \tag{2.59}$$

eller ved <u>regning</u> (løsning av 2. gradsligning)

$$\color{red}{f(x)} \ = \ \color{blue}{g(x)} \tag{2.60}$$

$$x^2 - 4x \ = \ -x^2 + 6 \tag{2.61}$$

$$2x^2 - 4x - 6 \ = \ 0 \tag{2.62}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 8}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{x = -1 \quad \text{og} \quad x = 3} \tag{2.63}$$

med tilhørende y-verdier

$$\underline{f(-1)} \quad = \quad g(-1) \ = \ -(-1)^2 + 6 \ = \underline{5} \tag{2.64}$$

$$\underline{f(3)} \quad = \quad g(3) \ = \ -3^2 + 6 \ = \underline{-3} \tag{2.65}$$

Alt i alt:

$$\underline{\underline{x = -1 \quad \text{og} \quad y = 5}} \quad , \quad \underline{\underline{x = 3 \quad \text{og} \quad y = -3}} \tag{2.66}$$

■

Eksempel: (kvadratiske funksjoner , *BØK205 Økonomistyring og regnskap*)

Du jobber som økonomisjef ved Power (selger elektronikk) på Molde Storsenter. I forbindelse med lansering og salg av iPhone 9 våren 2019 ønsker du å finne hva slags pris som er optimal for å maksimere fortjenesten. Siden du har hatt faget "*BØK105 Finansregnskap 1*" så vet du at totalt resultat TR er gitt ved:

$$\boxed{TR(x) \;=\; TI(x) \;-\; TK(x) \qquad (2.67)}$$

hvor total inntekt er

$$TI(x) \quad = \quad p\,x \tag{2.68}$$

og $TK(x)$ = total kostnad, p = pris og x= etterspørsel (antall iPhoner). Ut fra kjennskapen til markedet kan man modellere sammenhengen mellom pris og etterspørsel. Anta at denne er:

$$p(x) \;=\; 1900 \;-\; 0.4x \tag{2.69}$$

Total kostnad $TK(x)$ er kan også modelleres. Anta at denne er:

$$TK(x) \;=\; 0.75x^2 \;-150x \;+\; 85\,000 \tag{2.70}$$

Figur 2.18: Power skal lansere iPhone 9 våren 2019.

a) $\overbrace{\text{Plott}}^{\text{Tegn}}$ den totale kostnaden $TR(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 500$.

b) Hvor mange iPhoner selges når det totale resultatet $TR(x)$ maksimeres?
Løs oppgaven grafisk.

c) Hva slags pris bør Power sette på iPhone 9 for å maksimere $TR(x)$?
Løs oppgaven ved regning.

d) Hva blir det optimale resultatet?
Løs oppgaven grafisk.

Løsning:

a) Først må vi finne et eksplisitt uttrykk for totalt resultat $TR(x)$:

$$\underline{TR(x)} = TI(x) - TK(x) \tag{2.71}$$

$$= p\,x \; - \; TK(x) \tag{2.72}$$

$$= \big(1900 - 0.4x\big)\,x \; - \; \big(0.75x^2 - 150x + 85\,000\big) \tag{2.73}$$

$$= 1900x - 0.4x^2 - 0.75x^2 + 150x - 85000 \tag{2.74}$$

$$= \underline{-1.15x^2 + 2050x - 85000} \tag{2.75}$$

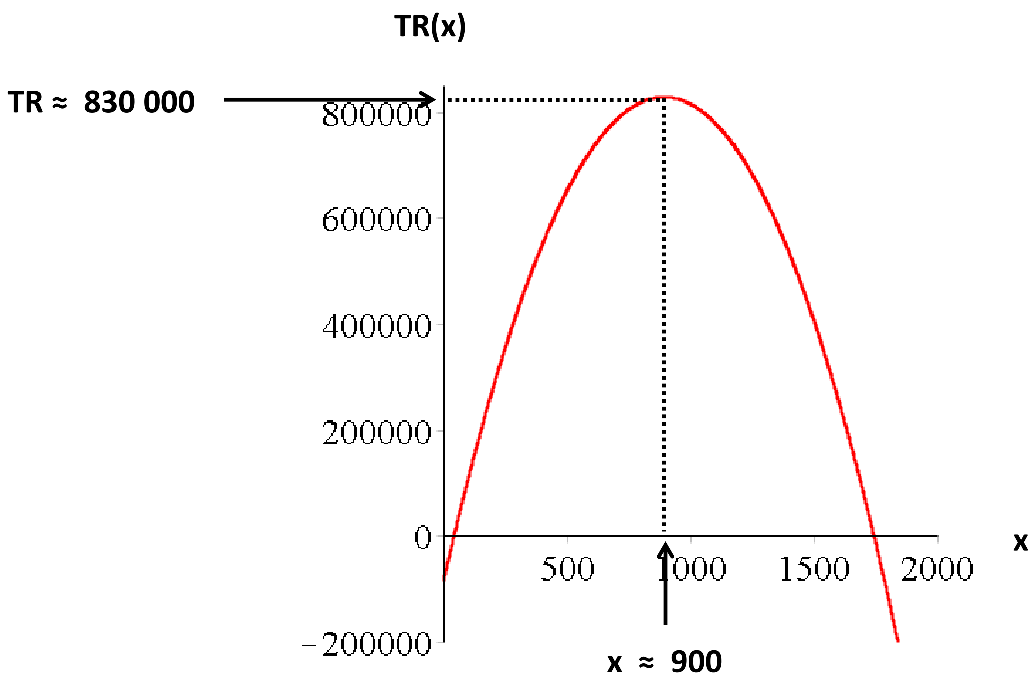
Når man skal plotte funksjoner, lag en verditabell:

x	**0**	**200**	**400**	**600**	**800**
TR(x)	**- 85 000**	**279 000**	**551 000**	**731 000**	**819 000**

x	**1 000**	**1 200**	**1 400**	**1 600**	**1 800**
TR(x)	**815 000**	**719 000**	**531 000**	**251 000**	**- 121 000**

Figur 2.19: Verditabell for $TR(x)$.

Plotter grafen:



Figur 2.20: Totalt resultat $TR(x)$.

b) Av figuren ser vi at: (grafisk løsning)
Totalt resultat $TR(x)$ maksimeres når det selges $\underline{\underline{x \approx 900}}$ stk. iPhoner. [7]

c) Maksimert resultat TR oppnås når iPhonene prises til:

$$\underline{\underline{p(900)}} = \big(1\,900 - 0.4 \cdot 900\big) \text{ NOK} = \underline{\underline{1\,540 \text{ NOK}}} \tag{2.76}$$

[7] Senere skal vi også løse denne oppgaven ved regning, dvs. algebraisk. Da finner man $x = 891.3$.

d) Av figuren ser vi at det maksimale totale resultatet TR er: [8]

$$\underline{\underline{TR(900) \ \approx \ 830\,000 \ \ \text{NOK}}} \tag{2.77}$$

■

[8]Det eksakte svaret er $TR(891.3) \ = \ 828\,587$ NOK. Dette kommer vi tilbake til senere i kompendiet når vi skal regne ut svaret analytisk, dvs. ved regning.

2.6 Rasjonale funksjoner

Definisjon: (rasjonale funksjon)

En ligning på formen

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (2.78)}$$

hvor $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer, kalles en *rasjonal* funksjon.

■

Dette er ligninger med:

- *en* ukjent x
- en brøk mellom to polynomer av generell grad n

Eksempel: (kvadratiske funksjoner , *BØK205 Økonomistyring og regnskap*)

La oss returnere til eksemplet som beskrevet på side 119.
I dette eksemplet ble kostnadsfunksjonen modellert ved lign.(2.70), dvs.:

$$TK(x) \;=\; 0.75x^2 \;-150x \;+\; 85\,000 \tag{2.79}$$

De tilhørende totale gjennomsnittlige *enhetskostnadene* $TEK(x)$ er definert ved:

$$TEK(x) \;=\; \frac{TK(x)}{x} \qquad \text{(rasjonal funksjon)} \tag{2.80}$$

Med $TK(x)$ som i lign.(2.79) så blir denne:

$$\boxed{TEK(x) \;=\; \frac{0.75x^2 \;-150x \;+\; 85\,000}{x} \qquad \text{(rasjonal funksjon)} \qquad (2.81)}$$

Figur 2.21: Power skal lansere iPhone 9 våren 2019.

a) Plott $TEK(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 500$.

b) Hvor mange iPhoner må selges for å minimere den totale gjennomsnittlige enhetskostnaden $TEK(x)$?
Løs oppgaven grafisk.

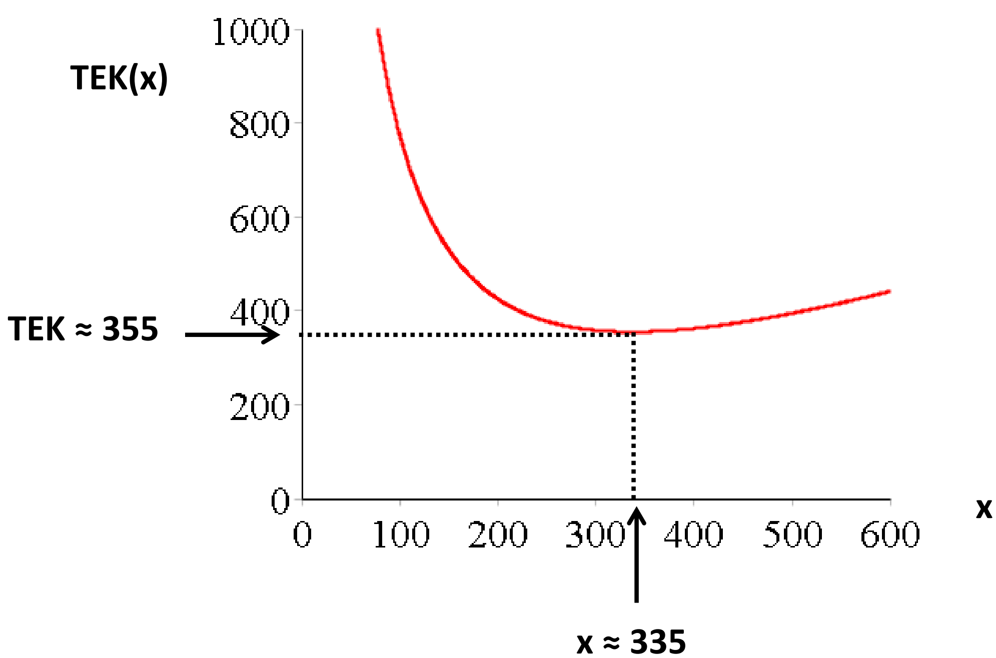
c) Hva er den tilhørende enhetskostnaden, dvs. den minste verdien for $TEK(x)$?
Løs oppgaven grafisk.

<u>**Løsning**</u>:

a) Når man skal plotte funksjoner, lag en verditabell:

x	0	50	100	150	200
TEK(x)	ulovlig	1 588	775	529	425
x	250	300	350	400	500
TEK(x)	378	358	355	363	395

Figur 2.22: Verditabell for $TEK(x) = \frac{0.75x^2-150x+85\,000}{x}$.



Figur 2.23: Total gjennomsnittlig enhetskostnad $TEK(x)$.

b) Av figuren ser vi at: (grafisk løsning)
den x som gir minst $TEK(x)$ er: $\underline{\underline{x \approx 335}}$ [9] [10]

c) Av figuren ser vi at: (grafisk løsning)
den minste $TEK(x)$ er: $\underline{\underline{TEK(355) \approx 355}}$.

■

[9]Senere skal vi også løse denne oppgaven ved regning, dvs. algebraisk. Da finner man $x = 336.7$, se lign.(3.134) side 166.

[10]Her har vi funnet minimum av $TEK(x)$ ved grafisk løsning. Senere i dette kurset og i "*BØK205 Økonomistyring og regnskap*" presenteres to andre måter å finne $TEK_{\min}$ på:
(Greier du å vise hvorfor disse to måtene å finne minimum på er ekvivalente?)

