

LØSNING: Oppgavesett nr. 3

“MAT100 Matematikk”, 2018 (v02)

Oppgave 1: (derivasjon)

a) Den deriverte av $f(q)$ mhp. q :

$$f(q) = a q^n \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{d f(q)}{d q} = a n q^{n-1}}} \quad (1)$$

b) Den deriverte av $f(q)$ mhp. q :

$$f(q) = 7 q^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{d f(q)}{d q} = 7 \cdot 3 q^{3-1} = 21 q^2}}} \quad (2)$$

c) Den deriverte av $f(q)$ mhp. q :

$$f(q) = \frac{7}{q^3} = 7 q^{-3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{d f(q)}{d q} = 7 \cdot (-3) q^{-3-1} = -\frac{21}{q^4}}}} \quad (3)$$

d) Den deriverte av $f(q)$ mhp. q :

$$f(q) = \frac{7}{q^{\frac{1}{3}}} = 7 \cdot q^{-\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{d f(q)}{d q} = 7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) q^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{7}{3} \frac{1}{q^{\frac{4}{3}}}}} \quad (4)$$

e) Skriver om $f(z)$ via “kjelleromskrivningen”:

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = z + z^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{df(z)}{dz} = 1 + (-1)z^{-2} = 1 - \frac{1}{z^2} \quad (5)$$

f) Skriver om $c(x)$ via “kjelleromskrivningen”:

$$\underline{c(x)} = dc + \frac{x}{2}h + \frac{d}{x}s = \underline{d \cdot c + \frac{h}{2}x + dsx^{-1}} \quad (6)$$

og deriverer deretter med henyn på x :

$$\frac{dc(x)}{dx} = 0 + \frac{h}{2} + ds(-1)x^{-1-1} = \frac{h}{2} - \frac{ds}{x^2} \quad (7)$$

g) Derivasjonsmessig er $f(z)$ og $c(x)$ de samme fordi variablene skalerer på samme måte, de har samme variabel-avhengighet: ¹

$$c(x) = dc + \frac{\textcolor{red}{x}}{2}h + \frac{d}{\textcolor{red}{x}}s \quad (8)$$

$$f(z) = \textcolor{red}{z} + \frac{1}{\textcolor{red}{z}} \quad (9)$$

■

¹Konstanter er ikke viktige i derivasjonssammenheng: den deriverte av konstanter er null, og en konstant foran en variabel er ikke viktig for derivasjonen som sådan. Spesielt blir uttrykkene identiske dersom $d = s = 1$, $c = 0$ og $h = 1$.

Oppgave 2: (priselastisitet, økonomi)

a) Bruk regelen for derivasjon av et produkt:

$$\underline{\underline{\frac{d R(p)}{dp}}} = \frac{d}{dp} \left(p x(p) \right) \quad (10)$$

$$= \underbrace{\frac{dp}{dp}}_{=1} x(p) + p \frac{dx(p)}{dp} \quad (11)$$

$$= \underline{\underline{x(p) + p \frac{dx(p)}{dp}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (12)$$

b) I oppgaven blir vi bedt om å bruke definisjonen av priselastisiteten $E(p)$:

$$E(p) = \frac{dx(p)}{dp} \frac{p}{x(p)} \quad (13)$$

Løser så med hensyn på $\frac{dx(p)}{dp}$ alene:

$$E(p) = \frac{dx(p)}{dp} \frac{p}{x(p)} \quad \Bigg| \cdot x(p) \quad (14)$$

$$x(p) E(p) = \frac{dx(p)}{dp} \frac{p}{\cancel{x(p)}} \cancel{x(p)} \quad (15)$$

$$x(p) E(p) = \frac{dx(p)}{dp} p \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{p} \quad (16)$$

$$\frac{x(p) E(p)}{p} = \frac{dx(p)}{dp} \underbrace{\frac{p}{p}}_{=1} \quad (17)$$

