LØSNING: Oppgavesett nr. 1

"*MAT100 Matematikk*", 2018 (versjon 2)

Oppgave 1: (kvadratsetningene/"*pilmetoden*")

Bruker "*pilmetoden*":

a) $\underline{\underline{(x+y)^2}} = (x+y)(x+y) = x^2 + x\,y + y\,x + y^2 = \underline{\underline{x^2 + 2xy + y^2}}$

b) $\underline{\underline{(x-y)^2}} = (x-y)(x-y) = x^2 - x\,y - y\,x + (-y)^2 = \underline{\underline{x^2 - 2xy + y^2}}$

c) $\underline{\underline{(x+y)(x-y)}} = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} - y^2 = \underline{\underline{x^2 - y^2}}$

d) $\underline{\underline{(5a+2b)^2}} = (5a)^2 + 5a\,2b + 2b\,5a + (2b)^2 = \underline{\underline{25a^2 + 20ab + 4b^2}}$

e) $\underline{\underline{\left(2y - \frac{x}{4}\right)^2}} = (2y)^2 + 2y(-\frac{x}{4}) + (-\frac{x}{4})2y + (-\frac{x}{4})^2 = \underline{\underline{4y^2 - xy + \frac{x^2}{16}}}$

f) $\underline{\underline{(ax-by)(ax+by)}} = (ax)^2 + \cancel{ax\,by} + \cancel{(-by)\,ax} + (-by)\,(by) = \underline{\underline{a^2x^2 - b^2y^2}}$

g) Bruker også her den distributive lov, dvs. "*pilmetoden*":

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{-(2x-6+2y)(y+9-4x)}} \quad = \quad & -\Big(\; 2x\cdot y + 2x\cdot 9 + 2x\cdot(-4x) \\
& \quad - 6\cdot y - 6\cdot 9 - 6\cdot(-4x) \\
& \quad + 2y\cdot y + 2y\cdot 9 + 2y\cdot(-4x) \Big)
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$= -\Big(\; 2xy + 18x - 8x^2 \; - \; 6y - 54 + 24x \; + \; 2y^2 + 18y - 8xy \Big)$$

$$= -\Big(-6xy + 42x - 8x^2 \; + \; 12y - 54 \; + \; 2y^2 \Big) \tag{2}$$

$$= \quad \underline{\underline{6xy - 42x + 8x^2 - 12y + 54 - 2y^2}} \tag{3}$$

■

Oppgave 2: (brøkregning)

For å løse ligningene nedenfor så må vi finne **fellesnevner**.

a) Trekker sammen og forenkler mest mulig: (må finne fellesnevner)

$$\underline{\underline{\frac{3}{2a} - \frac{6}{3a} + \frac{1}{a}}} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 2a} - \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot 3a} + \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot a} \tag{4}$$

$$= \frac{9}{6a} - \frac{12}{6a} + \frac{6}{6a} \tag{5}$$

$$= \frac{9 - 12 + 6}{6a} = \frac{3}{6a} = \frac{1}{\underline{\underline{2a}}} \tag{6}$$

b) Trekker sammen og forenkler mest mulig: (må finne fellesnevner)

$$\underline{\underline{-\frac{2y}{x^2y^2} + \frac{2+x}{x^2y} + \frac{1-y}{xy^2}}} = \frac{(-2y)}{x^2y^2} + \frac{(2+x) \cdot y}{x^2y \cdot y} + \frac{x \cdot (1-y)}{x \cdot xy^2} \tag{7}$$

$$= \frac{-2y + y(2+x) + x(1-y)}{x^2y^2} \tag{8}$$

$$= \frac{\cancel{-2y} + \cancel{2y} + \cancel{xy} + x - \cancel{xy}}{x^2y^2} \tag{9}$$

$$= \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}y^2} \tag{10}$$

$$= \frac{1}{\underline{\underline{xy^2}}} \tag{11}$$

c) Trekker sammen og forenkler mest mulig: (må finne fellesnevner)

$$\underline{\underline{\frac{z-1}{z+1}-\frac{1-z}{z-1}-\frac{4z-2}{2z+2}}} = \frac{(z-1)(z-1)}{(z+1)(z-1)}-\frac{\overbrace{(1-z)}^{=-(z-1)}(z+1)}{(z-1)(z+1)}-\frac{\cancel{2}(2z-1)(z-1)}{\cancel{2}(z+1)(z-1)} \tag{12}$$

$$= \frac{\cancel{(z-1)}(z-1)+\cancel{(z-1)}(z+1)-(2z-1)\cancel{(z-1)}}{(z+1)\cancel{(z-1)}} \tag{13}$$

$$= \frac{z-\cancel{1}+z+\cancel{1}-(2z-1)}{z+1} \tag{14}$$

$$= \frac{\cancel{2z}-\cancel{2z}+1}{z+1} \tag{15}$$

$$= \frac{1}{\underline{\underline{z+1}}} \tag{16}$$

d) Trekker sammen og forenkler mest mulig: (må finne fellesnevner)