1. Den *deriverte* av $TEK(x)$ er null: $\frac{d\,TEK(x)}{dx} = 0$
2. Den *deriverte* av $TK(x)$ er lik TEK: $\frac{d\,TK(x)}{dx} = TEK(x)$

Eksempel: (nyttemaksimering , *SØK200 Mikroøkonomi*)

Du har fått sommerjobb hos Molde Taxisentral ANS. Du skal jobbe ei langhelg, fredag, lørdag og søndag, dvs. tre dager. Føringene du har fått fra din arbeidsgiver for denne arbeidshelgen er at de samlede konsumkostnader må være begrenset, maksimum m NOK. Konsumutgiftene skal dekke bensin- og matkostnader. La:

$$p \;=\; \text{pris på bensin} \quad (\text{NOK/liter}) \quad (\text{gode nr. } 1) \tag{2.82}$$

$$q \;=\; \text{pris på pølsemeny} \quad (\text{NOK/pølsemeny}) \quad (\text{gode nr. } 2) \tag{2.83}$$

Budsjettligningen (ulikheten) for arbeidshelgen blir dermed:

$$p\,x \;+\; q\,y \;\leq\; m \tag{2.84}$$

hvor $m =$ samlet konsumutgift og

$$x \;=\; \text{antall liter bensin} \quad (\text{gode nr. } 1) \tag{2.85}$$

$$y \;=\; \text{antall pølsemenyer} \quad (\text{gode nr. } 2) \tag{2.86}$$

Anta at nytten ved forbruk at bensin X (gode 1) og mat/drikke Y (gode 2) er bestemt av nyttefunksjonen: [11]

$$u(x, y) \;=\; 2x^2y \tag{2.87}$$

Figur 2.24: Taxi og Narvesen.

[11]Valget av notasjonen u er fordi "utility"=nytte.

a) Gjør om ulikheten til likhet i budsjettligningen (2.84) og vis at y sfa. x er gitt ved:

$$\boxed{y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}x \qquad (2.88)}$$

for gitt m.

b) i) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(2.88) y-aksen?

ii) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(2.88) x-aksen?

iii) Lign.(2.88) er en lineær kurve. Hva er stigningstallet?

c) For en gitt, bestemt nytte $u_0 = u(x, y)$, vis at y sfa. x i nyttefunksjonen (2.87) er gitt ved:

$$\boxed{y = \frac{u_0}{2x^2} \qquad (2.89)}$$

Denne ligningen kalles *indifferanseligningen*. [12]

Anta at prisen på bensin er $p = 10$ NOK/liter og at pølsemenyen på Narvesen koster $q = 40$ NOK. Restriksjonen du får fra vakthavende ved Molde Taxisentral er $m = 1200$ NOK for den aktuelle helgen.

d) For tallene som oppgitt:

i) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(2.88) y-aksen?

ii) For hvilken verdi skjærer linjen i lign.(2.88) x-aksen?

iii) Hva er stigningstallet?

[12] I "*SØK200 Mikroøkonomi*" lærer man at en *indifferansekurve* består av alle godekombinasjoner som gir samme, bestemte nytte U_0 for konsumenten.

e) Plott lign.(2.88) og (2.89) i èn og samme figur for tilfellene:

i) $u_0 = 55\,000$

ii) $u_0 = 128\,000$

iii) $u_0 = 250\,000$

f) Hva er den optimale kombinasjonen av bensin og pølse som gir størst nytte?
Dvs. hvilken kombinasjon av x og y gir størst nytte innenfor budsjettet?
Løs problemet grafisk. [13]

[13]Dette problemet kalles *nyttemaksimeringsproblemet* i "*SØK200 Mikroøkonomi*". Senere i dette matematikkurset skal vi lære å løse dette problemet *analytisk* ved hjelp av noe som heter Lagrangemultiplikatorer.

Løsning:

a) Gjør om ulikheten til likhet i budsjettligningen (2.84) og løser y mhp. x:

$$p\,x + q\,y = m \tag{2.90}$$

$$q\,y = m - p\,x \qquad \Big| \cdot \frac{1}{q} \tag{2.91}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}\,x}} \qquad , \quad \text{q.e.d.} \tag{2.92}$$

b) i) Linjen i lign.(2.88) skjærer y-aksen når $x = 0$:

$$y = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}\overbrace{x}^{=0} \tag{2.93}$$

$$y = \frac{m}{p} - \frac{p}{q} \cdot 0 \tag{2.94}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{m}{q}}} \tag{2.95}$$

ii) Linjen i lign.(2.88) skjærer x-aksen når $y = 0$:

$$\overbrace{y}^{=0} = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}\,x \tag{2.96}$$

$$0 = \frac{m}{\cancel{q}} - \frac{p}{\cancel{q}}\,x \qquad \Big| \cdot \cancel{q} \tag{2.97}$$

$$0 = m - p\,x \tag{2.98}$$

$$p\,x = m \qquad \Big| \cdot \frac{1}{p} \tag{2.99}$$

$$\underline{\underline{x \;=\; \frac{m}{p}}} \tag{2.100}$$

iii) Stigningstallet til den lineære lign.(2.88)

$$y \;=\; \frac{m}{q} - \frac{p}{q}\,x \tag{2.101}$$

er *koeffisienten* foran X-variabelen, dvs.:

$$\underline{\underline{\text{stigningstall} = \; - \frac{p}{q}}} \tag{2.102}$$

c) Løser y sfa. x i nyttefunksjonen (2.87) for gitt nytte $u(x, y) = u_0$:

$$\overbrace{u(x,y)}^{=u_0} \;=\; 2x^2 y \tag{2.103}$$

$$u_0 \;=\; 2x^2 y \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2x^2} \tag{2.104}$$

$$\underline{\underline{y \;=\; \frac{u_0}{2x^2}}} \qquad , \quad \text{q.e.d.} \tag{2.105}$$

d) i) Skjærer y-aksen ved:

$$\underline{\underline{y}} \;=\; \frac{m}{q} \;=\; \frac{1200\ \cancel{\text{NOK}}}{40\ \cancel{\text{NOK}}/\text{pølsemenyer}} \;=\; \underline{\underline{30\ \ \text{pølsemenyer}}} \tag{2.106}$$

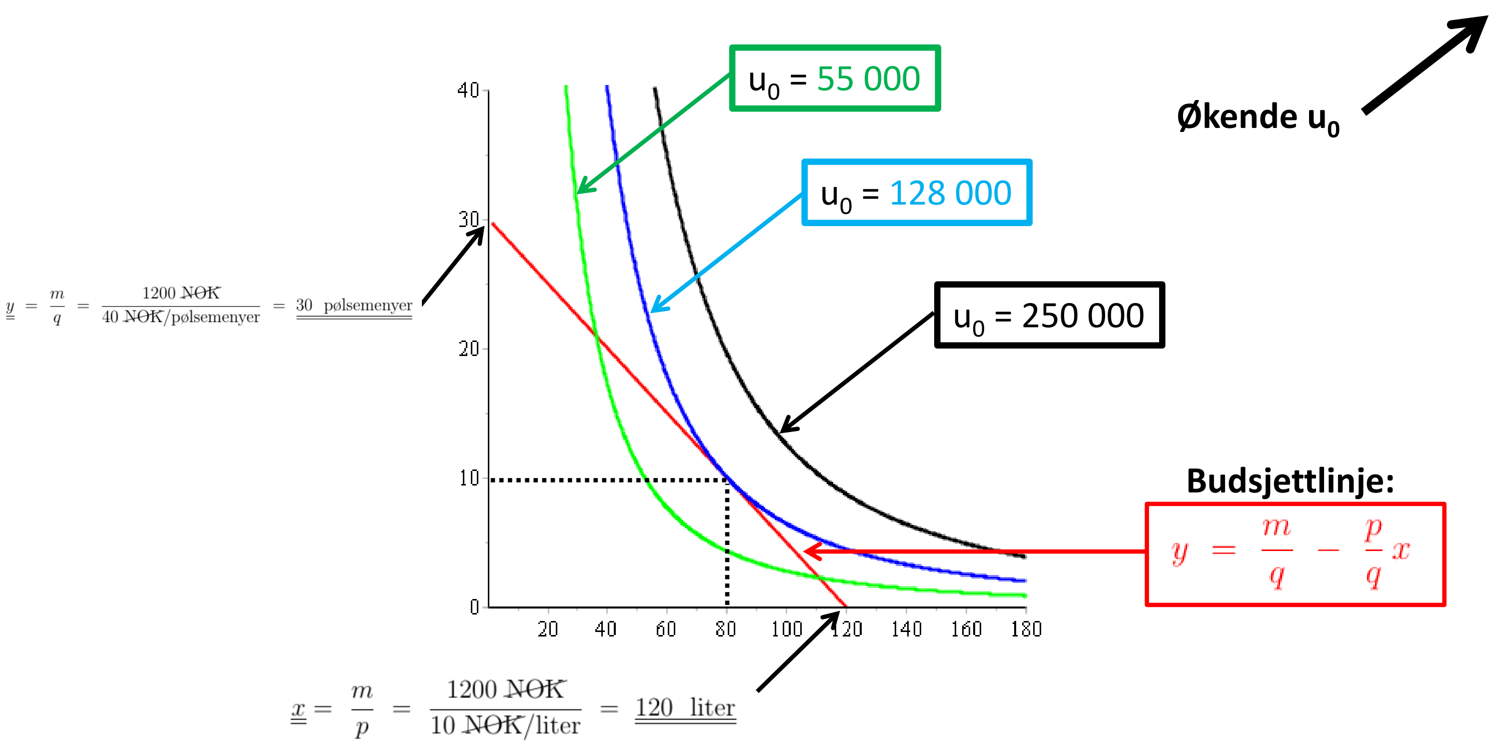
ii) Skjærer x-aksen:

$$\underline{\underline{x}} = \frac{m}{p} = \frac{1200 \ \cancel{\text{NOK}}}{10 \ \cancel{\text{NOK}}/\text{liter}} = \underline{\underline{120 \ \ \text{liter}}} \tag{2.107}$$

iii) Stigningstallet: (stigningstallet er et dimensjonsløst tall)

$$\underline{\underline{\text{stigningstall}}} = -\frac{p}{q} = -\frac{10 \ \cancel{\text{NOK}}}{40 \ \cancel{\text{NOK}}} = \underline{\underline{-0.25}} \tag{2.108}$$

e) Plotting av lign.(2.88) og (2.89):



Figur 2.25: Optimal tilpassing er når **indifferansekurven tangerer budsjettlinjen**.

Dette er et eksempel på at optimal tilpassing av en budsjettligning kan finnes ved at:

$$\boxed{\text{indifferansekurven tangerer budsjettlinjen}}$$

fordi nyttefunksjonen vokser med økende u_0.

f) Av figur (2.25) ser vi at:

$$\underline{x = 80} \tag{2.109}$$

$$\underline{y = 10} \tag{2.110}$$

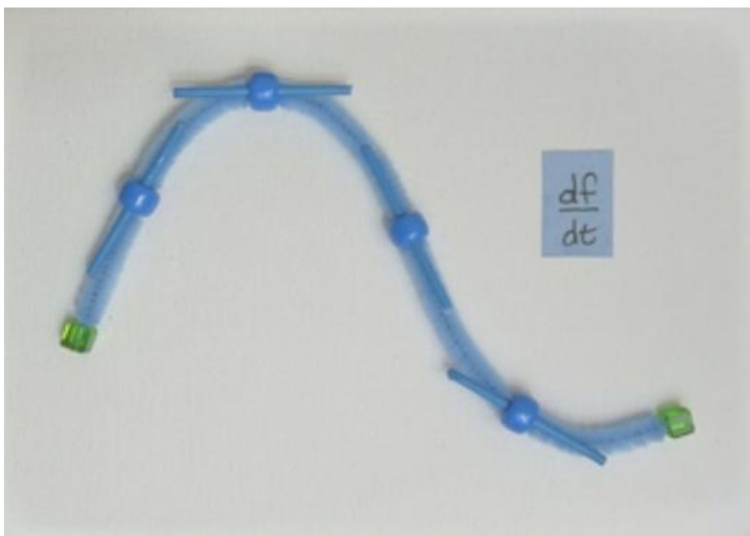
er tangeringspunktet mellom indifferansekurven og budsjettlinjen.
Med nyttefunksjonen $u(x, y) = 2x^2y$ så er det størst nytte ved å konsumere:

$$\underline{\underline{x = 80 \text{ liter bensin}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{y = 10 \text{ pølsemenyer}}}$$

■

Kapittel 3

Derivasjon



Figur 3.1: Deriverte.

