

Ny og bedre versjon 2018

MAT100

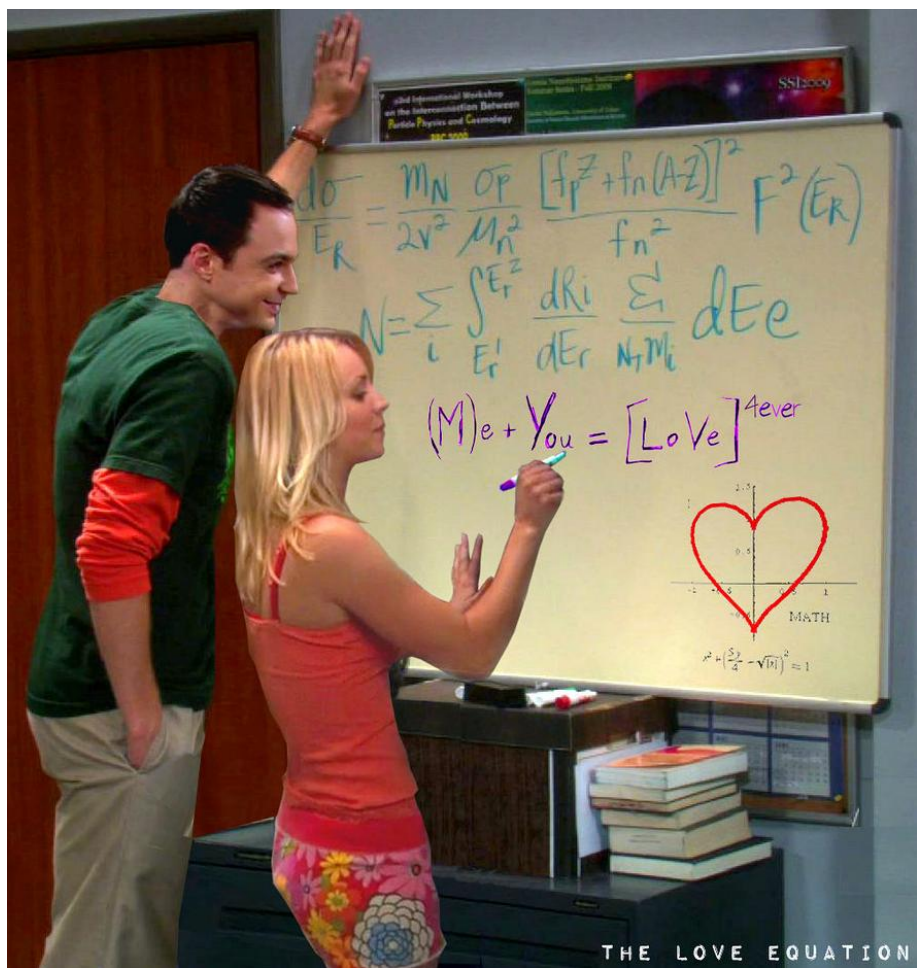
Matematikk

Kompendium 2018, del 2

Per Kristian Rekdal og Bård-Inge Pettersen



Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høyskole i logistikk



Figur 1: Matematikk er viktig.

Innhold

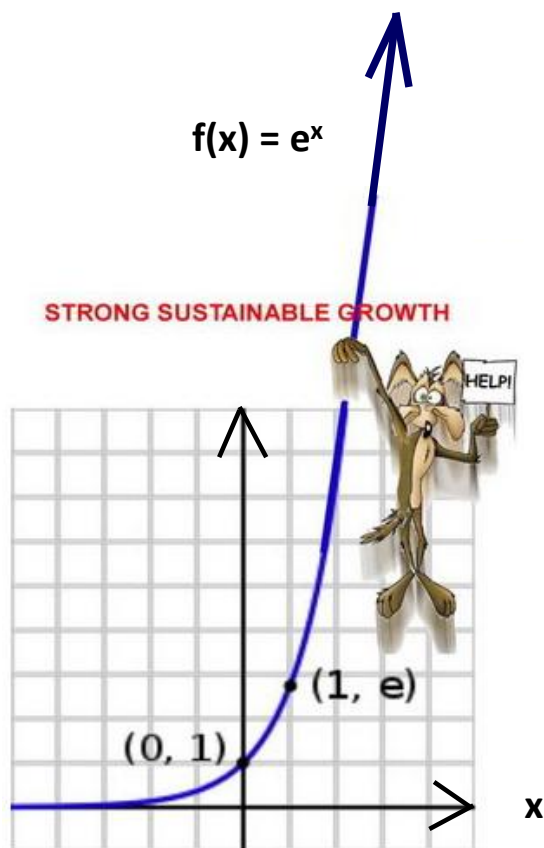
1	Grunnleggende emner	6
1.1	Tall og tallsystemer	7
1.2	Algebraiske uttrykk	9
1.2.1	Distributive Lov (“pilmetoden”)	12
1.3	Kvadratsetningene og konjugatsetningen	14
1.4	Brøkregning	15
1.4.1	Forkorte og utvide brøker	15
1.4.2	Sum av brøker	17
1.4.3	Multiplikasjon og divisjon med brøker	18
1.5	Potenser	21
1.5.1	Multiplikasjon VS addisjon	24
1.5.2	Cobb-Douglas produktfunksjon	26
1.6	Prefiks	29
1.7	Kvadratrot	31
1.8	Faktorisering	39
1.8.1	Faktorisert form eller ikke	41
1.8.2	Faktorisering viktig	41
1.9	Likninger	42
1.9.1	Lovlige operasjoner	43
1.9.2	To måter å føre ligninger på	44
1.10	1. gradsligninger	46
1.10.1	1. gradsligninger med én variabel	46
1.10.2	1. gradsligninger med to variabler	47
1.10.3	1. gradsligninger med tre variabler (ligningssystemer)	54
1.11	2. gradsligninger	61
1.11.1	2. gradsligninger med en variabel - <i>ABC</i> -formelen	61
1.11.2	Faktorisering og løsning av 2. gradsligninger	64
1.12	Ulikheter	66
1.12.1	Fortegnsskjema	77
1.13	Absoluttverdi	78
1.14	Regning med prosent	83
2	Funksjoner	92
2.1	Funksjoner	93
2.2	Koordinatsystem	96
2.3	Lineære funksjoner (rette linjer)	97
2.3.1	Ett- og to-punktsformelen	102

2.4	Simplex-algoritmen	108
2.5	Kvadratiske funksjoner (parabler)	115
2.5.1	Noen egenskaper til kvadratiske funksjoner (parabler)	116
2.6	Rasjonale funksjoner	125
3	Derivasjon	138
3.1	Derivasjon	139
3.2	Derivasjonsregler	141
3.3	Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner	159
3.4	Kjerneregelen	170
3.5	Lokale ekstremalpunkt	172
3.6	Ekstremalpunkt eller ikke?	177
3.7	Lokale ekstremalpunkt: 1. derivasjonstesten	178
3.8	Lokale ekstremalpunkt: 2. derivasjonstesten	180
3.9	Globale ekstremalpunkt	185
4	Ekspontial- og logaritmefunksjoner	193
4.1	Ekspontialfunksjonen	194
4.2	Tallet e , Eulers tall	201
4.2.1	Deriverte av e^x	205
4.2.2	Regneregler for e^x	209
4.3	Logaritmer	217
4.3.1	Definisjon	217
4.3.2	Regneregler	221
4.4	Deriverte av $\ln x$	228
5	Følger og rekker	233
5.1	Følger og rekker	234
5.1.1	Regneregler for summasjon	241
5.2	Aritmetiske følger og rekker	246
5.2.1	Sum av en aritmetiske rekke	250
5.3	Geometriske rekker	264
5.3.1	Sum av en geometriske rekke	268
5.4	Konvergente og divergente rekker: $n \rightarrow \infty$	292
5.5	Geometriske rekker: $n \rightarrow \infty$	293
5.6	Oversikt finansmatematikk	300
6	Integrasjon	301
6.1	Motivasjon: Areal under graf	302
6.2	Definisjon av integral	308
6.3	Fundamentalsetningen for integral	312
6.4	Antideriverte og integral	317
6.4.1	Noen regneregler	323
6.5	Eksempler på integrasjon innen økonomi og logistikk	325

7	Funksjoner av flere variabler	333
7.1	Funksjoner av to variable	334
7.2	Grafisk fremstilling av funksjoner av to variable	336
7.3	Grafisk fremstilling og nivåkurver	338
7.4	Partielle deriverte	340
7.5	Retningsderivert	344
7.6	Maksimum og minimum	346
7.7	Maksimering/minimering under bibetingelser	354

Kapittel 4

Eksponential- og logaritmefunksjoner



Figur 4.1: Eksponentiell vekst.

4.1 Eksponentialfunksjonen

^{motiverende}
Eksempel: (renteformelen , ^{årlig} kreditering)

Anta at vi setter $K(0)$ NOK i banken, dvs. innskudd $K(0)$, ved år 0.

Anta videre at renten er r og at renten krediteres en gang i året, ved årets slutt.

Finn et uttrykk for hvor mye kapitalen $K(n)$ er etter n år.

Løsning:

0) Kapital etter 0 år: (kun innskudd)

$$K(0) \tag{4.1}$$

1) Kapital etter 1 år:

$$\underline{K(1)} = K(0) + \overbrace{K(0)r}^{\text{rente}} \tag{4.2}$$

$$= K(0) + K(0)r = K(0)(1+r) = \underline{K(0)(1+r)^1} \tag{4.3}$$



Figur 4.2: Rente.

2) Kapital etter 2 år:

$$\underline{K(2)} = K(1) + \overbrace{K(1)r}^{\text{rente}} \quad (4.4)$$

$$= K(1) + K(1)r = K(1)(1+r) = K(0)(1+r)(1+r) = \underline{K(0)(1+r)^2} \quad (4.5)$$

·
·
·
·

n) Kapital etter n år:

$$\underline{K(n)} = K(n-1) + \overbrace{K(n-1)r}^{\text{rente}} \quad (4.6)$$

$$= K(n-1) + K(n-1)r = K(n-1)(1+r) = K(0)(1+r)^{n-1}(1+r) \quad (4.7)$$

$$= \underline{K(0)(1+r)^n} \quad (4.8)$$

Lign.(4.8) kalles ofte "renteformelen":

$K(n) = K(0)(1+r)^n \quad (4.9)$

hvor

$$K(n) = \text{kapitalen etter } n \text{ år (eller } n \text{ terminer)} \quad (4.10)$$

$$K(0) = \text{startkapital, dvs. kapital etter 0 år (eller 0 terminer): nåverdi} \quad (4.11)$$

$$r = \frac{p}{100} = \text{rente med } p \% \text{ per termin} \quad (4.12)$$

$$n = \text{antall år (eller antall terminer)} \quad (4.13)$$

Alternativ: (alternativ måte å skrive renteformelen i lign.(4.9) på)

Faktoren $1 + r$ i lign.(4.9) kalles **vekstfaktoren**.

Hvis vi setter

$$a = 1 + r \quad (4.14)$$

så kan vi skrive lign.(4.9) på en mer kompakt form:

$$K(n) = K(0)a^n \quad (4.15)$$

hvor

$$a = 1 + r = \text{vekstfaktor} \quad (4.16)$$

$$n = \text{antall år} \quad (4.17)$$

■

Eksempel: (renteformelen , **kontinuerlig** kreditering)

Dersom banken krediterer innskuddet **kontinuerlig**,
dvs. etter en vilkårlig tid t hvor t er et reelt tall $t \in \mathbb{R}$,
hva blir da kapitalen $K(t)$?

Løsning:

Generalisering fra renteformelen i lign.(4.9) rett frem:

$$K(t) = K(0) a^t \quad (4.18)$$

hvor

$$a = 1 + r = \text{vekstfaktor} \quad (4.19)$$

$$t = \text{antall år, hvor } t \in \mathbb{R} \quad (4.20)$$

■

Kommentar:

Funksjonen $K(t)$ kalles ”**eksponentialfunksjonen**” med grunntall a og eksponent t .¹

¹Siden funksjonen modellerer eksponentiell vekst kalles grunntallet også gjerne for vekstfaktoren. Andre eksempel på eksponentiell vekst er befolkningsvekst, utbredelse av virus og kjernereaksjoner.

Definisjon: (eksponentialfunksjon)

Eksponentialfunksjon $f(x)$ er definert ved:

$$f(x) = a^x \quad (4.21)$$

hvor x = eksponent, $x \in R$, a = grunntall og $a > 0$.

■

Eksempel: (eksponentialfunksjon)

Plott eksponentialfunksjonene for $-2 \leq x \leq 2$:

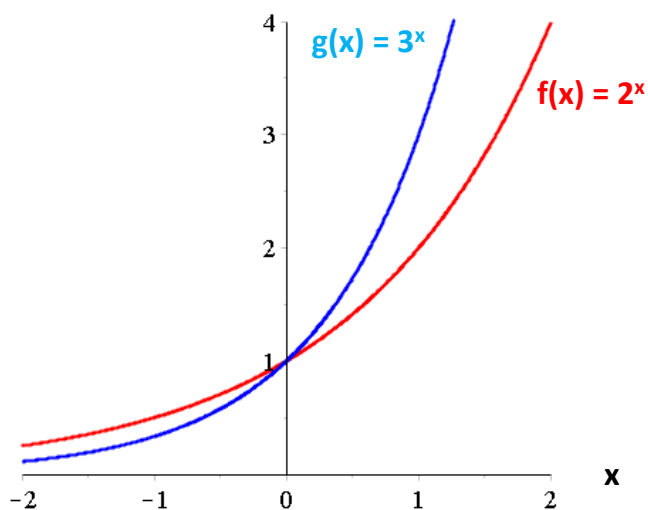
$$f(x) = 2^x \quad (a = 2) \quad (4.22)$$

$$g(x) = 3^x \quad (a = 3) \quad (4.23)$$

Løsning:

Lag først en verditabell.

Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:



Figur 4.3: Eksponentialfunksjoenene $f(x) = 2^x$ og $g(x) = 3^x$.

■

Eksempel: (eksponentialfunksjon vs kvadratisk funksjon)

Plott funksjonene for $-8 \leq x \leq 8$:

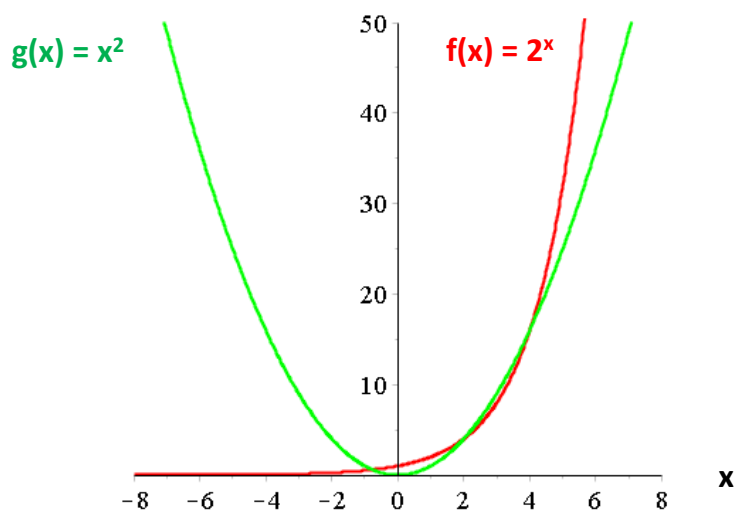
$$f(x) = 2^x \quad (\text{eksponentialfunksjon}) \quad (4.24)$$

$$g(x) = x^2 \quad (2. \text{ gradsfunksjon }) \quad (4.25)$$

Løsning:

Lag først en verditabell.

Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:



Figur 4.4: Eksponentialfunksjoenen $f(x) = 2^x$ og 2. gradsfunksjonen $g(x) = x^2$.

■

4.2 Tallet e , Eulers tall

motiverende

Eksempel: (renteformelen , $\text{\textcolor{red}{\text{årlig}}}$ kreditering)

Anta at vi setter $K(0) = 1$ NOK i banken, dvs. innskudd på 1 krone.

For enkelhets skyld, la oss anta videre at renten er $r = \frac{100}{100} \% = 1$ og at renten krediteres m ganger i året, og da slik at renten justeres til r/m for hver av de m periodene, se figur 4.5.

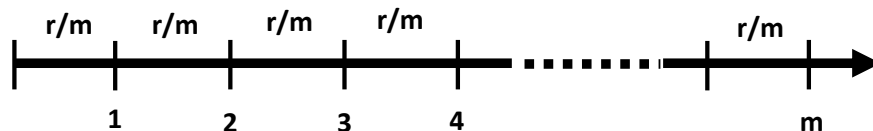
Hvor mye kapital $K_m(1)$ har vi etter ett år dersom renten krediteres m ganger i løpet av året?

Hva blir kapitalen $K_\infty(1)$ i grensen når $m \rightarrow \infty$?

Foto: Lasse Tomren



Renten krediteres $\text{\textcolor{red}{m}}$ ganger i året:



Figur 4.5: Rente.

- i) Renteformelen i lign.(4.8) sier at dersom man setter inn $K(0)$ i banken ved starten av år 1 så vil kapitalen etter t år vokse til:

$$\underline{K_1(1)} = K(0)(1+r)^1 = 1 \cdot (1+1)^1 \text{ NOK} = \underline{2 \text{ NOK}} \quad (4.26)$$

- ii) Dersom renten krediteres $m = 2$ ganger i året så blir renten halvert for hver periode, dvs. $r/2 = 1/2$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_2(1)$ vokser da til:

$$\underline{K_2(1)} = K(0)\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ NOK} = \underline{2.25 \text{ NOK}} \quad (4.27)$$

- iii) Dersom renten krediteres $m = 3$ ganger i året så blir renten justeres for hver periode, til $r/3 = 1/3$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_3(1)$ vokser da til:

$$\underline{K_3(1)} = K(0)\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \text{ NOK} = \underline{2.37 \text{ NOK}} \quad (4.28)$$

- iv) Dersom renten krediteres $m = 4$ ganger i året så blir renten justeres for hver periode, til $r/4 = 1/4$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_4(1)$ vokser da til:

$$\underline{K_4(1)} = K(0)\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \text{ NOK} = \underline{2.44 \text{ NOK}} \quad (4.29)$$

- v) Dersom renten krediteres m ganger i året så blir renten justeres for hver periode, til $r/m = 1/m$ siden $r = 1$. Kapitalen $K_m(1)$ vokser da til:

$$\underline{K_m(1)} = K(0) \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \text{ NOK} \quad (4.30)$$

·
·
·
·

- vi) I grensen når $m \rightarrow \infty$ blir dette eksponentialfunksjonen:

$$\underline{\underline{K_\infty(t)}} = K(0) \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m}_{\text{lign. (4.33)} \quad e} = \underline{\underline{2.718281828... \text{NOK}}} \quad (4.31)$$

hvor

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m = \underbrace{2.718281828...}_{\text{Eulers tall } e} \quad (4.32)$$

■

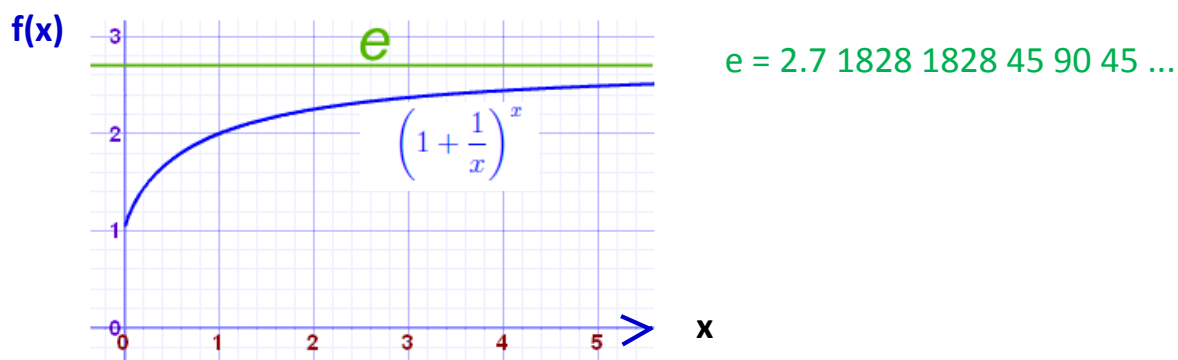
Setning: (Eulers tall e)

Eulers tall e kan bestemmes av en grenseverdi. Denne grenseverdien er:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (4.33)$$

hvor $e = 2.718281828459045 \dots$

■



Figur 4.6: Funksjonen $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

4.2.1 Deriverte av e^x

Definisjon: (eksponentialfunksjon $\overbrace{m/\text{grunntall } e}^{\text{NB!}}$)

Ekspontialfunksjon $f(x)$ med grunntall e er definert ved:

$$f(x) = e^x \quad (4.34)$$

hvor x = eksponent, $x \in R$ og grunntall $e = 2.718281828459045\dots$

■

Denne definisjonen er motivert ut fra at faktoren foran eksponentialfunksjonen til den deriverte er 1. Dette er så viktig at vi formulerer det i en egen setning:

Setning: (eksponentialfunksjon $\overbrace{m/\text{grunntall } e}^{\text{NB!}}$)

Ekspontialfunksjon $f(x) = e^x$ er lik sin egen deriverte:

$$\frac{d f(x)}{d x} = e^x \quad (4.35)$$

hvor x = eksponent, $x \in R$ og grunntall $e = 2.718281828459045\dots$

■

Eksempel: (eksponentialfunksjon / derivasjon)

Gitt funksjonen:

$$f(x) = e^{3x-2} \quad (4.36)$$

Finn $\frac{df(x)}{dx}$.

Løsning:

Her bruker man **kjerneregelen** som vi lærte om på side 170, lign.(3.148): ($u = 3x - 2$)

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(e^{3x-2} \right) \quad (4.37)$$

$$\stackrel{\text{lign.(3.148)}}{=} \frac{d}{du} \left(e^u \right) \cdot \frac{du}{dx} \quad (4.38)$$

$$= \underbrace{\frac{d}{du} \left(e^u \right)}_{= e^u} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} (3x - 2)}_{= 3} \quad (4.39)$$

$$= e^u \cdot 3 \quad (4.40)$$

$$= \underline{\underline{3e^{3x-2}}} \quad (4.41)$$

■

Eksempel: (eksponentialfunksjon)

Plott eksponentialfunksjonene

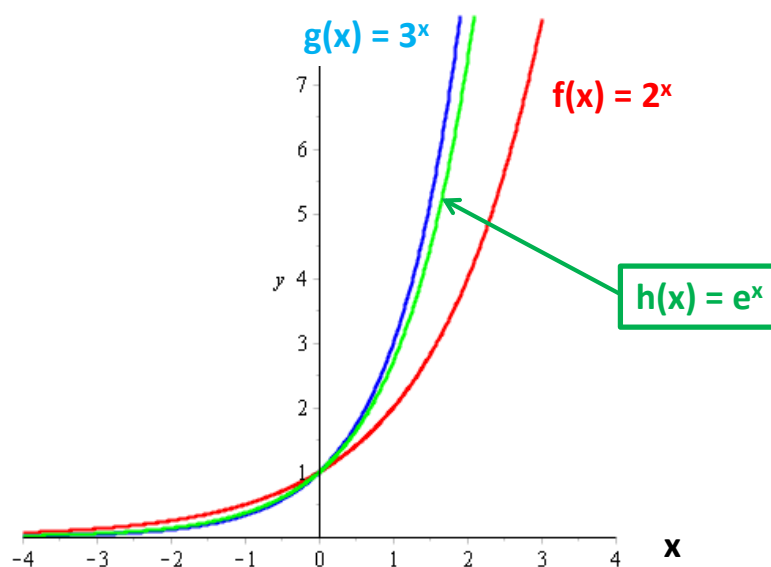
$$f(x) = 2^x \quad (a = 2) \quad (4.42)$$

$$h(x) = e^x \quad (a = e = 2.718281828459045 \dots) \quad (4.43)$$

$$g(x) = 3^x \quad (a = 3) \quad (4.44)$$

Løsning:

Lag først en verditabell. Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:



Figur 4.7: Eksponentialfunksjoenene $f(x) = 2^x$, $h(x) = e^x$ og $g(x) = 3^x$.

■

Eksempel: (eksponentialfunksjon)

Plott eksponentialfunksjonen:

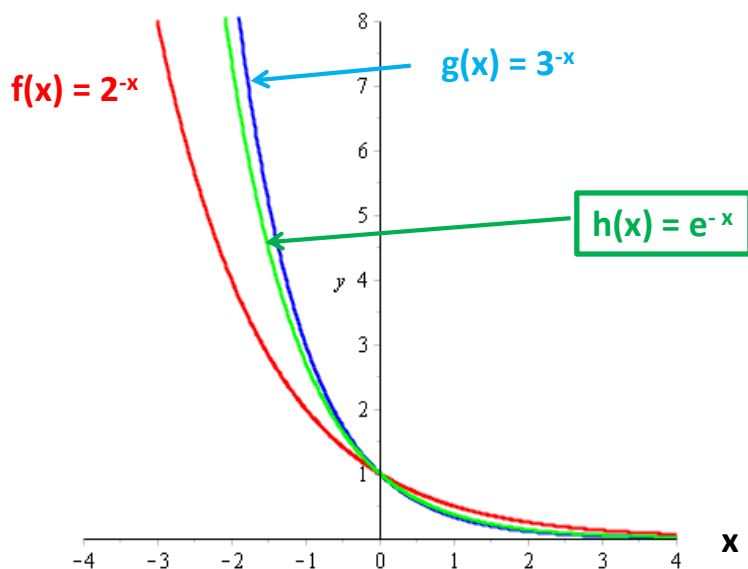
$$f(x) = 2^{-x} \quad (a = 2) \quad (4.45)$$

$$h(x) = e^{-x} \quad (a = e = 2.718281828459045 \dots) \quad (4.46)$$

$$g(x) = 3^{-x} \quad (a = 3) \quad (4.47)$$

Løsning:

Lag først en verditabell. Deretter kan vi tegne funksjonene i et koordinatsystem:



Figur 4.8: Eksponentialfunksjoenene $f(x) = 2^{-x}$, $h(x) = e^{-x}$ og $g(x) = 3^{-x}$.

■

4.2.2 Regneregler for e^x

Siden eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$ er bare et spesielt tilfelle av potensfunksjonen $g(x) = a^x$, med $a = e = 2.718281828459045\dots$ så gjelder samme potensregler som ble presentert på side 21:
($a \rightarrow e$)

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad (4.48)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (4.49)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^x e^{-y} = e^{x-y} \quad (4.50)$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad (4.51)$$

$$(e e)^x = e^x e^x = e^{2x} \quad (4.52)$$

$$\left(\frac{e}{e}\right)^x = \frac{e^x}{e^x} = 1 \quad (4.53)$$

og i tillegg:

$$e^0 = 1 \quad (4.54)$$

$$e^1 = e \quad (4.55)$$

Eksempel: (eksponentialfunksjon , derivasjon , *BØK105 Finansregnskap 1*)

La p være prisen 0.5 liter ananasbrus.