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}+\frac{1}{6} \tag{17}$$

$$= \frac{3}{6}-\frac{2}{6}+\frac{1}{6} = \frac{3-2+1}{6} = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \tag{18}$$

e) Trekker sammen og forenkler mest mulig: (må finne fellesnevner)

$$\underline{\underline{\frac{x+2}{3} + \frac{1-3x}{4}}} = \frac{x+2}{3} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1-3x}{4} \cdot \frac{3}{3} \tag{19}$$

$$= \frac{(x+2)4}{3 \cdot 4} + \frac{(1-3x)3}{4 \cdot 3} = \frac{(x+2)4 + (1-3x)3}{12} \tag{20}$$

$$= \frac{4x+8+3-9x}{12} = \underline{\underline{\frac{11-5x}{12}}} \tag{21}$$

f) Trekker sammen og forenkler mest mulig: (må finne fellesnevner)

$$\underline{\underline{\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}}}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{6}} = \frac{\frac{8}{\cancel{12}} + \frac{3}{\cancel{12}}}{\frac{9}{\cancel{12}} + \frac{18}{\cancel{12}}} = \frac{8+3}{9+18} = \underline{\underline{\frac{11}{27}}} \tag{22}$$

■

Oppgave 3: (faktorisering og brøkregning)

a) Forkorter brøken:

$$\underline{\underline{\frac{325}{625}}} = \frac{13 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}{5 \cdot 5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = \underline{\underline{\frac{13}{25}}} \tag{23}$$

b) Forkorter brøken:

$$\underline{\underline{\frac{8a^2b^3c}{64abc^3}}} = \frac{8a^2b^3c}{8^2abc^3} = \underline{\underline{\frac{ab^2}{8c^2}}} \tag{24}$$

c) Forkorter brøken: (bruker konjugatsetningen)

$$\underline{\underline{\frac{2a^2 - 2b^2}{3a + 3b}}} = \frac{2(a^2 - b^2)}{3(a+b)} = \frac{2\cancel{(a+b)}(a-b)}{3\cancel{(a+b)}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}(a-b)}} \tag{25}$$

d) Forkorter brøken: (bruker konjugatsetningen)

$$\underline{\underline{\frac{x^3 - xy^2}{(x+y)^2}}} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x+y)^2} = \frac{x(x-y)\cancel{(x+y)}}{(x+y)\cancel{(x+y)}} = \underline{\underline{\frac{x(x-y)}{x+y}}} \tag{26}$$

e) Forkorter brøken:

$$\underline{\underline{\frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8}}} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}}{\cancel{8} \cdot \cancel{8}} = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = \underline{\underline{512}} \tag{27}$$

f) Forkorter brøken:

$$\underline{\underline{\frac{8+8+8+8+8}{8+8}}} = \frac{5 \cdot 8}{2 \cdot 8} = \frac{5 \cdot \cancel{8}}{2 \cdot \cancel{8}} = \frac{5}{\underline{\underline{2}}} \tag{28}$$

■

Oppgave 4: (potenser)

a) Regner ut potensen:

$$\underline{\underline{7^8\,7^{-6}}} \;=\; 7^{8-6} \;=\; 7^2 \;=\; \underline{\underline{49}} \tag{29}$$

i **b**) Regner ut potensen:

$$\underline{\underline{\left(2^{-2}\right)^3}} \;=\; 2^{-2\cdot 3} \;=\; 2^{-6} \;=\; \frac{1}{2^6} \;=\; \underline{\underline{\frac{1}{64}}} \tag{30}$$

c) Regner ut potensen: [1]

$$\underline{\underline{\left(\frac{5}{7}\right)^2}} \;=\; 2^{-2\cdot 3} \;=\; \frac{5^2}{7^2} \;=\; \underline{\underline{\frac{25}{49}}} \tag{31}$$

d) Regner ut potensene:

$$\underline{\underline{\left(\frac{1}{8}\right)^2}} = \frac{1^2}{8^2} = \underline{\underline{\frac{1}{64}}} \tag{32}$$

■

[1] Brøken i lign.(31) kan ikke forenkles ytterligere.

Oppgave 5: (potenser / Cobb-Douglas nyttefunksjon / "*SØK200 Mikroøkonomi*")