3.1 Derivasjon

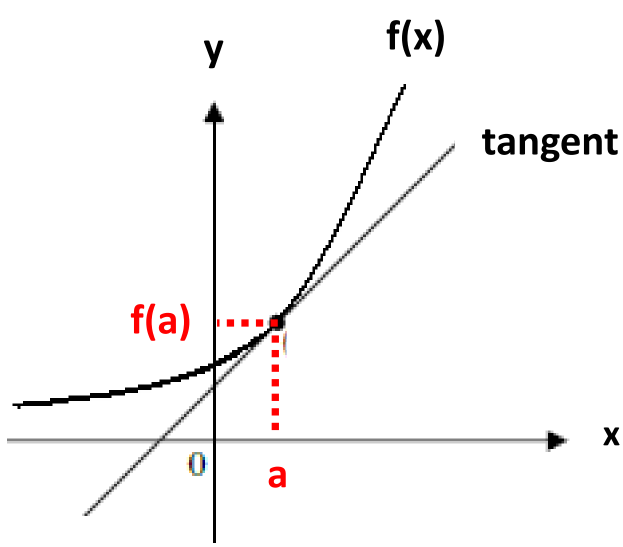
Tolkning: (deriverte, med ord) [1]

$$\frac{d\,f(a)}{dx} = \text{den deriverte til funksjonen } y = f(x) \text{ i punktet } x = a \qquad (3.1)$$

$$= \underline{\textit{stigningstallet}} \text{ til tangenten til grafen i punktet } x = a \qquad (3.2)$$

$$= \underline{\textit{stigningen}} \text{ i punktet } \ (a, f(a)) \ \text{ på grafen} \qquad (3.3)$$

■



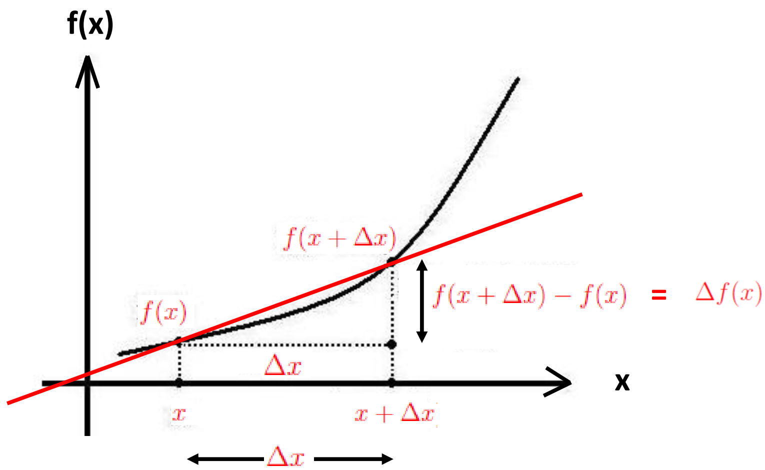
Figur 3.2: Den deriverte i punktet $x = a$, dvs. stigningstallet til tangenten i punktet $x = a$.

[1]Her i MAT100 bruker vi som oftest, men ikke alltid, $\underbrace{\text{Leibniz}}_{\frac{d\,f(x)}{dx}}$ notasjon istedet for bare $f'(x)$: $\quad f'(x) = \underbrace{\frac{d\,f(x)}{dx}}_{\text{Leibniz}}$.

Definisjon: (deriverte, teknisk) [2]

$$\boxed{\frac{d\,f(x)}{dx} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3.4)}$$

■



Figur 3.3: Gjennomsnittlig endring.

Kommenterer:

- den deriverte = en grenseverdi
- Dersom grenseverdien eksisterer i et punkt $x = a$ så sies funksjonen å være deriverbar i punktet.
- Tolkning:
  - et mål for hvor raskt funksjonen endrer seg i punktet
  - et mål for "bratthet"

[2]Her i MAT100 bruker vi som oftest, men ikke alltid $\underbrace{\text{Leibniz}}_{\frac{d\,f(x)}{dx}}$ notasjon istedet for bare $f'(x)$: $\quad f'(x) = \underbrace{\frac{d\,f(x)}{dx}}_{\text{Leibniz}}$.

3.2 Derivasjonsregler

Generell derivasjonsregl: [3] (hovedregel)

$$f(x) = ax^n \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{d\,f(x)}{dx} = n\,ax^{n-1}}_{\text{hovedregel}} \quad , \quad n \in R \tag{3.5}$$

Fra hovedregelen lign.(3.5) følger det direkte at:

$$a = 1 \text{ og } n = 1: \quad f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = 1 \tag{3.6}$$

$$a = 1 \text{ og } n = -1: \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad , \quad \text{når } x \neq 0 \tag{3.7}$$

$$a = 1 \text{ og } n = 1/2: \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad \text{når } x \neq 0 \tag{3.8}$$

Generelle derivasjonsregler: $\left(\text{bruker kortnotasjonen } f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} \right)$

$$f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \tag{3.9}$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x) \tag{3.10}$$

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) - h'(x) \tag{3.11}$$

$$f(x) = k \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k \cdot g'(x) \tag{3.12}$$

[3] Derivasjonsreglene presentert her kan utledes ved å bruke definisjonen av derivasjon i lign.(3.4). Det er litt teknisk krevende. Derfor nøyer vi oss med å kun presentere resultatene.

Eksempel:

Deriver funksjonen:

$$f(x) \;=\; 5x^3 \;+\; 7x \tag{3.13}$$

Løsning:

Deriverer $f(x)$ mhp. x:

$$\underline{\underline{\frac{d\,f(x)}{dx}}} \quad = \quad \frac{d}{dx}\Big(5x^3 + 7x\Big) \tag{3.14}$$

$$= \quad \frac{d}{dx}\,5x^3 \;\;+\;\; \frac{d}{dx}\,7x \qquad\qquad \text{(se lign.(3.10))} \tag{3.15}$$

$$= \quad 5 \cdot 3x^{3-1} \;+\; 7 \cdot 1x^{1-1} \qquad\qquad \text{(se lign.(3.5), hovedregelen)} \tag{3.16}$$

$$= \quad \underline{\underline{15x^2 \;+\; 7}} \tag{3.17}$$

hvor vi har brukt at $x^{1-1} = x^0 = 1$.

■

Eksempel: (deriverte , *BØK205 Økonomistyring og regnskap*)

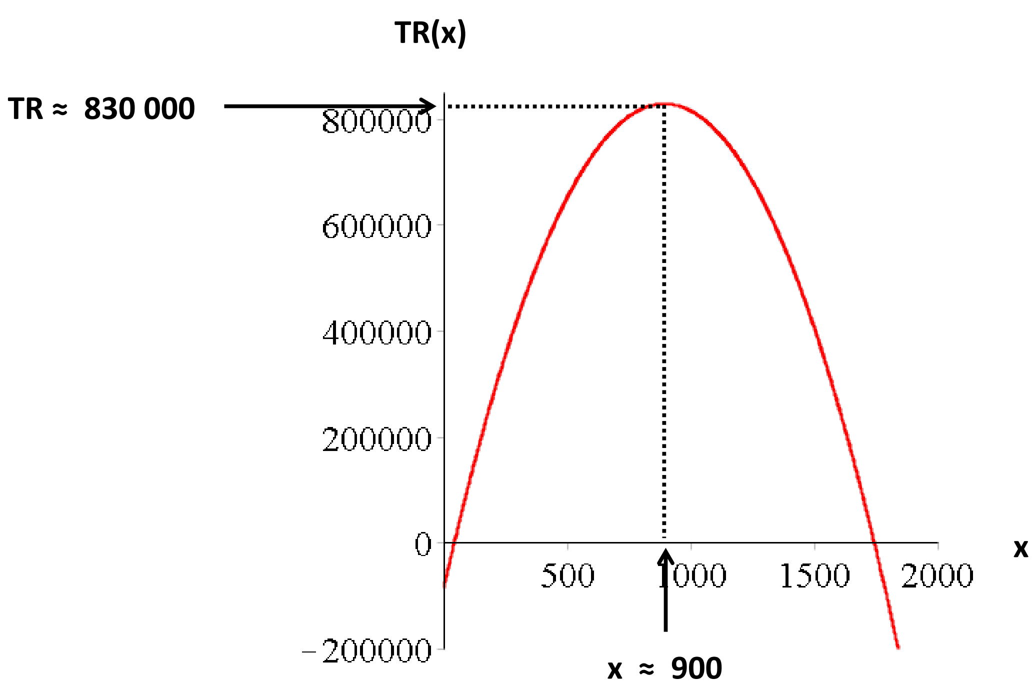
På side 121, lign.(2.75), fant vi at det totale det totale resultatet $TR(x) = TI(x) - TK(x)$ er gitt ved:

$$TR(x) \;=\; -1.15x^2 \;+2050x \;-\; 85\,000 \tag{3.18}$$

hvor $\quad x =$ antall iPhoner

Figur 3.4: Power skal lansere iPhone 9 våren 2019.

På side 121, figur 2.20, plottet vi $TR(x)$ i et koordinatsystem:



Figur 3.5: Totalt resultat $TR(x)$, se lign.(3.18).

a) Vis, helt generelt, at maksimumspunktet for $TR(x) = TI(x) - TR(x)$ inntreffer når:

$$\text{den } \underline{\text{deriverte}} \text{ av } TI(x) \quad = \quad \text{den } \underline{\text{deriverte}} \text{ av } TK(x)$$

b) Tolk resultatet i oppgave **b**.

c) Ut fra figur (3.5) ser vi at

$$TR(x) \;\; \text{er flat i maksimumspunktet} \tag{3.19}$$

dvs.

$$\frac{dTR(x)}{dx} \; = \; 0 \tag{3.20}$$

akkurat i nullpunktet. [4]

Finn verdien for x i maksimumspunktet ved hjelp av derivasjon når $TR(x)$ er gitt ved lign.(3.18).
Finn også tilhørende funksjonsverdi for $TR(x)$.

Stemmer de analytiske resultatene de grafiske avlesningene i figur 3.5?

[4] Vi skal senere i kurset lære mer om hvordan man finner ekstramelpunkt via 1. derivasjonstesten og 2. derivasjonstesten.

Løsning:

a) Den generelle definisjonen av totalt resultat er: $TR(x) = TI(x) - TR(x)$. Maksimumspunktet for $TR(x)$ inntreffer når den deriverte av $TR(x)$ er lik null:

$$\frac{d\,TR(x)}{dx} = 0 \tag{3.21}$$

$$\frac{d}{dx}\Big(TI(x) - TK(x) \Big) = 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{d\,TI(x)}{dx} - \frac{d\,TK(x)}{dx} = 0 \tag{3.23}$$

$$\underline{\underline{\overbrace{\frac{d\,TI(x)}{dx}}^{\text{grenseinntekt}} = \overbrace{\frac{d\,TK(x)}{dx}}^{\text{grensekostnad}}}} \tag{3.24}$$

Merk:

1) Legg merke til at vi i utledningen kun brukte definisjonen $TR(x) = TI(x) - TK(x)$ uten å bruke de eksplisitte uttrykkene for $TI(x)$ og $TR(x)$. Lign.(3.24) gjelder derfor helt generelt, uansett hva uttrykkene for $TI(x)$ og $TR(x)$ måtte være.

2) Økonomer kaller ofte den deriverte av inntekten for grenseinntekt:

$$\text{grenseinntekt} = \frac{d\,TI(x)}{dx} \tag{3.25}$$

3) Økonomer kaller ofte den deriverte av kostnaden for grensekostnad:

$$\text{grensekostand} = \frac{d\,TK(x)}{dx} \tag{3.26}$$

b) Tolkning:

Lign.(3.24) sier at i maksimuspunktet til $TR(x)$ er den deriverte av inntekten $TI(x)$ lik den deriverte av kostnaden $TK(x)$. [5]

Det betyr at <u>stigningstallet til inntekten $TI(x)$ og stigningstallet til kostnaden $TK(x)$ er den samme</u> akkurat i maksimumspunktet til $TR(x)$.

c) Derivasjon:
Nå skal vi bruke det eksplisitte uttrykket for $TK(x)$ gitt ved lign.(3.18).
Maksimumspunktet til $TR(x)$ inntreffer når den $\underbrace{\text{deriverte er null}}_{\frac{d\,TR(x)}{dx} \quad \text{er flat}}$:

$$\frac{d\,TR(x)}{dx} = 0 \tag{3.27}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-1.15x^2 + 2050x - 85\,000\right) = 0 \tag{3.28}$$

$$-1.15 \cdot 2x^{2-1} + 2050 \cdot 1x^{1-1} + 0 = 0 \qquad \text{(hovedregelen)} \tag{3.29}$$

$$-2.3x + 2050 = 0 \tag{3.30}$$

Løser med hensyn på x alene:

$$-2.3x + 2050 = 0 \tag{3.31}$$

$$-2.3x = -2050 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{-2.3} \tag{3.32}$$

$$\frac{\cancel{-2.3x}}{\cancel{-2.3}} = -\frac{2050}{-2.3} \tag{3.33}$$

$$\underline{\underline{x = 891.3}} \tag{3.34}$$

[5]Øknomer sier i denne siuasjonen, i maksimumspunktet for $TR(x)$, at grenseinntekten = grensekostnaden.