La oss se på en avgrenset tidsperiode, f.eks. en dag. Anta at sammenhengen mellom etterspørsel x av brus og prisen p , for en gitt dag, er:

$$x(p) = x_0 e^{-ap} \quad (4.56)$$

hvor ² $a = 0.08$ 1/NOK og $x_0 = 10\,000$ halvlitere. Anta videre, for en gitt dag, at sammenhengen mellom total kostnad $TK(p)$ og pris p er:

$$TK(p) = cx(p) \quad (4.57)$$

hvor $c = 2$ NOK er gjennomsnittkostanden per produsert brus for Oskar Sylte.



Figur 4.9: Ananasbrus.

²Eksponenten ap i en eksponentialfunksjon må være dimensjonsløs. Dermed må koeffisienten a ha dimensjon 1/NOK siden prisen p har dimensjon NOK.

- a) Finn et uttrykk for totalt resultat $TR(p)$ sfa. prisen p .
- b) Plott $TR(p)$, $TI(p)$ og $TK(p)$ sfa. prisen p i intervallet $0 \leq p \leq 30$ i en og samme figur.
- c) Hvilken pris bør settes på brusen for å maksimere *total inntekt* $TI(p)$?
Hva er inntekten $TI(p)$ da?
- d) Hvilken pris bør settes på brusen for å maksimere *totalt resultat* $TR(p)$?
Hva er resultatet $TR(p)$ da?
- e) Kommenter resultatet i oppgave c og d.

Løsning:

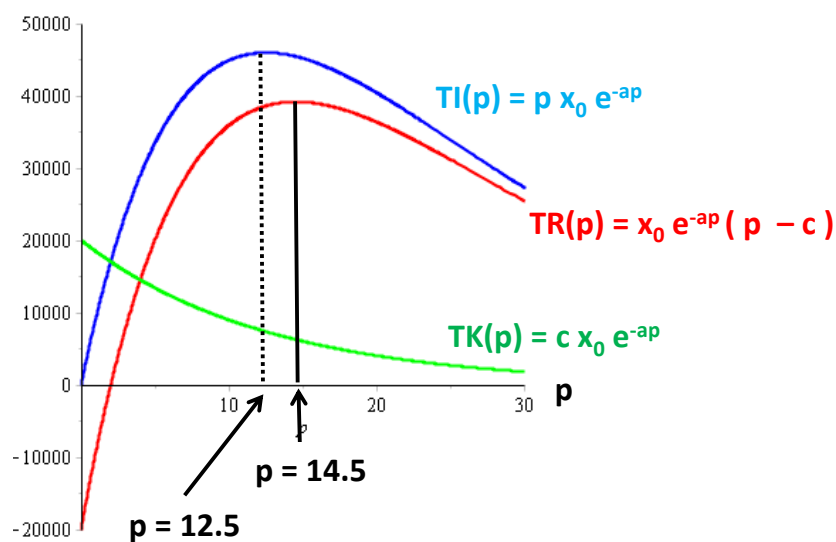
a) Totalt resultat $TR(p)$ sfa. prisen p :

$$\underline{\underline{TR(p)}} = TI(p) - TK(p) \quad (4.58)$$

$$= p x(p) - c x(p) \quad (4.59)$$

$$= x(p)(p - c) = \underline{\underline{x_0 e^{-ap}(p - c)}} \quad (4.60)$$

b) Plotter $TR(p)$, $TI(p)$ og $TK(p)$ i intervallet $0 \leq p \leq 30$:



Figur 4.10: Funksjonene $TR(p)$, $TI(p)$ og $TK(p)$ sfa. prisen p .

c) *Inntekten* er maksimal når stigningstallet er null: ³

$$\text{maksimum} \qquad \text{inntekt } TI_{\max} \qquad (4.61)$$

$\Downarrow$

$$\text{stigningstallet til } TI(p) \text{ er lik null} \qquad (4.62)$$

$\Downarrow$

$$\frac{dTI(p)}{dp} = 0 \qquad (4.63)$$

$$\frac{d}{dp} \left(p \cdot \cancel{x_0} e^{-ap} \right) = 0 \qquad \left| \cdot \frac{1}{x_0} \right. \qquad (4.64)$$

$$1 \cdot \cancel{e^{-ap}} + p \cdot \cancel{e^{-ap}}(-a) = 0 \qquad \left| \cdot e^{ap} \right. \qquad (4.65)$$

$$1 + p(-a) = 0 \qquad (4.66)$$

$$p(-a) = -1 \qquad \left| \cdot \frac{1}{(-a)} \right. \qquad (4.67)$$

$$p = \frac{1}{a} \qquad (4.68)$$

$$\underline{p} = \frac{1}{0.08} \text{ NOK} = \underline{\underline{12.5 \text{ NOK}}} \qquad (4.69)$$

Inntekten blir størst dersom brusen *prises* til 12.5 NOK.

³For å vise at man har et maksimum kan man f.eks. gjennomføre 2. derivasjonstesten. Vi hopper over det her. Ut fra figur 4.10 ser vi at det dreier seg om et maksimum og ikke et minimum.

Den totale inntekten $TI(p) = p x(p)$ per dag blir da:

$$\underline{\underline{TI(12.5)}} = 12.5 \cdot 10\,000 e^{-0.08 \cdot 12.5} \text{ NOK} = \underline{\underline{45\,985 \text{ NOK}}} \quad (4.70)$$

d) *Resultatet* er maksimalt når stigningstallet er null: ⁴

$$\begin{array}{ccc} \text{maksimum} & & \text{resultat } TR_{\max} \\ & \Downarrow & \end{array} \quad (4.71)$$

$$\begin{array}{ccc} \text{stigningstallet til } TR(p) & \text{er lik null} & \\ & \Downarrow & \end{array} \quad (4.72)$$

$$\frac{dTR(p)}{dp} = 0 \quad (4.73)$$

$$\frac{d}{dp} \left(\underbrace{x_0 e^{-ap}(p - c)}_{\text{produkt } u \cdot v} \right) = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{x_0} \right. \quad (4.74)$$

$$\frac{d}{dp} \left(\underbrace{e^{-ap}(p - c)}_{\text{produkt } u \cdot v} \right) = 0 \quad (4.75)$$

$$\cancel{e^{-ap}}(-a)(p - c) + \cancel{e^{-ap}} = 0 \quad \left| \cdot e^{ap} \right. \quad (4.76)$$

$$(-a)(p \cdot x_0 - TK_0) + 1 = 0 \quad (4.77)$$

$$(-a)(p - c) = -1 \quad \left| \cdot \frac{1}{(-a)} \right. \quad (4.78)$$

$$p = \frac{1}{a} + c \quad (4.79)$$

$$\underline{p} = \left(\frac{1}{0.08} + 2 \right) \text{ NOK} = \underline{14.5 \text{ NOK}} \quad (4.80)$$

⁴For å vise at man har et maksimum kan man f.eks. gjennomføre 2. derivasjonstesten. Vi hopper over det her. Ut fra figur 4.10 ser vi at det dreier seg om et maksimum og ikke et minimum.

Det **totale resultatet** per dag blir da: (bruker lign.(4.60))

$$\underline{\underline{TR(14.5)}} \stackrel{\text{lign.(4.60)}}{=} x_0 e^{-ap} (p - c) \quad (4.81)$$

$$= 10\,000 e^{-0.08 \cdot 14.5} (14.5 - 2) \text{ NOK} = \underline{\underline{39\,186 \text{ NOK}}} \quad (4.82)$$

e) Resultatet fra oppgave **c** og **d** viser at:

$\underbrace{\text{maksimum inntekt}}_{p = 12.5 \text{ NOK}} \text{ er } \textbf{ikke} \text{ sammenfallende med } \underbrace{\text{maksimum resultat}}_{p = 14.5 \text{ NOK}} \quad (4.83)$

■

Kommentar:

minimum enhetskostnad er ikke sammenfallende med maksimum resultat (4.84)

4.3 Logaritmer

Logaritmer er **inverse** funksjoner til eksponentialfunksjoner.

4.3.1 Definisjon

La oss bruke kalkulatoren til å regne ut følgende eksponenter:

$$10^0 = 1 \quad (4.85)$$

$$10^{0.3010} = 2 \quad (4.86)$$

$$10^{0.4770} = 3 \quad (4.87)$$

$$10^{0.6021} = 4 \quad (4.88)$$

$$10^{0.6990} = 5 \quad (4.89)$$

Av disse kalkulatorberegningene ser vi at f.eks. 0.4770 er det tallet vi må opphøye 10 i, for å få tallet 3. Tallet 0.4770 kalles **logaritmen** til 3. Dette tallet 0.4770 har fått en egen notasjon, nemlig $\log(3) = 0.4770$. Tilsvarende:

$$10^0 = 10^{\log 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \log 1 = 0 \quad (4.90)$$

$$10^{0.3010} = 10^{\log 2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \log 2 = 0.3010 \quad (4.91)$$

$$10^{0.4770} = 10^{\log 3} = 3 \quad \Rightarrow \quad \log 3 = 0.4770 \quad (4.92)$$

$$10^{0.6021} = 10^{\log 4} = 4 \quad \Rightarrow \quad \log 4 = 0.6021 \quad (4.93)$$

$$10^{0.6990} = 10^{\log 5} = 5 \quad \Rightarrow \quad \log 5 = 0.6990 \quad (4.94)$$

Definisjon: (logaritmen m/**10** som **grunntall**) ⁵

Logaritmen til et tall x er den eksponenten vi må opphøye 10 i for å få x :

$$10^{\log x} = x \quad (4.95)$$

altså $\log(x) = \text{logaritmen} = \underbrace{\text{det tallet vi må opphøye 10 i for å få } x}_{\text{NB!}}$.

■

Kommentar:

Ut fra lign.(4.95) ser man at $\log x$ er den inverse funksjonen av 10^x .

⁵Kalles også den **Briggske** logaritme.

La oss bruke kalkulatoren til å regne ut følgende eksponenter:

$$e^0 = 1 \quad (4.96)$$

$$e^{0.6931} = 2 \quad (4.97)$$

$$e^{1.0986} = 3 \quad (4.98)$$

$$e^{1.3863} = 4 \quad (4.99)$$

$$e^{1.6094} = 5 \quad (4.100)$$

Av disse kalkulatorberegningene ser vi at f.eks. **1.0986** er det tallet vi må opphøye Eulers tall e i, for å få tallet **3**. Tallet 1.0986 kalles den **NATURLIGE** logaritmen til 3. Dette tallet 1.0986 har fått en egen notasjon, nemlig $\ln(3) = 1.0986$. Tilsvarende:

$$e^0 = e^{\ln 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln 1 = 0 \quad (4.101)$$

$$e^{0.6931} = e^{\ln 2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = 0.6931 \quad (4.102)$$

$$e^{1.0986} = e^{\ln 3} = 3 \quad \Rightarrow \quad \ln 3 = 1.0986 \quad (4.103)$$

$$e^{1.3863} = e^{\ln 4} = 4 \quad \Rightarrow \quad \ln 4 = 1.3863 \quad (4.104)$$

$$e^{1.6094} = e^{\ln 5} = 5 \quad \Rightarrow \quad \ln 5 = 1.6094 \quad (4.105)$$

Definisjon: (logaritmen m/ e som grunntall)

Logaritmen til et tall x er den eksponenten vi må opphøye Eulers tall e i for å få x :

$$e^{\ln x} = x \quad (4.106)$$

altså $\ln(x)$ = den naturlige logaritmen = $\underbrace{\text{det tallet vi må opphøye } e \text{ i for å få } x}_{\text{NB!}}$.

■

Kommentar:

Ut fra lign.(4.106) ser man at $\ln x$ er den inverse funksjonen av e^x .

4.3.2 Regneregler

Ved å bruke definisjonen av den naturlige logaritmen sammen med regnereglene for potenser fra side 21 så innser man:

$$e^{\ln 2 + \ln 3} = e^{\ln 2} e^{\ln 3} = 2 \cdot 3 = 6 = e^{\ln 6} = e^{\ln(2 \cdot 3)} \quad (4.107)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3}} \quad (4.108)$$

$$e^{\ln 2 - \ln 3} = e^{\ln 2} e^{-\ln 3} = \frac{2}{3} = e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = e^{\ln(2/3)} \quad (4.109)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3}} \quad (4.110)$$

$$e^{\ln(2^3)} = 2^3 = (2)^3 = (e^{\ln 2})^3 = (e^{\ln 2})^3 \stackrel{\text{lin.}(1.59)}{=} e^{3 \cdot \ln 2} \quad (4.111)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\ln 2^3 = 3 \cdot \ln 2}} \quad (4.112)$$

Dette er regneregler for logaritmen som er svært viktige og som vi skal bruke mye i øvinger.

La oss skrive de mer generelt:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad a, b > 0 \quad (4.113)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad a, b > 0 \quad (4.114)$$

$$\ln(a^p) = p \ln a \quad a > 0 \quad (4.115)$$

og i tillegg:

$$\ln 1 = 0 \quad (4.116)$$

$$\ln e = 1 \quad (4.117)$$

$$\ln e^x = x \quad (4.118)$$

$$e^{\ln x} = x, \quad x > 0 \quad (4.119)$$

Akkurat de samme regnereglene gjelder for dersom man har grunntall 10 istedet for Eulers tall e . Begrunnelsen er helt analog som for tilfellet på forrige side. Derfor skriver vi bare opp reglene:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad a, b > 0 \quad (4.120)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad a, b > 0 \quad (4.121)$$

$$\log(a^p) = p \log a \quad a > 0 \quad (4.122)$$

og i tillegg:

$$\log 1 = 0 \quad (4.123)$$

$$\log 10 = 1 \quad (4.124)$$

$$\log 10^x = x \quad (4.125)$$

$$10^{\log x} = x, \quad x > 0 \quad (4.126)$$

NB:

- Det finnes *ingen enkle* regler for $\log(a + b)$ eller $\log(a - b)$.
- $\log x$ er bare definert for **positive** verdier av x .

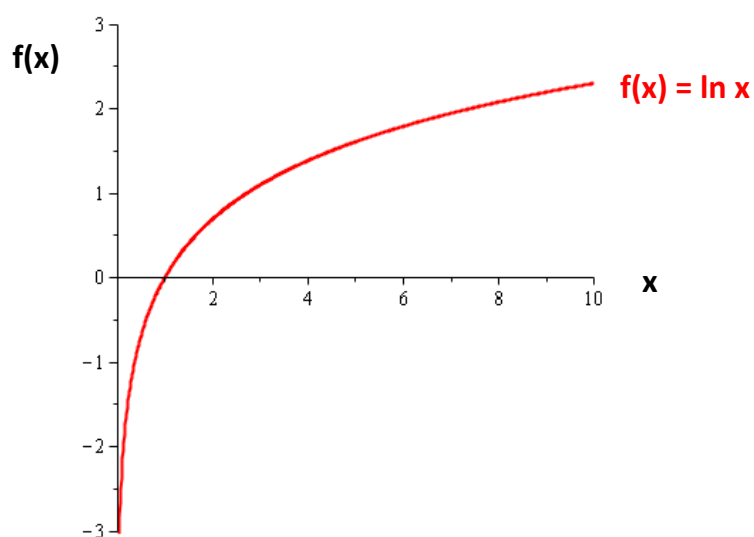
Eksempel: ($\ln$ -funksjon)

Plott funksjonen

$$f(x) = \ln x \quad (4.127)$$

Løsning:

Ved å lage **verditabell** og deretter plotte finner man følgende graf:



Figur 4.11: Logaritmefunksjonen $f(x) = \ln x$.

■

Egenskaper til $\ln$ -funksjonen: ($f(x) = \ln x$)

- Definisjonsmengde til $f(x)$: $D_f = \langle 0, \infty \rangle$
- Definisjonsmengde til $f(x)$: $V_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
- $\ln x$ er strengt **voksende** i hele D_f
- Grafen skjærer x -aksen i $x = 1$ siden **$\ln 1 = 0$**
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ og $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

Eksempel: ([logaritme](#) , *BØK300 Finansiell- og økonomisk styring*)

Kapitalen K_0 plasseres i Sparebank 1 SMN ved år null.

Renten er $r = 6\%$, dvs. $r = \frac{6}{100} = 0.06$.

Hvor lang tid tar det før kapitalen fordobles?



Figur 4.12: Kapitalen K_0 i bank.

Løsning:

La n være den tiden det tar før kapitalen K_0 fordobles til $K_n = 2K_0$.

Når man skal regne på rente med rentesrente slik som i denne oppgaven så brukes *renteformelen*. Renteformelen skal vi lære mer om i kapittel 5. Her, i denne oppgaven, skal vi bare ta formelen for gitt. Oppgaven består i å finne n .

Anta at det tar x år før kapitalen dobles, dvs. $K_n = 2K_0$ etter n år. Dermed:

$$\overbrace{K_n = K_0(1+r)^n}^{\text{renteformelen}} \quad (4.128)$$

$$2K_0 = K_0(1+r)^n \quad (4.129)$$

Deler på K_0 :

$$2K_0 = K_0(1+r)^x \quad \left| \cdot \frac{1}{K_0} \right. \quad (4.130)$$

$$\frac{\cancel{2K_0}}{\cancel{K_0}} = (1+r)^n \quad (4.131)$$

$$2 = (1+r)^n \quad \text{ta ln (eller log) på hver side av ligningen} \quad (4.132)$$

$$\ln 2 = \ln(1+r)^n \quad \text{bruker regneregelen i lign.(4.115)} \quad (4.133)$$

$$\ln 2 = n \ln(1+r) \quad \left| \cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \right. \quad (4.134)$$

$$\frac{\ln 2}{\ln(1+r)} = n \quad (4.135)$$

$$\underline{n} = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} = \frac{\ln 2}{\ln(1+0.06)} \approx \underline{11.9} \quad (4.136)$$

Kapitalen **dobles** etter 12 år med 6 % rente.

■

4.4 Deriverte av $\ln x$

Setning: (deriverte av $\ln x$)

Den deriverte av $f(x) = \ln x$ er:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad (4.137)$$

■

Bevis:

Fra lign.(4.106) har vi at:

$$e^{\ln(x)} = x \quad (4.138)$$

La oss derivere denne ligningen.

Den deriverte av høyre side av lign.(4.138) er 1. Vi deriver venstre side via kjerneregelen med kjernen $u(x) = \ln x$:

$$\underbrace{\frac{d}{du}(e^u)}_{= e^u} \frac{d}{dx}(\ln x) = 1 \quad (4.139)$$

$$e^u \frac{d}{dx}(\ln x) = 1 \quad \left| \cdot \frac{1}{e^u} \right. \quad (4.140)$$

$$\underline{\underline{\frac{d}{dx}(\ln x)}} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}} \quad (4.141)$$

■

Eksempel: (eksponentialfunksjon , derivasjon)

Gitt funksjonen:

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1) \quad (4.142)$$

Finn $f'(x)$.

Løsning:

Her bruker man kjerneregelen som vi lærte om på side 170, lign.(3.148): ($u = x^2 + 1$)

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{d f(x)}{dx} \quad (4.143)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(x - \ln(x^2 + 1) \right) \quad (4.144)$$

$$\stackrel{\text{lign. (3.148)}}{=} 1 - \frac{d}{d\textcolor{blue}{u}} \left(\ln u \right) \cdot \frac{d\textcolor{blue}{u}}{dx} \quad (4.145)$$

$$= 1 - \underbrace{\frac{d}{du} \left(\ln u \right)}_{= \frac{1}{u}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} \left(x^2 + 1 \right)}_{= 2x} \quad (4.146)$$

$$= 1 - \frac{1}{u} \cdot 2x \quad (4.147)$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{2x}{x^2 + 1}}} \quad (4.148)$$

■

Eksempel: (logaritme , derivasjon , lokale ekstremalpunkt)

Gitt funksjonen:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad (4.149)$$

hvor $D_f = \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$ fordi $\ln 1 = 0$. (Husk: det er ikke lov å dele på 0).

- a) Regn ut $f'(x)$.
- b) Tegn grafen $f(x)$ og marker på figuren når $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$ via et fortegnsskjema.
- c) Marker på figuren ekstremalpunktet til $f(x)$. Er det lokalt eller globalt?
- d) Marker asymptoten til $f(x)$ på figuren.

Løsning:

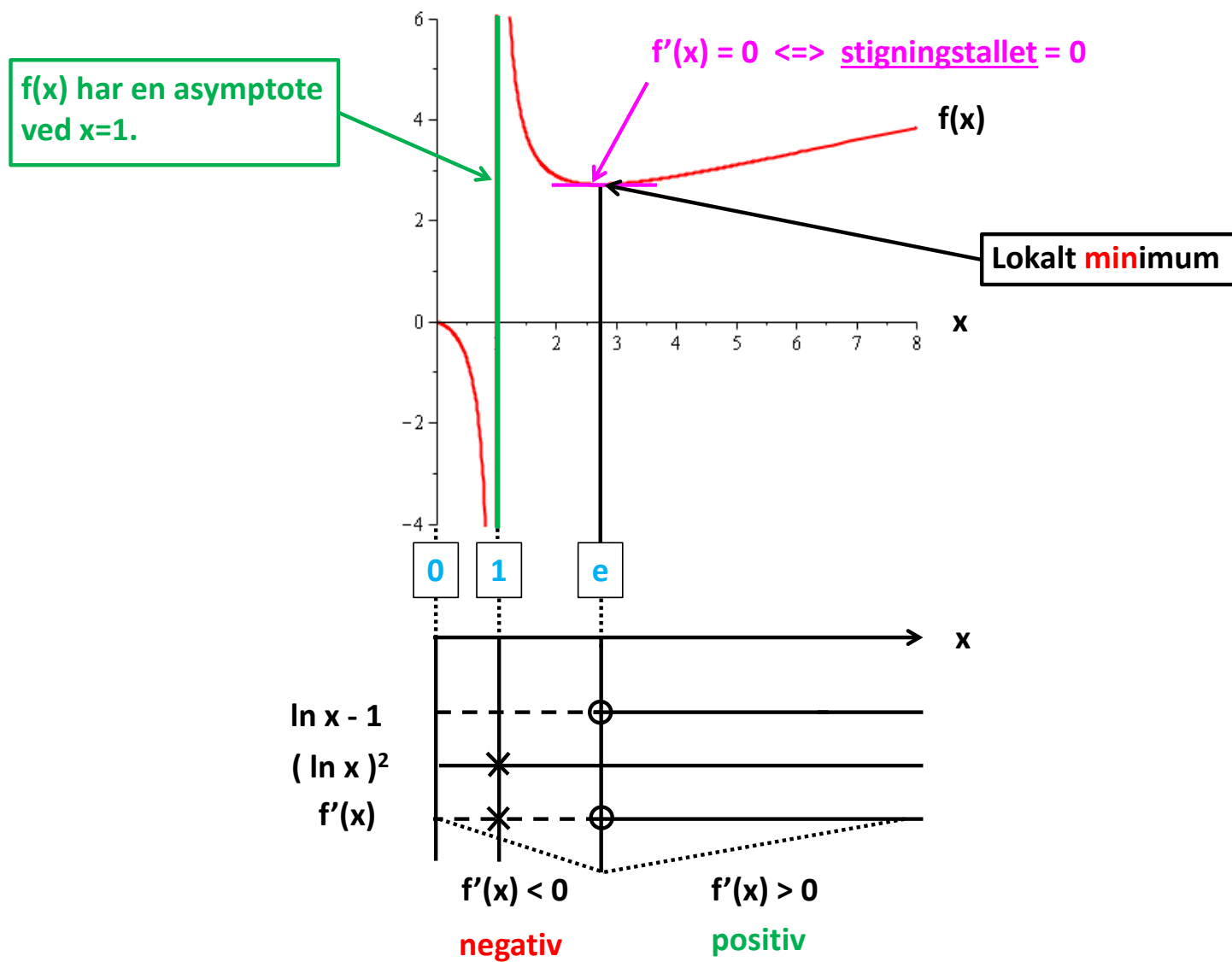
- a) Deriverte: (derivasjon av en brøk, se lign.(3.91))

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\textcolor{red}{x}}{\textcolor{blue}{\ln x}} \right) \quad (4.150)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{\textcolor{red}{u}}{\textcolor{blue}{v}} \right) \stackrel{\text{lign. (3.91)}}{=} \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (4.151)$$

$$= \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\underline{\underline{(\ln x)^2}}} \quad (4.152)$$

b, c og d): Plott av figuren, markering av fortegnet til $f'(x)$ og lokale ekstremalpunkt:

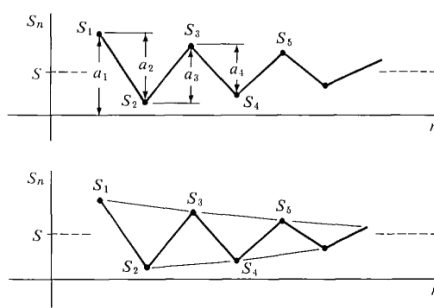


Figur 4.13: Funksjonen $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ og tilhørende fortegnsskjema for $f'(x)$.

■

Kapittel 5

Følger og rekker



Figur 5.1: Følger og rekker.

5.1 Følger og rekker

Definisjon: (følge)

En følge er en funksjon f :

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow M \quad (5.1)$$

fra mengden av positive naturlige tall $\mathbb{N}^+ = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$ til en vilkårlig mengde M .

■

Følger kan bestå av tall, punkter, vektorer, funksjoner eller andre matematiske objekter.

Eksempel: (følger)

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots \quad (5.2)$$

$$1, 10, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots \quad (5.3)$$

$$-2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots \quad (5.4)$$

$$x, 2x^2, 3x^3, 4x^4, 5x^5, 6x^6, \dots \quad (5.5)$$

$$1, -e^x, e^{2x}, -e^{3x}, e^{4x}, -e^{5x}, \dots \quad (5.6)$$

■

Definisjon: (rekke)

En rekke er summen av leddene i en følge.

■

Eksempel: (rekker)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots \quad (5.7)$$

$$1 + 10 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \dots \quad (5.8)$$

$$-2 + 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + \dots \quad (5.9)$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \dots \quad (5.10)$$

$$1 - e^x + e^{2x} - e^{3x} + e^{4x} - e^{5x} + \dots \quad (5.11)$$

■

Vi bruker ofte det spesielle [summetegnet](#) Σ når vi skal skrive summere leddene i en følge. ¹.
Dersom vi har en sum S_n med n ledd:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (5.12)$$

så kan denne summen skrives på en mer kompakt måte: ²

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (5.14)$$

¹Tegnet Σ er den greske bokstaven for S og uttales “*sigma*”.