Cobb-Douglas nyttefunksjon:

$$u \;=\; \frac{1}{2}\, x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} \tag{33}$$

a) Bruker at $8 = 2^3$ og $27 = 3^3$:

$$\underline{\underline{u}} \;=\; \frac{1}{2}\, 27^{\frac{1}{3}} 8^{\frac{2}{3}} \;=\; \frac{1}{2}\,(3^3)^{\frac{1}{3}}\,(2^3)^{\frac{2}{3}} \;=\; 2^{-1}\, 3^{\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}}\, 2^{\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}} \tag{34}$$

$$=\; 2^{-1}\, 3^1\, 2^2 \;=\; 2^{-1+2}\, 3 \;=\; 2 \cdot 3 \;=\; \underline{\underline{6}} \tag{35}$$

b) Bruker igjen at $27 = 3^3$ og $8 = 2^3$:

$$\underline{\underline{u}} \;=\; \frac{1}{2}\, 8^{\frac{1}{3}} 27^{\frac{2}{3}} \;=\; \frac{1}{2}\,(2^3)^{\frac{1}{\cancel{3}}}\,(3^3)^{\frac{2}{3}} \;=\; 2^{-1}\, 2^{\cancel{3}\cdot\frac{1}{3}}\, 3^{\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}} \tag{36}$$

$$=\; 2^{-1}\, 2^1\, 3^2 \;=\; 2^{-1+1}\, 3^2 \;=\; 2^0 \cdot 3^2 \;=\; 1 \cdot 3^2 \;=\; \underline{\underline{9}} \tag{37}$$

■

Oppgave 6: (standardform)

I denne oppgaven behøves ingen mellomregning.

a) Skriver på standardform: [2]

$$1\,000\,000\,000 \;=\; \underline{\underline{10^{9}}} \tag{38}$$

b) Skriver på standardform:

$$0,000\,000\,001 \;=\; \underline{\underline{10^{-9}}} \tag{39}$$

c) Skriver på standardform:

$$570\,000\,000\,000 \;=\; \underline{\underline{5,7 \cdot 10^{11}}} \tag{40}$$

d) Skriver på standardform:

$$0,000\,000\,093 \;=\; \underline{\underline{9,3 \cdot 10^{-8}}} \tag{41}$$

■

[2] Man kan også skrive svaret på formen $1 \cdot 10^{9}$, men den 1'eren er egentlig ikke nødvendig.

Oppgave 7: (kvadratrot)

a) Faktoriser først og regn ut kvadratrøttene uten bruk av kalkulator:

$$\underline{\underline{\sqrt[4]{8,1\cdot 10^5}}} \;=\; \sqrt[4]{81\cdot 10^4} \;=\; \left(81\cdot 10^4\right)^{\frac{1}{4}} \;=\; \left(9^2\cdot 10^6\right)^{\frac{1}{4}} \tag{42}$$

$$= \left(9^2\right)^{\frac{1}{4}}\left(10^4\right)^{\frac{1}{4}} \;=\; 9^{\frac{1}{2}}\cdot 10^1 \;=\; 3\cdot 10 \;=\; \underline{\underline{30}} \tag{43}$$

b) Faktoriser først og regn ut kvadratrøttene uten bruk av kalkulator:

$$\underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{x^8}{625}}}} \;=\; \sqrt[4]{\frac{x^8}{5^4}} \;=\; \left(\frac{x^8}{5^4}\right)^{\frac{1}{4}} \;=\; \frac{(x^8)^{\frac{1}{4}}}{(5^4)^{\frac{1}{4}}} \;=\; \frac{x^2}{5^1} \;=\; \underline{\underline{\frac{x^2}{5}}} \tag{44}$$

c) Faktoriser først og regn ut kvadratrøttene uten bruk av kalkulator:

$$\underline{\underline{\sqrt[5]{\frac{32}{243}}}} \;=\; \sqrt[5]{\frac{2^5}{3^5}} \;=\; \left(\frac{2^5}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}} \;=\; \frac{(2^5)^{\frac{1}{5}}}{(3^5)^{\frac{1}{5}}} \;=\; \frac{2^1}{3^1} \;=\; \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \tag{45}$$

d) Faktoriser først og regn ut kvadratrøttene uten bruk av kalkulator:

$$\underline{\underline{\sqrt[5]{\frac{7}{3}}}} \;=\; \text{kan ikke forenkles ytterligere} \tag{46}$$

e) Faktoriser først og regn ut kvadratrøttene uten bruk av kalkulator:

$$\underline{\underline{\sqrt{\frac{7}{3}}}} \;=\; \text{kan ikke forenkles ytterligere} \tag{47}$$

Oppgave 8: (faktorisering og nullpunkter)

Faktoriserer uttrykkene: [3]

a) $\underline{\underline{9y^2 + 2xy + \frac{1}{9}x^2}} \;=\; (3y)^2 + 2(3y)(\frac{1}{3}x) + (\frac{1}{3}x)^2 \;=\; \underline{\underline{(\,3y + \frac{1}{3}x\,)^2}}$

b) $\underline{\underline{\frac{1}{4}t^4 - t^3 + t^2}} \;=\; t^2\left(\,\frac{1}{4}\,t^2 - t + 1\,\right) \;=\; t^2\left[\,(\frac{1}{2}t)^2 - 2\cdot 1\cdot(\frac{1}{2}t) + 1\,\right] \;=\; \underline{\underline{t^2\left(\,\frac{1}{2}t - 1\,\right)^2}}$

c) $\underline{\underline{9q^2p - 4p^3}} \;=\; p\left(\,9q^2 - 4p^2\,\right) \;=\; b\Big(\,(3q)^2 - (2p)^2\,\Big) \;=\; \underline{\underline{p\,(\,3q - 2p\,)(\,3q + 2p\,)}}$

■

[3] Ha kompendiet foran deg. Finn kvadratsetningene og konjugatsetningen i kompendiet og bruk disse setningene når du løser denne oppgaven.