Tilhørende funksjonsverdi for $TR(x)$:

$$\underline{\underline{TR(891.3)}} = \Big(-1.15891.3^2 + 2050 \cdot 891.3 - 85\,000 \Big) \text{ NOK} = \underline{\underline{828\,587 \text{ NOK}}} \quad (3.35)$$

Ja, de grafiske avlesningene i figur 3.5

$$x = 900 \text{ iPhoner} \quad \text{og} \quad TR(900) \approx 830\,000 \text{ NOK} \quad (3.36)$$

stemmer bra med de analytiske resultatene

$$x = 891.3 \text{ iPhoner} \quad \text{og} \quad TR(891.3) \approx 828\,587 \text{ NOK} \quad (3.37)$$

PS:

For å være sikre på at vi har med et maksimumspunkt å gjøre så må vi utføre 2. derivasjonstesten. Den testen skal vi lære mer om senere, i kapittel 3.8.

■

Eksempel: (derivasjon / *SCM200 Lager- og produksjonsstyring* / EOQ modellen)

I emnene *BØK300 Finansiell og økonomisk styring* og *SCM200 Lager- og produksjonsstyring* lærer man blant annet om lagerstyring. Man lærer at det koster penger å ha varer på lager.

Den totale kostnaden $c(x)$ per år forbundet med $\overbrace{\text{lager-}}^{=h}$ og $\overbrace{\text{ordrekostnader}}^{=s}$ er: [6]

$$\boxed{c(x) \;=\; d\,c \;+\; \underbrace{\frac{x}{2}\,h}_{\text{lagerkost.}} \;+\; \underbrace{\frac{d}{x}\,s}_{\text{ordrekost.}} \qquad (3.38)}$$

hvor [7]

$$d \;=\; \text{etterspørsel per år} \qquad (\text{“demand”}) \qquad (3.39)$$
$$c \;=\; \text{innkjøpspris per enhet} \qquad (3.40)$$
$$x \;=\; \text{ordrestørrelse} \qquad (\text{“quantity”}) \qquad (3.41)$$
$$h \;=\; i\,c \;=\; \text{lagerkostnader per enhet per år} \qquad (3.42)$$
$$i \;=\; \text{lagerrente} \qquad (3.43)$$
$$s \;=\; \text{ordrekostnad, dvs. kostnad per ordre} \qquad (3.44)$$

Leddene i lign.(3.38) har en direkte økonomisk tolkning:

$$d\,c \;=\; \text{kostnad forbundet med etterspørsel per år} \qquad (3.45)$$
$$\frac{x}{2}\,h \;=\; \text{lagerkostnader} \qquad (3.46)$$
$$\frac{d}{x}\,s \;=\; \text{ordrekostnader} \qquad (3.47)$$

Legg merke til at lagerkostnaden $\frac{x}{2}\,h$ øker med økende ordrestrørrelse x, mens ordrekostnaden $\frac{d}{x}s$ minker med økende ordrestrørrelse x.

[6] Lign.(3.38) gjelder kun under visse betingelser. Det skal dere lære mer om i emnet *SCM200 Lager- og produksjonsstyring*.

[7] Her er: x = variabel og de andre størrelsene er parametre.

Anta at du er innkjøpsansvarlig hos Oshaug Metall A/S i Molde. I den sammenheng skal du gjøre innkjøp av metall som råvare til de støpte emnene for propellkomponenter som Oshaug Metall produserer. En typisk pris for den metalltypen som Oshaug bruker er 29 NOK/kg. Anta videre at Oshaug trenger 730 kg/år. Lagerrenten for Oshaug Metall er 15 % og kostnaden per ordre er 450 NOK:

$$d = 730 \text{ kg/år} \tag{3.48}$$
$$c = 29 \text{ NOK/kg} \tag{3.49}$$
$$i = 15 \text{ \%} \tag{3.50}$$
$$s = 450 \text{ NOK} \tag{3.51}$$

a) $\overbrace{\text{Plott}}^{\text{tegn}}$ den totale kostnaden $c(x)$ fra lign.(3.38) for intervallet $100 \leq x \leq 1200$.

b) i) Hvor mange kg metall bør Oshaug Metall A/S bestille for å minimere den totale kostnaden $c(x)$ per år?
Løs oppgaven grafisk.

ii) Hva er den tilhørende totale lagerkostnaden per år for Oshaug Metall A/S?
Løs oppgaven grafisk.

Figur 3.6: Oshaug Metall A/S.

c) Vis at det antall kg metall som Oshaug Metall må bestille for å *minimere* den totale årlige kostnaden $c(x)$, inntreffer når:

$$\boxed{\frac{x}{2}h \quad = \quad \frac{d}{x}s \qquad\qquad\qquad (3.52)}$$

d) Hva betyr lign.(3.52) i økonomisk sammenheng?
Har kostnaden $d\,c$ noen betydning for dette optimum?
Begrunn svaret.

e) Vis at lign.(3.52) er <u>den samme som</u> den velkjente "EOQ"-formelen i lagerstyring:

$$\boxed{x^* \quad = \quad \sqrt{\frac{2ds}{h}} \qquad\qquad\qquad (3.53)}$$

f) Løs oppgave **b** ved <u>regning</u>.
Svarene skal selvfølgelig stemme overens. Gjør de det?

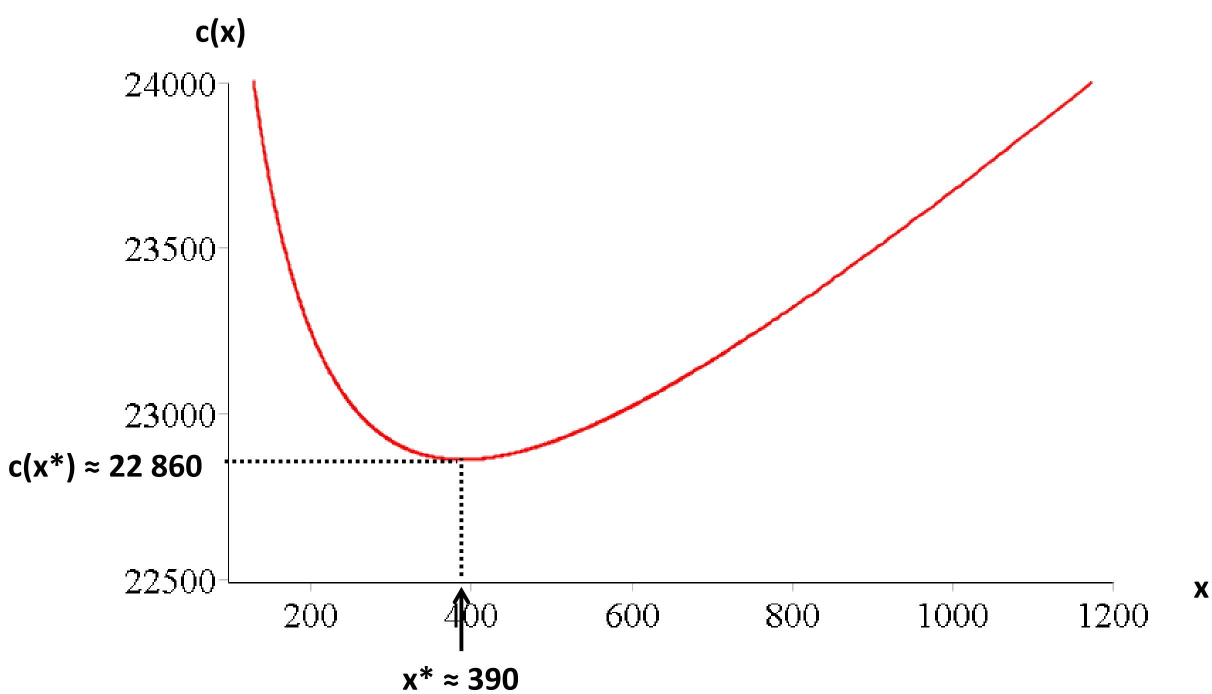
Løsning:

a) Når man skal plotte en funksjon, lag en verditabell:

x	100	200	300	400	500	600
c(x)	24 673	23 248	22 918	22 861	22 915	23 023

700	800	900	1000	1100	1200
23 162	23 321	23 493	23 674	23 861	24 054

Figur 3.7: Verditabell for $c(x)$.



Figur 3.8: Total kostnad $c(x)$ per år.

b) i) Fra figuren ser vi at den minste kostnaden $c(x)$ per år oppnås ved bestilling av: $\underline{\underline{x^* \ \approx \ 390 \ \text{ kg metall}}}$ per gang.

ii) Fra figuren ser vi at den minste kostnaden $c(x)$ per år er: $\underline{\underline{c(x^*) \ \approx \ 22\,860 \ \text{ NOK}}}$. [8]

c) Mimimum av total kostnad $c(x)$ inntreffer når stigningstallet $= 0$:

$$\text{stigningstallet til } \ c(x) \quad = \quad 0 \tag{3.54}$$

$$\frac{d\,c(x)}{dx} \quad = \quad 0 \tag{3.55}$$

$$\frac{d}{dx}\left(d\,c + \frac{x}{2}\,h + \frac{d}{x}s \right) \quad = \quad 0 \tag{3.56}$$

$$\frac{d}{dx}\left(d\,c + \frac{x}{2}\,h + d\,x^{-1}\,s \right) \quad = \quad 0 \qquad \text{(kjelleromskriving)} \tag{3.57}$$

$$(\ \text{NB:} \quad \text{Siden } \frac{d\,d\,c}{dx} = 0 \ \text{ så påvirker ikke } \ d\,c \ \text{ minimum av } c(x)\ ) \tag{3.58}$$

$$\frac{h}{2} + d\,(-1)x^{-1-1}s \quad = \quad 0 \tag{3.59}$$

$$\frac{h}{2} - \frac{d}{x^2}\,s \quad = \quad 0 \tag{3.60}$$

$$\frac{h}{2} \quad = \quad \frac{d}{x^2}\,s \qquad \Big| \cdot x \tag{3.61}$$

$$\underline{\underline{\frac{x}{2}\,h \ = \ \frac{d}{x}\,s}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{3.62}$$

[8] Når man bare leser av grafen så er det ikke så lett å få akkurat rett svar pga. avlesningsfeil. Men det er tilstrekkelig at avlesningen er i nærheten av det riktige svaret.

d) Lagerkostnaden er $xh/2$ og ordrekostnaden er ds/x.
Lign.(3.62) betyr da at totalkostnaden er minst når lagerkostnaden og ordekostnaden er like.

Siden

$$\frac{d\,dc}{dx} \;=\; 0 \tag{3.63}$$

så påvikrer ikke kostnaden dc minimum i lign.(3.62).

e) Ut fra lign.(3.62) kan vi løse ut Q alene:

$$\frac{x}{2}\,h \;=\; \frac{d}{x}\,s \qquad \Big|\cdot x \tag{3.64}$$

$$\frac{x^2}{2}\,h \;=\; d\,s \qquad \Big|\cdot \frac{2}{h} \tag{3.65}$$

$$x^2 \;=\; \frac{2d\,s}{h} \tag{3.66}$$

$$\underline{\underline{x^* \;=\; \sqrt{\frac{2\,ds}{h}}}} \qquad , \quad \text{q.e.d.} \tag{3.67}$$

hvor sammenhengen $h = ic$ og hvor notasjonen x^* er introdusert for optimal x.

f) Den minste kostnaden c_{min} per år oppnås ved bestilling av:

$$\underline{\underline{x^*}} = \sqrt{\frac{2d\,s}{i\,c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 730 \cdot 450}{0.15 \cdot 29}} = 388.63 \approx \underline{\underline{389}} \tag{3.68}$$

x^* innsatt i lign.(3.38): (bruker at $h = ic$)

$$\underline{\underline{c(x^*)}} = d \cdot c + \frac{x^*}{2}\, ic + \frac{d}{x^*} s \tag{3.69}$$

$$= \left(730 \cdot 29 + \frac{388.63}{2}\, 0.15 \cdot 29 + \frac{730}{388.63} \cdot 450 \right) \text{NOK} \tag{3.70}$$

$$= \underline{\underline{22\,860.55 \text{ NOK}}} \tag{3.71}$$

Ja, den grafiske løsningen og den analytiske løsningen gir tilnærmet <u>samme svar</u>, slik som det skal.