²Legg merke til at S_n selv er en følge:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, \dots \quad (5.13)$$

Eksempel: (følger , rekker , sum)

La:

$$a_i = \frac{i+1}{i^2} \quad (5.15)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

- a) Skriv ned de 4 første leddene i følgen.
- b) Skriv ned de 4 første leddene i rekken.
- c) Finn summen av rekken med 4 ledd.

Løsning:

a) Følge:

$$\frac{2}{1} , \quad \frac{3}{4} , \quad \frac{4}{9} , \quad \frac{5}{16} , \quad \dots \quad (5.16)$$

b) Rekke:

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \dots \quad (5.17)$$

c) Summen av rekken med 4 ledd:

$$\underline{\underline{S_4}} = \overbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}^{= \sum_{i=1}^4 a^i} \quad (5.18)$$

$$= \sum_{i=1}^4 a_i \quad (5.19)$$

$$= \sum_{\textcolor{red}{i}=1}^4 \frac{\textcolor{red}{i} + 1}{\textcolor{red}{i}^2} \quad (5.20)$$

$$= \frac{2}{1} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} = \frac{505}{\underline{\underline{144}}} \approx 3.507 \quad (5.21)$$

■

Eksempel: (følger , rekker , sum)

La:

$$a_i = i \quad (5.22)$$

$$b_i = i^2 \quad (5.23)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

- a) Skriv ned de 3 første leddene i følgene a_i og b_i .
- b) Skriv ned de 3 første leddene i rekken a_i og b_i .
- c) Finn summen av rekken med 4 ledd.

Løsning:

- a) Følge $a_i = i$:

$$1, 2, 3, \dots \quad (5.24)$$

Følge $b_i = i^2$:

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots \quad (5.25)$$

b) Rekke $a_i = i$:

$$1 \text{ } + \text{ } 2 \text{ } + \text{ } 3 \text{ } + \text{ } \dots \quad (5.26)$$

Rekken $b_i = i^2$:

$$1^2 \text{ } + \text{ } 2^2 \text{ } + \text{ } 3^2 \text{ } + \text{ } \dots \quad (5.27)$$

c) Summen av rekken $a_i = i$ med 3 ledd.

$$\underline{\underline{S_3^a}} = \overbrace{a_1 + a_2 + a_3}^{= \sum_{i=1}^3 a^i} = \sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{i=1}^3 \textcolor{red}{i} \quad (5.28)$$

$$= 1 + 2 + 3 = \underline{\underline{6}} \quad (5.29)$$

Summen av rekken $b_i = i^2$ med 3 ledd.

$$\underline{\underline{S_3^b}} = \overbrace{b_1 + b_2 + b_3}^{= \sum_{i=1}^3 b^i} = \sum_{i=1}^3 b_i = \sum_{i=1}^3 \textcolor{red}{i^2} \quad (5.30)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 = \underline{\underline{14}} \quad (5.31)$$

■

5.1.1 Regneregler for summasjon

i) Sum av summer:

Vi ser at begge summene har samme start- og sluttpunkt, $\sum_{i=1}^3$.
Da kan disse legges sammen:

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^3 a_i + \sum_{i=1}^3 b_i}} = \sum_{i=1}^3 i + \sum_{i=1}^3 i^2 \quad (5.32)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \quad (5.33)$$

$$= 6 + 14 = \underline{\underline{20}} \quad (5.34)$$

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^3 (a_i + b_i)}} = \sum_{i=1}^3 (i + i^2) \quad (5.35)$$

$$= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) \quad (5.36)$$

$$= (1 + 1) + (2 + 4) + (3 + 9) = \underline{\underline{20}} \quad (5.37)$$

Dette er et eksempel på den generelle regneregelen:

$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \quad (5.38)$

ii) Multiplikasjon med en konstant:

La c være en konstant, f.eks. $c = 251$. Da er:

$$\sum_{i=1}^3 c a_i = \sum_{i=1}^3 c i \quad (5.39)$$

$$= 251 \cdot 1 + 251 \cdot 2 + 251 \cdot 3 = 251 (1 + 2 + 3) \quad (5.40)$$

$$= c \sum_{i=1}^3 i \quad (5.41)$$

$$= c \sum_{i=1}^3 a_i \quad (5.42)$$

Dette er et eksempel på den generelle regneregelen:

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad (5.43)$$

iii) Addisjon av en konstant:

La c være en konstant, f.eks. $c = 251$. Da er:

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^3 (a_i + c)}} = \sum_{i=1}^3 (i + c) \quad (5.44)$$

$$= (1 + 251) + (2 + 251) + (3 + 251) \quad (5.45)$$

$$= 1 + 2 + 3 + 3 \cdot 251 \quad (5.46)$$

$$= \underline{\underline{\sum_{i=1}^3 a_i}} + n c \quad (5.47)$$

Dette er et eksempel på den generelle regneregelen:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + n c} \quad (5.48)$$

Setning: (**regneregler** for summetegn)

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \quad (5.49)$$

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad (5.50)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + n c \quad (5.51)$$

hvor c er en konstant.

■

Kommentar:

Legg merke til at: $(a_i = i \text{ og } b_i = i^2)$

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^3 a_i b_i}} = \sum_{i=1}^3 i \cdot i^2 = \sum_{i=1}^3 i^3 \quad (5.52)$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 \quad (5.53)$$

$$= 1 + 8 + 27 = \underline{\underline{36}} \quad (5.54)$$

$$\underline{\underline{\sum_{i=1}^3 a_i \sum_{i=1}^3 b_i}} = \sum_{i=1}^3 i \sum_{i=1}^3 i^2 \quad (5.55)$$

$$= (1 + 2 + 3)(1^2 + 2^2 + 3^2) \quad (5.56)$$

$$= 6 \cdot 14 = \underline{\underline{84}} \quad (5.57)$$

som viser at: $\sum_{i=1}^3 a_i b_i \neq \sum_{i=1}^3 a_i \sum_{i=1}^3 b_i.$

5.2 Aritmetiske følger og rekker

Definisjon: (aritmetisk følge)

En aritmetisk følge er en følge der differansen d mellom et tall a_i og det neste tallet a_{i+1} er konstant: ³

$$\begin{array}{ll} a_1 = a & \text{(startledd)} \quad (5.58) \\ a_{i+1} = a_i + d & i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.59) \end{array}$$

hvor $d = \text{konstant}$ og kalles *differens*. ■

Definisjonen i lign.(5.59) viser at en aritmetisk følge er definert *rekursivt*. ⁴

$a_n = 3n + 5$	
a_1	$3 \bullet 1 + 5 = 8$
a_2	$3 \bullet 2 + 5 = 11$
a_{30}	$3 \bullet 30 + 5 = 95$
a_{100}	$3 \bullet 100 + 5 = 305$

Figur 5.2: Aritmetisk følge.

³En aritmetisk rekke gjenspeiler en prosess som beveger seg fremover, typisk i tid.

⁴Rekursjon er en *gjentakende prosess* hvor en funksjon *kaller seg selv*.

Siden

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (5.60)$$

$$a_2 = a_1 + d = a + d \quad (5.61)$$

$$a_3 = a_2 + d = \underbrace{(a + d)}_{= a_2} + d = a + 2d \quad (5.62)$$

$$a_4 = a_3 + d = \underbrace{(a + 2d)}_{= a_3} + d = a + 3d \quad (5.63)$$

·
·

så innser at følgende sammenheng gjelder:

$a_n = a + (n - 1)d$	(5.64)
----------------------	--------

for en **aritmetisk** følge.

Eksempel: (sum av **aritmetisk** rekker)

- a) Finn summen av de 4 første leddene i den aritmetiske rekken definert ved $a_{i+1} = a_i + d$ med:

$$a_1 = a = 1 \quad (\text{startledd}) \quad (5.65)$$

$$d = 7 \quad (\text{differens}) \quad (5.66)$$

- b) Finn summen av de 3 første leddene i den aritmetiske rekken definert ved $b_{i+1} = b_i + d$ med:

$$b_1 = b = 500 \quad (\text{startledd}) \quad (5.67)$$

$$d = -3 \quad (\text{differens}) \quad (5.68)$$

Løsning:

- a) Summen av de 4 første leddene i den aritmetiske rekken:

$$\sum_{i=1}^4 a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (5.69)$$

$$= 1 + (1 + 7) + (8 + 7) + (15 + 7) \quad (5.70)$$

$$= 1 + 8 + 15 + 22 = \underline{\underline{46}} \quad (5.71)$$

b) Summen av de 3 første leddene i den aritmetiske rekken

$$\sum_{i=1}^3 b_i = b_1 + b_2 + b_3 \quad (5.72)$$

$$= 500 + (500 - 3) + (497 - 3) \quad (5.73)$$

$$= 500 + 497 + 494 = \underline{\underline{1491}} \quad (5.74)$$

■

5.2.1 Sum av en aritmetiske rekke

Setning: (sum av ARITMETISK rekke)

Anta at vi har den aritmetiske følgen

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (5.75)$$

$$a_{i+1} = a_i + d \quad (5.76)$$

hvor $d = \text{konstant}$. Summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (5.77)$$

av den tilhørende aritmetiske rekken er da:

$$S_n = n \left(a + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (5.78)$$

■

Bevis:

Vi ser på tilfellet med kun $n = 4$ ledd. Generaliseringen er åpenbar.

La oss se på **summen** S_4 av en **aritmetisk** rekke med 4 ledd:

$$\underline{S_4} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad (5.79)$$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) \quad (5.80)$$

$$= \underline{4a_1 + 6d} \quad (5.81)$$

Men **summen** kan også skrives: ⁵

$$\underline{S_4} = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \quad (5.84)$$

$$= a_4 + (a_4 - d) + (a_4 - 2d) + (a_4 - 3d) \quad (5.85)$$

$$= \underline{4a_4 - 6d} \quad (5.86)$$

La oss summere disse to:

$$S_4 + S_4 = 4a_1 + \cancel{6d} + 4a_4 - \cancel{6d} \quad (5.87)$$

$$2S_4 = 4(a_1 + a_4) \quad (5.88)$$

$$\underline{S_4 = \frac{4(a_1 + a_4)}{2}} \quad (5.89)$$

⁵Siden

$$a_{i+1} = a_i + d \quad (5.82)$$

så kan vi løse med hensyn på a_i alene:

$$a_i = a_{i+1} - d \quad (5.83)$$

Fra lign.(5.64):

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad (5.90)$$

Denne ligningen med $n = 4$ innsatt i lign.(5.89):

$$\underline{\underline{S_4}} = \frac{4(a_1 + a_4)}{2} \quad (5.91)$$

$$= \frac{4\left(a_1 + (a_1 + (4 - 1)d)\right)}{2} \quad (5.92)$$

$$= \frac{4\left(2a_1 + (4 - 1)d\right)}{2} \quad (5.93)$$

$$= \underline{\underline{4\left(a_1 + \frac{(4 - 1)d}{2}\right)}} \quad (5.94)$$

Istedet for en sum med kun 4 ledd så kan man gjerne ha n ledd.
Fremgangsmåten er den samme. ($4 \rightarrow n$)

■

Eksempel: (sum $\sum$)

Anta at vi har den aritmetiske følgen:

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (5.95)$$

$$a_{i+1} = a_i + 1 \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.96)$$

Finn summen S_{100} .

Løsning:

Siden dette er en aritmetisk rekke så finner vi summen ved å bruke formelen i lign.(5.78): ($n = 100$)

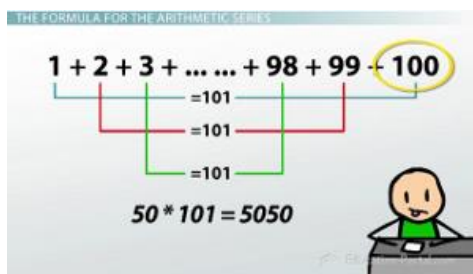
$$\underline{\underline{S_{100}}} \stackrel{\text{lign.(5.78)}}{=} n \left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) = 100 \left(1 + \frac{(100-1)1}{2} \right) = \underline{\underline{5050}} \quad (5.97)$$

PS:

Dersom man skriver ut den aritmetiske rekken definert av lign.(5.95) og (5.96) så får man:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 \quad (5.98)$$

I dette kurset skal vi konsentrere oss om å bruke formelen i lign.(5.78), men vi nevner likevel at man kan finne summen til en av aritmetisk rekke via smarte teknikker som f.eks. vist i figur 5.3.



Figur 5.3: Sum S_{100} .

Eksempel: (aritmetisk rekke , serielån)

Et serielån tilbakebetales med *like store*, altså konstante, **avdrag** ved hver terminbetaling gjennom hele nedbetalingstiden. Etter hvert som avdragene reduserer lånet, blir rentebetalingen stadig mindre. Terminbeløpet blir derfor lavere for hver gang.

Dersom serielånet er K og det skal tilbakebetales på n terminer så er terminbeløpet:

$$\overbrace{\text{terminbeløp}}^{\text{avtar}} = \underbrace{\text{konstant}}_{= \frac{K}{n}} \text{avdrag} + \overbrace{\text{renter}}^{\text{avtar}} \quad (5.99)$$

a) Vis at renten R_i for år nr. i utgjør en aritmetisk følge.

b) Finn et uttrykk for summen R_n^{serie} av rentene

$$R_n^{\text{serie}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad (5.100)$$

hvor R_i = renten for termin nr. i . Anta at rentesatsen r er konstant alle n terminene.

Foto: Colourbox



Foto: Bjørn Brunvoll

Figur 5.4: Lån.

Nå skal vi bruke lign.(5.99) samt resultatene fra deloppgavene ovenfor til et løse følgende konkrete tilfelle: ⁶

Du har bestemt deg for å reservere en leilighet i Brunvollkvartalet. Du behøver 1 900 000 NOK i lån. Anta at du skal tilbakebetale dette via et **serielån**. Nedbetalingen skal skje hvert år i 30 år. Renten er 5 % over hele nedbetalingstiden.

- c) Hva er avdragene per år for dette serielånet?
- d) Hva er renten de 3 første årene?
- e) Hvor mye betaler du totalt i rente i løpet av disse 30 årene?



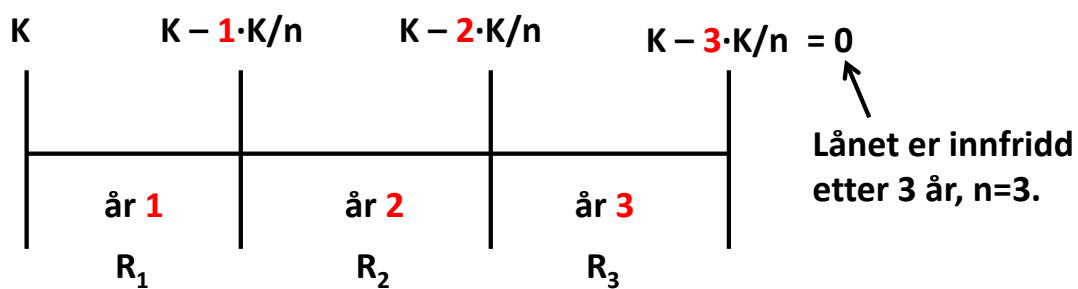
Figur 5.5: Brunvollkvartalet.

⁶Dette er den typiske situasjonen i både eksempler, øvinger og eksamensoppgaver: man bruker resultatene i tidligere deloppgaver. Deloppgavene henger altså svært ofte sammen.

Løsning:

- a) Anta at du tar opp et **serielån** K i banken.
For enkelhets skyld, la oss se på tilfellet når du skal betale tilbake dette lånet på $n = 3$ år ⁷.

La R_1 , R_2 og R_3 være **renten** du må betalte for hhv. år 1, 2 og 3 hhv., se figur:



Figur 5.6: Rentene R_1 , R_2 og R_3 er **rentene** for år 1, 2 og 3.

⁷Lånet er altså innfridd etter 3 år, se figur (5.6).

- i) Etter 1 år må du betale rente av hele lånet. Renten du må betale er dermed:

$$R_1 = K r \quad (5.101)$$

- ii) Ved starten av år 2 har du tilbakebetalt 1 avdrag på $\frac{K}{n}$.
Renten du må betale for perioden mellom år 1 og 2 er dermed:

$$\underline{R_2} = \left(K - 1 \frac{K}{n} \right) r \quad (5.102)$$

$$= K r - \frac{K r}{n} = \underline{R_1 - \frac{K r}{n}} \quad (5.103)$$

- iii) Ved starten av år 3 har du tilbakebetalt 2 avdrag på $\frac{K_0}{n}$.
Renten du må betale for perioden mellom år 2 og 3 er dermed:

$$R_3 = \left(K_0 - 2 \frac{K_0}{n} \right) r \quad (5.104)$$

$$= \left(K r - \frac{K r}{n} \right) - \frac{K r}{n} = \underline{R_2 - \frac{K r}{n}} \quad (5.105)$$

Vi ser dermed at renten følger mønsteret

$$\underline{\underline{R_{i+1} = R_i - \frac{K r}{n}}} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.106)$$

som utgjør en **aritmetisk følge** med $d = -\frac{K r}{n}$ og startledd $R_1 = K r$, se lign.(5.101).

b) Den totale renten:

$$R_n^{\text{serie}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad (5.107)$$

er altså summen av en **aritmetisk** rekke og vi bruker formelen i lign.(5.78):

$$\underline{\underline{R_n^{\text{serie}}}} \stackrel{\text{lign.(5.78)}}{=} n \left(R_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (5.108)$$

$$= n \left(Kr + \frac{(n-1) \left(-\frac{Kr}{n} \right)}{2} \right) \quad (5.109)$$

$$= nKr \left(1 - \frac{n-1}{2n} \right) \quad (5.110)$$

$$= nKr \left(\frac{2n}{2n} - \frac{n-1}{2n} \right) \quad (5.111)$$

$$= nKr \frac{2n - (n-1)}{2n} \quad (5.112)$$

$$= \underline{\underline{Kr \frac{n+1}{2}}} \quad (5.113)$$

som altså er det totale **rente**beløpet som må betales for et **serielån** over lånets løpetid.

- c) **Avdragene** for et serielån er **konstante**, se lign.(5.99).

I vårt tilfelle er disse konstanteavdragene gitt ved:

$$\underline{\underline{\text{avdrag per år}}} = \frac{K}{n} = \frac{1\,900\,000}{30} \text{ NOK} = \underline{\underline{63\,333 \text{ NOK}}} \quad (5.114)$$

- d) Fra eksemplet på side 257 vet vi at renten R_i for år nr. i utgjør en aritmetisk følge.

$$R_1 = K r \quad (\text{startledd}) \quad (5.115)$$

$$\underline{\underline{R_{i+1}}} = R_i - \frac{Kr}{n} \quad (5.116)$$

Dermed:

$$\underline{\underline{R_1}} = K r = 1\,900\,000 \cdot 0.05 \text{ NOK} = \underline{\underline{95\,000 \text{ NOK}}} \quad (5.117)$$

$$\underline{\underline{R_2}} = R_1 - \frac{Kr}{n} \quad (5.118)$$

$$= \left(95\,000 - \frac{1\,900\,000}{30} \right) = \underline{\underline{91\,833 \text{ NOK}}} \quad (5.119)$$

$$\underline{\underline{R_3}} = R_2 - \frac{Kr}{n} \quad (5.120)$$

$$= \left(91\,833 - \frac{1\,900\,000}{30} \right) = \underline{\underline{88\,667 \text{ NOK}}} \quad (5.121)$$

- e) **Total rente** R_{30}^{serie} for et **serielån** i løpet av tilbakebetalingstiden på 30 år er gitt ved lign.(5.113) på side 258:

$$\underline{\underline{R_{30}^{\text{serie}}}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_{\textcolor{red}{30}} \quad (5.122)$$

$$\text{lign.}\underline{\underline{(5.113)}} \quad K r \frac{\textcolor{red}{30} + 1}{2} \quad (5.123)$$

$$= 1\,900\,000 \cdot 0.05 \cdot \frac{30 + 1}{2} \text{ NOK} = \underline{\underline{1\,472\,500 \text{ NOK}}} \quad (5.124)$$

■

Eksempel: (**serielån** , **aritmetisk følge**)

Du bestemmer deg for å spare til bil. Bilen koster 144 000 NOK. Du starter med å sette inn 1000 NOK i banken. Deretter setter du inn et nytt beløp hver måned. Dette beløpet er slik at du setter inn 2000 NOK mer enn du satte inn forrige måned.

- a) Vis at spareprosessen beskrevet i teksten utgjør en **aritmetisk følge**.
- b) **Hvor mange måneder** går det før du har 144 000 NOK på konto?



Figur 5.7: Bil.

Løsning:

a) Siden det settes inn 2000 NOK mer enn du satte inn forrige måned så betyr det at:

$$a_1 = 1000 \text{ NOK} \quad (5.125)$$

$$a_2 = 3000 \text{ NOK} \quad (5.126)$$

$$a_3 = 5000 \text{ NOK} \quad (5.127)$$

$$a_4 = 7000 \text{ NOK} \quad (5.128)$$

.

.

Det generelle mønsteret er:

$$a_1 = a = 1000 \quad (5.129)$$

$$a_{i+1} = a_i + 2000 \quad (5.130)$$

som utgjør en aritmetisk følge hvor $d = 2000$.

- b) La n være antall måneder du må spare for å få 144 000 NOK på konto, dvs.:

$$S_n = 144\,000 \text{ NOK} \quad (5.131)$$

hvor

$$S_n = n \left(a + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (5.132)$$

og setter inn tall:

$$\underline{144\,000} = n \left(1000 + \frac{(n-1)2000}{2} \right) \quad (5.133)$$

$$= \cancel{1000n} + 1000n^2 - \cancel{1000n} = 1000n^2 \quad (5.134)$$

og løser med hensyn på n

$$\underline{n} = \pm\sqrt{144\,000} = \pm\underline{12} \quad (5.135)$$

Løsningen $n = -12$ måneder er umulig.

Med andre ord: Det tar 12 måneder før du kan kjøpe bilen.

■

5.3 Geometriske rekker

Definisjon: (**geometrisk** følge)

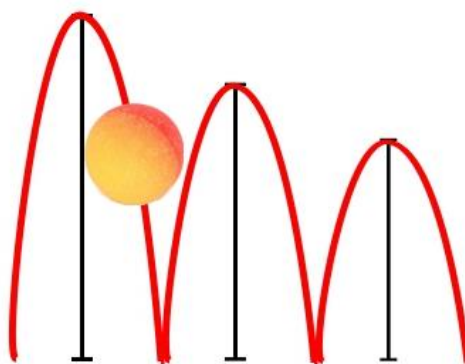
En følge er en **geometrisk** dersom et ledd er lik det foregående **multiplisert** med en *konstant*, dvs.

$$\begin{array}{lll} a_1 & = & a \quad (\text{startledd}) \quad (5.136) \\ a_{i+1} & = & k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.137) \end{array}$$

hvor k = konstant og kalles *kvotient*.

■

Definisjonen i lign.(5.137) viser at en geometrisk følge er definert **rekursivt**. ⁸



Figur 5.8: Geometrisk følge.

⁸Rekursjon er en **gjentakende prosess** hvor en funksjon **kaller seg selv**.

Siden

$$a_2 = k a_1 \quad (5.138)$$

$$a_3 = k a_2 = k k a_1 = k^2 a_1 \quad (5.139)$$

$$a_4 = k a_3 = k (k^2 a_1) = k^3 a_1 \quad (5.140)$$

$$\cdot \quad (5.141)$$

$$\cdot \quad (5.142)$$

så innser at følgende sammenheng gjelder:

$a_i = k^{i-1} a_1 \quad (5.143)$

for en **geometrisk** rekke, hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

Eksempel: (geometriske rekker)

- a) Finn summen av de 4 første leddene i den geometriske rekken definert ved $a_{i+1} = a_i k$ med:

$$a_1 = a = 1 \quad (\text{startledd}) \quad (5.144)$$

$$k = 3 \quad (\text{kvotient}) \quad (5.145)$$

- b) Finn summen av de 4 første leddene i den geometriske rekken definert ved $b_{i+1} = b_i k$ med:

$$b_1 = b = 1 \quad (\text{startledd}) \quad (5.146)$$

$$k = 1.1 \quad (\text{kvotient}) \quad (5.147)$$

Løsning:

- a) Summen av de 4 første leddene i den geometriske rekken:

$$\underline{\underline{S_4}} = \sum_{i=1}^4 3^{i-1} \quad (5.148)$$

$$= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 \quad (5.149)$$

$$= 1 + 3 + 9 + 27 \quad (5.150)$$

$$= \underline{\underline{40}} \quad (5.151)$$

b) Summen av de 4 første leddene i den aritmetiske rekken

$$\underline{\underline{S_4}} = \sum_{i=1}^4 1.1^{i-1} \quad (5.152)$$

$$= 1.1^0 + 1.1^1 + 1.1^2 + 1.1^3 \quad (5.153)$$

$$= 1 + 1.1 + 1.21 \quad (5.154)$$

$$= \underline{\underline{3.31}} \quad (5.155)$$

■

5.3.1 Sum av en geometriske rekke

Setning: (sum av GEOMETRISK rekke, endelig n) ⁹

Anta at vi har den geometriske følgen

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (5.156)$$

$$a_{i+1} = k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.157)$$

hvor $k = \text{konstant}$ og kalles kvotient. Summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (5.158)$$

av den tilhørende geometriske rekken er da: ¹⁰

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (k \neq 1) \quad (5.160)$$

■

⁹Sammenlign denne setningen med den på side 293.

¹⁰Dersom $k = 1$, dvs. alle leddene er like, så er summen:

$$S_n = a_1 n \quad (k = 1) \quad (5.159)$$

Bevis:

Vi ser på tilfellet med kun $n = 3$ ledd. Generaliseringen er åpenbar.

La oss se på **summen** S_3 av en geometrisk rekke med 3 ledd:

$$\underline{S_3} = \sum_{i=1}^3 a k^{i-1} = \underline{a + a k + a k^2} \quad (5.161)$$

Multipliser denne ligningen med k :

$$\underline{S_3 k} = (a + a k + a k^2) k = \underline{a k + a k^2 + a k^3} \quad (5.162)$$

La oss subtrahere disse to:

$$\underline{S_3 k} - \underline{S_3} = \cancel{a k} + \cancel{a k^2} + a k^3 - \left(\cancel{a} + \cancel{a k} + \cancel{a k^2} \right) \quad (5.163)$$

$$= \underline{a k^3 - a} \quad (5.164)$$

Denne ligningen kan vi løse mhp. **summen** S_3 :

$$S_3 k - S_3 = a k^3 - a \quad (5.165)$$

$$S_3(k - 1) = a(k^3 - 1) \quad \left| \cdot \frac{1}{k - 1} \right. \quad (k \neq 1) \quad (5.166)$$

$$\underline{\underline{S_3 = a \frac{k^3 - 1}{k - 1}}} \quad (5.167)$$

Istedet for en sum med kun 3 ledd så kan man gjerne ha n ledd. Fremgangsmåten er den samme. Istedet for 3 så får man n i formelen i lign.(5.167): $(3 \rightarrow n)$

■

Eksempel: (geometrisk rekker , sum)

La oss returnere til eksemplene på side 266.