Altså uttrykket $\frac{d x(p)}{d p}$ alene er:

$$\frac{d x(p)}{d p} = \frac{x(p) E(p)}{p} \quad (18)$$

Setter dette uttrykket inn i svaret fra oppgave **2a**:

$$\frac{d R(p)}{d p} = x(p) + p \frac{d x(p)}{d p} \quad (19)$$

$$= x(p) + \cancel{p} \frac{x(p) E(p)}{\cancel{p}} \quad (20)$$

$$= x(p) + x(p) E(p) \quad (21)$$

$$= \underline{\underline{x(p) \left(1 + E(p) \right)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (22)$$

- c) For reiser på første klasse ("*First Class*") er priselastisiteten $E(p) = -0.3$. Bruker resultatet fra oppgave **2b**, dvs. lign.(22), gir da:

$$\frac{dR(p)}{dp} = x(p) \left(1 + E(p) \right) \quad (23)$$

$$= x(p) \left(1 + (-0.3) \right) \quad (24)$$

$$= \underline{0.7 x(p)} > 0 \quad (\text{positivt}) \quad (25)$$

altså stigningstallet $\frac{dR(p)}{dp}$ er positivt. Dermed:

øker

inntekten $R(p)$ til flyselskapene dersom prisen p øker.

- d) For fritidsreiser ("*Pleasure Travellers*") er priselastisiteten $E(p) = -1.5$. Bruker resultatet fra oppgave **2b**, dvs. lign.(22), gir da:

$$\frac{dR(p)}{dp} = x(p) \left(1 + E(p) \right) \quad (26)$$

$$= x(p) \left(1 + (-1.5) \right) \quad (27)$$

$$= \underline{-0.5 x(p)} < 0 \quad (\text{negativt}) \quad (28)$$

altså stigningstallet $\frac{dR(p)}{dp}$ er negativt. Dermed:

minker

inntekten $R(p)$ til flyselskapene dersom prisen p øker.



Oppgave 3: (derivasjon)

a) Den deriverte av $f(x)$ mhp. x :

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(2x^3 - 3x^2 - 8x + 5 \right) = 3 \cdot 2x^{3-1} - 2 \cdot 3x^{2-1} - 8 + 0 \quad (29)$$

$$= \underline{\underline{6x^2 - 6x - 8}} \quad (30)$$

b) Den deriverte av $f(x)$ mhp. x :

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} x^{-3} \right) = (-3) \cdot \frac{2}{3} x^{-3-1} = \underline{\underline{-2x^{-4}}} \quad (31)$$

c) Denne funksjonen er en brøk:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1} \quad (32)$$

som er på formen:

$$f(x) = \frac{u}{v} \quad (33)$$

hvor $u = x^2 + 2$ og $v = x - 1$

Bruker så regelen for derivasjon av en brøk:

$$\frac{d f(x)}{\underline{\underline{dx}}} = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (34)$$

$$= \frac{(x^2 + 2)'(x - 1) - (x^2 + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} \quad (35)$$

$$= \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 2)1}{(x - 1)^2} \quad (36)$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - (x^2 + 2)}{(x - 1)^2} \quad (37)$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 2}{(x - 1)^2} \quad (38)$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 2}{\underline{\underline{(x - 1)^2}}} \quad (39)$$

hvor det ikke er naturlig å faktorisere lign.(39) ytterligere siden vi ikke oppnår noen kansellering og forenkling av uttrykket.

d) Før vi deriverer, skriv om via "kjelleromskrivningen" og bruk at $\sqrt{x} = x^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \underline{f(x)} &= -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} \\ &= -2x^{-1/2} + \frac{2}{3}x^1x^{1/2} = \underline{\underline{-2x^{-1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}}} \end{aligned} \quad (40)$$

siden $x x^{1/2} = x^{1+1/2} = x^{3/2}$.

Deriverer:

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{d}{d x}\left(-2 x^{-1 / 2}+\frac{2}{3} x^{3 / 2}\right) \quad (41)$$

$$= -2 \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-1 / 2-1}+\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{3 / 2-1} \quad (42)$$

$$= x^{-3 / 2}+x^{1 / 2}=\frac{1}{x \sqrt{x}}+\sqrt{x} \quad (43)$$

hvor man kan velge å skrive svaret på formen $x^{-3 / 2}+x^{1 / 2}$ eller $\frac{1}{x \sqrt{x}}+\sqrt{x}$. Begge svar er like riktige.