■

Eksempel: (derivasjon , priselastisitet , *BØK105 Finansregnskap 1*)

Blant annet i emnet "*BØK105 Finansregnskap 1*" vil man lære om elastisitet.
Det finnes mange typer elastisiteter, f.eks. priselastistitet.
Priselastisitet $E_p(x)$ er definert ved:

$$\boxed{E_p(x) \ = \ \frac{d\,x(p)}{dp}\,\frac{p}{x(p)} \qquad (3.72)}$$

hvor

$$p \ = \ \text{pris} \tag{3.73}$$

$$x(p) \ = \ \text{en størrelse som varierer med prisen} \tag{3.74}$$

$$\frac{d\,x(p)}{dp} \ = \ \text{den deriverte av } x(p) \text{ med hensyn til prisen } p \tag{3.75}$$

Størrelsen $x(t)$ kan f.eks. være etterspørselen av en vare.

Den momentane priselastisiteten i lign.(3.72) kan tolkes som det momentane forholdet mellom endringen i etterspørsel og endringen i pris:

$$E_p(x) \ = \ \frac{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}{\text{\%-vis endring i pris}} \tag{3.76}$$

Flybussen A/S har leid inn studenter ved Høgskolen i Molde og funnet ut at sammenheng mellom etterspørsel av flybussbilletter og pris p er:

$$x(p) = \frac{c}{p^{1.3}} \tag{3.77}$$

hvor $c =$ en konstant. Anta at $c = 35$ NOK$^{1.3}$.

Figur 3.9: Flybussen i Molde.

a) Finn priselasitsiteten $E_p(x)$.

b) Tolk resultatet i oppgave **a**.

c) Hvor mye vil etterspørselen av bussreiser endre seg med dersom prisen øker med 2.5 %?

d) Spiller konstanten $c = 35$ NOK noen rolle i denne oppgaven?

Løsning:

a) Priselasitsiteten $E_p(x)$ finnes via lign.(3.72):

$$\underline{\underline{E_p(x)}} \overset{\text{Eq.(3.72)}}{=} \frac{d\,x(p)}{dp} \cdot \frac{p}{x(p)} \tag{3.78}$$

$$= \frac{d}{dp}\left(\frac{c}{p^{1.3}}\right) \cdot \frac{p}{\frac{c}{p^{1.3}}} \tag{3.79}$$

$$= \frac{d}{dp}\left(c \cdot p^{-1.3}\right) \cdot \frac{p \cdot p^{1.3}}{c} \tag{3.80}$$

$$= \left(\cancel{c} \cdot (-1.3) \cdot \cancel{p^{-1.3-1}}\right) \cdot \frac{\cancel{p^{1+1.3}}}{\cancel{c}} \tag{3.81}$$

$$= \underline{\underline{-1.3}} \tag{3.82}$$

b) Siden

$$E_p(x) = \frac{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}{\text{\%-vis endring i pris}} \tag{3.83}$$

så ser vi at:

$$\underline{\text{\%-vis endring i etterspørsel}} = E_p(x) \cdot \text{\%-vis endring i pris} \tag{3.84}$$

$$= \underline{(-1.3) \cdot \text{\%-vis endring i pris}} \tag{3.85}$$

som gir tolkningen:

Dersom billettprisen p øker med 1 % så vil <u>etterspørselen etter bussbilletter minke med 1.3 %</u>

c) Siden

$$E_p(x) = \frac{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}{\text{\%-vis endring i pris}} \tag{3.86}$$

så ser vi at:

$$\underline{\underline{\text{\%-vis endring i etterspørsel}}} = E_p(x) \cdot \overbrace{\text{\%-vis endring i pris}}^{2.5\ \%} \tag{3.87}$$

$$= (-1.3) \cdot 2.5\ \% \tag{3.88}$$

$$= \underline{\underline{-3.25\ \%}} \tag{3.89}$$

d) I oppgave **a** ser vi at konstanten c kansellerer.
Priselastistiteten er altså u̲avhengig av c.

Dermed innser vi at c ikke spiller noen rolle i denne oppgaven.

■

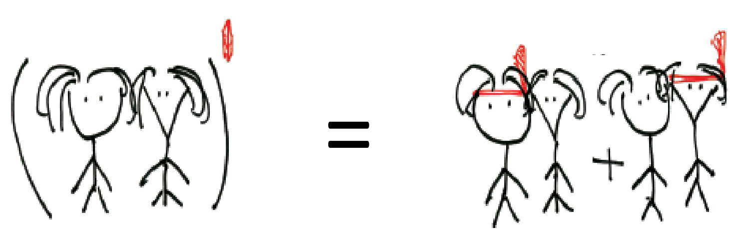
3.3 Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner

Generelle derivasjonsregler: (produkt- og brøkfunksjoner)

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= u \cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'v + uv' \qquad (3.90) \\ f(x) &= \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (3.91) \end{aligned}}$$

Dette kan også skrives på følgende ekvivalente form:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \qquad (3.92) \\ f(x) &= \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \qquad (3.93) \end{aligned}}$$



Figur 3.10: Regneregelen i lign.(3.90) kan huskes via "indianerfjærhuskeregelen".

Eksempel: (derivasjon av et produkt)

Gitt funksjonen:

$$f(x) \;=\; (4x-3)(3x+2) \tag{3.94}$$

a) Deriver $f(x)$ via produktregelen.

b) Deriver $f(x)$ ved først å multiplisere ut parentesene.

Løsning:

a) Deriver $f(x)$ via produktregelen:

$$\underline{\underline{f'(x)}} \;=\; \frac{d\,f(x)}{dx} \tag{3.95}$$

$$= \;\overbrace{(4x-3)}^{u}\,\overbrace{(3x+2)}^{v} \tag{3.96}$$

$$= \;(uv)' \;=\; u'v + uv' \qquad \text{(produktregelen)} \tag{3.97}$$

$$= \;(4x-3)'(3x+2) \;+\; (4x-3)(3x+2)' \tag{3.98}$$

$$= \;4(3x+2) \;+\; (4x-3)3 \tag{3.99}$$

$$= \;12x+8 \;+\; 12x-9 \tag{3.100}$$

$$= \;\underline{\underline{24x-1}} \tag{3.101}$$

b) Multiplisere ut parentesene:

$$\underline{f(x)} = (4x-3)(3x+2) \tag{3.102}$$

$$= 4x \cdot 3x + 4x \cdot 2 - 3 \cdot 3x - 3 \cdot 2 \tag{3.103}$$

$$= 12x^2 + 8x - 9x - 6 \tag{3.104}$$

$$= \underline{12x^2 - x - 6} \tag{3.105}$$

Nå kan man derivere via regneregelen i lign.(3.5):

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{d\,f(x)}{dx} \tag{3.106}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(12x^2 - x - 6\right) \tag{3.107}$$

$$= 12 \cdot 2x^{2-1} - 1 \tag{3.108}$$

$$= \underline{\underline{24x - 1}} \tag{3.109}$$

altså samme svar som i oppgave **a**, lign.(3.101).

■

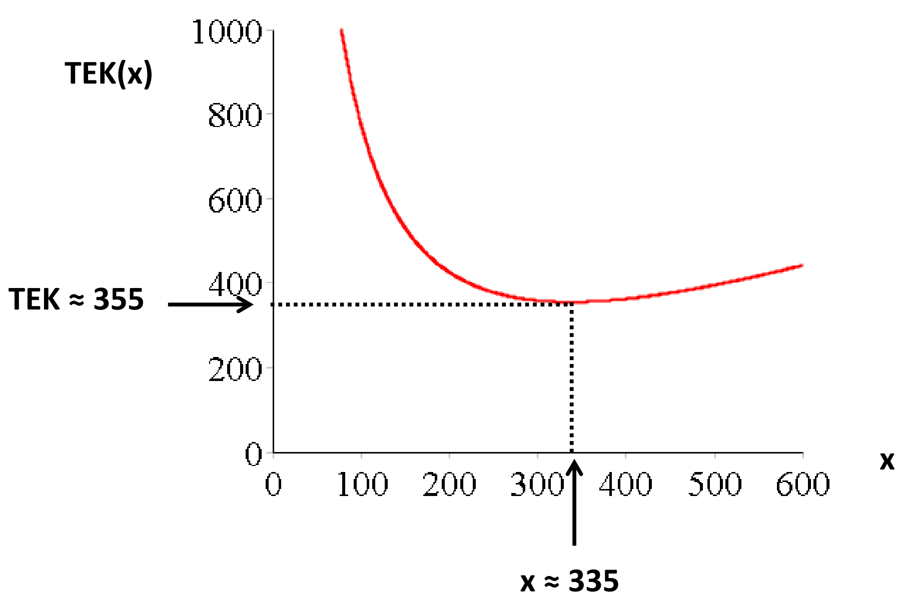
Eksempel: (deriverte , *BØK205 Økonomistyring og regnskap*)

La oss se på eksempelet fra side 125.
I dette eksempelet var den totale enhetskostnaden modellert ved: (se lign.(2.81))

$$TEK(x) = \frac{TK(x)}{x} = \frac{0.75x^2 - 150x + 85\,000}{x} \tag{3.110}$$

hvor x = antall solge iPhoner.

Figur 3.11: Power skal lansere iPhone 9 våren 2019.



Figur 3.12: Total enhetskostnad $TEK(x)$, se lign.(3.110).

a) Vis, helt generelt, at bunnunktet for $TEK(x) = \frac{TK(x)}{x}$ inntreffer når:

$$\frac{dTK(x)}{dx} = TEK(x)$$

b) Finn verdien til x i minimumspunktet for $TEK(x)$ når enhetskostnaden er gitt ved lign.(3.110).

c) La oss sammenligne x-verdiene vi har funnet i dette eksemplet og de to foregående eksemplene.

Er antall iPhoner som Power må selge for å minimere $TK(x)$, maksimere $TR(x)$ og minimere $TEK(x)$ sammenfallende?

Begrunn svaret.

Løsning:

a) Som oppgitt i oppgaveteksten, definisjonen av enhetskostnaden er: [9]

$$TEK(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{TK(x)}{x} \tag{3.111}$$

Minimumspunktet for $TEK(x)$ inntreffer når den deriverte av $TEK(x)$ er lik null:

$$\frac{d\,TEK(x)}{dx} = 0 \tag{3.112}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{TK(x)}{x}\right) = 0 \tag{3.113}$$

$$\frac{d}{dx}\Big(TK(x)\,x^{-1}\Big) = 0 \tag{3.114}$$

("kjelleromskriving" og deretter derivasjon av et produkt)

$$\frac{d\,TK(x)}{dx}\,x^{-1} + TK(x)\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = 0 \tag{3.115}$$

$$\frac{d\,TK(x)}{dx}x^{-1} + TK(x)(-1)x^{-2} = 0 \tag{3.116}$$

$$\underline{x^{-1}\left(\frac{d\,TK(x)}{dx} - \overbrace{TK(x)\,x^{-1}}^{=\,TEK(x)}\right)} = 0 \tag{3.117}$$

[9]Se f.eks. også lign.(3.110).