Oppgave 9: (ligninger)

a) Multipliser ut parantesene og flytt alle x-ene på venstre side og alle tallene på høyre:

$$3(x+5) = 3(x+1) - 2(x-9) \tag{48}$$

$$\cancel{3x} + 3 \cdot 5 = \cancel{3x} + 3 \cdot 1 - 2x - 2 \cdot (-9) \tag{49}$$

$$2x = 3 + 18 - 15 \tag{50}$$

$$2x = 6 \tag{51}$$

$$\underline{\underline{x = 3}} \tag{52}$$

b) Skriver alle leddene med *fellesnevneren* $(x+1)(x-1)$:

$$\frac{4}{x+1} + 2 = \frac{2x+6}{x-1} \tag{53}$$

$$\frac{4(x-1)}{\cancel{(x+1)(x-1)}} + \frac{2(x+1)(x-1)}{\cancel{(x+1)(x-1)}} = \frac{(2x+6)(x+1)}{\cancel{(x-1)(x+1)}} \tag{54}$$

$$4(x-1) + 2\,\underbrace{(x+1)(x-1)}_{=\ x^2-1} = 2\,\underbrace{(x+3)(x+1)}_{=x^2+4x+3} \tag{55}$$

$$4(x-1) + 2(x^2-1) = 2(x^2+4x+3) \tag{56}$$

$$4x - 4 + \cancel{2x^2} - 2 = \cancel{2x^2} + 8x + 6 \tag{57}$$

$$4x - 8x = 6 + 4 + 2 \tag{58}$$

$$-4x = 12 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{(-4)} \tag{59}$$

$$\underline{\underline{x = -3}} \tag{60}$$

En alternativ og minst like god måte å løse denne ligningen på er å multiplisere med faktorene $(x+1)(x-1)$ på begge sider:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x+1}+2 &= \frac{2x+6}{x-1} \qquad \Big| \cdot (x+1)(x-1) && (61)\\
\frac{4}{\cancel{x+1}}\cancel{(x+1)}(x-1)+2(x+1)(x-1) &= \frac{2x+6}{\cancel{x-1}}(x+1)\cancel{(x-1)} && (62)\\
4(x-1)+2(x+1)(x-1) &= (2x+6)(x+1) && (63)\\
4x-4+2(x^2-1) &= 2x^2+2x+6x+6 && (64)\\
4x-4+\cancel{2x^2}-2 &= \cancel{2x^2}+8x+6 && (65)\\
4x-8x &= 6+4+2 && (66)\\
-4x &= 12 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{(-4)} && (67)\\
\underline{\underline{x = -3}} & && (68)
\end{aligned}$$

PS:
Du behøver ikke løse ligningen på begge måtene. Det er nok at du løser ligningen på en av måtene. Velg den metoden du liker best.

c) Ligningen: $\quad (a = -1,\ b = 1,\ c = 2)$

$$-x^2 + x + 2 \;=\; 0 \tag{69}$$

er en 2.-gradsligning. Løsningene finnes via ABC-formelen: [4]

$$\underline{x} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{70}$$

$$=\; \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \tag{71}$$

$$=\; \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} \tag{72}$$

$$=\; \underline{\frac{-1 \pm 3}{2 \cdot (-1)}} \tag{73}$$

som gir

$$\underline{\underline{x_1 \;=\; -1 \qquad \text{og} \qquad x_2 \;=\; 2}} \tag{74}$$

■

[4] Husk: En 2.-gradsligning har max 2 stk. løsninger.

Oppgave 10: (lineære ligningssystem)

a) Ligningssystem:

$$\begin{aligned} 3x + 7y - z &= 0 \\ 5x + y - z &= 1 \end{aligned} \tag{75}$$

Løser med hensyn på f.eks. z alene i den første ligningen:

$$z = 3x + 7y \tag{76}$$

Sette denne z'en inn i den andre ligningen:

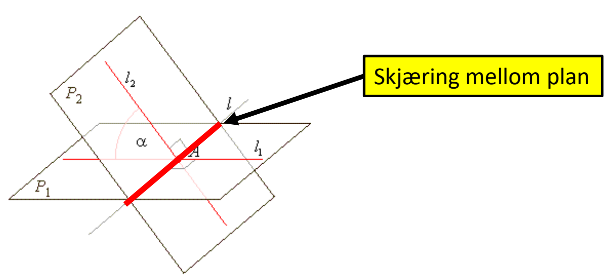
$$5x + y - z = 1 \tag{77}$$

$$5x + y - 3x + 7y = 1 \tag{78}$$

$$\underline{2x - 6y = 1} \tag{79}$$

Vi har her bare 2 ligninger, men 3 ukjente.
Det betyr at alle kominasjoner av x og y som oppfyller lign.(79) oppfyller ligningsystemet, dvs. det finnes uendelig mange løsninger av ligningsystemet.