Summen S_4 :

$$\underline{S_4} = \sum_{i=1}^4 3^{i-1} = \underline{3^0 + 3 + 3^2 + 3^3} \quad (5.168)$$

er en geometrisk rekke siden $\frac{a_{i+1}}{a_i} = k = 3$, dvs. konstant. Videre er $a_1 = a = 3^0 = 1$.
Dermed kan vi bruke lign.(5.160):

$$\underline{\underline{S_4}} \stackrel{\text{lign. (5.160)}}{=} a \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = \underline{\underline{40}} \quad (5.169)$$

dvs. samme svar som i lign.(5.151) på side 266.

Summen S_4 :

$$\underline{S_4} = \sum_{i=1}^4 1.1^{i-1} = \underline{1.1^0 + 1.1 + 1.1^2 + 1.1^3} \quad (5.170)$$

er en geometrisk rekke siden $\frac{b_{i+1}}{b_i} = k = 1.1$, dvs. konstant. Videre er $b_1 = 1.1^0 = 1$.
Dermed kan vi bruke lign.(5.160):

$$\underline{\underline{S_4}} \stackrel{\text{lign. (5.160)}}{=} b_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{1.1^3 - 1}{1.1 - 1} = \underline{\underline{3.31}} \quad (5.171)$$

dvs. samme svar som i lign.(5.155) på side 266.

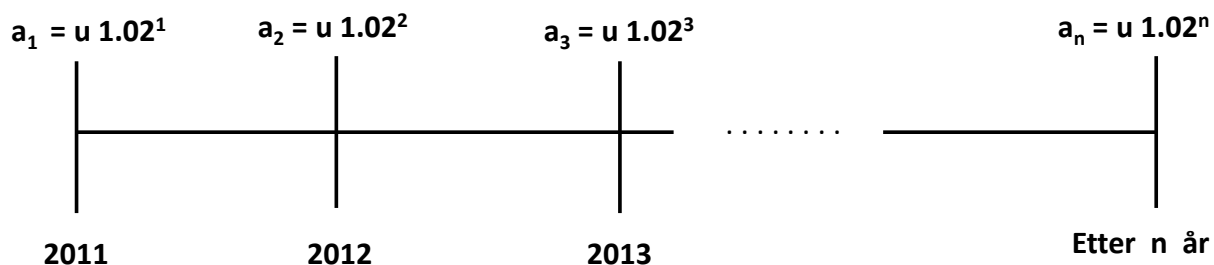
■

Eksempel: (petroleumslogistikk)

I 2010 ble det totalt utvunnet

$$u = 31.2 \cdot 10^9 \text{ fat olje} \quad (2010) \quad (5.172)$$

Olje-analytikerne estimerer at antall fat som utvinnes hvert år øker med 2% i forhold til året før. La oss i denne oppgaven kun se på utvunnet olje etter år 2010, dvs. fra og med år 2011, se figur 5.9:



Figur 5.9: Utvinning av olje.



Figur 5.10: Olje.

a) Via at antall tonn utvunnet olje i år nr. i er en **geometrisk følge**.

b) Vis at summen av produsert olje n år etter år 2010

$$S_n = \sum_{i=1}^n u 1.02^i \quad (5.173)$$

er gitt ved

$$S_n = 51u(1.02^n - 1) \quad (5.174)$$

Verdens kjente reserver R av olje var ved utgangen av 2010:

$$R = 1.33 \cdot 10^{12} \text{ fat olje} \quad (5.175)$$

c) Vis at antall år de kjente oljereservene vil rekke dersom man ikke finner mer olje er gitt ved:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R}{51u} + 1\right)}{\ln 1.02} \quad (5.176)$$

d) Hvor lang tid tar det før man bruker opp oljereservene R dersom man ikke finner mer olje? ¹¹

¹¹Regn ut det numeriske svaret.

Løsning:

- a) Antall tonn utvunnet olje år 2010 er u . Antall tonn utvunnet olje øker med 2 % i året. År 2011 blir dermed

$$a_1 = u \cdot 1.02 \quad (2011) \quad (5.177)$$

og år 2012

$$a_2 = a_1 \cdot 1.02 \quad (2012) \quad (5.178)$$

og år 2013

$$a_3 = a_2 \cdot 1.02 \quad (2013) \quad (5.179)$$

Det generelle mønsteret er:

$$a_1 = u \cdot 1.02 \quad (\text{startledd}) \quad (5.180)$$

$$a_{i+1} = 1.02 a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.181)$$

som utgjør en geometrisk følge med kvotient $k = 1.02$.

b) Summen av en geometrisk rekke er:

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (5.182)$$

For vår rekke er kvotienten $k = 1.02$ og $a_1 = 1.02u$. Dette setter vi inn i lign.(5.182):

$$\underline{\underline{S_n}} \stackrel{\text{lign.(5.182)}}{=} a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (5.183)$$

$$= \quad \textcolor{red}{1.02} u \frac{1.02^n - 1}{\textcolor{red}{1.02} - 1} = \frac{\textcolor{red}{1.02}}{\textcolor{red}{1.02} - 1} u (1.02^n - 1) \quad (5.184)$$

$$= \quad \underline{\underline{\textcolor{red}{51}u (1.02^n - 1)}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \quad (5.185)$$

c) Siden vi antar at man ikke finner mer olje så må man tære på reservene. Altså:

$$R = S_n \quad (5.186)$$

Vi bruker svaret fra oppgave **b**, dvs. lign.(5.185), og løser med hensyn på “ n ” alene:

$$R = 51u (1.02^n - 1) \quad \left| \cdot \frac{1}{51u} \right. \quad (5.187)$$

$$\frac{R}{51u} = 1.02^n - 1 \quad (5.188)$$

$$\frac{R}{51u} + 1 = 1.02^n \quad (5.189)$$

For å “jekke ned” eksponenten “ n ” så tar vi “ $\ln$ ” på begge sider av ligningen:

$$\ln \left(\frac{R}{51u} + 1 \right) = \ln 1.02^n \quad (5.190)$$

$$\ln \left(\frac{R}{51u} + 1 \right) = n \ln 1.02 \quad (5.191)$$

hvor vi har brukt regnereglen $\ln a^n = n \ln a$.

Dermed: ved å dele på “ $\ln 1.02$ ” på begge sider at lign.(5.191) så får vi:

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\ln \left(\frac{R}{51u} + 1 \right)}{\ln 1.02} , \quad \text{q.e.d.} \quad (5.192)$$

- d) For å finne ut hvor lang tid det tar det før man bruker opp oljereservene R så bruker vi bare resultatet fra oppgave c, dvs. lign.(5.192):

$$\underline{n} \stackrel{\text{lign. (5.192)}}{=} \frac{\ln \left(\frac{R}{51u} + 1 \right)}{\ln 1.02} \quad (5.193)$$

$$= \frac{\ln \left(\frac{1.33 \cdot 10^{12}}{51 \cdot 31.2 \cdot 10^9} + 1 \right)}{\ln 1.02} \approx \underline{\underline{30.7}} \quad (5.194)$$

Det tar 30.7 år før oljereservene er brukt opp.

■

Eksempel: (geometrisk rekke , annuitetslån)

Et annuitetslån tilbakebetales med *like store*, altså konstante, **terminbeløp** ved hver terminbetaling gjennom hele nedbetalingstiden. Etter hvert som avdragene reduserer lånet, blir rentebetalingen stadig mindre:

$$\underbrace{\text{terminbeløp}}_{=K} = \underbrace{\text{avdrag}}_{\text{øker}} + \underbrace{\text{renter}}_{\text{avtar}} \quad (5.195)$$

Sammenlign denne ligningen med den tilsvarende for serielån, se lign.(5.99).
Anta at man setter inn beløpet K_0 i banken.

a) Vis at kapitalen K_n etter år nr. n utgjør en geometrisk følge.

b) Finn et uttrykk for kapitalen K_n etter n år. ¹²

c) Du setter 1000 NOK i banken. Renten er 6 %.
Hva er **sluttverdien** etter 10 år?

d) Anta du ønsker ha 10 000 NOK på konto om 5 år.
Hvilket beløp må du sette inn i dag får å få til dette?

Foto: Colourbox



Foto: Bjørn Brunvoll

Figur 5.11: Lån.

¹²Oppgaven spør etter "renteformelen", altså formelen for rentesrente når renten er konstant.

Løsning:

a) Etter ett år vil kapitalen vokse til:

$$K_1 = K_0(1 + r) \quad (5.196)$$

Etter to år vil kapitalen vokse til:

$$K_2 = K_1(1 + r) \quad (5.197)$$

Etter tre år vil kapitalen vokse til:

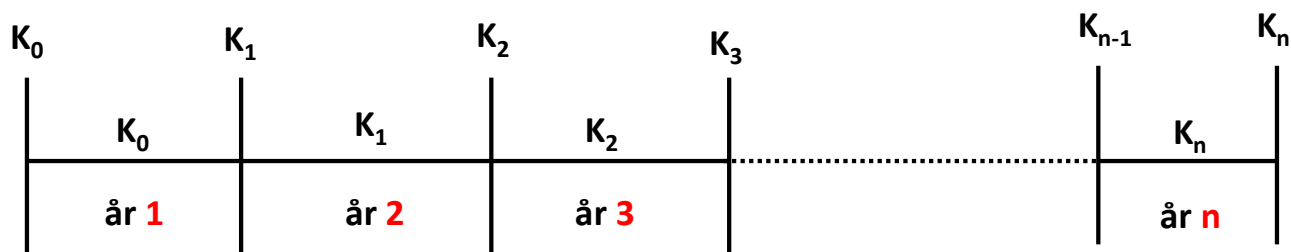
$$K_3 = K_2(1 + r) \quad (5.198)$$

Det generelle mønsteret er:

$$a_1 = K_0 \quad (\text{startledd}) \quad (5.199)$$

$$a_{i+1} = a_i(1 + r) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.200)$$

som utgjør en geometrisk følge med kvotient $k = 1 + r$.



Figur 5.12: Tidslinje.

b) Fra lign.(5.143) på side 265 vet vi at for en geometrisk følge gjelder:

$$a_n = k^{n-1}a_1 \quad (5.201)$$

Med $a_1 = K_0(1+r)$ og $k = 1+r$ så er da:

$$\underline{\underline{K_n}} = K_0(1+r)(1+r)^{n-1} = \underline{\underline{K_0(1+r)^n}} \quad (5.202)$$

som kalles **renteformelen**, dvs. **rentesrente**:

c) Renten $r = \frac{6}{100} = 0.06$ er konstant alle $n = 10$ årene.
Siden renten er konstant så gjelder lign.(5.202) .
Startkapitalen $K_0 = 1000$ NOK har da vokst til.

$$\underline{\underline{K_{10}}} \stackrel{\text{lign.(5.202)}}{=} K_0 (1+r)^{10} \quad (5.203)$$

$$= 1000 (1+0.06)^{10} \text{ NOK} = \underline{\underline{1790.85 \text{ NOK}}} \quad (5.204)$$

- d) Renten $r = \frac{5}{100} = 0.05$ er konstant alle $n = 5$ årene.
 Du ønsker å ha 10 000 NOK på konto om $n = 5$ år, dvs. du ønsker $K_5 = 10\,000$ NOK.
 I dag er dette beløpet verdt, dvs. nåverdi K_0 . Vi skal altså i denne oppgaven finne K_0 .

Igen bruker vi renteformelen fra lign.(5.202)

$$K_n = K_0(1 + r)^n \quad (5.205)$$

og løser med hensyn på K_0 alene:

$$\underline{\underline{K_0}} = \frac{K_5}{(1 + r)^5} \quad (5.206)$$

$$= \frac{10\,000}{(1 + 0.05)^5} \text{ NOK} = \underline{\underline{7835.26 \text{ NOK}}} \quad (5.207)$$

Altså:

For å få 10 000 NOK på konto om 5 år så må vi sette $K_0 = 7835$ NOK i banken i dag. ¹³

■

¹³Med andre ord: $\overbrace{7835 \text{ NOK i dag}}^{= \text{nåverdi}} \Leftrightarrow 10\,000 \text{ NOK om 5 år}$

Eksempel: (oppsparingsannuitet , pensjon , geometrisk rekke)

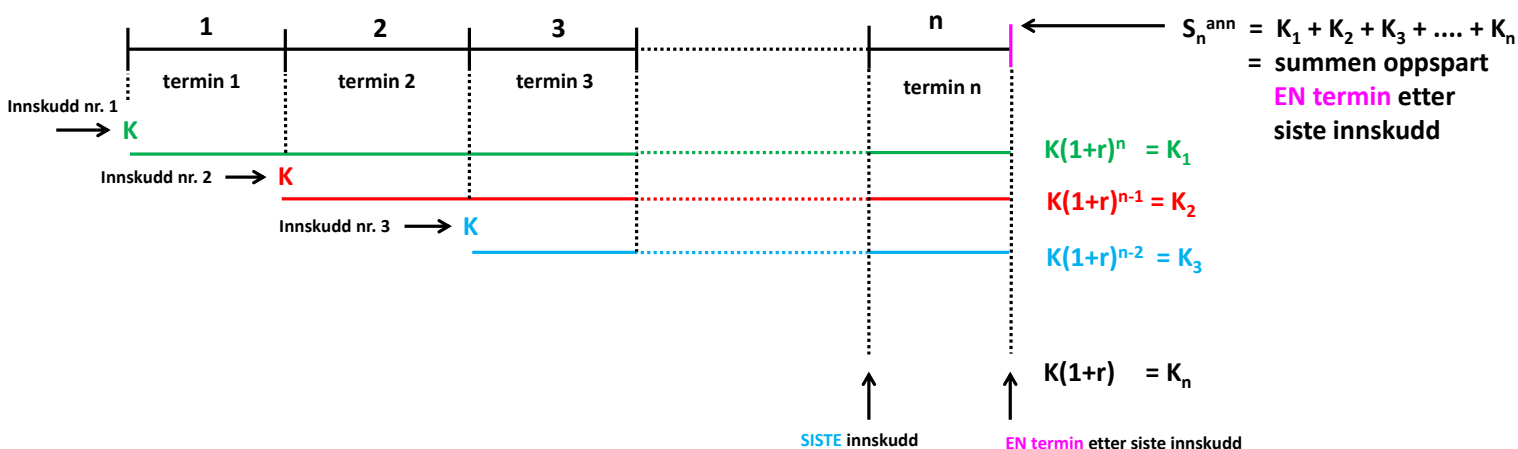
Ved oppsparingsannuitet så setter man av samme konstante kapitalen K i banken ved begynnelsen av hver termin, se figur 5.13. Anta at renten er $r = \frac{p}{100}$, hvor p % per termin.

La

$$K_i = \text{oppspart kapital etter } n \text{ terminer pga. innskudd } K \text{ i termin nr. } i \quad (5.208)$$

- a) Vis at kapitalen K_i utgjør en geometrisk følge.
- b) Finn en generell formel for oppspart kapital S_n^{ann} èn termin etter siste innskudd, se figur 5.13, og n terminer med annuitet.
- c) Du ønsker å spare opp kapital til din fremtidig pensjon. Oppsparingen skal skje ved at det settes av 15 000 NOK ved utgangen av hvert år i 20 år. Anta at renten er 3.5 % for hele perioden.

Hvor mye har du oppspart, med renter, **ett år** etter siste innskudd?



Figur 5.13: Oppsparingsannuitet.

a) Oppspart kapital etter n terminer pga. innskudd K i termin nr. 1: ¹⁴

$$K_1 = K(1+r)^n \quad (5.209)$$

Oppspart kapital etter n terminer pga. innskudd K i termin nr. 2: ¹⁵

$$\underline{K_2} = K(1+r)^{n-1} = \underbrace{K(1+r)^n}_{K_1} (1+r)^{-1} = \frac{K_1}{1+r} \quad (5.210)$$

Oppspart kapital etter n terminer pga. innskudd K i termin nr. 3: ¹⁶

$$K_3 = K(1+r)^{n-2} = \underbrace{K(1+r)^{n-1}}_{K_2} (1+r)^{-1} = \frac{K_2}{1+r} \quad (5.211)$$

Det generelle mønsteret er:

$$K_1 = K(1+r)^n \quad (\text{startledd}) \quad (5.212)$$

$$K_{i+1} = \frac{K_i}{1+r} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.213)$$

som utgjør en geometrisk følge med $k = \frac{1}{1+r}$.

¹⁴Hele grønne linjen i figur 5.13.

¹⁵Hele røde linjen i figur 5.13.

¹⁶Hele blå linjen i figur 5.13.

b) Siden K_i utgjør en geometrisk rekke så finner man summen

$$\textcolor{red}{S}_n^{\text{ann}} = \sum_{i=1}^n K_i \quad (5.214)$$

via lign.(5.160)

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (5.215)$$

Med $K_1 = K(1+r)^n$ fra lign.(5.212) og $k = \frac{1}{1+r}$ får vi:

$$\underline{\underline{S_n^{\text{ann}}}} = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (5.216)$$

$$= \textcolor{blue}{K}(1+r)^n \frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+r} - 1} \quad (5.217)$$

$$= K \frac{1 - (1+r)^n}{\frac{1}{1+r} - \frac{1+r}{1+r}} \quad (5.218)$$

$$= K \frac{1 - (1+r)^n}{-\frac{r}{1+r}} \quad (5.219)$$

$$= \underline{\underline{K(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}}} \quad (5.220)$$

- c) Siden det settes av samme beløp $K = 15\,000$ NOK ved hver årlig termin, så er dette en situasjon beskrevet av [oppsparingsannuitet](#). Siden vi skal se på oppspart beløp **en termin** etter siste innskudd så må vi bruke lign.(5.220) med $n = 20$ og $r = 0.035$:

$$\underline{\underline{S_{20}^{\text{ann}}}} = K(1+r) \frac{(1+r)^{20} - 1}{r} \quad (5.221)$$

$$= 15\,000(1+0.035) \frac{(1+0.035)^{20} - 1}{0.035} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{439\,042 \text{ NOK}}} \quad (5.222)$$

■



Figur 5.14: Sparing.

Eksempel: (nåverdi K_0 av etterskuddsannuitet , pensjon , geometrisk rekke)

Som nevnt i et eksempel foran:

Ved oppsparingsannuitet så settes en bestemt, altså konstant, kapital i banken ved begynnelsen av hver termin. Til slutt får man en oppspart kapital.

La oss nå **snu** på situasjonen og spørre:

hvor stort må startinnskuddet/nåverdien K_0 være for at vi skal få utbetalt et bestemt, dvs. konstant, **terminbeløpet** K hver termin over n terminer?

Anta at renten er $r = \frac{p}{100}$ hvor p % per termin.

- a) Finn et generelt uttrykk for nåverdien K_0 av annuitet. ¹⁷
- b) Anta at du har en pensjon som gjør at du får utbetalt 100 000 NOK per år de 10 neste årene. Renten er 7 % hele perioden.
- Hva er pensjonens verdi **i dag**?
- c) Tolk svaret i en økonomisk sammenheng.



Figur 5.15: Pensjon.

¹⁷I “BØK300 Finansiell og økonomisk styring” brukes også K_0 som notasjon for nåverdi. Men i “BØK105 Finansregnskap 1” brukes NV for nåverdi istedet for K_0 . I dette matematikkurset skal vi bruke K_0 . Vi har altså: $K_0 = NV$.

a) Startkapitalen er K_0 .

Denne startkapitalen får man rente på. I hver termin tar man ut en fast beløp K :

$$K_1 = K_0(1+r) - K \quad (5.223)$$

I år nr. 2 får man rente på kapitalen K_1 . I hver termin tar man ut en fast beløp K :

$$\underline{K_2} = K_1(1+r) - K \quad (5.224)$$

$$= K_0(1+r)^2 - K(1+r) - K \quad (5.225)$$

$$= \underline{K_0(1+r)^2 - \overbrace{K(1+r) - K}^{= S_1}} \quad (5.226)$$

I år nr. 3 får man rente på kapitalen K_2 . I hver termin tar man ut en fast beløp K :

$$\underline{K_3} = K_2(1+r) - K \quad (5.227)$$

$$= K_0(1+r)^2 - K(1+r) - K(1+r) - K \quad (5.228)$$

$$= K_0(1+r)^3 - \overbrace{K(1+r)^2 - K(1+r) - K}^{= S_2} \quad (5.229)$$

$$= \underline{K_0(1+r)^3 - \overbrace{\left(K(1+r)^2 + K(1+r) + K \right)}^{= S_2}} \quad (5.230)$$

Det generelle mønsteret er:

$$K_n = K_0(1+r)^n - S_n \quad (5.231)$$

hvor S_n er summen av en geometrisk rekke med $a = K$ og $k = 1+r$ som kan regnes ut via lign.(5.160)

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (5.232)$$

Setter inn for $a = K$ og $k = 1 + r$ i lign.(5.231):

$$\underline{S_n} = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (5.233)$$

$$= K \frac{(1+r)^n - 1}{r+1 - 1} = \underline{\underline{K \frac{(1+r)^n - 1}{r}}} \quad (5.234)$$

Setter dette inn i lign.(5.231):

$$\underline{K_n} = K_0(1+r)^n - S_n \quad (5.235)$$

$$= \underline{\underline{K_0(1+r)^n - K \frac{(1+r)^n - 1}{r}}} \quad (5.236)$$

Etter n terminer med uttak K hver termin så er innskuddet K_0 med tilhørende renter brukt opp, dvs.:

$$K_n = 0 \quad (5.237)$$

$$K_0(1+r)^n - K \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \quad (5.238)$$

og løser med hensyn på innskuddet K_0 alene:

$$\underline{\underline{K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}}} \quad (5.239)$$

- b)** Terminbeløpet i denne oppgaven er $K = 100\,000$ NOK. Antall terminer er $n = 10$ og renten $r = \frac{p}{100} = 0.07$. Vi skal finne pensjonens verdi **i dag**, dvs. K_0 . Denne er gitt ved lign.(5.239):

$$\underline{\underline{K_0}} \stackrel{\text{lign.(5.239)}}{=} K \underbrace{\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}}_{\text{annuitetsfaktor}} \quad (5.240)$$

$$= 100\,000 \frac{(1+0.07)^{10} - 1}{0.07(1+0.07)^{10}} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{702\,358 \text{ NOK}}} \quad (5.241)$$

- c)** Tolkning:

i) Halvmatematisk: $\overbrace{702\,358 \text{ NOK } \textbf{i dag}}^{= \text{nåverdi}} \Leftrightarrow \underline{\underline{100\,000 \text{ NOK hver år i 10 år}}}$

- ii)** Med andre ord: Dersom du setter inn 702 358 NOK i banken **i dag** med 7 % rente, kunne du hvert år i 10 år fremover ta ut et beløp på 100 000 NOK

■

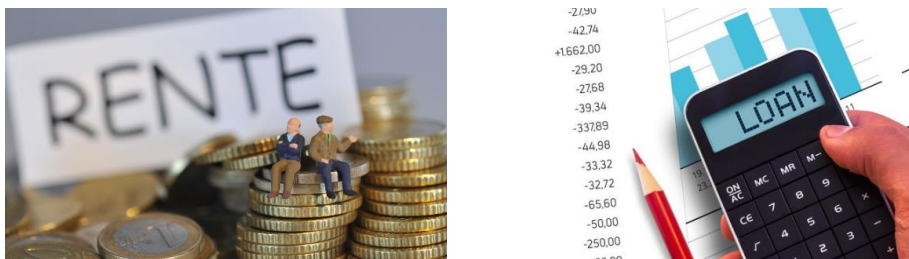
Eksempel: (geometrisk rekke , annuitetslån , rente R_n^{ann})

La oss igjen se på et annuitetslån slik som vi gjorde på side 276

Et annuitetslån tilbakebetales med *like store*, altså konstante, **terminbeløp** ved hver terminbetaling gjennom hele nedbetalingstiden. Etter hvert som avdragene reduserer lånet, blir rentebetalingen stadig mindre:

$$\underbrace{\text{terminbeløp}}_{= K}^{\text{konstant}} = \underbrace{\text{avdrag}}_{\text{øker}} + \underbrace{\text{renter}}_{\text{avtar}} \quad (5.242)$$

- a) Anta at du tar opp et lån K_0 . Du betaler tilbake dette lånet i løpet av n terminer. Finn et uttrykk for den totale renten R_n^{ann} uttrykt ved K_0 , n og renten r



Figur 5.16: Rente.

La oss se på eksemplet fra side 255 en gang til, dvs. eksemplet angående kjøp av leilighet ved Brunvollkvartalet. Men denne gangen skal lånet tilbakebetales via et [annuitetslån](#). Ellers er betingelsene de samme, dvs. lånet er på 1 900 000 NOK. Nedbetalingen skal skje hvert år i 30 år. Renten er 5 % i hele nedbetalingstiden.

- b) Hva blir årlig **terminbeløp** K ? (dvs. avdrag + rente)
- c) Hvor mye betaler du totalt i **rente** i løpet av disse 30 årene?
- d) Sammenlign svaret i oppgave **c** med oppgave **c** på side 259. Kommenter svaret.



Figur 5.17: Opptak av [annuitetslån](#) for å finansiere kjøp av leilighet.

Løsning:

- a) Et annuitetslån tilbakebetales med *like store*, altså konstante, *terminbeløp*.
Med n terminer så betales totalt nK tilbake til banken når annuitetslånet er innfridd.
Ved innfridd lån er summen av avdragene lik lånet, dvs. K_0 . Resten er renteutgifter.
Den totale renten R_n^{ann} som betales til banken er derfor:

$$nK = K_0 + R_n^{\text{ann}} \quad (5.243)$$

$$\Updownarrow \quad (5.244)$$

$$\underline{R_n^{\text{ann}}} = nK - K_0 \quad (5.245)$$

hvor sammenhengen mellom størrelsen K_0 på lånet og terminbeløpet K gitt ved: lign.(5.239)

$$K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \quad (5.246)$$

Siden vi skal finne R_n^{ann} uttrykt ved K_0 så løser vi lign.(5.246) med hensyn på K alene og deretter skriver den litt om:

$$\underline{K} = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad \Bigg| \cdot \frac{\frac{1}{(1+r)^n}}{\frac{1}{(1+r)^n}} \quad (5.247)$$

$$= K_0 \frac{r}{1 - \frac{1}{1+r}} = \underline{\underline{\frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{1+r}}}} \quad (5.248)$$

Dette innsatt i lign.(5.245):

$$\underline{\underline{R_n^{\text{ann}}}} = nK - K_0 = n \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - K_0 \quad (5.249)$$

$$= \underline{\underline{K_0 \left[\frac{nr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right]}} \quad (5.250)$$

- b) Denne oppgaven dreier seg om tilbakebetaling av et **annuitetslån** på $K_0 = 1\,900\,000$ NOK. Altså **banken** bidrar med **innskuddet** K_0 og du, som lånetaker, må betale tilbake de årlige terminbeløpene K til banken.