- e) Det er flere måter å løse denne oppgaven på.
 Det mest intuitive er kanskje å bruke regelen for **derivasjon av et brøk**.
 Men dersom vi først gjør en enkel omskrivning av brøken samt "kjelleromskrivningen":

$$f(x)=\frac{0.75 x^2-150 x+85\,000}{x}=0.75 x-150+85\,000 x^{-1} \quad (44)$$

så er det bare "**hovedregelen**" vi trenger å benytte, ikke regelen for derivasjon av en brøk:

$$\frac{d f(x)}{d x}=\frac{d}{d x}\left(0.75 x-150+85\,000 x^{-1}\right) \quad (45)$$

$$=0.75 x-0+85\,000 \cdot(-1) x^{-1-1}=\frac{85\,000}{x^2} \quad (46)$$

Dersom vi hadde brukt regelen for derivasjon av en brøk så hadde vi selvsagt fått samme svar.

- f) Også denne oppgaven kan løses på flere måter.
 Det mest intuitive er kanskje å bruke regelen for **derivasjon av et produkt**.

$$\frac{d f(x)}{dx} = \left(\underbrace{(4x - 3)}_{= u} \underbrace{(3x + 2)}_{= v} \right)' \quad (47)$$

$$= (u v)' \quad (48)$$

$$= u'v + uv' \quad (49)$$

$$= (4x - 3)'(3x + 2) + (4x - 3)(3x + 2)' \quad (50)$$

$$= 4(3x + 2) + (4x - 3)3 \quad (51)$$

$$= 12x + 8 + 12x - 9 \quad (52)$$

$$= \underline{\underline{24x - 1}} \quad (53)$$

■

Oppgave 4: (logistikk , “SCM200 Lager- og produksjonsplanlegging”)

a) **Mimimum** av total kostnad $c(x)$ inntreffer når **stigningstallet = 0**:

$$\text{stigningstallet til } c(x) = 0 \quad (54)$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = 0 \quad (55)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h}{2}x + \frac{ds}{x} \right) = 0 \quad (56)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h}{2}x + dsx^{-1} \right) = 0 \quad (57)$$

$$\frac{h}{2} + ds(-1)x^{-1-1} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{h}{2} - \frac{ds}{x^2} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{h}{2} = \frac{ds}{x^2} \quad \Bigg| \cdot x \quad (60)$$

$$\underline{\underline{\frac{h}{2}x = \frac{ds}{x}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (61)$$

med andre ord: kostnaden minimeres når lagerkostnaden = bestillingskostnaden.

b) For å vise at lign.(61) inntreffer ved *minimum*, og ikke ved maksimum, må gjøre en tilleggstest: Enten 1. derivasjonstesten eller 2. derivasjonstesten.

Her det er mest hensiktsmessig å velge 2. derivasjonstesten. (Det gir minst arbeid). Dersom man deriverer $TC(Q)$ to ganger så finner man at:

$$\frac{d^2c(x)}{dx^2} = \frac{2ds}{x^3} > 0 \quad (62)$$

som alltid er positiv for $x > 0$, $d > 0$ og $s > 0$.

Derfor representerer lign.(61) et minimum for $c(x)$.

c) i) Ut fra lign.(61) kan vi løse ut x alene:

$$\frac{h}{2} x = \frac{ds}{x} \quad \Bigg| \cdot x \quad (63)$$

$$\frac{h}{2} x^2 = ds \quad \Bigg| \cdot \frac{2}{h} \quad (64)$$

$$x^2 = \frac{2 ds}{h} \quad (65)$$

$$\underline{\underline{x^*}} = \sqrt{\frac{2 ds}{h}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (66)$$

hvor notasjonen x^* er introdusert for optimal x .