Geometrisk så tilsvarer løsningsmengden linjen $2x - 6y = 1$, som er skjæringen mellom planene i lign.(75).



Figur 1: Skjæring mellom plan.

b) Ligningssystem:

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ x - y &= 5 \end{aligned} \tag{80}$$

Løser med hensyn på f.eks. x alene i den andre ligningen:

$$x = y + 5 \tag{81}$$

Sette denne z'en inn i den andre ligningen:

$$2x - 2y = 5 \tag{82}$$

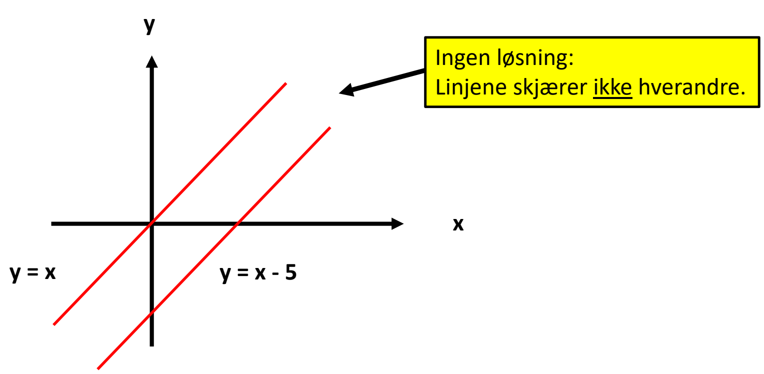
$$2(y + 5) - 2y = 5 \tag{83}$$

$$\cancel{2y} + 10 - \cancel{2y} = 5 \tag{84}$$

$$\underline{\overbrace{10 = 5}^{\text{selvmotsigelse}}} \tag{85}$$

Vi har en selvmotsigelse.
Det betyr at det er ingen løsninger.

Geometrisk så tilsvarer løsningsmengen at linjene ikke skjærer hverandre.



Figur 2: Linjene skjærer ikke hverandre, dvs. ingen løsning.

c) Ligningssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 8 &= 0 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned} \tag{86}$$

Løser med hensyn på f.eks. y alene i den første ligningen:

$$3x + 2y = 1 \tag{87}$$

$$2y = 1 - 3x \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2} \tag{88}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2y = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3x \tag{89}$$

$$\underline{y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x} \tag{90}$$

Setter denne y'en inn i den første ligningen:

$$2x + 5y - 8 = 0 \tag{91}$$

$$2x + 5\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\right) - 8 = 0 \tag{92}$$

$$2x + \frac{5}{2} - \frac{15}{2}x - 8 = 0 \tag{93}$$

Samler x'en på venstre side og y'ene på høyre:

$$2x - \frac{15}{2}x = 8 - \frac{5}{2} \qquad \Big| \cdot 2 \tag{94}$$

$$2 \cdot 2x - \cancel{2} \cdot \frac{15}{\cancel{2}}x = 2 \cdot 8 - \cancel{2} \cdot \frac{5}{\cancel{2}} \tag{95}$$

$$4x - 15x = 16 - 5 \tag{96}$$

$$-11x = 11 \tag{97}$$

$$\underline{x = -1} \tag{98}$$

Finner y'en ved å sette inn $x = -1$ i lign.(90)

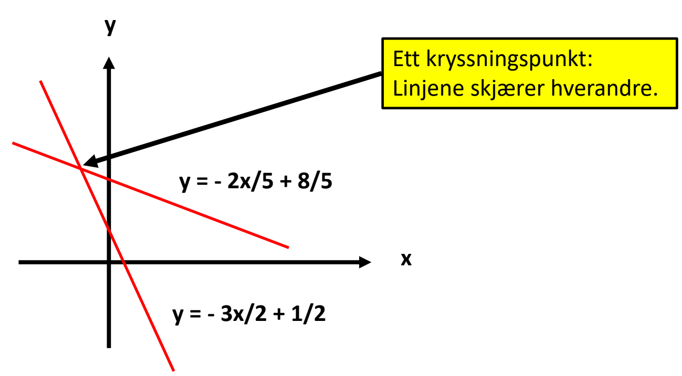
$$\underline{y} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \tag{99}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(-1) = \underline{2} \tag{100}$$

Den entydige løsningen til ligningsystemet er:

$$\underline{\underline{x = -1 \quad , \quad y = 2}} \tag{101}$$

Geometrisk så tilsvarer løsningsmengen at linjene skjærer hverandre.



Figur 3: Linjene skjærer hverandre, dvs. løsningssystemet har en entydig løsning.