Men siden $TK(x)\, x^{-1} = \frac{TK(x)}{x} = TEK(x)$ så kan lign.(3.117) skrives

$$\frac{dTEK(x)}{dx} \;=\; \frac{1}{x} \underbrace{\left(\frac{dTK(x)}{dx} \;-\; TEK(x) \right)}_{=\;0} \;=\; 0 \tag{3.118}$$

Fra lign.(3.118) ser vi at:

$$\underline{\underline{\frac{dTK(x)}{dx} \;=\; TEK(x)}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{3.119}$$

<u>Merk</u>:

Legg merke til at vi i utledningen kun brukte definisjonen $TEK(x) = \frac{TK(x)}{x}$ uten å bruke det eksplisitte uttrykket for $TK(x)$. Lign.(3.119) gjelder derfor <u>helt generelt</u>, uansett hva uttrykkene for $TI(x)$ og $TR(x)$ måtte være.

b) Derivasjon:
Nå skal vi bruke det eksplisitte uttrykket for $TEK(x)$ gitt ved lign.(3.110).
Minimumspunktet til $TEK(x)$ inntreffer når den deriverte er null:

$$\frac{d\,TEK(x)}{dx} = 0 \tag{3.120}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{0.75x^2 \; - 150x \; + \; 85\,000}{x}\right) = 0 \tag{3.121}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{0.75x^2}{x} - \frac{150x}{x} + \frac{85\,000}{x}\right) = 0 \tag{3.122}$$

$$\frac{d}{dx}\left(0.75x \; - 150 \; + \; 85\,000\,x^{-1}\right) = 0 \quad \text{(kjelleromskriving)} \tag{3.123}$$

$$0.75 \cdot 1x^{1-1} - 0 + 85\,000 \cdot (-1)x^{-1-1} = 0 \quad \text{(hovedregel)} \tag{3.124}$$

$$0.75 - 85\,000x^{-2} = 0 \tag{3.125}$$

hvor vi i lign.(3.123) har gjort "kjelleromskrivingen":

$$\frac{85\,000}{x} = 85\,000\,x^{-1} \qquad \text{(kjeller)} \tag{3.126}$$

fordi det da er lettere å bruke derivasjonsregelen $\underbrace{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}_{\text{hovedregel}}$. [10]

[10] Man kan også derivere $TEK(x)$ ved hjelp av derivasjon av en brøk. Derivasjon av en brøk skal vi lære mer om senere, i seksjon 3.3.

Løser med hensyn på x alene:

$$0.75 - 85\,000x^{-2} = 0 \tag{3.127}$$

$$0.75 = 85\,000x^{-2} \tag{3.128}$$

$$0.75 = \frac{85\,000}{x^2} \qquad \Big| \cdot x^2 \tag{3.129}$$

$$0.75x^2 = \frac{85\,000}{\cancel{x^2}}\cancel{x^2} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{0.75} \tag{3.130}$$

$$x^2 = \frac{85\,000}{0.75} \tag{3.131}$$

Ta kvadratroten på begge sider av ligningen:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{85\,000}{0.75}} \tag{3.132}$$

$$x = \sqrt{\frac{85\,000}{0.75}} \tag{3.133}$$

$$\underline{x = 336.7} \tag{3.134}$$

For å minimere enhetskostanden $TEK(x)$ må Power selge $\underline{\underline{337\text{ iPhoner}}}$.

c) Fra oppgave **b** på forrige side samt eksempelet på side 142 ser vi at:

$$TR_{max} \overset{\text{lign.(3.34)}}{\Rightarrow} x = 891.3 \;\; \text{iPhoner} \tag{3.135}$$

$$TEK_{min} \overset{\text{lign.(3.134)}}{\Rightarrow} x = 336.7 \;\; \text{iPhoner} \tag{3.136}$$

Altså:
For å maksimere <u>resultatet</u> $TR(x)$ må Power selge $x = 891$ iPhoner.
For å minimere <u>enhetskostnaden</u> $TEK(x)$ må Power selge $x = 337$ iPhoner.

Konklusjon:

maksimalt resultat $TR(x)$ og minimal enhetskostnad $TEK(x)$

<u>er **ikke** sammenfallende</u>

dvs. de inntreffer <u>ikke</u> for samme verdi av x.

■

Eksempel: (derivasjon , *BØK205 Økonomistyring og regnskap*)

La oss igjen se på den totale enhetskostnad $TEK(x)$ fra side 161, lign.(3.110):

$$\underline{TEK(x)} = \frac{TK(x)}{x} = \underbrace{\frac{0.75x^2 \ - 150x \ + \ 85\,000}{x}}_{\text{form 1}} = \underbrace{0.75x \ - 150 \ + \ \frac{\overbrace{85\,000}^{= \ 85\,000 \cdot x^{-1}}}{x}}_{\text{form 2}} \tag{3.137}$$

På side 165 deriverte vi denne ligningen ved å bruke "form 2". Det gav oss svaret i lign.(3.125). Bruk nå "form 1" deriverte av $TEK(x)$ mhp. x, dvs. finn $\frac{dTEK(x)}{dx}$.

Løsning:

Deriverer $TEK(x)$ mhp. x:

$$\underline{\underline{TEK'(x) \ = \ \frac{dTEK(x)}{dx}}} \ = \ \frac{d}{dx}\left(\frac{0.75x^2 \ + 150x \ + \ 85\,000}{x}\right) \tag{3.138}$$

$$= \ \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \ = \ \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{3.139}$$

$$= \ \frac{\left(0.75x^2 + 150x + 85\,000\right)' x - \left(0.75x^2 + 150x + 85\,000\right) x'}{x^2} \tag{3.140}$$

$$= \ \frac{\left(0.75 \cdot 2x^{2-1} + 150\right) x - \left(0.75x^2 + 150x + 85\,000\right) \cdot 1}{x^2} \tag{3.141}$$

$$= \ \frac{1.5x^2 + \cancel{150x} - 0.75x^2 - \cancel{150x} - 85\,000}{x^2} \tag{3.142}$$

$$= \ \frac{0.75x^2 - 85\,000}{x^2} \tag{3.143}$$

$$= \ \underline{\underline{0.75 - \frac{85\,000}{x^2}}} \tag{3.144}$$

altså samme svar som lign.(3.125) på side 165, selvfølgelig.

■

3.4 Kjerneregelen

Setning: (kjerneregelen)

Dersom vi har en sammensatt funksjon

$$f(x) \;=\; g(\,u(x)\,) \tag{3.145}$$

hvor

$$u \;=\; u(x) \qquad \text{(kjernen)} \tag{3.146}$$

er en funksjon av x, så er den deriverte av $f(x)$ gitt ved:

$$\boxed{f'(x) \;=\; g'(u)\,u' \quad (3.147)}$$

hvor $u(x)$ er kjernefunksjonen.

En alternativ måte å skrive denne ligningen på er:

$$\boxed{\frac{d\,f(x)}{dx} \;=\; \frac{d\,g(u)}{du}\,\frac{du}{dx} \quad (3.148)}$$

hvor $u(x)$ er kjernefunksjonen.

■

Eksempel: (kjerneregelen)

Gitt funksjonen:

$$f(x) \;=\; (x^2+2)^{10} \tag{3.149}$$

Deriver $f(x)$, dvs. finn $f'(x)$.

Løsning:

Funksjonen $f(x)$ i lign.(3.149) kan skrives:

$$f(x) \;=\; g(\,u(x)\,) \tag{3.150}$$

hvor

$$g(u) \;=\; u^{10} \qquad \text{(forenklet omskriving)} \tag{3.151}$$

og

$$u(x) \;=\; x^2+2 \qquad \text{(kjernen)} \tag{3.152}$$

Deriver $f(x)$ ved hjelp av kjerneregelen:

$$\underline{\underline{f'(x)}} \;=\; \overbrace{\Big(\text{forenklet}\Big)'\Big(\text{kjerne}\Big)'}^{\text{kjerneregelen}} \tag{3.153}$$

$$= \; g'(u)\,u' \tag{3.154}$$

$$= \; (\,u^{10}\,)'\,(\,x^2+2\,)' \tag{3.155}$$

$$= \; 10\,u^{10-1}\cdot 2x \tag{3.156}$$

$$= \; 10\,(x^2+2)^9\,2x \tag{3.157}$$

$$= \; \underline{\underline{20x(x^2+2)^9}} \tag{3.158}$$

■

3.5 Lokale ekstremalpunkt

Definisjon: (**lokale** ekstremalpunkter , teknisk)

Et punkt x er et lokalt minimumspunkt x dersom det finnes et $\epsilon > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x+d) \tag{3.159}$$

for alle $d \in [x-\epsilon, x+\epsilon]$.

Et punkt x er et lokalt maksimumspunkt x dersom det finnes et $\epsilon > 0$ slik at

$$f(x) \geq f(x+d) \tag{3.160}$$

for alle $d \in [x-\epsilon, x+\epsilon]$.

■

Definisjon: (**globale** ekstremalpunkter , teknisk)

Et punkt x er et globalt minimumspunkt x dersom det finnes et $\epsilon > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x') \tag{3.161}$$

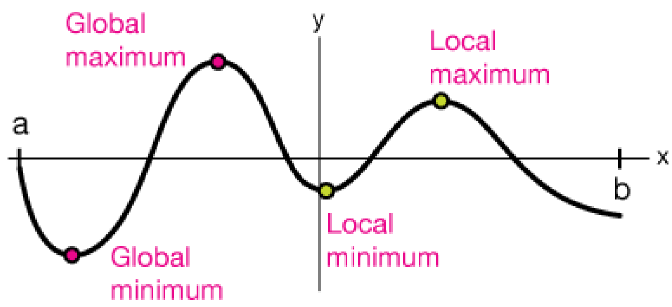
for alle x'.

Et punkt x er et globalt maksimumspunkt x dersom det finnes et $\epsilon > 0$ slik at

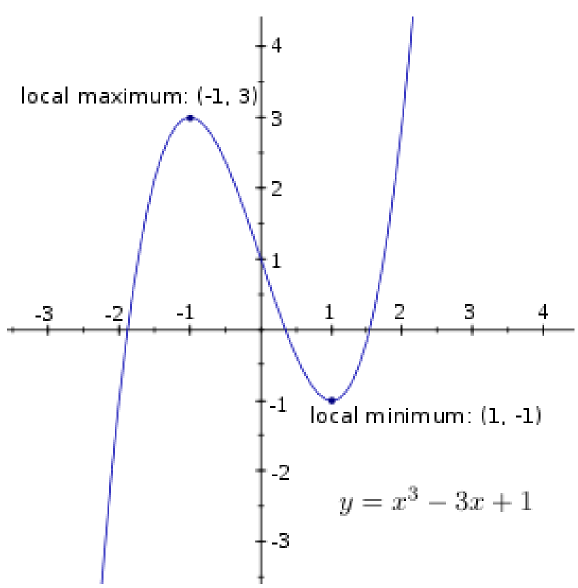
$$f(x) \geq f(x+d) \tag{3.162}$$

for alle x'.

■



Figur 3.13: Globale og lokale ekstremalpunkter. $(x \in [a, b])$



Figur 3.14: Kun lokale ekstremalpunkter. $(x \in \mathbb{R})$

Eksempel: (derivasjon / lokale ekstremalpunkt / 3. gradsligning)

La oss se på eksemplet fra side **??** en gang til. Da så vi på 3. gradsligningen:

$$\boxed{f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7 \qquad (3.163)}$$

a) Regn ut $f'(x)$.

b) Tegn fortegnsskjema for $f'(x)$.

Tegn grafen $f(x)$ og marker på figuren når $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$.
Marker på figuren ekstremalpunktene. Er de lokale eller globale?