ii) Tolkning av lign.(66):

$$\underline{\underline{x^*}} = \text{det kvantum (av f.eks. råvarer) som må bestilles for å minimere} \\ \underline{\underline{\text{lager- og bestillingskostnaden } c(x)}} \quad (67)$$

d) i) Den totale kostnaden i minimum, dvs. $c_{\min} = c(x^*)$, er:

$$\underline{\underline{c_{\min}}} = c(x^*) \quad (68)$$

$$= \frac{h}{2} x^* + \frac{ds}{x^*} \quad (69)$$

$$= \frac{h}{2} \sqrt{\frac{2 ds}{h}} + \frac{ds}{\sqrt{\frac{2 ds}{h}}} \quad (70)$$

$$= \sqrt{\frac{ds h}{2}} + \sqrt{\frac{ds h}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2 ds h}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (71)$$

Å løse denne oppgaven ”rett frem etter nesen” slik som vist ovenfor gjør at det blir en del mellomregninger. Antall mellomregninger reduseres dersom man gjør det på følgende elegante måte: ²

Fra oppgave 4a vet vi at lager- og bestillingskostnadene er like i minimum av $c(x)$, dvs. $\frac{x^*}{2} h = \frac{ds}{x^*}$. Dermed:

$$\underline{\underline{c_{\min}}} = c(x^*) \quad (72)$$

$$= \frac{h}{2} x^* + \frac{ds}{x^*} \quad (73)$$

$$= 2 \frac{h}{2} x^* \quad (74)$$

$$= h x^* \quad (75)$$

$$= h \sqrt{\frac{2 ds}{h}} \quad (76)$$

$$= \sqrt{h^2 \frac{2 ds}{h}} = \underline{\underline{\sqrt{2 ds h}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (77)$$

ii) Tolkning av lign.(66):

$$\underline{\underline{c_{\min}}} = \underline{\underline{\text{den minste lager- og bestillingskostnaden } c(x) \text{ man kan oppnå per år under de gitte betingelsene}}} \quad (78)$$

²Det er nok at man gjør det på en av måtene.

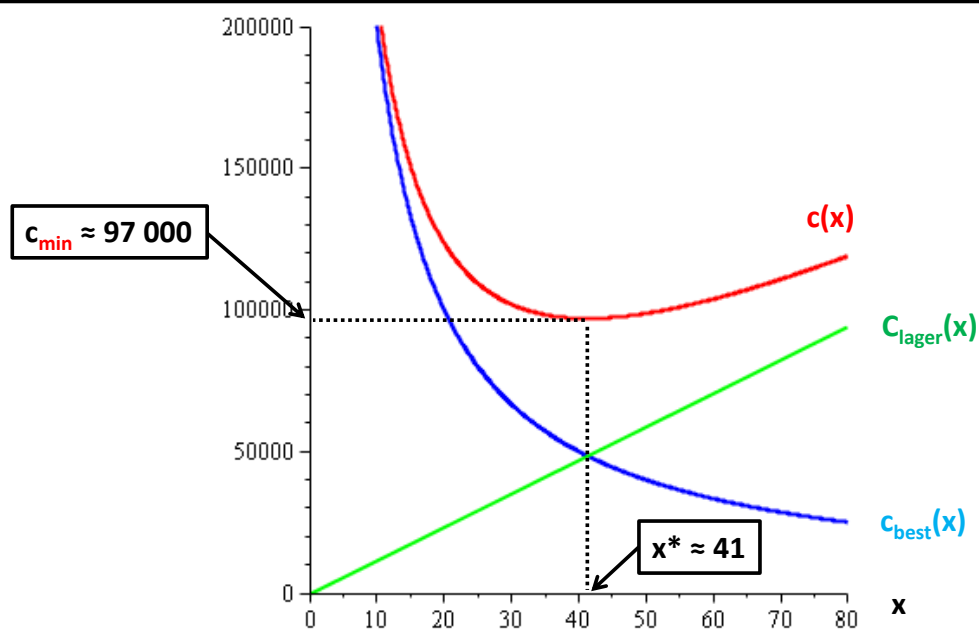
- e) Grafer: se figur på side 14.