■

Oppgave 11: (andregradsligning)

a) Diskriminanten $b^2 - 4ac$ for ligningen ($a = 2,\, b = 4,\, c = 2$)

$$2x^2 + 4x + 2 \;=\; 0 \tag{102}$$

er

$$\underline{\underline{b^2 - 4ac}} \;=\; 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \;=\; 16 - 16 \;=\; \underline{\underline{0}} \tag{103}$$

altså null. Bruker ABC-formelen for å finne løsningen til lign.(102):

$$\underline{\underline{x}} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{104}$$

$$=\; \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \tag{105}$$

$$=\; \frac{-4 \pm 0}{4} \tag{106}$$

$$=\; \underline{\underline{-1}} \tag{107}$$

altså kun èn løsning til lign.(102).

b) Diskriminanten $b^2 - 4ac$ for ligningen: $\quad (\; a = 2, \, b = 4, \, c = -2 \;)$

$$2x^2 + 4x - 2 \;=\; 0 \tag{108}$$

er

$$\underline{\underline{b^2 - 4ac}} \;=\; 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) \;=\; 16 + 16 \;=\; 2 \cdot 16 \;=\; \underline{\underline{32}} \tag{109}$$

altså positiv: $b^2 - 4ac > 0$.
Bruker ABC-formelen for å finne løsningen til lign.(108):

$$\begin{aligned}
\underline{x} \;&=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && (110)\\
&=\; \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} && (111)\\
&=\; \frac{-4 \pm \sqrt{2 \cdot 16}}{4} && (112)\\
&=\; \underline{\frac{-4 \pm \sqrt{2} \cdot 4}{4}} && (113)
\end{aligned}$$

som gir

$$\underline{\underline{x_1 \;=\; -1 + \sqrt{2} \quad \text{og} \quad x_2 \;=\; -1 - \sqrt{2}}} \tag{114}$$

altså to løsninger.

c) Diskriminanten $b^2 - 4ac$ for ligningen: $\quad (\ a = 2, \ b = 4, \ c = 8 \ )$

$$x^2 + 4x + 8 \ = \ 0 \tag{115}$$

er

$$\underline{\underline{b^2 - 4ac}} \ = \ 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 \ = \ 16 - 32 \ = \ \underline{\underline{-16}} \tag{116}$$

altså negativ: $\quad b^2 - 4ac < 0$.
Bruker ABC-formelen for å finne løsningen til lign.(115):

$$\underline{x} \ = \ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{117}$$

$$= \ \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \tag{118}$$

$$= \ \underline{\frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}} \tag{119}$$

som $\quad$ ikke gir noen løsning $\quad$ fordi man kan ikke ta kvadratroten av et negativt tall. [5]

■

[5] Komplekse tall er ikke pensum i dette kurset.

Oppgave 12: (økonomi)

At renten skal fordobles på $n = 10$ år betyr at

$$K_{10} \;=\; 2K_0 \tag{120}$$

Setter inn dette i renteformelen og løser med hensyn på r alene:

$$K_{10} \;=\; K_0 \overbrace{(1+r)^{10}}^{\text{vekstfaktor}} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{K_0} \tag{121}$$

$$\frac{K_{10}}{K_0} \;=\; (1+r)^{10} \tag{122}$$

$$2 \;=\; (1+r)^{10} \tag{123}$$

hvor vi har bruk at $\frac{K_{10}}{K_0} = 2$ fra lign.(123).
Dermed kan vi fortsette å løse med hensyn på r alene:

$$2 \;=\; (1+r)^{10} \tag{124}$$

$$\sqrt[10]{2} \;=\; \sqrt[10]{(1+r)^{10}} \qquad \text{ta 10. kvadratrot} \tag{125}$$

$$2^{\frac{1}{10}} \;=\; \left((1+r)^{10}\right)^{\frac{1}{10}} \qquad \text{som er det samme som å opphøye alt i } \frac{1}{10} \text{ potens} \tag{126}$$

$$2^{\frac{1}{10}} \;=\; (1+r)^{10\cdot\frac{1}{10}} \tag{127}$$

$$2^{\frac{1}{10}} \;=\; (1+r)^{1} \tag{128}$$

$$2^{\frac{1}{10}} \;=\; 1+r \tag{129}$$

Til slutt regner vi ut den numeriske verdien:

$$\underline{r} \quad = \quad 2^{\frac{1}{10}} - 1 \quad = \quad \underline{0.0718} \tag{130}$$

Dersom renten er $\underline{\underline{r = 7.18\ \%}}$ så fordobles kapitalen på 10 år.