Løsning:

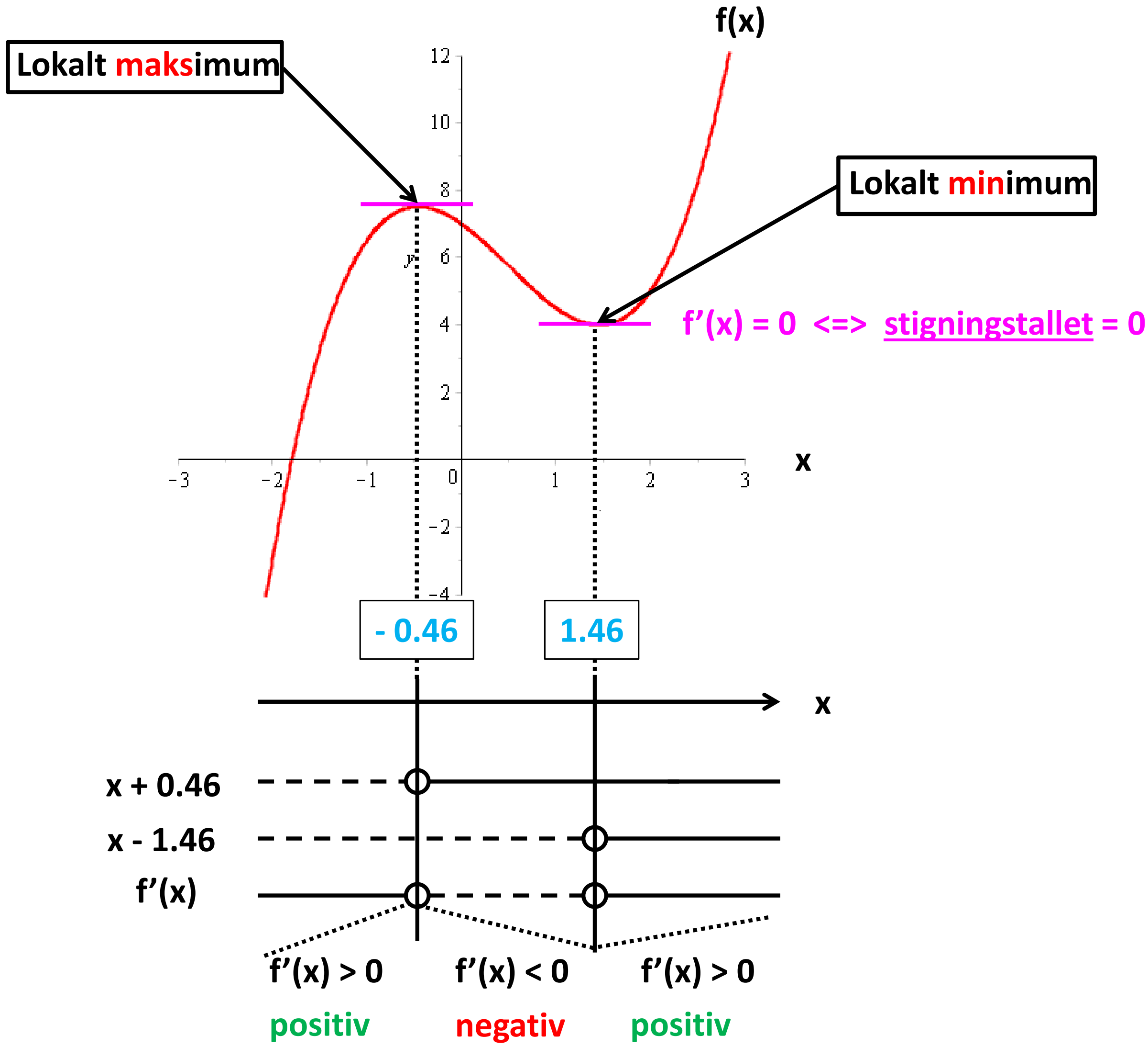
a) Første deriverte: (hovedregelen for derivasjon)

$$\underline{\underline{\frac{d\,f(x)}{dx}}} \;=\; \frac{d}{dx}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+7\right) \;=\; 3x^2-\frac{3}{2}\cdot 2\cdot x^{2-1}-2 \;=\; \underline{\underline{3x^2-3x-2}} \tag{3.164}$$

b) Første deriverte $f'(x)$ er en 2. gradsligning som kan *faktoriseres*:

$$\underline{\frac{d\,f(x)}{dx}} \;=\; 3x^2-3x-2 \;=\; 3\left(x^2-x-\frac{2}{3}\right) \;=\; \underline{3\,(x+0.46)\,(x-1.46)} \tag{3.165}$$

siden nullpunktene kan finnes ved å bruke lign.(1.210): $x_{1,2}=1/2\mp\sqrt{33}/6$,
hvor vi gjør tilnærmelsene: $x_1=-0.46$ og $x_2=1.46$.
Etter denne faktoriseringen kan man lage fortegnsskjema og markere på figuren når $f'(x)>0$, $f'(x)<0$ og $f'(x)=0$:



Figur 3.15: Funksjonen $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7$ og tilhørende fortegnsskjema for $f'(x)$.

■

3.6 Ekstremalpunkt eller ikke?

Spørsmål:

Er det alltid slik at når man setter $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$ så finner vi et ekstremalpunkt?

Svar:

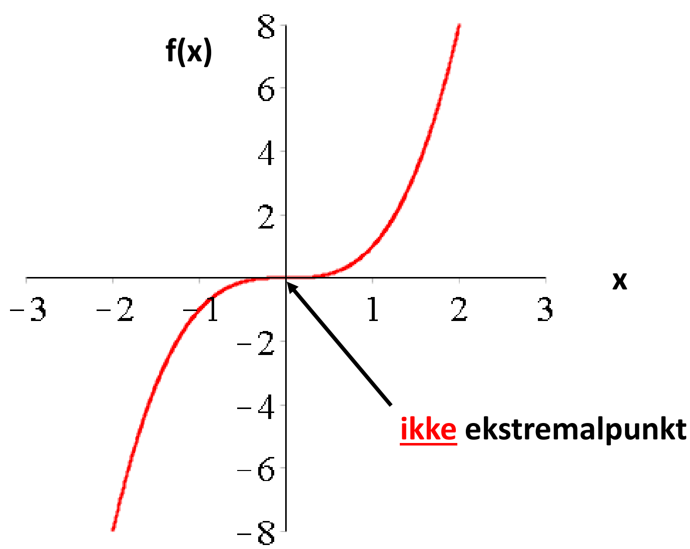
Nei, $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$ representerer ikke alltid et ekstremalpunkt.

Eksempel:

Funksjonen

$$f(x) = x^3 \tag{3.166}$$

har $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$ for $x = 0$, men $x = 0$ er ikke et ekstremalpunkt for funksjonen.



Figur 3.16: Funksjonen $f(x) = x^3$.

3.7 Lokale ekstremalpunkt: 1. derivasjonstesten

Fra eksemplet på forrige side så vi at den deriverte er null, dvs. $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$, ikke er nok til å garantere et lokalt ekstremalpunkt:

$$\frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \qquad \overset{\text{ikke alltid}}{\Rightarrow} \qquad \text{lokalt ekstremalpunkt} \quad x = c \tag{3.167}$$

Men omvendt er derimot alltid tilfelle:
Dersom vi har et lokalt ekstremalpunkt så vet vi med sikkerhet at $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$:

$$\text{lokalt ekstremalpunkt} \quad x = c \qquad \overset{\text{alltid}}{\Rightarrow} \qquad \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \tag{3.168}$$

Den siste implikasjonen, dvs. lign.(3.168), formulerer vi i en egen setning - 1. derivasjonstesten:

Setning: (1. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt)

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\boxed{\text{lokalt ekstremalpunkt } x = c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \qquad (3.169)}$$

■

Spørsmål:

Hva betyr 1. derivasjonstesten i praksis?

Svar:

Jo, når vi skal finne lokale ekstremalpunkt så setter vi først

$$\frac{d\,f(x)}{dx} \;=\; 0 \tag{3.170}$$

og løser denne ligningen med hensyn på x alene, altså finner alle x'ene.

Det er ikke sikkert disse x'ene representerer ekstremalpunkter, men de er mulige kandidater.
For å sjekke om disse kandidatene er faktisk ekstremalpunkter så må vi utføre en ny test, nemlig 2. derivasjonstesten.

Altså:

1) Finn mulige kandidater til ekstremalpunkter.
$\left(\text{1. derivasjonstesten} \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = 0 \right)$

2) Sjekk om kandidatene faktisk er et ekstremalpunkt eller ikke.
$\left(\text{2. derivasjonstesten} \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ positiv eller negativ} \right)$

3.8 Lokale ekstremalpunkt: 2. derivasjonstesten

For å sjekke om kandidater ekstremalpunkt er lokale eller ikke
så må vi utføre 2. derivasjonstesten.

Setning: (2. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt)

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{lokalt maksimum } x = c \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2 f(c)}{dx^2} < 0 \quad \text{(negativ)} & (3.171) \\ \text{lokalt minimum } x = c \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d^2 f(c)}{dx^2} > 0 \quad \text{(positiv)} & (3.172) \end{array}}$$

■

Det er flere måter å formulere 2. derivasjonstesten på.
Formuleringen nedenfor er ekvivalent med formuleringen ovenfor:

Setning: (2. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt)

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{lokalt maksimum } x = c \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d\,f(c)}{dx} \text{ skifter fortegn fra + til minus } - & (3.173) \\ \text{lokalt minimum } x = c \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,f(c)}{dx} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{d\,f(c)}{dx} \text{ skifter fortegn fra } - \text{ til minus +} & (3.174) \end{array}}$$

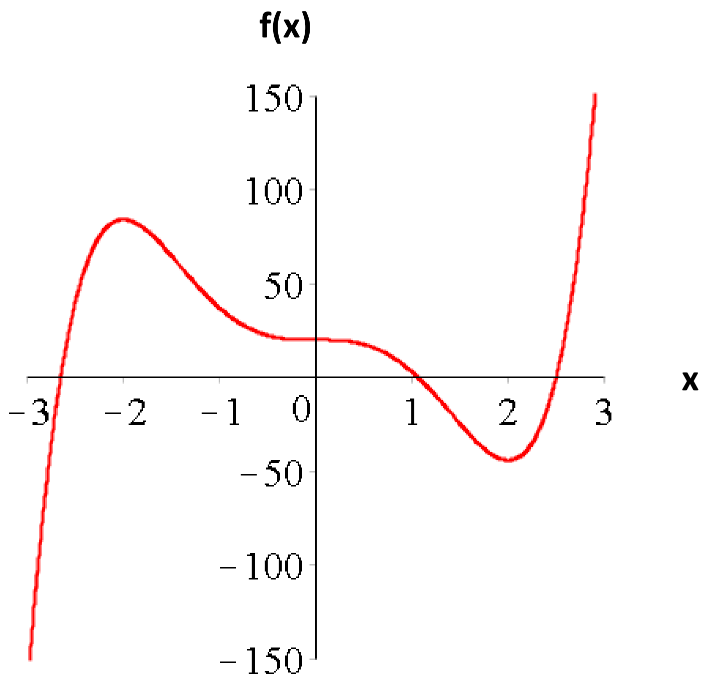
■

Eksempel: (2. derivasjonstesten)

La oss se på følgende 5. gradsfunksjon:

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 20 \tag{3.175}$$

Finn de lokale ekstremalpunktene til $f(x)$.



Figur 3.17: Funksjonen $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 20$.

Løsning:

Finner kandidater til ekstremalpunktene ved å derivere $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,f(x)}{dx} &= 0 && (3.176)\\
\frac{d}{dx}\Big(3x^5 - 20x^3 + 20\Big) &= 0 && (3.177)\\
3\cdot 5x^{5-1} - 20\cdot 3x^{3-1} + 0 &= 0 \qquad \text{(hovedregelen)} && (3.178)\\
15x^4 - 60x^2 &= 0 && (3.179)
\end{aligned}$$

Den siste ligningen kan vi faktorisere:

$$\begin{aligned}
15x^4 - 60x^2 &= 0 && (3.180)\\
15x^2\big(x^2 - 4\big) &= 0 \qquad \text{(faktorisere)} && (3.181)\\
15x^2\big(x-2\big)(x+2) &= 0 \qquad \text{(faktorisere mer)} && (3.182)
\end{aligned}$$

Det er altså 3 løsninger av ligningen $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$:

$$\underline{x = -2 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x = 2} \tag{3.183}$$

For å sjekke hvilke(n) av disse kandidatene som representerer et lokalt ekstramelpunkt så må vi se på den 2. deriverte:

$$\underline{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}} = \frac{d}{dx}\frac{d\,f(x)}{dx} \tag{3.184}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(15x^4 - 60x^2\right) \tag{3.185}$$

$$= 15 \cdot 4x^{4-1} - 60 \cdot 2x^{2-1} \tag{3.186}$$

$$= \underline{60x^3 - 120x} \tag{3.187}$$

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\underline{\frac{d^2 f(-2)}{dx^2}} = 60 \cdot (-2)^3 - 120 \cdot (-2) = \underline{-240} \qquad \text{(negativt)} \tag{3.188}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{x = -2 \;\; \text{er et lokalt maksimum}}} \tag{3.189}$$

$$\underline{\frac{d^2 f(0)}{dx}} = 60 \cdot 0^3 - 120 \cdot 0 = \underline{0} \qquad \text{(verken negativt eller positivt)} \tag{3.190}$$