Av figuren på side 14 ser vi at grafene til $c_{\text{lager}}(x)$ og $c_{\text{best}}(x)$ skjærer hverandre akkurat i minimum av den totale kostnaden $c(x) = c_{\text{lager}}(x) + c_{\text{best}}(x)$. Denne grafiske observasjonen stemmer overens med det analytiske resultatet fra oppgave 4a.



x	0	20	40	80
$c_{\text{lager}}(x)$	0	23 500	47 000	94 000

x	10	20	30	40	50	60	70	80
$c_{\text{best}}(x)$	200 000	100 000	66 667	50 000	40 000	33 333	28 571	25 000



Figur 1: Løsning på oppgave 5e.

Oppgave 5: (kjerneregelen)

a) Vi har funksjonen $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Med kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 - 1$ kan vi definere den “*ytre*” funksjonen:

$$g(u) = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}} \quad (79)$$

Bruker kjerneregelen:

$$\underline{\underline{\frac{d f(x)}{d x}}} \stackrel{\text{kj. regel}}{=} \frac{d g(u)}{d u} \cdot \frac{d u}{d x} \quad (80)$$

$$= \frac{d}{d u} \left(u^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \frac{d}{d x} \left(x^2 - 1 \right) \quad (81)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}-1}}_{= \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}}} \cdot 2x \quad (82)$$

$$= \frac{1}{3 u^{\frac{2}{3}}} \cdot 2x \quad (83)$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x}{3 (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}}} \quad (84)$$

b) Vi har funksjonen $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

Med kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 - 1$ kan vi definere den “*ytre*” funksjonen:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} = u^{-\frac{1}{3}} \quad (85)$$

Bruker kjerneregelen:

$$\underline{\underline{\frac{d f(x)}{d x}}} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{d g(u)}{d u} \cdot \frac{d u}{d x} \quad (86)$$

$$= \frac{d}{d u} \left(u^{-\frac{1}{3}} \right) \cdot \frac{d}{d x} \left(x^2 - 1 \right) \quad (87)$$

$$= - \underbrace{\frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}-1}}_{= \frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}}} \cdot 2x \quad (88)$$

$$= - \frac{1}{3 u^{\frac{4}{3}}} \cdot 2x \quad (89)$$

$$= - \underline{\underline{\frac{2x}{3 (x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}}}} \quad (90)$$

c) Vi skriver først om funksjonen: (faktoriserer nevner)

$$\underline{f(x)} = 5 + x^2 - \frac{x}{x^3 + x} \quad (91)$$

$$= 5 + x^2 - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2 + 1)} = 5 + x^2 - \frac{1}{x^2 + 1} = \underline{5 + x^2 - (x^2 + 1)^{-1}} \quad (92)$$

Denne ligningen kan skrives:

$$f(x) = 5 + x^2 - g(u) \quad (93)$$

hvor den “*ytre*” funksjonen $g(x)$ er:

$$g(u) = u^{-1} \quad (94)$$

og kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 + 1$. Med “vanlige” derivasjonsregler og kjerneregelen får vi da:

$$\underline{\underline{\frac{d f(x)}{d x}}} = \frac{d}{d x} \left(5 + x^2 - g(u) \right) \quad (95)$$

$$= 0 + 2x - \frac{d g(u)}{d u} \cdot \frac{d u}{d x} \quad (96)$$

$$= 2x - \frac{d}{d u} \left(u^{-1} \right) \cdot \frac{d}{d x} \left(x^2 + 1 \right) \quad (97)$$

$$= 2x - (-1) u^{-1-1} \cdot 2x \quad (98)$$

$$= 2x + \frac{2x}{u^2} \quad (99)$$

$$= 2x + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \quad (100)$$

$$= \underline{\underline{2x \left(1 + \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \right)}} \quad (101)$$

NB: Det er flere måter å skrive svaret på. Lign.(101) er en mulig måte.

I dette tilfellet er det ikke noen åpenbar måte å forenkle svaret ytterligere på enn det som allerede er gjort.

d) Bruk derivasjon av et **produkt**:

Det er minst to måter å løse denne oppgaven på. Man kan bruke derivasjon av et produkt. Eller man kan multiplisere ut uttrykket med “*pilmetoden*”, og deretter bruke “vanlige” derivasjonsregler.