■

Oppgave 13: (ulikheter)

a) Løser ulikheten:

$$2x - (3 + 7x) \quad > \quad x + 9 \tag{131}$$

$$2x - 3 - 7x \quad > \quad x + 9 \qquad \text{(løser opp parentesen)} \tag{132}$$

$$2x - 7x - x \quad > \quad 9 + 3 \qquad \text{(x'ene på venstre side og tallene på høyre)} \tag{133}$$

$$\underline{-6x \ > \ 12} \tag{134}$$

Når vi deler på -6 (negativt) på begge sider så må vi SNU fortegnet:

$$\frac{-6x}{-6} \quad < \quad \frac{12}{-6} \tag{135}$$

$$\underline{\underline{x < \ -2}} \tag{136}$$

b) Løser ulikheten:

$$\frac{3x+4}{2} > \frac{6x+7}{8} \tag{137}$$

$$8 \cdot \frac{3x+4}{2} > \cancel{8} \cdot \frac{6x+7}{\cancel{8}} \qquad \Big| \cdot 8 \tag{138}$$

$$4(3x+4) > 6x+7 \tag{139}$$

$$12x+16 > 6x+7 \tag{140}$$

$$12x-6x > 7-16 \qquad (x'\text{ene på venstre side og tallene på høyre}) \tag{141}$$

$$\underline{6x > -9} \tag{142}$$

Når vi deler på 6 (positivt) på begge sider så trenger vi <u>ikke</u> snu fortegnet:

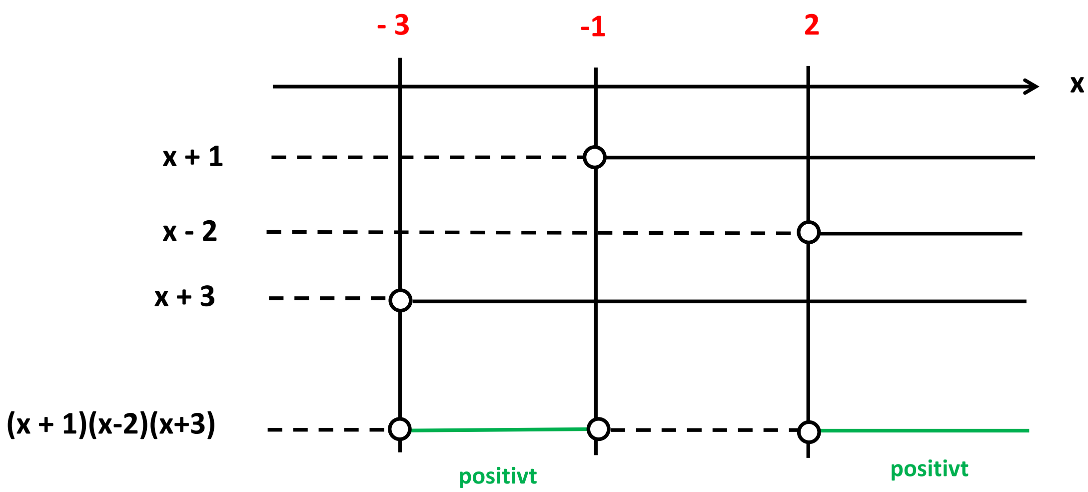
$$\frac{6x}{6} > -\frac{9}{6} \tag{143}$$

$$\underline{\underline{x > -\frac{3}{2}}} \tag{144}$$

c) Ulikheten:

$$(x+1)(x-2)(x+3) \ > \ 0 \tag{145}$$

er på <u>produktform</u>. Dermed kan vi finne løsningen via fortegnsskjema:



Figur 4: Fortegnsskjema for lign.(145).

Fra dette fortegnsskjemaet ser vi løsningen:

$$\underline{\underline{-3 < x < -1 \quad \text{eller} \quad x > 2}} \tag{146}$$

d) Ulikheten:

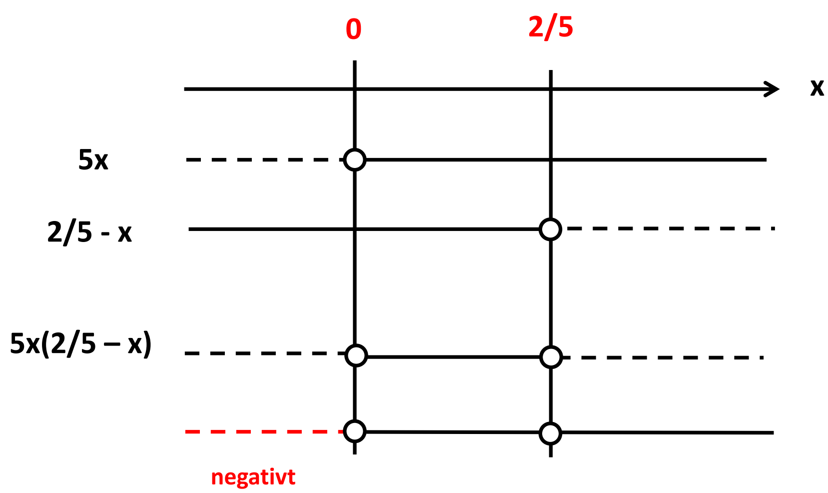
$$2x - 5x^2 \; < \; 0 \tag{147}$$

kan vi faktorisere, dvs. skrive på <u>produktform</u>.

$$x(2-5x) \quad < \quad 0 \tag{148}$$

$$5x\left(\frac{2}{5} - x\right) \quad < \quad 0 \tag{149}$$

Dermed kan vi finne løsningen via fortegnsskjema:



Figur 5: Fortegnsskjema for lign.(149).