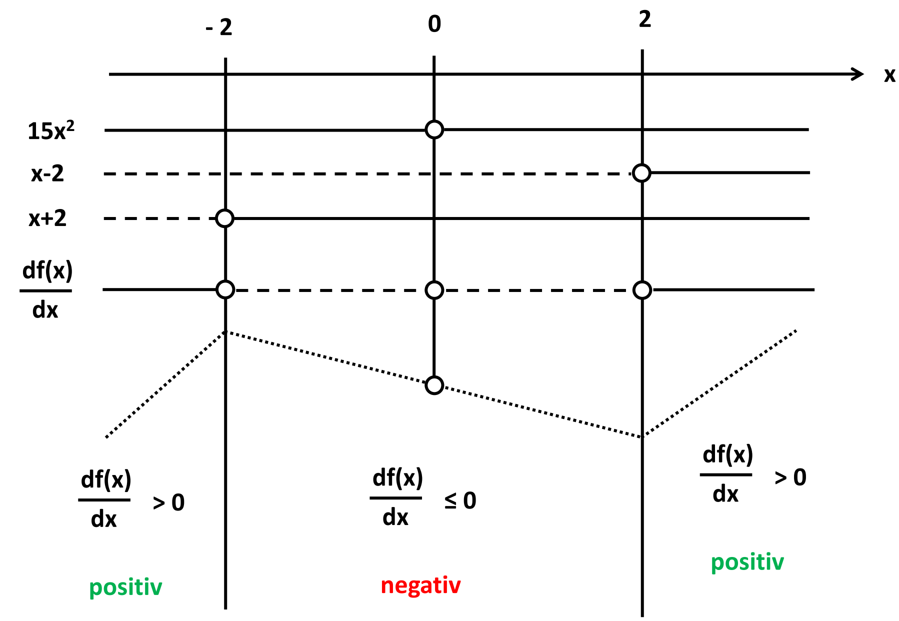
$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{x = 0 \;\; \text{er verken et lokalt maksimum eller lokalt minimum}}} \tag{3.191}$$

$$\underline{\frac{d^2 f(2)}{dx^2}} = 60 \cdot 2^3 - 120 \cdot 2 = \underline{240} \qquad \text{(positivt)} \tag{3.192}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{x = 2 \;\; \text{er et lokalt minimum}}} \tag{3.193}$$

Man kunne også satt opp fortegnsskjema for $\frac{d\,f(x)}{dx}$ og brukt den alternative formlieringen av 2. derivasjonstesten, men da må man faktorisere først:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} \;=\; 15^4 - 60x^2 = 15x^2(x^2-4) \;=\; \underbrace{15x^2(x-2)(x+2)}_{\text{faktorisert form}} \tag{3.194}$$



Figur 3.18: Fortegnsskjema for $\frac{d\,f(x)}{dx} \;=\; 15x^4 - 60x^2 \;=\; 15x^2(x-2)(x+2)$.

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} \;\text{ skifter fra + til } - \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x = -2 \;\; \text{lokalt maksimum}}} \tag{3.195}$$

$$\frac{d\,f(x)}{dx} \;\text{ skifter fra } - \text{ til + } \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x = 2 \;\; \text{lokalt minimum}}} \tag{3.196}$$

■

3.9 Globale ekstremalpunkt

Å finne globale ekstremalpunkter er generelt svært vanskelig.
Det finnes ingen generell måte å bestemme globale ekstremalpunkter på annet enn å tegne grafen og bruke "*stirremetoden*".

Men det finnes en klasse funksjoner hvor vi faktisk kan bestemme globale ekstramelpunkter.
Det gjelder for konvekse og konkave funksjoner.

I dette kapitlet skal vi definere hva som menes med konkave og konvekse funksjoner.
Deretter skal vi preseneter noen læresetningen angående globale ekstremalpunkter for konkave og konvekse funksjoner.

Definisjon: (konveks)

Gitt to punkter x_1 og x_2.
Korden (linjen) mellom x_1 og x_2 er da definert ved:

$$ax_1 \ + \ (1-a)x_2 \tag{3.197}$$

hvor $0 \leq a \leq 1$. En funksjon er konveks dersom

$$\boxed{f\big(\, ax_1 + (1-a)x_2 \,\big) \quad \leq \quad af(x_1) + (1-a)f(x_2) \qquad (3.198)}$$

■

Definisjon: (konkav)

Gitt to punkter x_1 og x_2.
Korden (linjen) mellom x_1 og x_2 er da definert ved:

$$ax_1 \ + \ (1-a)x_2 \tag{3.199}$$

hvor $0 \leq a \leq 1$. En funksjon er konkav dersom

$$\boxed{f\big(\, ax_1 + (1-a)x_2 \,\big) \quad \geq \quad af(x_1) + (1-a)f(x_2) \qquad (3.200)}$$

■

Definisjonenen på forrige side er litt teknisk og vanskelig å forstå.
Derfor formulerer vi dem med ord sammen med en figur:

Definisjon: (konveks)

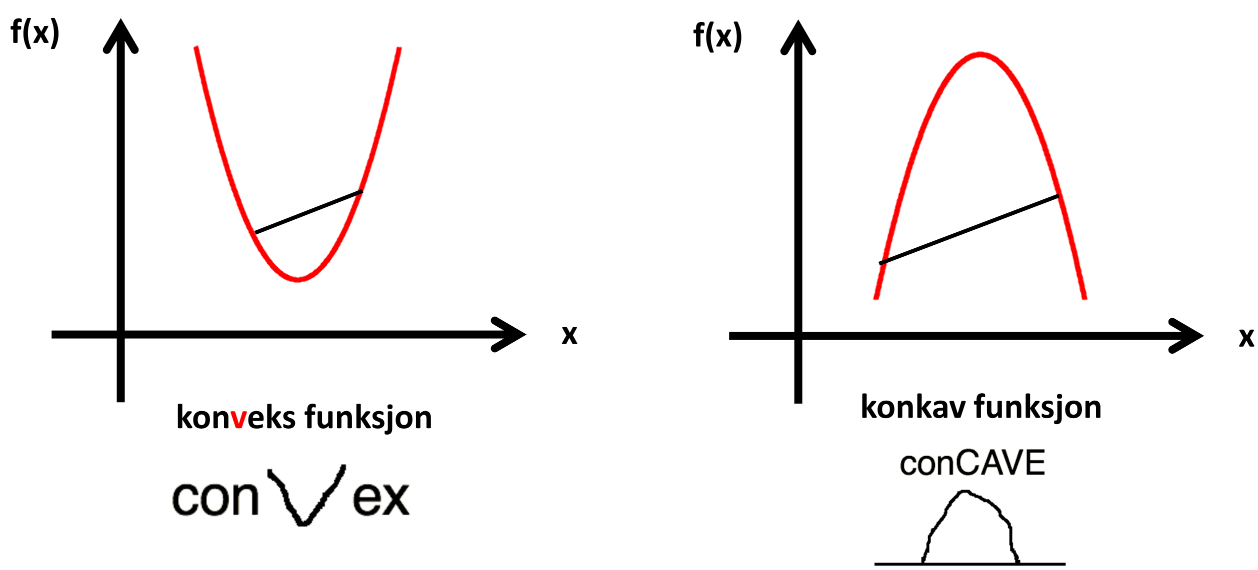
Funksjonen $f(x)$ kalles *konveks* (på et intervall) dersom korden mellom to vilkårlige punkter på grafen alltid ligger på eller over grafen til $f(x)$.

$\blacksquare$

Definisjon: (konkav)

Funksjonen $f(x)$ kalles *konkav* (på et intervall) dersom korden mellom to vilkårlige punkter på grafen alltid ligger på eller under grafen til $f(x)$.

$\blacksquare$



Figur 3.19: En konveks og en konkav funksjon.

Setning 1: (*globalt* minimum)

Anta at $f(x)$ er en konveks funksjon.

Dersom $x = c$ er et lokalt minimum $\left(\frac{d\,f(x)}{dx} = 0\right)$ så er $x = c$ også et globalt minimum.

Anta at $f(x)$ er en konkav funksjon.

Dersom $x = c$ er et lokalt maksimum $\left(\frac{d\,f(x)}{dx} = 0\right)$ så er $x = c$ også et globalt maksimum.

■

Setning 2: (*globalt* minimum)

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon.

$$\boxed{\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0 \ \ \text{(positiv eller null)} \ \ \text{for alle } x \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \ \ \text{er konveks}} \tag{3.201}$$

$$\boxed{\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0 \ \ \text{(negativ eller null)} \ \ \text{for alle } x \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \ \ \text{er konkav}} \tag{3.202}$$

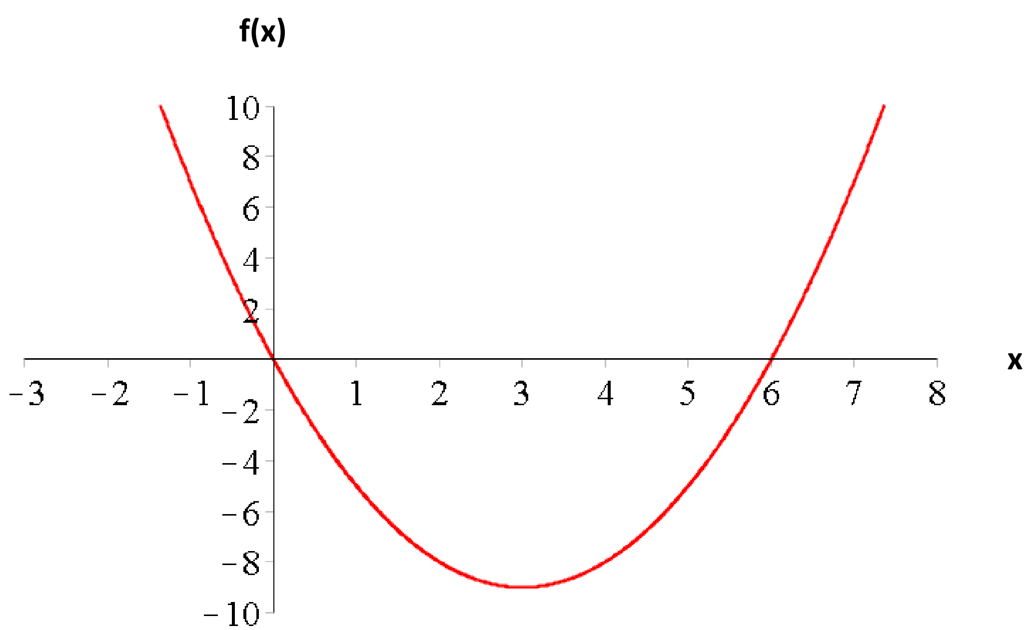
■

Eksempel:

Gitt funksjonen:

$$f(x) \;=\; x^2 \;-\; 6 \qquad (3.203)$$

Finn eventuelle ekstremalpunkt.
Angi hva slags type ekstremalpunkt det er snakk om.



Figur 3.20: Funksjonen $f(x) = x^2 - 6x$.

Løsning:

1. derivasjonstesten:

Mulige kandidater til lokale ekstremalpunkt er bestemt av $\frac{d\,f(x)}{dx} = 0$:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = 0 \tag{3.204}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 6x \right) = 0 \tag{3.205}$$

$$2x - 6 = 0 \tag{3.206}$$

Løser med hensyn på x alene:

$$\underline{x = 3} \tag{3.207}$$

som er en kandidat til et ekstremalpunkt.

2. derivasjonstesten:

Vi bruker deretter 2. derivasjonstesten til å bestemme hva slags ekstremalpunkt det er. Siden

$$\frac{d^2 f(x)}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 - 6x\right) = 2 \qquad \text{(positiv)} \tag{3.208}$$

altså den 2. deriverte av $f(x)$ er positiv for $x = 3$. Fra lign.(3.172), dvs. 2. derivasjonstesten, så vet vi at $x = 3$ er et lokalt minimum.

Setning 1 og 2: (se side 187)

Men $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ er ikke bare positiv for $x = 3$, den er positiv for alle x.
Da vet vi fra setning 2, se lign.(3.201), at $f(x)$ er konveks.

Men siden $f(x)$ er konveks så vet vi fra setning 1 på side 187, at det lokale minimumet $x = 3$ også er et globalt minimum.

■