I dette løsningsforslaget velges metoden med derivasjon av et produkt:

$$f(x) = \underbrace{(ax^2 + bx)}_{= u} \underbrace{(cx + d)}_{= v} \quad (102)$$

Dermed:

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \textcolor{red}{u}'v + u\textcolor{blue}{v}' \quad (103)$$

$$= (a2x + b)(cx + d) + (ax^2 + bx)c \quad (104)$$

$$= 2acx^2 + 2adx + bcx + bd + acx^2 + bcx \quad (105)$$

$$= \underline{\underline{3acx^2 + 2(ad + bc)x + bd}} \quad (106)$$

e) Vi definerer den “ytre” funksjonen:

$$g(u) = u^3 \quad (107)$$

med kjernen

$$u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x+1}{x-1} \quad (108)$$

Den deriverte av kjernen er: (derivasjon av en brøk)

$$\frac{d u}{d x} = \frac{d}{d x} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad (109)$$

$$= \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1 \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} \quad (110)$$

Da ligger til rette for å bruk kjerneregelen:

$$\frac{d f(x)}{d x} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{d g(u)}{d u} \cdot \frac{d u}{d x} \quad (111)$$

$$= \frac{d}{d u} \left(u^3 \right) \cdot \left(-\frac{2}{(x-1)^2} \right) \quad (112)$$

$$= 3 u^2 \cdot \left(-\frac{2}{(x-1)^2} \right) \quad (113)$$

$$= 3 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{(x-1)^2} \right) \quad (114)$$

$$= -6 \frac{(x+1)^2}{(x-1)^4} \quad (115)$$

■

Oppgave 6: (lokale ekstramalpunkt)

a) Deriverer $f(x)$:

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(3x^5 - 45x^3 + 100 \right) \quad (116)$$

$$= 3 \cdot 5x^{5-1} - 45 \cdot 3x^{3-1} + 0 \quad (\text{hovedregelen}) \quad (117)$$

$$= \underline{\underline{15x^4 - 135x^2}} \quad (118)$$

b) De kritiske punktene finner vi via 1. derivasjonstesten:

$$\frac{d f(x)}{dx} = 0 \quad (119)$$

Bruker resultatet fra oppgave 6a, dvs. lign.(118).

$$\frac{d f(x)}{dx} = 0 \quad (120)$$

$$15x^4 - 135x^2 = 0 \quad (121)$$

Den siste ligningen kan vi faktorisere:

$$15x^4 - 135x^2 = 0 \quad (122)$$

$$15x^2(x^2 - 9) = 0 \quad (\text{faktorisere}) \quad (123)$$

$$15x^2(x - 3)(x + 3) = 0 \quad (\text{faktorisere mer}) \quad (124)$$

Det er altså 3 løsninger av ligningen $\frac{df(x)}{dx} = 0$:

$$\underline{x = -3}, \quad \underline{x = 0}, \quad \underline{x = 3} \quad (125)$$

Tilhørende funksjonsverdier er:

$$\underline{f(-3)} = 3 \cdot (-3)^5 - 45 \cdot (-3) + 100 = \underline{586} \quad (126)$$

$$\underline{f(0)} = 3 \cdot 0^5 - 45 \cdot 0 + 100 = \underline{100} \quad (127)$$

$$\underline{f(3)} = 3 \cdot 3^5 - 45 \cdot 3 + 100 = \underline{-386} \quad (128)$$

De kritiske punktene er dermed:

$$\underline{\underline{(x, y) = (-3, 586)}} \quad (129)$$

$$\underline{\underline{(x, y) = (0, 100)}} \quad (130)$$

$$\underline{\underline{(x, y) = (3, -386)}} \quad (131)$$

- c) For å sjekke hvilke(n) av de kritiske punktene i oppgave **6b** som representerer et lokalt ekstrameltpunkt så må vi se på den **2. deriverte**:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df(x)}{dx} \quad (132)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(15x^4 - 135x^2 \right) \quad (133)$$

$$= 15 \cdot 4x^{4-1} - 135 \cdot 2x^{2-1} \quad (134)$$

$$= \underline{60x^3 - 270x} \quad (135)$$

Ifølge **2. derivasjonstesten** er da:

$$\frac{d^2 f(-3)}{dx^2} = 60 \cdot (-3)^3 - 270 \cdot (-3) = \underline{-810} \quad (\text{negativt}) \quad (136)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = -3}} \text{ er et lokalt maksimum} \quad (137)$$

$$\frac{d^2 f(0)}{dx^2} = 60 \cdot 0^3 - 270 \cdot 0 = \underline{0} \quad (\text{verken negativt eller positivt}) \quad (138)$$