Fra lign.(5.248) fra oppgave **a** foran innser vi at:

$$\underline{\underline{K}} \stackrel{\text{lign. (5.248)}}{=} \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (5.251)$$

$$= \frac{900\,000 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{30}}} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{123\,598 \text{ NOK}}} \quad (5.252)$$

- c) Dette er et **annuitetslån**.
De totale renteutgiftene i løpet av nedbetalingstiden på 30 år er da gitt ved lign.(5.250):

$$\underline{\underline{R_{30}^{\text{ann}}}} \stackrel{\text{lign. (5.250)}}{=} K_0 \left[\frac{nr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} - 1 \right] \quad (5.253)$$

$$= 1\,900\,000 \left[\frac{30 \cdot 0.05}{1 - \frac{1}{(1+0.05)^{30}}} - 1 \right] \text{ NOK} \quad (5.254)$$

$$= \underline{\underline{1\,807\,932 \text{ NOK}}} \quad (5.255)$$

- d) Fra oppgave **c** på side 259 vet vi at de totale renteutgiftene ved serielånet var $R_{30}^{\text{serie}} \approx 1\,472\,500$ NOK. Sammenlignet med lign.(5.255) ser vi at:

$$\underline{\underline{\text{serielånet er billigst}}} \quad (5.256)$$

■

5.4 Konvergente og divergente rekker: $n \rightarrow \infty$

Når man summerer rekker så er det ikke alltid at det bare summeres over et endelig antall ledd. Det finnes også mange rekker som har uendelig antall ledd n .

Dersom summen av en rekke S_n går mot et fast tall, som vi kan kalle S , når $n \rightarrow \infty$, sier vi at rekken **KONVERGERER**.

Dersom rekken ikke konvergerer, sier vi at den **DIVERGERER**.

Definisjon: (konvergens og divergens)

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$	$\Leftrightarrow$	rekken konvergerer	(5.257)
---------------------------------------	-------------------	--------------------	---------

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ eksisterer ikke	$\Leftrightarrow$	rekken divergerer	(5.258)
---	-------------------	-------------------	---------

■

5.5 Geometriske rekker: $n \rightarrow \infty$

Setning: (sum av **GEOMETRISK** rekke, uendelig n) ¹⁸

Gitt en geometrisk følge

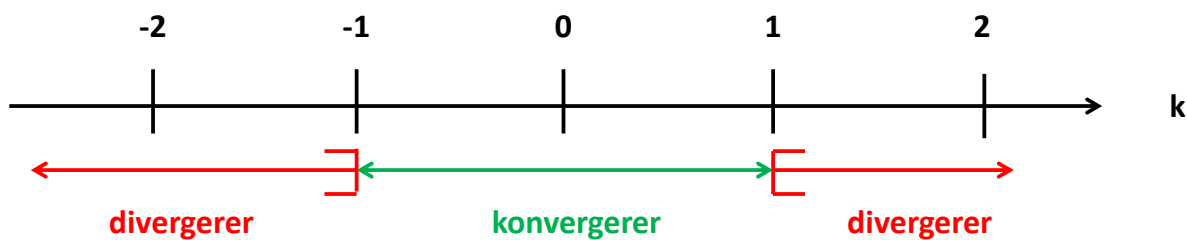
$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (5.259)$$

$$a_{i+1} = k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.260)$$

Dersom $-1 < k < 1$ så er summen av rekken $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ gitt ved: ¹⁹

$$S = \frac{a}{1-k}, \quad -1 < k < 1 \quad (5.261)$$

■



Figur 5.18: Divergens og konvergens.

¹⁸Sammenlign denne setningen med den på side 268.

¹⁹For $k \leq -1$ eller $k \geq 1$ **DIVERGERER** den uendelige summen.

Bevis:

La oss se på den geometriske rekken:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_1 k^{i-1} = a_1 (k^0 + k^1 + k^2 + \dots + k^n) \quad (5.262)$$

Summen av denne rekken er gitt ved lign.(5.160):

$$S_n \stackrel{\text{lign. (5.160)}}{=} a_1 \frac{\textcolor{red}{k}^n - 1}{\textcolor{red}{k} - 1} \quad (5.263)$$

La oss ta med uendelig mange ledd i lign.(5.262), dvs. vi lar $n \rightarrow \infty$.

Siden $-1 < k < 1$ så er $k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dermed blir summen med uendelig mange ledd følgende: ²⁰

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \stackrel{\text{lign. (5.263)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - k^n}{1 - k} = a_1 \frac{1 - 0}{1 - k} = \frac{a_1}{1 - k} \quad (5.264)$$

hvor $a_1 = a$.

■

²⁰Prøv f.eks. med $k = 1/2$ så innser du at $k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Eksempel: (nåverdi K_0 ved utbetaling til evig tid, dvs. $n \rightarrow \infty$)

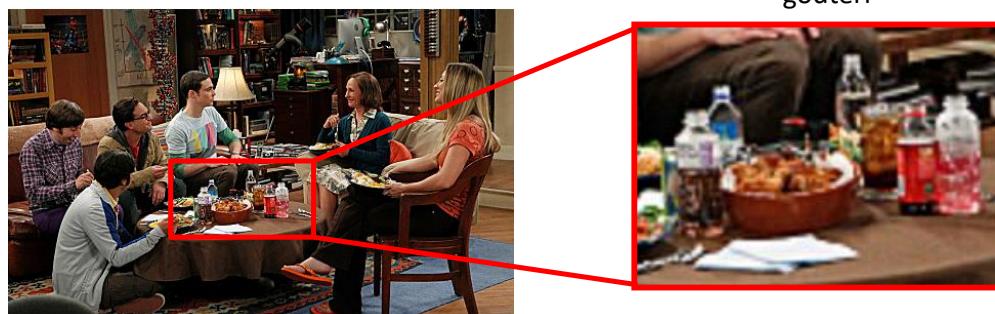
I et tidligere eksempel fant vi hvor stort må startinnskuddet/nåverdien K_0 være for at vi skal få utbetalt et bestemt, dvs. konstant, **terminbeløpet** K hver termin. Med n antall terminer fant vi at denne nåverdien K_0 var gitt ved lign.(5.246):

$$K_0 \stackrel{\text{lign.(5.246)}}{=} K \underbrace{\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}}_{\text{annuitetsfaktor}} \quad (5.265)$$

- a) Dersom vi ønsker å få utbetalt beløpet K hver termin til **evig tid**, hvor stort må startinnskuddet være da?

Du har 100 000 NOK som du kan avse og som du setter i banken på en høyrentekonto. Renten er 7 %. Du ønsker å bruke terminbeløpet du får utbetalt til godteri. Høyrentekontoen har en årlig kapitalisering av renten. Første utbetaling skal skje **ett år**, dvs. én termin, etter at beløpet på 100 000 NOK er satt inn på konto.

- b) Hvor mye kan du ta ut i fremtiden i hver termin, dvs. hvert år i all fremtid?



Figur 5.19: Godteri.

c) Kommenter svaret i oppgave b.

d) Istedet for å få ubetalt et fast beløp til evig tid så ønsker du heller å få utbetalt et bestemt terminbeløp de neste 20 årene.

Hva hvor mye kan du årlig bruke på snop de neste 20 årene?

e) Kommenter svaret i oppgave d.

Løsning:

- a) Dersom vi ønsker å få utbetalt beløpet K hver termin til **evig tid** må vi la $n \rightarrow \infty$.
Det er lettere å se hva startinnskuddet K_0 er dersom vi skriver om lign.(5.265):

$$K_0 = K \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} \quad \bigg| \cdot \frac{\frac{1}{(1+r)^n}}{\frac{1}{(1+r)^n}} \quad (5.266)$$

$$= K \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \quad (5.267)$$

Med en rente $r > 0$ blir faktoren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+r)^n} = 0 \quad (5.268)$$

og tilhørende **annuitetsfaktor** blir redusert til $\frac{1}{r}$.
Dermed blir startinnskuddet/**nåverdien** K_0 :

$$\underline{\underline{K_0 = K \frac{1}{r}}} \quad (5.269)$$

som selvsagt også kan skrives $K_0 = K/r$.

- b) Du har 100 000 NOK disponibelt **i dag**, dvs. $K_0 = 100\,000$ NOK. Løser lign.(5.269) med hensyn på terminbeløpet K :

$$K \stackrel{\text{lign. (5.269)}}{=} K_0 r \quad (5.270)$$

Med renten $r = 0.07$ kan man **ta ut**:

$$\underline{\underline{K}} = K_0 r = 100\,000 \cdot 0.07 \text{ NOK} = \underline{\underline{7\,000 \text{ NOK}}} \quad (5.271)$$

hvert år i **all fremtid**.

- c) Kommenter:

Siden dette skal være evigvarende så er det **kun renten** du kan ta ut hvert år. Terminbeløpet $K = 7\,000$ NOK er **kun rente**. Beløpet på 100 000 NOK er **uberørt**. Man lever kun på renten.

- d) Siden første utbetaling skal skje ett år, dvs. èn termin, etter at beløpet K_0 er satt inn så gjelder lign.(5.248). Med rente $r = 0.07$ blir dermed den faste årlige **utbetalingen**, dvs. terminbeløpet K :

$$\underline{\underline{K}} \stackrel{\text{lign. (5.248)}}{=} \frac{K_0 r}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}} \quad (5.272)$$

$$= \frac{100\,000 \cdot 0.07}{1 - \frac{1}{(1+0.07)^{20}}} \text{ NOK} \approx \underline{\underline{9\,439 \text{ NOK}}} \quad (5.273)$$

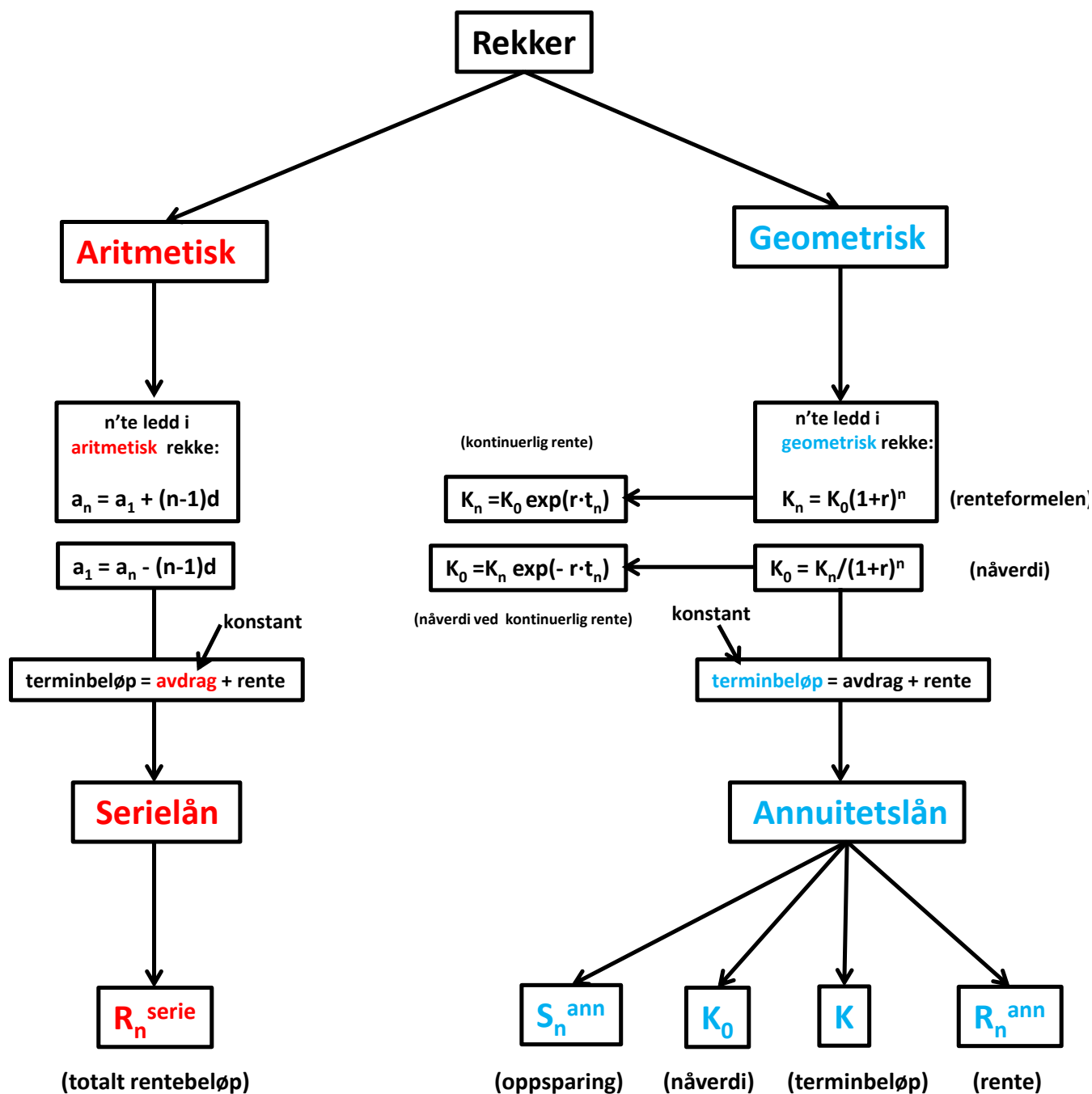
e) Kommentar:

Siden du skal ta ut kapitalen i løpet av en endelig tid, i dette tilfellet 20 år, så består terminbeløpet K av både **rente** og utbetaling av deler av **startkapitalen** på 100 000 NOK. Etter 20 år har du tatt ut all renten og hele startkapitalen. Etter 20 år er du **blakk**!



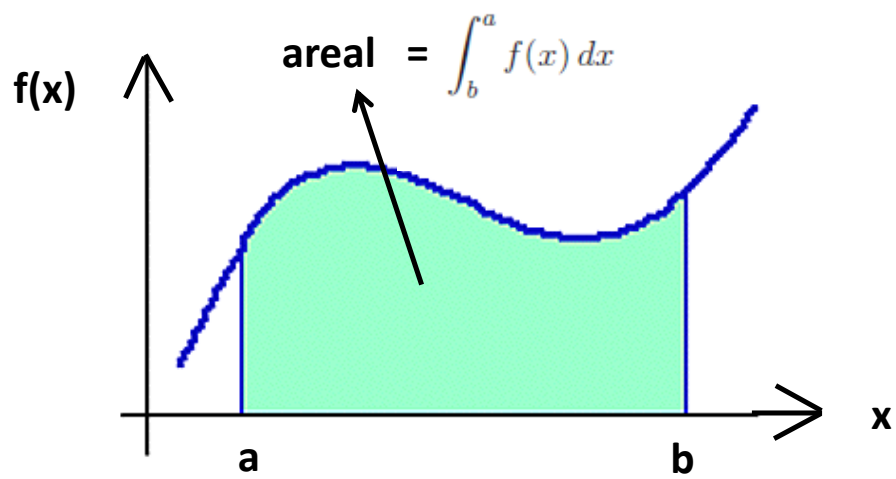
5.6 Oversikt finansmatematikk

Rekker og følger spiller en viktig rolle i finansmatematikk, dvs. pengenes tidsverdi. Figuren nedenfor viser en oversikt over hva vi skal ta opp som tema i dette avsnittet om finansmatematikk.



Kapittel 6

Integrasjon



Figur 6.1: Integral.

6.1 Motivasjon: Areal under graf

Eksempel: (areal under graf , *BØK105 Finansregnskap 1*)

Glamox er en norsk produsent og leverandør av belysning og varmeovner.

Glamox lanserer en ny panelovn som oppfyller kravene i EUs økodesignforordning, se figur 6.2.

Anta at Glamox har en kapasitet på å produsere 1000 slike panelovner per dag.

Når Glamox starter med produksjon av en ny artikkel så er det en viss treghet i produksjonen i den forstand at det tar litt tid før antall panelover som produseres per dag når den maksimale kapasiteten $N_{\max} = 1000$.

Anta at den daglige produksjonen går etter modellen:

$$N(t) = N_{\max} \left(1 - e^{-at} \right) \quad (6.1)$$

hvor

$$N(t) = \text{antall produserte panelovner per dag, } t \text{ dager etter oppstart} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} N_{\max} &= 1000 \\ &= \text{produksjonskapasiteten (max antall produserte panelovner per dag)} \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$a = 0.8 \quad (6.4)$$

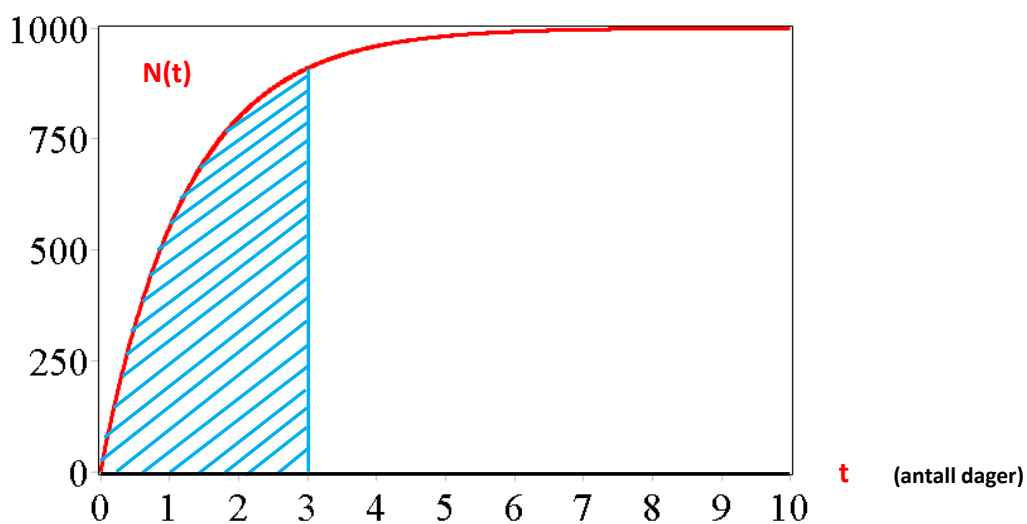
$$t = \text{antall dager etter oppstart} \quad (6.5)$$



Figur 6.2: Panelovn.

Lager verditabell og plotter $N(t)$ for $t \in [0..10]$ slik som vi gjorde i øving 4:

t	0	2	4	6	8	10
N(t)	0	798	959	992	998	999.7



Figur 6.3: Antall produserte panelovner $N(t)$.

Spørsmål:

Hvor mange panelovner blir produsert i løpet av de 3 første dagene?

Svar:

antall panelovner som blir produsert ila. de 3 første dagene = det blå arealet under grafen til $N(t)$

■

Eksempel: (areal under graf , *SCM200 Lager- og produksjonsstyring*)

Hustadmarmor AS er en stor produksjonsfabrikk i Elnesvågen i Fræna kommune. Bedriften produserer og leverer “*slurry*”. Slurry er en flytende hvit væske produsert fra kalkstein og marmor som brukes i fyllmasseindustrien over hele verden, blant annet i papir og tannkrem, se figur 6.4.

Når slurryen er ferdigprodusert så lagres den i en stor lagertank.

I øving 2 så vi på hvordan vi kan styre **lagernivået** i tanken ved hjelp av enkle matematiske lineære modeller.

Hustadmarmor AS overvåker lagernivået kontinuerlig ved hjelp av høydemålere i tanken. Lagernivået kan beskrives av *balanselikningen* ved tiden t :¹

$$i(t) = \underbrace{q(t)}_{\text{inn}} - \underbrace{d(t)}_{\text{ut}} + i_0 \quad (6.6)$$

hvor (tiden t måles i antall timer)

$i(t)$ = antall tonn slurry **på lager** i tanken ved tiden t , (“*inventory*”) (6.7)

$q(t)$ = antall tonn slurry **inn** i tanken ved tiden t , dvs. produksjon (6.8)

$d(t)$ = antall tonn slurry **ut** av tanken ved tiden t , dvs. etterspørsel, (“*demand*”) (6.9)

i_0 = lagernivået ved tiden $t = 0$ (i tonn slurry) (6.10)



Figur 6.4: Hustadmarmor. Slurry.

¹Balanselikningen er svært sentral i all lagerstyring.

Anta at etterspørselsraten D av slurry er *konstant*, dvs. etterspørselen $d(t)$ er lineær i tid:

$$d(t) = Dt \quad (6.11)$$

hvor D altså er den konstante etterspørselsraten. Anta videre at produksjonshastigheten a av slurry hos Hustadmarmor også er konstant, dvs. produksjonen $q(t)$ er lineær i tid:

$$q(t) = at \quad (6.12)$$

hvor a altså er produksjonshastigheten, antall tonn slurry produsert per time. Denne produksjonshastigheten a kan bestemmes av Hustadmarmor.

Fra øving 2 fant vi, ved lign.(6.6), at lagernivået kan beskrives av følgende ligning:

$$i(t) = (a - D)t + i_0 \quad (6.13)$$

Det koster penger å ha slurry på lager. Anta at

$$h = 0.04 \frac{\text{NOK}}{\text{tonn time}} \quad (6.14)$$

altså det koster 0.04 NOK per tonn per time å ha slurry på lager i tanken.
Dermed er:

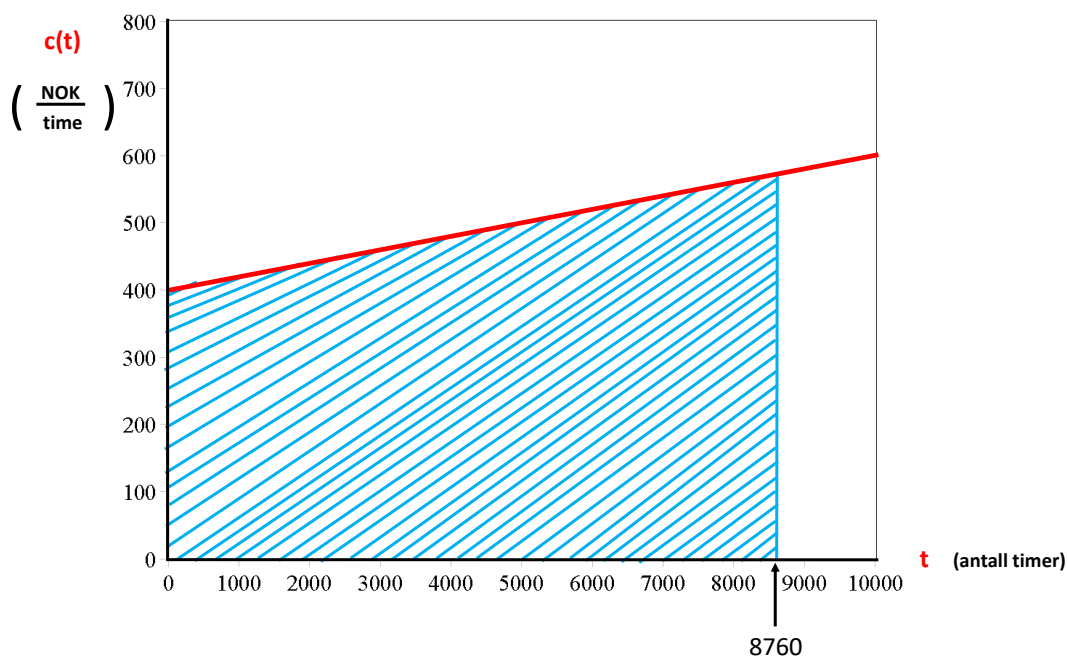
$$c(t) = h i(t) \quad (6.15)$$

kostnaden per time å ha slurry på lager i den aktuelle tanken.

Anta i tillegg at:

$$a = 4 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad D = 3.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad i_0 = 10\,000 \text{ tonn} \quad (6.16)$$

Da kan vi plote kostnaden per time $c(t)$ for $t \in [0..10\,000]$:



Figur 6.5: Kostnad per time $c(t)$.

I ett år er det:

$$24 \cdot 365 = 8760 \text{ timer} \quad (6.17)$$

Spørsmål:

Hva er de totale lagerkostnadene etter ett år?

Svar:

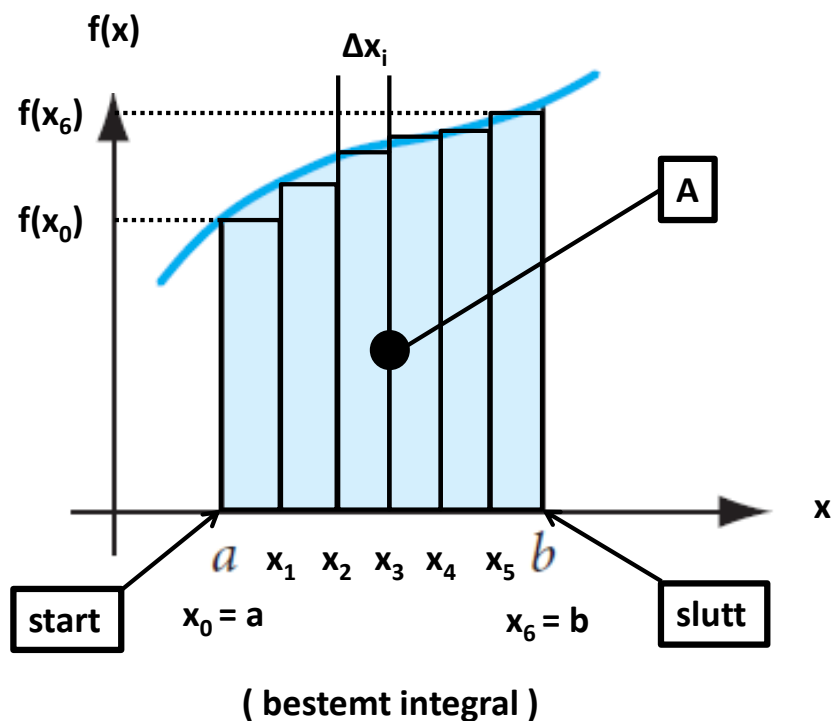
totale lagerkostnader etter ett år = det blå arealet under grafen til $c(t)$



I de neste avsnittene skal vi finne ut hvordan kan regner ut slike areal under grafer.

6.2 Definisjon av integral

De 6 rektanglene i figur (6.6) kan er nesten lik arealet under grafen fra a til b :



Figur 6.6: Arealet A .

La oss finne det totale arealet A :

$$A = \text{totale arealet under grafen } f(x) \text{ mellom } a \text{ og } b \quad (6.18)$$

som vist på figuren (6.6). La:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \quad \Delta x_3 = x_3 - x_2, \quad \dots, \quad \Delta x_6 = x_6 - x_5 \quad (6.19)$$

hvor altså Δx_i er bredde nr. i , med $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Da er:

$$A \approx \sum_{i=0}^6 f(x_i) \Delta x_i \quad (6.20)$$

tilnærmet lik det totale arealet under grafen $f(x)$ mellom $x = a$ og $x = b$.