Fra dette fortegnsskjemaet ser vi løsningen:

$$\underline{\underline{x < 0}} \tag{150}$$

Oppgave 14: (%-regning , økonomi , "*BØK105 Finansregnskap 1*")

a) Utsalgsprisen p_{ut} er innkjøpspris + påslag

$$\underline{\underline{p_{\text{ut}}}} = \text{innkjøpspris} + \text{påslag} \tag{151}$$

$$= p_0 + f_{\text{på}} p_0 = \underline{\underline{p_0\big(1 + f_{\text{på}}\big)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{152}$$

b) Siden $p_0 = 540$ NOK og $f_{\text{på}} = 2.7$ får man, via resultatet fra oppgave **a**:

$$\underline{\underline{p_{\text{ut}}}} \overset{\text{lign.(152)}}{=} p_0\big(1 + f_{\text{på}}\big) \tag{153}$$

$$= 540\big(1 + 2.7\big) \text{ NOK} = \underline{\underline{1998 \text{ NOK}}} \tag{154}$$

c) Rabaterte prisen p_{rab} er gitt ved:

$$p_{\text{rab}} = p_{\text{ut}} - \text{rabatt} \tag{155}$$

I oppgaven står det at man får avslag f_{av} på utslagsprisen p_{ut}.
Det betyr:

$$\text{rabatt} = p_{\text{ut}} f_{\text{av}} \tag{156}$$

Setter så lign.(156) inn i lign.(155):

$$\underline{p_{\text{rab}}} = p_{\text{ut}} - \text{rabatt} \tag{157}$$

$$= p_{\text{ut}} - p_{\text{ut}} f_{\text{av}} \tag{158}$$

$$= \underline{p_{\text{ut}} \left(1 - f_{\text{av}} \right)} \tag{159}$$

Men fra oppgave **a** vet vi at $p_{\text{ut}} = p_0 (1 + f_{\text{på}})$.
Dermed:

$$\underline{\underline{p_{\text{rab}}}} = p_{\text{ut}} \left(1 - f_{\text{av}} \right) \tag{160}$$

$$= \underline{\underline{p_0 \left(1 + f_{\text{på}} \right) \left(1 - f_{\text{av}} \right)}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{161}$$

d) Tallverdi for rabattert pris p_{rab}:

$$\underline{\underline{p_{\text{rab}}}} = p_0 \left(1 + f_{\text{på}}\right)\left(1 - f_{\text{av}}\right) \tag{162}$$

$$= 540 \left(1 + 2.7\right)\left(1 - 0.8\right) \ \text{NOK} = \underline{\underline{399.6 \ \ \text{NOK}}} \tag{163}$$

Kommentar:

Siden den nye rabatterte prisen er lavere enn innskjøpsprisen $p_0 = 540$ NOK så taper butikken på hver jakke de selger. [6]

[6] De taper $|p_{\text{rab}} - p_0| = |399.6 - 540|$ NOK $= 140.4$ NOK på hver jakke.

e) Oppgaven går ut på å vise sammenhengen mellom $f_{\text{på}}$ og f_{av} dersom $p_{\text{rad}} = p_0$. Dermed:

$$
\begin{aligned}
p_{\text{rab}} &= p_0 && (164)\\
\cancel{p_0}\big(1+f_{\text{på}}\big)\big(1-f_{\text{av}}\big) &= p_0 && (165)\\
\big(1+f_{\text{på}}\big)\big(1-f_{\text{av}}\big) &= p_0 && (166)\\
\big(1+f_{\text{på}}\big)\big(1-f_{\text{av}}\big) &= 1 && (167)\\
1+f_{\text{på}} &= \frac{1}{1-f_{\text{av}}} && (168)\\
f_{\text{på}} &= \frac{1}{1-f_{\text{av}}} - 1 && (169)
\end{aligned}
$$

Men siden $1 = \frac{1-f_{\text{av}}}{1-f_{\text{av}}}$:

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{f_{\text{på}}}} &= \frac{1}{1-f_{\text{av}}} - \frac{1-f_{\text{av}}}{1-f_{\text{av}}} && (170)\\
&= \frac{1-\big(1-f_{\text{av}}\big)}{1-f_{\text{av}}} = \underline{\underline{\frac{f_{\text{av}}}{1-f_{\text{av}}}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} && (171)
\end{aligned}
$$

f) Med avslag $f_{\text{av}} = 80$ % så må påslaget $f_{\text{på}}$ være:

$$\underline{\underline{f_{\text{på}}}} = \frac{f_{\text{av}}}{1 - f_{\text{av}}} \tag{172}$$

$$= \frac{0.80}{1 - 0.80} = \underline{\underline{4}} \qquad (= 400\ \%) \tag{173}$$

for at butikken skal gå i null.

■