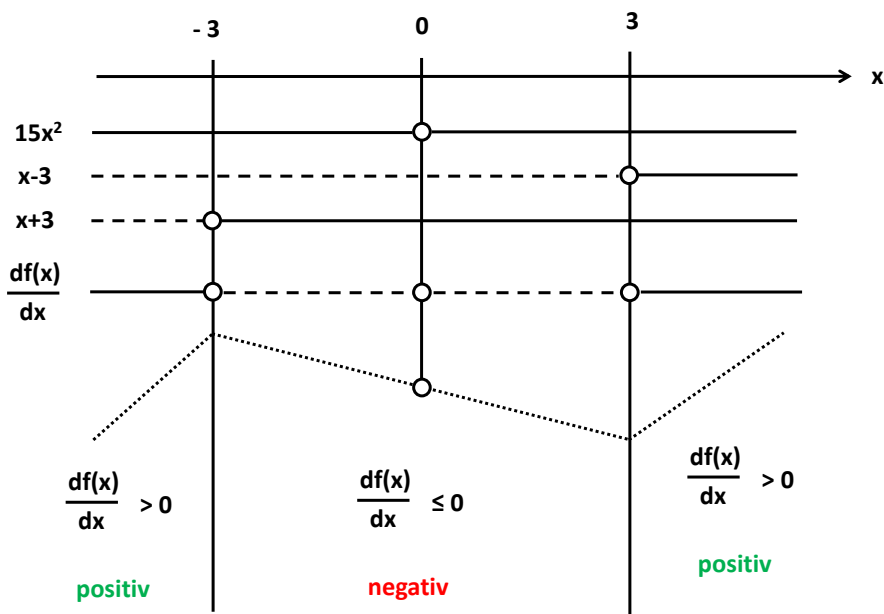
$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ er verken et lokalt maksimum eller lokalt minimum} \quad (139)$$

$$\frac{d^2 f(3)}{dx^2} = 60 \cdot 3^3 - 270 \cdot 3 = \underline{810} \quad (\text{positivt}) \quad (140)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 3}} \text{ er et lokalt minimum} \quad (141)$$

- d) Man kan også sette opp fortegnsskjema for $\frac{df(x)}{dx}$ og brukt den alternative formlieringen av 2. derivasjonstesten, men da må man faktorisere først:

$$\frac{df(x)}{dx} = 15^4 - 135x^2 = 15x^2(x^2 - 9) = \underbrace{15x^2(x-3)(x+3)}_{\text{faktorisert form}} \quad (142)$$



Figur 2: Fortegnsskjema for $\frac{df(x)}{dx} = 15x^4 - 135x^2 = 15x^2(x-3)(x+3)$.

Ifølge 2. derivasjonstesten er da:

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ skifter fra } + \text{ til } - \Rightarrow \underline{\underline{x = -3 \text{ lokalt maksimum}}} \quad (143)$$

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ skifter fra } - \text{ til } + \Rightarrow \underline{\underline{x = 3 \text{ lokalt minimum}}} \quad (144)$$

- e) 1. derivasjonstesten finner alle kandidatene til de kritiske punktene.
1. derivasjonstesten sier ikke noe om hva slags type lokalt ekstremalpunkt det dreier seg om, eller om det i det hele tatt er et lokalt ekstramalpunkt.

Det er 2. derivasjonstesten som kan avsløre hva slags type lokalt ekstremalpunkt det dreier seg om, eller om det i det hele tatt er et lokalt ekstramalpunkt.

Så at det kritiske punktet $x = 0$ er hverken lokalt maksimum eller lokalt minimum er ikke i konflikt med 1. derivasjonstesten.

■