Fra figur 6.7 ser vi at de **store** rektanglene er for store og de **små** rektanglene er for små sammenlignet med det eksakte arealet under grafen for det aktuelle rektanget.

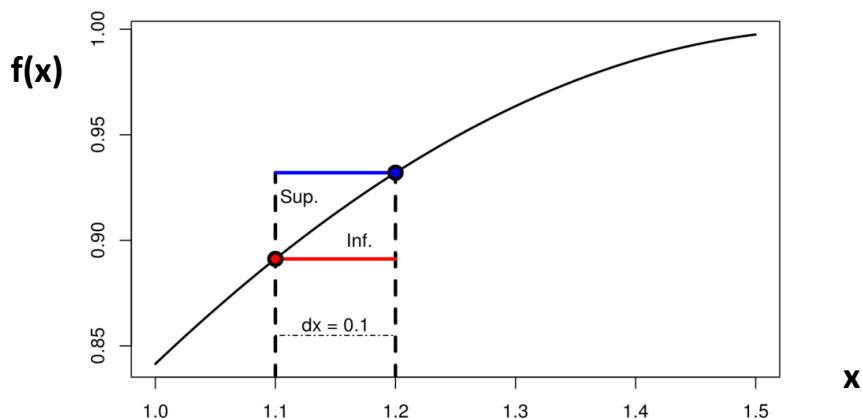
Arealet A_{stort} er litt for stort:

$$A_{\text{stort}} = \sup_{x_1, \dots, x_n} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (6.21)$$

mens arealet A_{stor} er litt for lite:

$$A_{\text{lite}} = \inf_{x_1, \dots, x_n} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (6.22)$$

hvor **supremum** **sup** indikerer ”**stort** areal” og **infimum** **inf** indikerer ”**lite** areal”. ² ³



Figur 6.7: Visualisering av ”sup” og ”inf”.

²”sup” og ”inf” skal vi ikke bruke andre plasser enn akkurat her i dette kurset.

³Her har vi generalisert fra 6 rektangler til et vilkårlig antall n rektangler: $6 \rightarrow n$.

Dersom $n \rightarrow \infty$ så blir rektanglene mindre og mindre.

$$A \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (6.23)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} A_{\text{stort}} = A_{\text{lite}} = \int_a^b f(x) dx \quad (6.24)$$

hvor vi som en enkel huskeregel kan skrive: $\sum_{i=0}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int$ og $\Delta x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} dx$.

Dermed:

$$\text{A} = \text{SUM av } \infty \text{ mange små rektangel under grafen } f(x) \text{ mellom } a \text{ og } b \quad (6.25)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (6.26)$$

$$= \int_a^b f(x) dx \quad (6.27)$$

hvor

$$f(x) = \text{integrand} \quad (6.28)$$

$$\int = \text{integraltegn} \quad (6.29)$$

hvor lign.(6.27) er på formen: $\int_{\text{start}}^{\text{slutt}}$.

Konklusjon:

Vi mangler en enkel måte å regne ut et areal under en graf på.

6.3 Fundamentalsetningen for integral

La oss finne det totale arealet A på en alternativ måte enn i forrige avsnitt. La:

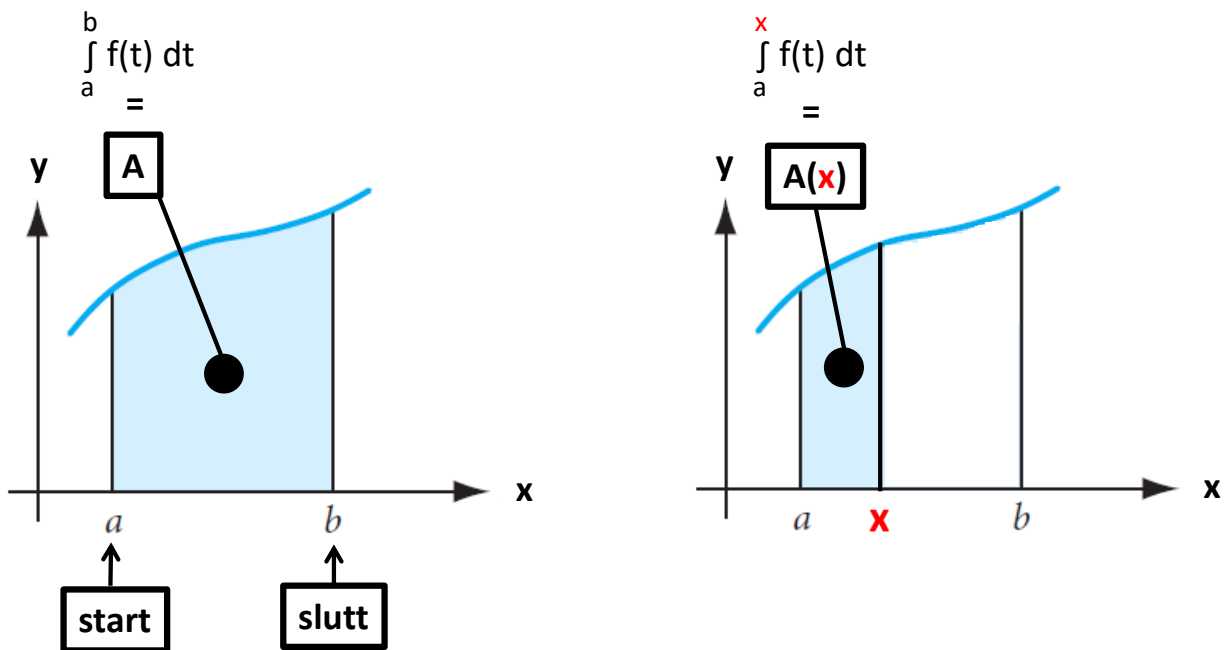
$$A = \text{totale arealet under grafen } f(x) \text{ mellom } a \text{ og } b \quad (6.30)$$

$$= \int_a^b f(x) dx \quad (6.31)$$

være arealet som vist på figuren til venstre i figur (6.8). For å finne dette arealet trenger vi et **hjelpeareal**, $A(x)$. Hjelpearealet, eller **arealfunksjonen**, er arealet mellom a og x :

$$A(x) = \text{arealet mellom } a \text{ og } x \quad (6.32)$$

$$= \int_a^x f(t) dt \quad (6.33)$$



Figur 6.8: Areal.

La Δx være en liten tilvekst til x . Rektanglet $f(x)\Delta x$ er litt **mindre** enn det eksakte arealet. Rektanglet $f(x + \Delta x)\Delta x$ er litt **større** enn det eksakte arealet. Det eksakte arealet er:

$$\text{eksakt areal} = A(x + \Delta x) - A(x) \quad (6.34)$$

Dermed kan vi sette opp ulikheten: ⁴

$$f(x)\Delta x \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq f(x + \Delta x)\Delta x \quad (6.35)$$

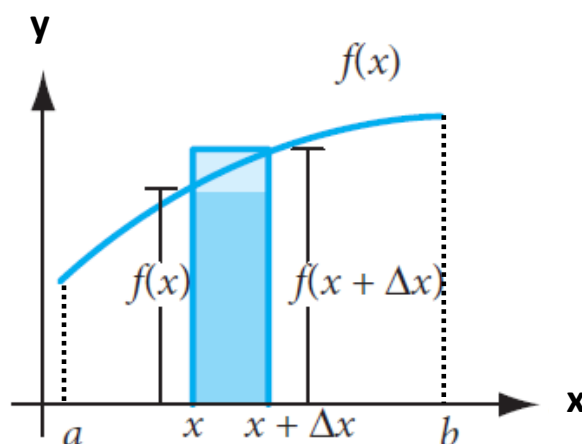
$$f(x) \leq \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x) \quad (6.36)$$

Via definisjonen av den deriverte i lign.(3.4) innser man at, i grensen når $\Delta x \rightarrow 0$, så er $\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dA(x)}{dx}$.

$$f(x) = \frac{dA(x)}{dx} \quad (6.37)$$

altså

$$A(x) = \text{antideriverte av } f(x) \quad (6.38)$$



Figur 6.9: Areal av rektangel.

⁴I dette kompendiet antar vi at grenseverdien i lign.(6.36) eksisterer.

Oppgaven er å finne $A(x)$, istedet har vi funnet et uttrykk for $\frac{dA(x)}{dx}$, se lign.(6.37).
 Finnes det da en entydig $A(x)$?

Via eksemplene på side 318 så innser vi at alle funksjoner som er slik at

$$A(x) = F(x) + C \quad (6.39)$$

er en løsning til lign.(6.38), hvor C = konstant og

$$F(x) = \text{antiderivert av } f(x) \quad \left(\text{bestemt av } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \right) \quad (6.40)$$

$$A(x) \stackrel{\text{lign.(6.33)}}{=} \int_a^x f(t) dt \quad (6.41)$$

Det $\overbrace{\text{totale arealet}}^{= A}$ under grafen $f(x)$ mellom a og b er dermed, se figur 6.8:

$$\underline{\underline{A}} = A(\text{slutt}) - A(\text{start}) \quad (6.42)$$

$$= A(b) - A(a) \quad (6.43)$$

$$= \int_a^b f(x) dx - \overbrace{\int_a^a f(x) dx}^{= 0} \quad (6.44)$$

$$= \left(F(b) + \emptyset \right) - \left(F(a) + \emptyset \right) \quad (6.45)$$

$$= \underline{\underline{F(b) - F(a)}} \quad (6.46)$$

Setning: (*fundamentalsetningen for integral*)

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon. Da er:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (6.47)$$

hvor

$$\frac{d F(x)}{dx} = f(x) \quad (6.48)$$

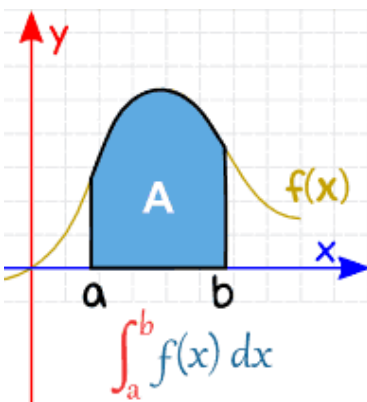
altså $F(x)$ = **anti**deriverte av $f(x)$.

■

Konklusjon:

Vi finner arealet under en graf dersom vi finner den **anti**deriverte til integranden $f(x)$.

Hvordan finner vi den **anti**deriverte til en funksjon? Se neste avsnitt.



Figur 6.10: Integral.

Siden $\overbrace{\text{integrasjon}}^{\text{antiderivasjon}}$ og derivasjon er inverse operasjoner så kan vi, som en uformell huskeregel, skrive:

$$\int_a^b \frac{d}{dx} (F(x)) \, dx = F(b) - F(a) \quad (6.49)$$

6.4 Antideriverte og integral

Definisjon: (antideriverte)

La $f(x)$ være en funksjon. Hvis $F(x)$ er en funksjon slik at

$$\frac{d F(x)}{dx} = f(x) \quad (6.50)$$

sier vi at $\underbrace{F(x)}_{\text{antiderivert}}$ er en antideriverte til $f(x)$.

■

Eksempel: (antiderivert)

$$\frac{d}{dx} \left(\overbrace{x^3 + 2x + C}^{= F(x)} \right) = \overbrace{3x^2 + 2}^{= f(x)} \quad (6.51)$$

$$\underline{\underline{F(x)}} = x^3 + 2x + C = \underline{\underline{\text{antiderivert} \left(\overbrace{3x^2 + 2}^{= f(x)} \right)}} \quad (6.52)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\overbrace{e^y + y^2 + C}^{= F(x)} \right) = \overbrace{e^y + 2y}^{= f(x)} \quad (6.53)$$

$$\underline{\underline{F(x)}} = e^y + y^2 + C = \underline{\underline{\text{antiderivert} \left(\overbrace{e^y + 2y}^{= f(x)} \right)}} \quad (6.54)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\overbrace{te^t - e^t + C}^{= F(x)} \right) = \overbrace{te^t}^{= f(x)} \quad (6.55)$$

$$\underline{\underline{F(x)}} = te^t - e^t + C = \underline{\underline{\text{antiderivert} \left(\overbrace{te^t}^{= f(x)} \right)}} \quad (6.56)$$

At de antideriverte blir som de blir innser man ved å gå [BAKLENGS](#).

■

Eksempel: (integrasjon)

Finn arealet A avgrenset av den kvadratiske funksjonen: ⁵

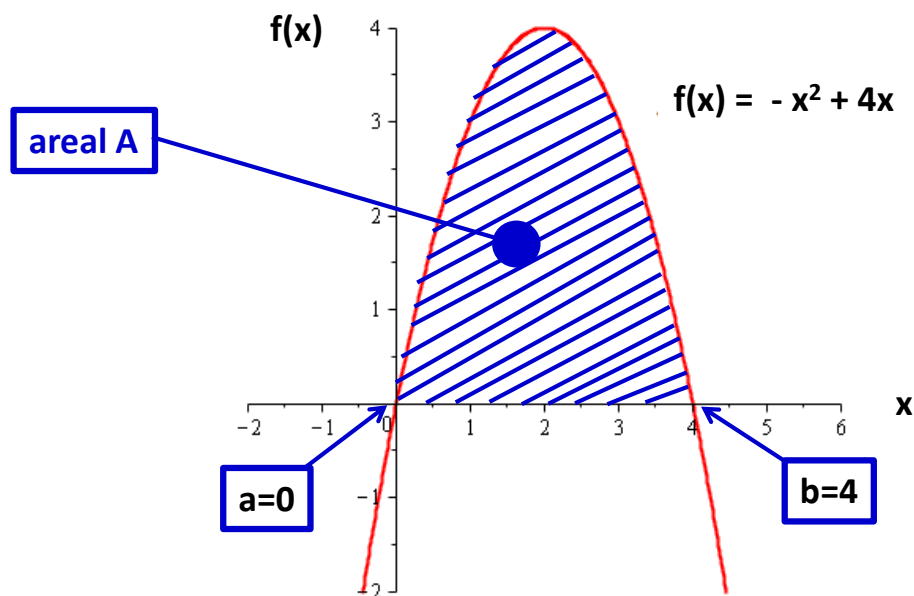
$$f(x) = -x^2 + 4x \quad (6.57)$$

og intervallet $[a, b] = [0, 4]$, dvs. finn:

$$A = \int_0^4 f(x) dx \quad (6.58)$$

Løsning:

For illustrasjonen sin del, la oss plotte funksjonen:



Figur 6.11: Funksjon $f(x) = -x^2 + 4x$.

⁵ Lign.(6.57) er en kvadratisk funksjon. I kapittel 2, side 115, lærte vi om kvadratiske funksjoner.

Fra lign.(6.58) får vi:

$$\underline{A} \stackrel{\text{lign.(6.58)}}{=} \int_a^b f(x) \, dx \quad (6.59)$$

$$= \underline{\int_0^4 (-x^2 + 4x) \, dx} \quad (6.60)$$

Funksjonen

$$\textcolor{red}{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \quad (\text{antideriverte}) \quad (6.61)$$

er den antideriverte av $f(x)$. Bruker integralregningens fundamentalsats i lign.(6.47): ⁶

$$\underline{\underline{A}} = \int_0^4 f(x) \, dx \quad (6.62)$$

$$= F(4) - F(0) \quad (6.63)$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 \right) \quad (6.64)$$

$$= \underline{\underline{\frac{32}{3}}} \quad (\approx 10.76) \quad (6.65)$$

■

⁶Husk: $A = \int_{\text{start}}^{\text{slutt}}$.

Eksempel: (integrasjon)

Finn arealet A avgrenset av den kubiske funksjonen, dvs. 3. gradsligningen

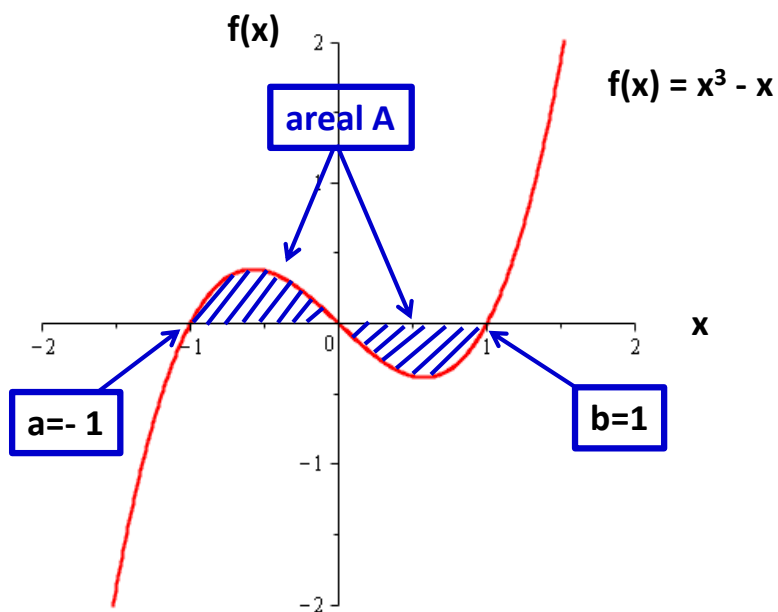
$$f(x) = x^3 - x \quad (6.66)$$

og intervallet $[a, b] = [-1, 1]$, dvs. finn:

$$A = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (6.67)$$

Løsning:

For illustrasjonen sin del, la oss plotte funksjonen:



Figur 6.12: Funksjon $f(x) = x^3 - x$.

Fra lign.(6.58) får vi:

$$\underline{\underline{A}} \stackrel{\text{lign.(6.58)}}{=} \int_a^b f(x) \, dx \quad (6.68)$$

$$= \underline{\int_{-1}^1 (x^3 - x) \, dx} \quad (6.69)$$

Funksjonen

$$\textcolor{red}{F}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \quad (\text{antideriverte}) \quad (6.70)$$

er den antideriverte av $f(x)$. Bruker integralregningens fundamentalsats i lign.(6.47): ⁷

$$\underline{\underline{A}} = \int_{-1}^1 f(x) \, dx \quad (6.71)$$

$$= F(1) - F(-1) \quad (6.72)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-4)^4 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \right) \quad (6.73)$$

$$= \underline{\underline{0}} \quad (6.74)$$

Kommentar:

Ut fra figur (6.12) ser vi at arealet under x -aksen er like stort som over.

Disse **opphever** hverandre, og integralet er null.

Arealet under grafen representerer et negativt areal.



⁷Husk: $A = \int_{\text{start}}^{\text{slutt}}$.

6.4.1 Noen regneregler

Her setter vi opp noen [generelle regneregler](#) for integrasjon uten bevis. Stemmer disse reglene med din intuisjon?

For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ gjelder at:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a \leq c \leq b) \quad (6.75)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (6.76)$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (6.77)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k = \text{konstant}) \quad (6.78)$$

Noen regneregler for antiderivasjon:

$$\int k \, dx = kx + C \quad (6.79)$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (6.80)$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \quad x \neq 0 \quad (6.81)$$

$$\int \frac{1}{x+a} \, dx = \ln|x+a| + C \quad x+a \neq 0 \quad (6.82)$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \quad (6.83)$$

6.5 Eksempler på integrasjon innen økonomi og logistikk

Eksempel: (areal under graf , integrasjon , *SCM200 Lager- og produksjonsstyring*)

La oss fortsette på eksemplet fra side 304.

Siden

$$c(t) \stackrel{\text{lign. (6.15)}}{=} h i(t) \quad (6.84)$$

er kostnaden per time å ha slurry på lager i tanken så er

$$K(T) = \int_0^T c(t) dt = h \int_0^T i(t) dt \quad (6.85)$$

den totale kostnaden ved å ha slurry på lager i T timer.



Figur 6.13: Hustadmarmor. Slurry.

- a) Vis at den totale kostnaden $K(T)$ av å ha slurry på lagertanken i T timer er gitt ved: ⁸

$$K(T) = h(a - D)\frac{1}{2}T^2 + hi_0T \quad (6.86)$$

- b) Anta at:

$$a = 4 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad D = 3.5 \frac{\text{tonn}}{\text{time}}, \quad i_0 = 10\,000 \text{ tonn} \quad (6.87)$$

Anta videre at det koster 4 øre per tonn per time å ha slurry på lager, dvs.

$$h = 0.04 \frac{\text{NOK}}{\text{tonn time}} \quad (6.88)$$

Hva er den totale lagerkostanden $K(T)$ etter ett år?

⁸Man kan faktorisere lign.(6.86), men det har ingen stor hensikt her.

Løsning:

a) Vi setter lagernivået $i(t) = (a - D)t + i_0$ fra lign.(6.13) inn i lign.(6.85):

$$\underline{\underline{K(T)}} \stackrel{\text{lign.(6.85)}}{=} h \int_0^T i(t) dt \quad (6.89)$$

$$= h \int_0^T \left((a - D)t + i_0 \right) dt \quad (6.90)$$

$$= h(a - D) \int_0^T t dt + h i_0 \int_0^T 1 dt \quad (6.91)$$

$$= h(a - D) \int_0^T t dt + h i_0 \int_0^T 1 dt \quad (6.92)$$

$$= h(a - D) \left(\frac{1}{2} T^2 - \frac{1}{2} 0^2 \right) + h i_0 (T - 0) \quad (6.93)$$

$$= \underline{\underline{h(a - D) \frac{1}{2} T^2 + h i_0 T}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (6.94)$$

fordi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} t^2 \right) = t \quad (6.95)$$

og

$$\frac{d}{dt} (t) = 1 \quad (6.96)$$

- b) Ett år tilsvarer $T = 24 \cdot 365$ timer = 8760 timer.
Bruker formelen i lign.(6.94):

$$\underline{K(8760)} \stackrel{\text{lign.(6.94)}}{=} h(a - D)\frac{1}{2}T^2 + h i_0 T \quad (6.97)$$

$$= \left(0.04 \cdot (4 - 3.5) \frac{1}{2} 8760^2 + 0.04 \cdot 10\,000 \cdot 8760 \right) \text{ NOK} \quad (6.98)$$

$$= \underline{4\,271\,376 \text{ NOK}} \quad (6.99)$$

Den totale lagerkostanden etter ett år er $\underline{\underline{K(8760) = 4\,271\,376 \text{ NOK}}}$,
altså litt over 4.2 millioner NOK.

■

Eksempel: (areal under graf , integrasjon , *BØK105 Finansregnskap 1*)

La oss fortsette på eksemplet fra side 302.

Siden

$$N(t) = N_{\max} \left(1 - e^{-at} \right) \quad (6.100)$$

er antall produserte panelovner per dag, t dager etter oppstart, så er

$$N_{\text{total}}(T) = \int_0^T N(t) dt \quad (6.101)$$

det totale antall produserte panelovner produsert etter T dager.



Figur 6.14: Panelovn.

- a) Vis at det totale antall produserte panelovner produsert etter T dager er gitt ved: ⁹

$$N_{\text{total}}(T) = N_{\text{max}}T + \frac{N_{\text{max}}}{a} \left(e^{-aT} - 1 \right) \quad (6.102)$$

- b) Anta at:

$$N_{\text{max}} = 1000 \quad , \quad a = 0.8 \quad (6.103)$$

Hva er det totale antall produserte panelovner produsert etter 3 dager?

⁹Man kan faktorisere lign.(6.86), men det har ingen stor hensikt her.

Løsning:

a) Vi setter $N(t) = N_{\max} \left(1 - e^{-at} \right)$ fra lign.(6.100) inn i lign.(6.101):

$$\underline{\underline{N_{\text{total}}(T)}} \stackrel{\text{lign.(6.101)}}{=} \int_0^T N(t) dt \quad (6.104)$$

$$= \int_0^T N_{\max} \left(1 - e^{-at} \right) dt \quad (6.105)$$

$$= N_{\max} \int_0^T 1 dt - N_{\max} \int_0^T e^{-at} dt \quad (6.106)$$

$$= N_{\max} (T - 0) + \frac{N_{\max}}{a} \left(e^{-aT} - e^{-a \cdot 0} \right) \quad (6.107)$$

$$= \underline{\underline{N_{\max} T + \frac{N_{\max}}{a} \left(e^{-aT} - 1 \right)}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (6.108)$$

fordi

$$\frac{d}{dt} (t) = 1 \quad (6.109)$$

og

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{a} e^{-at} \right) = e^{-at} \quad (6.110)$$

b) Etter $T = 3$ dager, og bruker formelen i lign.(6.108):

$$\underline{N_{\max}(3)} \stackrel{\text{lign. (6.108)}}{=} N_{\max} T + \frac{N_{\max}}{a} \left(e^{-aT} - 1 \right) \quad (6.111)$$

$$= 1000 \cdot 3 + \frac{1000}{0.8} \left(e^{-0.8 \cdot 3} - 1 \right) \quad (6.112)$$

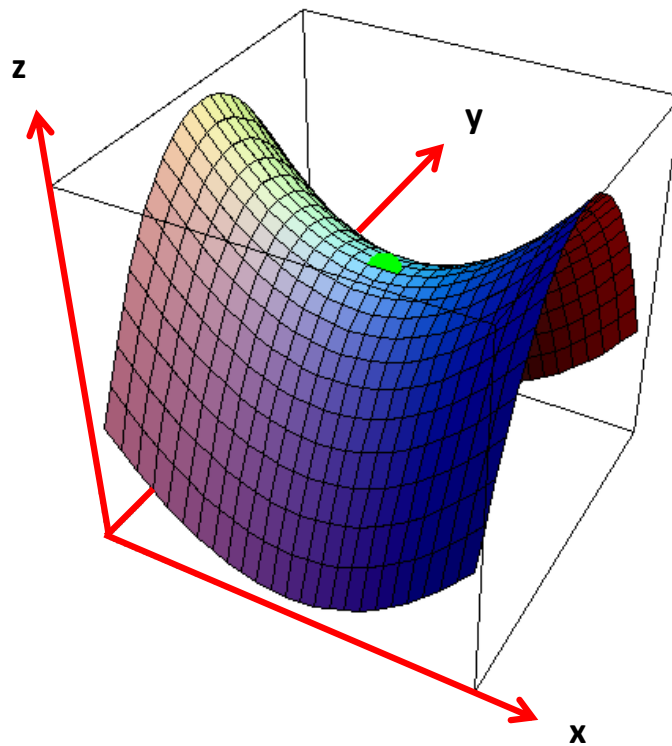
$$= \underline{1863} \quad (6.113)$$

Det totale antall produserte panelovner produsert etter 3 dager er $N_{\max}(3) = 1863$.

■

Kapittel 7

Funksjoner av flere variabler



Figur 7.1: Sadelpunkt.

7.1 Funksjoner av to variable

Definisjon: (funksjon av **to** variable)

$$z = f(x, y) = \text{funksjon av } x \text{ og } y \text{ hvor det for hver verdi av tallparet } (x, y) \text{ kun finnes en og bare en verdi for } f(x, y) \quad (7.1)$$

hvor x og y ofte kalles de uavhengige variabelene eller bare *argumentet* og $z = f(x, y)$ kalles ofte funksjonsverdien.

■

Definisjon: (**definisjonsmengde** og **verdimengde**)

$$\text{definisjonsmengde} = \text{alle mulige } \underline{\text{tillatte}} \text{ verdier av } x \text{ og } y \quad (7.2)$$

$$\text{verdimengde} = \text{alle mulige funksjonsverdier til } z = f(x, y) \text{ tilhørende alle } \underline{\text{tillatte}} \text{ verdier av } x \text{ og } y \quad (7.3)$$

■

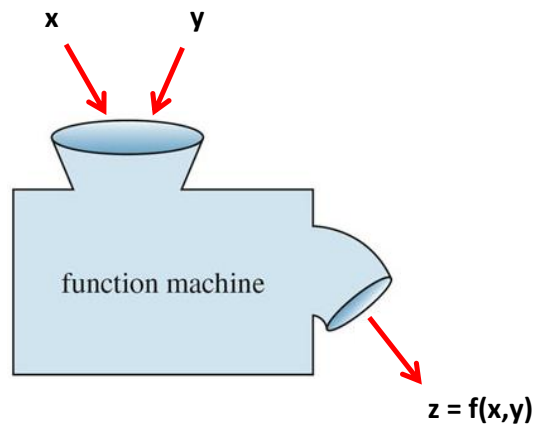
Eksempel: (funksjon av **to** variable)

$$z = f(x, y) = 2x^2y + 3y \quad (7.4)$$

$$z = g(x, y) = x^2 + y^2 \quad (7.5)$$

$$z = h(x, y) = \ln x + \ln y \quad (7.6)$$

■



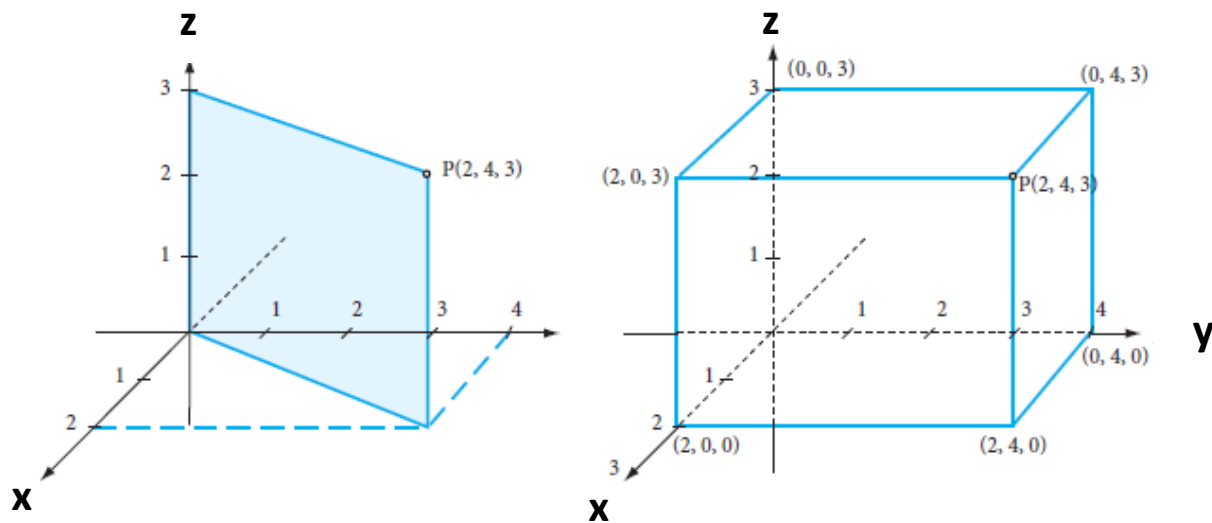
Figur 7.2: Skjematisk illustrasjon av en funksjon med to variable, $z = f(x, y)$.

7.2 Grafisk fremstilling av funksjoner av to variable

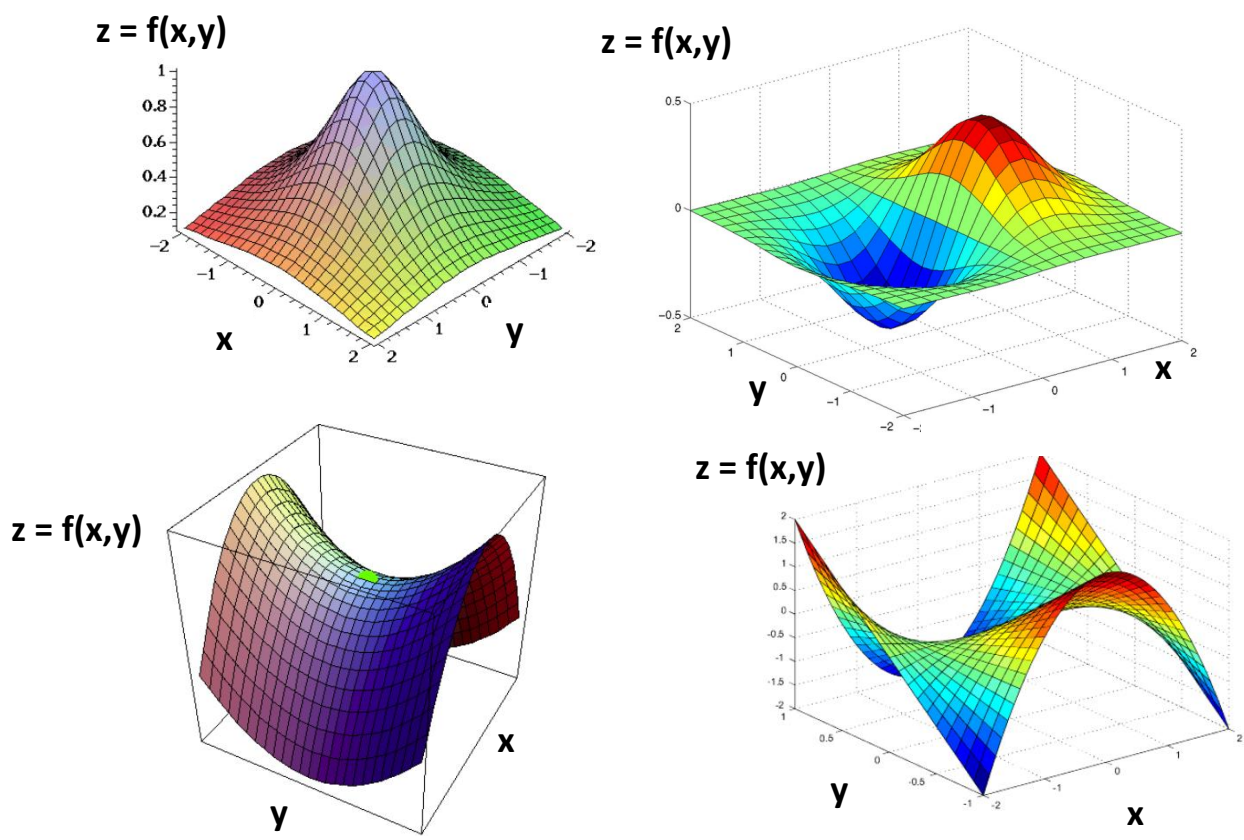
Det er vanlig å si at:

- rett linje: en dimensjon, 1D
- et plan: to dimensjoner, 2D
- et “rom”: tre dimensjoner, 3D

Ordet “rom” brukes ofte i matematikken i en mer generell betydning. Matematikere opererer både i 4-dimensjonale og 5-dimensjonale rom. Generelt *n -dimensjonale rom*. Det er svært vanskelig, for ikke å si umulig, å visualisere rom med mer enn 3 dimensjoner. Men det går fint an å regne med n dimensjoner.



Figur 7.3: Man trenger et 3D rom for å illustrere funksjoner av to variable, $z = f(x, y)$.



Figur 7.4: Funksjoner med to variable, $z = f(x, y)$.

7.3 Grafisk fremstilling og nivåkurver

Det kan fort bli komplisert å tegne grafen til en funksjon $z = f(x, y)$ i 3D rom. Derfor tar man ofte 2D snitt av 3D kurver og plotter dem i en 2D graf. Det er samme prinsipp som man finner i kart: der tegnes kurver gjennom punkter med samme høyde over havet. Disse kurvene kalles *koter* eller *nivåkurver*.

Definisjon: (nivåkurve)

Gitt funksjonen $z = f(x, y)$ av to variable x og y . **Nivåkruven** i høyde c over (eller under) xy -planet kan da skrives:

$$c = f(x, y) \quad (7.7)$$

Dette er skjæringskurven mellom grafen f og det horisontrale planet $z = c$.

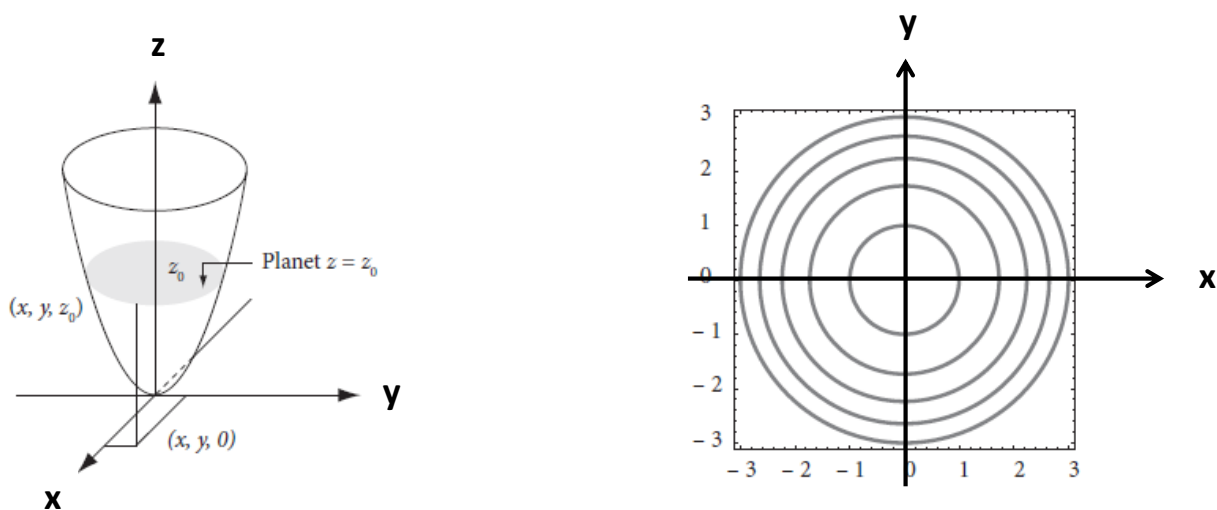
■

Eksempel: (nivåkurve)

Paraboloiden

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (7.8)$$

og tilhørende nivåkurver er plottet i figur (7.5):



Figur 7.5: Venstre: paraboloiden $f(x, y) = x^2 + y^2$. Høyre: nivåkurver for $f(x, y)$.

7.4 Partielle deriverte

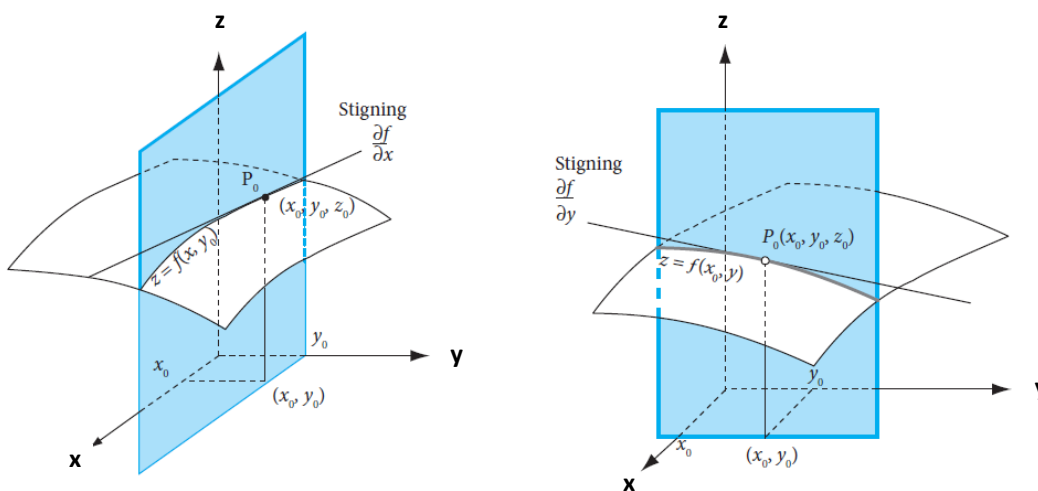
I kapittel 3 lærte vi om den deriverte, eller stigningstallet, til en funksjon med en variabel $f(x)$. For en funksjon $f(x, y)$ med to variable kan vi tilsvarende regne ut den deriverte med **hensyn på x** eller med **hensyn på y** . Når man deriverer med hensyn på x så holdes y konstant. Og omvendt. Det meste av det som vi lærte om i kapittel 3 kan derfor enkelt utvides til to dimensjoner:

Definisjon: ([partiell](#) deriverte, deriverte med to variabler, med ord) ¹

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \text{den deriverte til funksjonen } z = f(x, y) \text{ mhp. } x \quad (7.9)$$

$$\text{i punktet } x = x_0 \text{ og } y = y_0 \quad (7.10)$$

$$= \text{stigningstallet til tangenten til grafen i punktet } x = x_0 \text{ og } y = y_0 \text{ i } x\text{-retning} \quad (7.11)$$



Figur 7.6: Venstre: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. Høyre: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

¹mhp. = med hensyn på

Definisjon: ([partiell](#) deriverte, teknisk)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (7.13)$$

■

Kommentarer:

- den deriverte = en grenseverdi
- den deriverte = [stigningstall](#) (i en retning)
- Dersom grenseverdien eksisterer i et punkt $x = x_0$ og $y = y_0$ sies funksjonen å være deriverbar i punktet.
- Tolkning: - et mål for hvor raskt funksjonen endrer seg i punktet
- et mål på "[bratthet](#)"

Eksempel: ([partiell](#) deriverte)

Finn de partiell deriverte av funksjonen:

$$z = f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 11y^2 \quad (7.14)$$

Hva er stigningstallet i punktet $(1, 1)$ for x og y - retningen hhv.?

Løsning:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \underline{\underline{6x + 4y}} \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \underline{\underline{4x + 22y}} \quad (7.16)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x -retningen er:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = \underline{\underline{10}} \quad (7.17)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i y -retningen er:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 4 \cdot 1 + 22 \cdot 1 = \underline{\underline{26}} \quad (7.18)$$

■

Eksempel: ([partiell](#) deriverte)

Finn de partiell deriverte av funksjonen:

$$z = f(x, y) = \ln(xy^2) \quad (7.19)$$

Hva er stigningstallet i punktet $(1, 2)$ for x og y - retningen hhv.?

Løsning:

Kjerneregelen med $g(u) = \ln u$ og kjernene $u(x) = y^2x$ og $v(y) = xy^2$ gir hhv.:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial g(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}(\ln u) \frac{\partial}{\partial x}(y^2x) = \frac{1}{u}y = \frac{1}{xy^2}y^2 = \underline{\underline{\frac{1}{x}}} \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial v}(\ln v) \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = \frac{1}{v}2xy = \frac{1}{xy^2}2xy = \underline{\underline{\frac{2}{y}}} \quad (7.21)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i x -retningen er:

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}} \quad (7.22)$$

Stigningstallet i punktet $(1, 1)$ i y -retningen er:

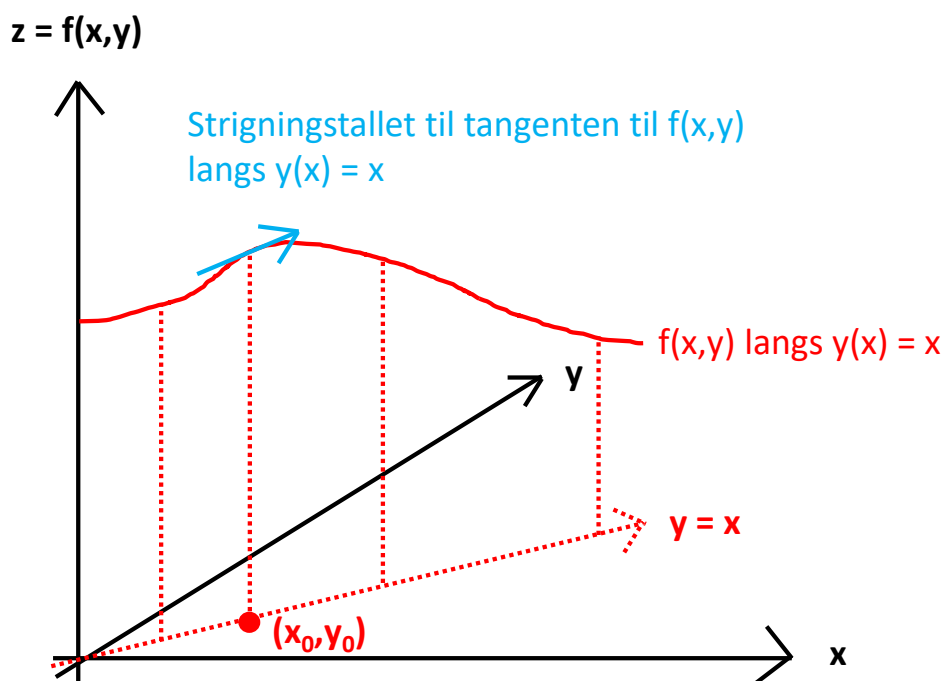
$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}} \quad (7.23)$$

■

7.5 Retningsderivert

I avsnitt 7.4 lærte vi hvordan vi kunne regne ut stigningstallet i x -retningen og i y -retningen ved hjelp av partiell deriverte for x og y hhv.

Hva om vi ønsker å finne stigningstallet i en vilkårlig retning, f.eks. langs linjen $y = x$, se figur 7.7?



Figur 7.7: Retningsderivert.

Definisjon: ([retnings](#)deriverte)

Den [retningsderivate](#), dvs. stigningstallet, til en funksjon $f = f(x, y)$ langs retningen a enheter langs x -aksen og b enheter langs y -aksen er definert ved:

$$\text{retningsderivert} = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} \quad (7.24)$$

■

Eksempel: ([retnings](#)derivert)

Finn stigningstallet i punktet $(1, 1)$ til funksjonen fra eksempelet på side 343 langs linjen $y = x$.

Løsning:

Retningen definert av ligningen $y = x$ fås ved å gå 1 enhet langs x -aksen og 1 enhet langs y -aksen, dvs. $a = 1$ og $b = 1$. Stigningstallet langs denne retningen er:

$$a \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} + b \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 \quad (7.25)$$

■

7.6 Maksimum og minimum

Definisjon: (stasjonært punkt)

Punktet (x_0, y_0) til funksjonen $f(x, y)$ med to variabler kalles **stasjonært** dersom følgende betingelser er oppfylt:

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0} \quad (7.26)$$

■

Lign.(7.26) tilsvarer at tangentplanet i punktet $(x_0,)$ er **horisontalt**, altså flatt.

Setning: (klassifisering av stasjonære punkter)

La $f(x, y)$ være en funksjon som har kontinuerlige 1. og 2. ordens deriverte i hele sitt definisjonsområde D_f . La videre:

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad (7.27)$$

$$B \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (7.28)$$

$$C \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \quad (7.29)$$

Det stasjonære punktet (x_0, y_0) bestemt av:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad (7.30)$$

er da klassifisert på følgende måte:

$$AC - B^2 > 0 \text{ og } A > 0 : \quad (x_0, y_0) \text{ er et minimumspunkt} \quad (7.31)$$

$$AC - B^2 > 0 \text{ og } A < 0 : \quad (x_0, y_0) \text{ er et maksimumspunkt} \quad (7.32)$$

$$AC - B^2 < 0 \text{ og } A < 0 : \quad (x_0, y_0) \text{ er et sadelpunkt} \quad (7.33)$$

$$AC - B^2 = 0 \text{ og } A < 0 : \quad \text{testen fungerer ikke} \quad (7.34)$$

■

Eksempel: (maksimum og minimum)

a) Plott funksjonene:

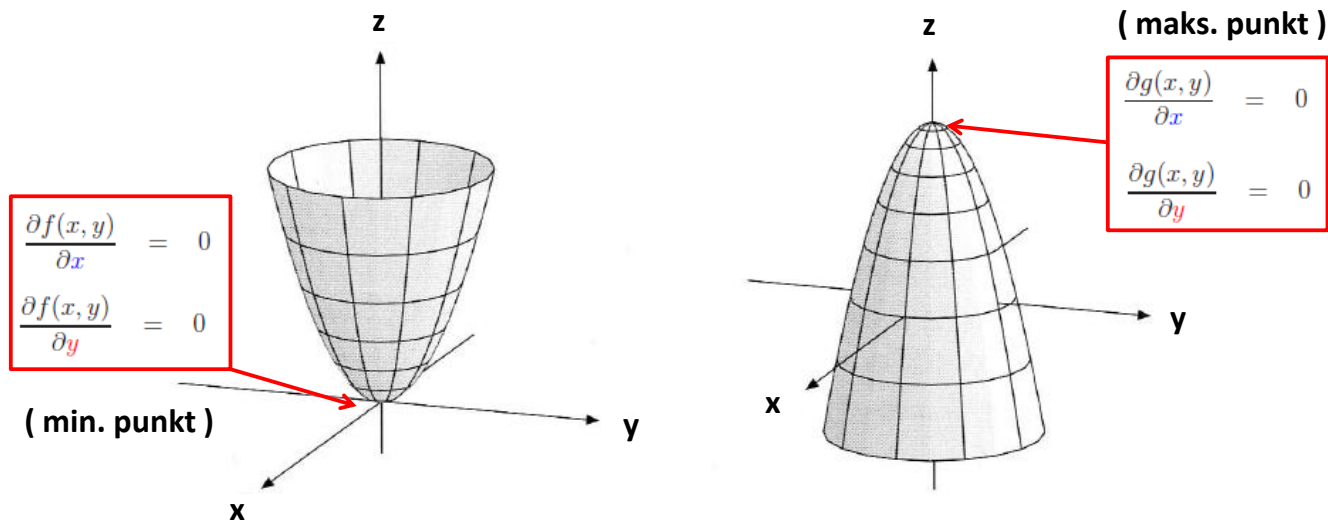
$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (7.35)$$

$$z = g(x, y) = 9 - x^2 - y^2 \quad (7.36)$$

b) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y)$ og $g(x, y)$.

Løsning:

a) Plott av funksjonene:



Figur 7.8: Funksjonene $f(x, y) = x^2 + y^2$ og $g(x, y) = 9 - x^2 - y^2$.

b) i) 1. ordens deriverte til $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 0 \quad (7.38)$$

$$2x = 0 \quad (7.39)$$

$$\underline{x = 0} \quad (7.40)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (7.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = 0 \quad (7.42)$$

$$2y = 0 \quad (7.43)$$

$$\underline{y = 0} \quad (7.44)$$

$(x, y) = (0, 0)$ er et stasjonært punkt for $f(x, y)$.

ii) 1. ordens deriverte til $g(x, y)$:

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (9 - x^2 - y^2) = 0 \quad (7.46)$$

$$-2x = 0 \quad (7.47)$$

$$\underline{x = 0} \quad (7.48)$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (7.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(9 - x^2 - y^2 \right) = 0 \quad (7.50)$$

$$-2y = 0 \quad (7.51)$$

$$\underline{y = 0} \quad (7.52)$$

$(x, y) = (0, 0)$ er et stasjonært punkt for $g(x, y)$.

■

Eksempel: (sadelpunkt)

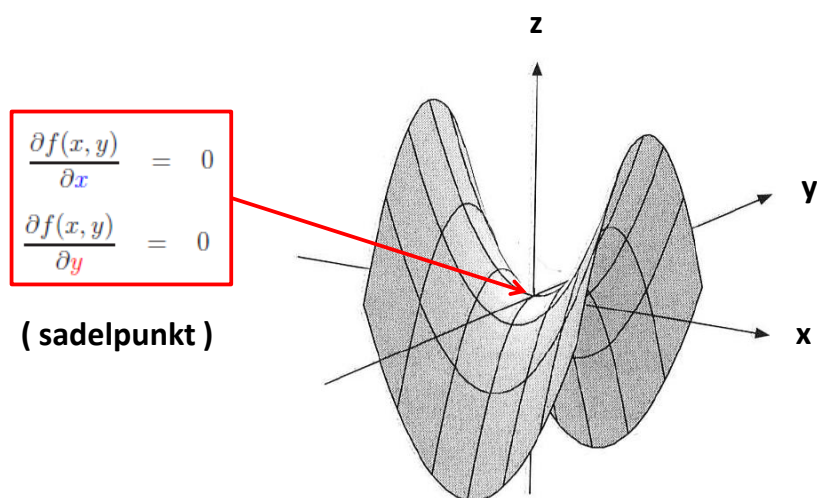
a) Plott funksjonen:

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (7.53)$$

b) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y)$ og $g(x, y)$.

Løsning:

a) Plott av funksjonen $z = f(x, y) = x^2 - y^2$:



Figur 7.9: Funksjonen $f(x, y) = x^2 - y^2$.

b) 1. ordens deriverte til $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) = 0 \quad (7.55)$$

$$2x = 0 \quad (7.56)$$

$$\underline{x = 0} \quad (7.57)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (7.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2) = 0 \quad (7.59)$$

$$-2y = 0 \quad (7.60)$$

$$\underline{y = 0} \quad (7.61)$$

$(x, y) = (0, 0)$ er et stasjonært punkt for $f(x, y)$.

■

Som vi ser av de to foregående eksemplene: de [stasjonære](#) punktene bestemte av:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (7.62)$$

dvs. stigningstallet er null både i x -retning og y -retning, kan svare til forskjellige typer situasjoner, f.eks.:

- det absolutt høyeste punkt, dette er et globalt maksimum
- det absolutt laveste punkt, dette er et globalt minimum
- et lokalt toppunkt
- et lokalt bunnpunkt
- et “fjellpass”
- en flat “fjellhyle”
- osv.

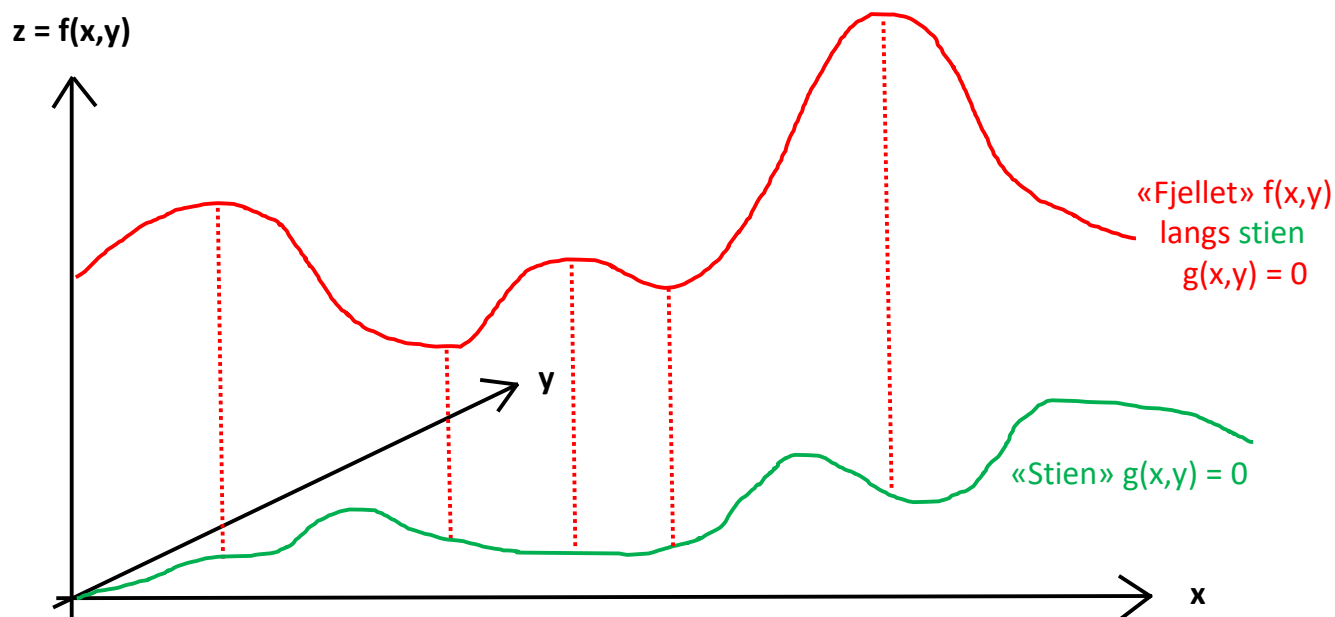
7.7 Maksimering/minimering under bibetingelser

Anta at vi skal maksimere $z = f(x, y)$ når vi samtidig krever at $g(x, y) = 0$.

Noen eksempel:

Hvis $f(x, y)$ representerer fjellhøyden i et kart, kan f.eks. $g(x, y) = 0$ representere en **sti** som vi må gå langs. Hva er da det høyeste punktet langs denne stien, se figur 7.10?

Hvis $f(x, y)$ representerer fortjenesten ved innsatsfaktorene x og y , kan $g(x, y) = 0$ representere budsjettet vi må følge, dvs. en **budsjettbetingelse**. Hva er da den største fortjenesten vi kan oppnå?



Figur 7.10: Vi går langs en sti $g(x, y) = 0$ i fjellet $f(x, y)$.

Spørsmål:

Hvordan skal vi finne lokale maksima til $f(x, y)$ under betingelsen at $g(x, y) = 0$?

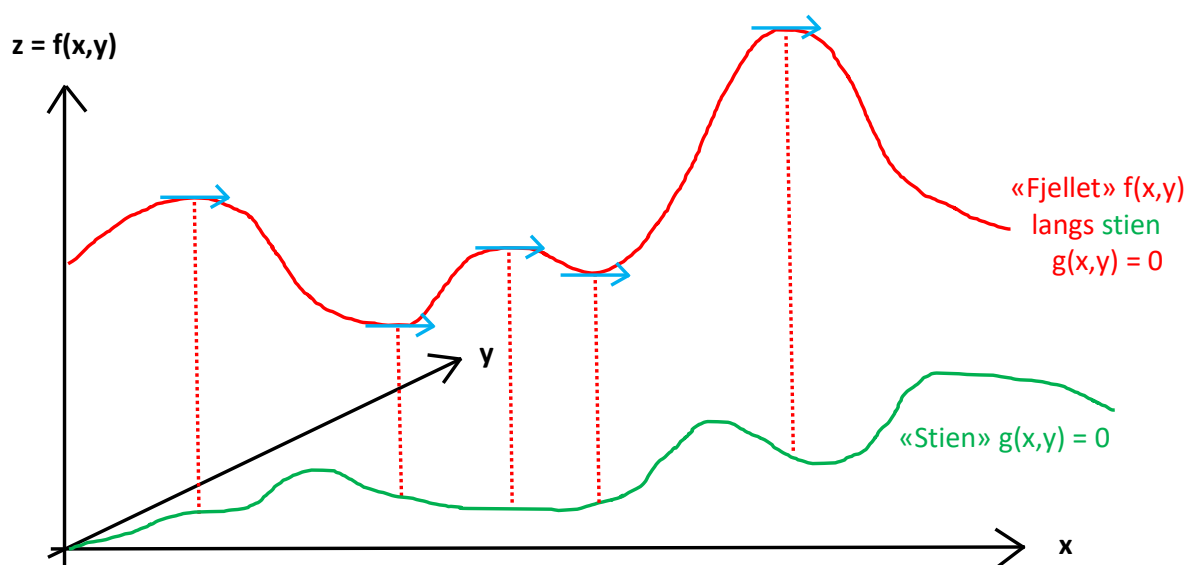
Hovedide:

Vi går langs stien $g(x, y) = 0$ og sjekker når stigningstallet til $f(x, y)$ er lik null.

Dvs. vi finner de *kritiske punktene* til f langs stien $g(x, y) = 0$. Sagt på en annen måte:

Vi setter den **retningsderiverte** av $f(x, y)$ i **retning** av stien $g(x, y) = 0$ lik null.

Figur 7.11 viser at de lokale maksimaene til $f(x, y)$ langs stien $g(x, y) = 0$ har stigningstall lik 0, dvs den retningsderiverte i retning av stien er lik null.

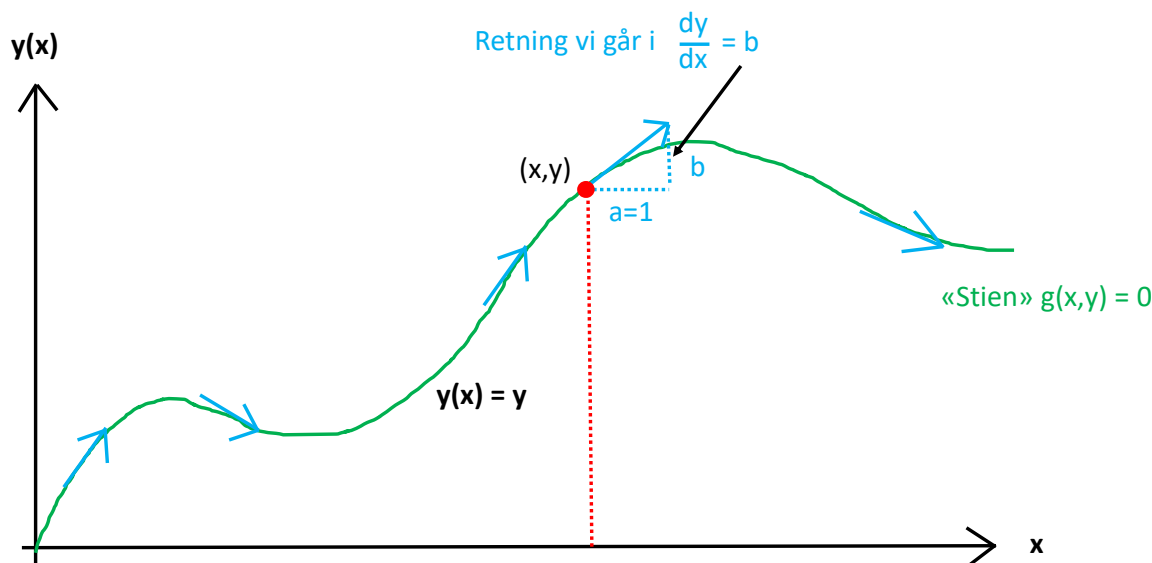


Figur 7.11: De kritiske punktene til $f(x, y)$ langs stien $g(x, y) = 0$.

Anta vi står i punktet (x, y) . Fra avsnitt 7.5 husker vi at den retningsderiverte av $f(x, y)$ langs retningen hvor vi går a enheter langs x -aksen og b enheter langs y -aksen var gitt ved:

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} \quad (7.63)$$

Figur 7.12 viser kun stien $g(x, y) = 0$ som vi går langs i xy -planet. Anta nå at vi kan beskrive stien ved $y = y(x)$, dvs. som en funksjon av x .² Retningen til stien i punktet (x, y) er gitt ved **tangenten** til grafen i punktet (x, y) . Dvs. dersom vi går en enhet langs x -aksen, går vi $\frac{dy}{dx}$ enheter langs y -aksen.³ Vi har mao. argumentert for at $a = 1$ og $b = \frac{dy}{dx}$.



Figur 7.12: Stien $g(x, y) = 0$ uttrykt som en funksjon $y = y(x)$

²Dette steget er helt vesentlig for denne fremgangsmetoden. La f.eks. stien være gitt som $g(x, y) = 2x - y + 1 = 0$. Vi kan da skrive y som en funksjon av x :

$$g(x, y) = 0 \quad (7.64)$$

$$\Updownarrow \quad (7.65)$$

$$2x - y + 1 = 0$$

$$\Updownarrow \quad (7.66)$$

$$y = 2x + 1$$

Dvs. vi kan beskrive stien ved $y(x) = 2x + 1$.

³Husk at $\frac{dy}{dx}$ er stigningstallet til tangenten i punktet (x, y) .

Retningsderivert av $f(x, y)$ langs stien $g(x, y) = 0$ i punktet (x, y) er dermed gitt ved:

$$1 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (7.67)$$

De **kritiske punktene** langs stien $g(x, y) = 0$ finner vi når den retningsderiverte er lik null, dvs. når:

$$1 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (7.68)$$

Dersom vi løser lign. 7.68 mhp. $\frac{dy}{dx}$, får vi:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \text{ kort-notasjon} \equiv -\frac{f_x}{f_y} \quad (7.69)$$

Dersom stien $g(x, y) = 0$ er en enkel funksjon slik at vi kan enkelt beskrive den som en funksjon $y = y(x)$, så er alt vel. Problemet er at dette sjeldent lar seg gjøre i praksis - kun i teorien. Vi må derfor uttrykke $\frac{dy}{dx}$ ved hjelp av funksjonen $g(x, y)$ i stedet.

Heldigvis kan vi gjøre dette ved hjelp av den såkalte [kjerneregelen for to deriverte](#), som sier at dersom vi har gitt en funksjon $g = g(x, y)$, hvor $y = y(x)$, så er

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (7.70)$$

Siden vi krever at $g(x, y) = 0$, så er også $\frac{dg(x,y)}{dx} = 0$, som gir at

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (7.71)$$

Dersom vi løser lign. 7.71 mhp. $\frac{dy}{dx}$, får vi:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \stackrel{\text{kort-notasjon}}{=} - \frac{g_x}{g_y} \quad (7.72)$$

Via lign.(7.69) og (7.72) har man da:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_f = \left. \frac{dy}{dx} \right|_g \quad (7.73)$$

$$-\frac{f_x}{f_y} = -\frac{g_x}{g_y} \quad (7.74)$$

Siden forholdet mellom de deriverte til $f(x, y)$ og $g(x, y)$ er det samme, jfr. lign.(7.74), så må tellerne i lign.(7.74) være proporsjonale. Det samme gjelder for nevnerne. La oss kalle denne proporsjonalitetsfaktoren, eller multiplikatoren, for λ . Lign.(7.74) impliserer dermed: ⁴

$$f_x = \lambda g_x \quad (7.78)$$

$$f_y = \lambda g_y \quad (7.79)$$

eller

$f_x - \lambda g_x = 0$	(7.80)
$f_y - \lambda g_y = 0$	(7.81)

som altså bestemmer ekstremalpunktet til $f(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = 0$.

⁴En analogi til lign.(7.78) og (7.79), la oss se på brøken:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (7.75)$$

Siden forholdet mellom tallene er like så må telleren 2 være *proporsjonal* til telleren 1, og tilsvarende for nevneren:

$$2 = \lambda \cdot 1 \quad (7.76)$$

$$4 = \lambda \cdot 2 \quad (7.77)$$

At den numeriske verdien på denne proporsjonalitetsfaktoren, eller multiplikatoren, er $\lambda = 2$ er egenlig ikke så interessant for oss her.

La oss **definere** funksjonen:

$$L(x, y; \lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (7.82)$$

De **stasjonære** punktene til $L(x, y; \lambda)$ er bestemt av $\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0$ og $\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0$, dvs.: ⁵

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \\ &= f_x - \lambda g_x = 0 \end{aligned} \quad (7.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \\ &= f_y - \lambda g_y = 0 \end{aligned} \quad (7.84)$$

er

$$\text{de samme som lign. (7.78) og (7.79)} \quad (7.85)$$

Med andre ord: å finne de stasjonære punktene til $L(x, y)$, dvs.:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \quad (7.86)$$

er det samme som å **bestemme ekstremal**punktene til $f(x, y)$ under bibetingelsen $\underbrace{g(x, y) = 0}_{!}$.

⁵Nå går vi tilbake fra kortnotasjonen f_x til differensialnotasjonen $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.

Setning: (maks/min med **Lagrange multiplikatorer**)

Funksjonen $f(x, y)$ skal maksimeres/minimeres under bibetingelsen $g(x, y) = 0$.

Dette optimaliseringsproblemet kan løses på følgende måte:

- 1) Skriv opp **Lagrange-funksjonen**:

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (7.87)$$

hvor λ = Lagrange-multiplikatoren, en ukjent konstant.

- 2) Finn de **stasjonære punktene** til $L(x, y; \lambda)$, dvs. regn ut:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \quad (7.88)$$

- 3) De 3 ligningene:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 \quad (7.89)$$

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \quad (7.90)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (7.91)$$

danner et ligningssystem som kan løses mhp. x og y .

■

Eksempel: (maks/min med Lagrange multiplikatorer , *BØK105 Finansanalyse 1*)

Bedriften Rofi i Molde produserer telt til ulike formål. Teltet som Rofi selger mest av kommer i to versjoner. En standardversjon og en forsterket versjon. Den forsterkede versjonen er mye kraftigere enn standardversjonen slik at den tåler mer vær og vind. Blant annet er vinduene i disse teltene betydelig forsterket i forhold til standardversjonen, se figur 7.13. Til disse vinduene trengs det 5 ganger mer material enn til standardversjonen.

Anta at det **totale resultatet** til Rofi ved produksjon og salg av disse teltene er gitt ved:

$$TR(x, y) = 100(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - 1000 \quad (7.92)$$

hvor

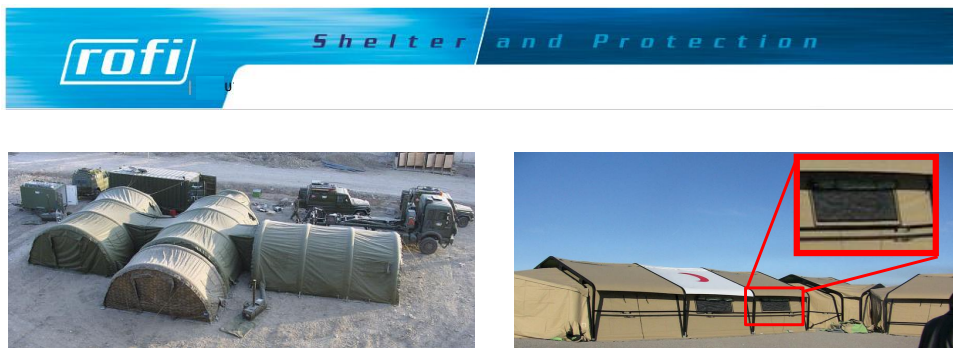
$$x = \text{antall telt produsert og solgt av standardversjonen} \quad (7.93)$$

$$y = \text{antall telt produsert og solgt av den forsterkede versjonen} \quad (7.94)$$

Rofi kjøper inn totalt 3000 m² av det materialet som brukes til vinduer i disse teltene. Derfor har Rofi følgende restriksjon:

$$x + 5y - 3000 \leq 0 \quad (7.95)$$

Hvor mange standardtelt x og hvor mange forsterkede telt y bør Rofi produsere og selge for at det totale resultatet $TR(x, y)$ skal bli **størst** mulig?



Figur 7.13: Vindu i telt.

Løsning:

Av åpenbare grunner er må $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Betingelsen i lign.(7.95) gir videre at x kan maksimalt være $x = 3\,000$. Tilsvarende, den største verdien av y er $y = 600$. Betingelsen i lign.(7.95) er derfor ekvivalent med:

$$g(x, y) = x + 5y - 3\,000 = 0 \quad (7.96)$$

dersom $0 \leq x \leq 3\,000$ og $0 \leq y \leq 600$.

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$L(x, y; \lambda) = TR(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (7.97)$$

De [stasjonære punktene](#) til $L(x, y)$ er:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \quad (7.98)$$

$$\frac{\partial TR(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial TR(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (7.99)$$

$$100 \cdot \left(\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + 0 \right) - \lambda (1 + 0) = 0 \quad , \quad 100 \cdot \left(0 + \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} \right) - \lambda (0 + 5) = 0 \quad (7.100)$$

$$\frac{50}{\sqrt{x}} - \lambda = 0 \quad , \quad \frac{50}{\sqrt{y}} - 5\lambda = 0 \quad (7.101)$$

De to ligningene i lign.(7.101) sammen med bibetingelsen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “*innsettingsmetoden*”⁶. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ ved å løse lign.(7.101) med hensyn på denne:

$$\frac{50}{\sqrt{x}} = \lambda \quad , \quad \frac{10}{\sqrt{y}} = \lambda \quad (7.102)$$

Disse er like, eller trivielt $\lambda = \lambda$ om du vil:

$$\frac{50}{\sqrt{x}} = \frac{10}{\sqrt{y}} \quad (7.103)$$

$$\underline{x = 25y} \quad (7.104)$$

Dette setter vi inn i bibetingelsen $g(x, y) = x + 5y = 3\,000$, løser, og får:

$$\underline{\underline{(x, y) = (2500, 100)}} \quad (7.105)$$

Med begrensningen på $3\,000 \text{ m}^2$ av det materialet som brukes til vinduer så vil Rofi sitt totale resultat maksimeres dersom det produseres $x = 2500$ og $y = 100$.

■

⁶Med “*innsettingsmetoden*” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

Eksempel: (optimalisering , innsettingsmetoden VS Lagrange multiplikatorer)

“*Trude Nistad*” er et varmemerke innen design av klær.

Et av plaggene som lages, er kåper. Av en bestemt type kåpe lages det to versjoner:

A spesialversjon, type *A*

B klassisk versjon, type *B*

Anta at de totale produksjonskostnadene forbunder med produksjon av slike kåper er:

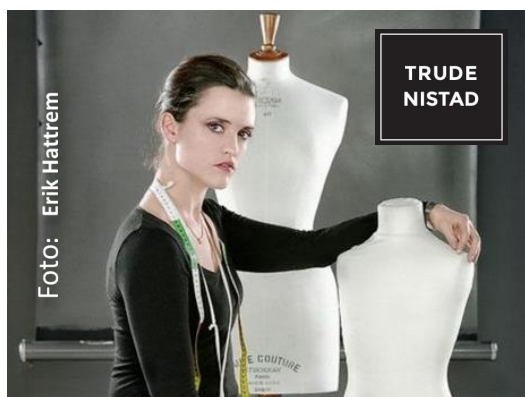
$$K(x, y) = 9x + 12y + 50\,000 \quad (7.106)$$

hvor

x = antall kåper som produseres og selges av type **A**, dvs. spesialversjon (7.107)

y = antall kåper som produseres og selges av type **B**, dvs. klassisk versjon (7.108)

Kostnaden er i NOK.



Figur 7.14: Trude Nistad.

Det viser seg at det er en sammenheng mellom prisen på kåpene, og antall kåper som produseres og selges. Anta at Trude Nistad har funnet ut at følgende sammenhenger mellom pris og etterspørsel er en god tilnærming til virkeligheten:

$$p_{\mathbf{A}} = 1200 - 3x + y \quad (7.109)$$

$$p_{\mathbf{B}} = 1500 - 2x - 5y \quad (7.110)$$

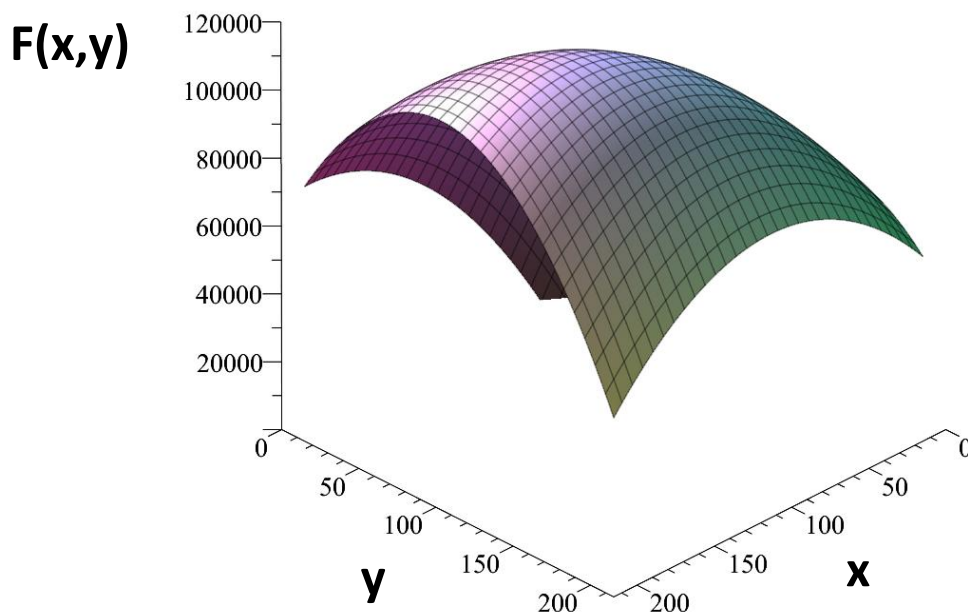
hvor

$$p_{\mathbf{A}} = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{A}, \text{ dvs. spesialversjon} \quad (7.111)$$

$$p_{\mathbf{B}} = \text{prisen på en kåpe av type } \mathbf{B}, \text{ dvs. klassisk versjon} \quad (7.112)$$

Fortjenesten som $F(x, y) = p_{\mathbf{A}}x + p_{\mathbf{B}}y - K(x + y)$ er da gitt ved:
(Du skal ikke vise lign.(7.113). Bare ta den for gitt.)

$$F(x, y) = -3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \quad (7.113)$$



Figur 7.15: $F(x, y)$ i lign.(7.113), 3d plott.

- a) Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper maksimerer fortjenetsen $F(x, y)$?
Legg merke til at vi her ikke har noen bibetingelse her. ⁷
- b) Hvilke priser må Trude Nistad sette på kåpene for å oppnå størst mulig fortjeneste $F(x, y)$? ⁸
- c) Hva blir den maksimale fortjenesten?

⁷Anta i denne oppgaven at det stasjonære punktet til $F(x, y)$ representerer et maksimum. Med denne antagelsen slipper du å sjekke at det stasjonære punktet faktisk er et maksimum, og ikke et minimum.

⁸Alts  finne p_x og p_y som gir maksimal $F(x, y)$.

Det viser seg at fabrikken som Trude Nistad bruker må produsere dobbelt så mange av kåper av type A som type B , dvs.

$$g(x, y) = y - 2x = 0 \quad (\text{bibetingelse}) \quad (7.114)$$

Anta i denne oppgaven at:

- det stasjonære punktet til $F(x, y)$ under bibetingelsen i lign.(7.114) representerer et **maksimum** ⁹
- verdien av randpunktene til $F(x, y)$ under bibetingelsen i lign.(7.114) er mindre enn verdien av $P(x, y)$ i det stasjonære punktet ¹⁰

- d) Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper **maksimerer** fortjenesten $F(x, y)$ nå, med bibetingelsen? ¹¹

Bruk innsettingsmetoden.

- e) Hvilken fordeling mellom **A** og **B** kåper **maksimerer** fortjenesten $F(x, y)$, med bibetingelsen?

Bruk **Lagrange multiplikator** metoden.

⁹Med denne antagelsen slipper du å sjekke at det stasjonære punktet faktisk er et maksimum, og ikke et minimum.

¹⁰Med denne antagelsen slipper du å sjekke randpunktene.

¹¹Dvs. finn x og y som gir F_{maks} .

- f) Hva slags pris bør Trude Nistad sette på kjøpene for å maksimere sin fortjeneste?
- g) Hva er fortjenetsten da?

Løsning:

- a) Det stasjonære punktet til $F(x, y)$ finnes ved at både $\partial F(x, y)/\partial x$ og $\partial F(x, y)/\partial y$ er null, see lign.(7.26) på side 346:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (7.115)$$

Partiell deriverte mhp. x :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (7.116)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) = 0 \quad (7.117)$$

$$\underline{-6x - 3y + 1191 = 0} \quad (7.118)$$

Partiell deriverte mhp. y :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (7.119)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) = 0 \quad (7.120)$$

$$\underline{-3x - 10y + 1488 = 0} \quad (7.121)$$

Lign.(7.118) og (7.121) utgjør et ligningssystem med 2 ukjent og 2 ligninger. Dette systemet kan løses ved “*innsettingsmetoden*”¹².

¹² “Innsettingsmetoden” betyr her at man setter den ene ligningen inn i den andre.

Løser med hensyn på y alene i lign.(7.118):

$$-6x - 3y + 1191 = 0 \quad (7.122)$$

$$-3y = 6x - 1191 \quad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \quad (7.123)$$

$$\underline{y = -2x + 397} \quad (7.124)$$

Setter f.eks. lign.(7.124) inn i (7.121):

$$-3x - 10y + 1488 = 0 \quad (7.125)$$

$$-3x - 10(-2x + 397) + 1488 = 0 \quad (7.126)$$

$$-3x + 20x - 3970 + 1488 = 0 \quad (7.127)$$

$$17x = 2482 \quad (7.128)$$

$$\underline{x = 146} \quad (7.129)$$

Og dette resultatet $x = 146$ innsatt i lign.(7.124) gir:

$$\underline{y} = \left(-2x + 397\right)\Big|_{x=146} = -2 \cdot 146 + 397 = \underline{105} \quad (7.130)$$

Alt i alt: Trude Nistad må produsere

$$\underline{\underline{x = 146}} \tag{7.131}$$

kåper av type A og

$$\underline{\underline{y = 105}} \tag{7.132}$$

kåper av type B dersom hun skal maksimere fortjenesten $F(x, y)$ når hun ikke har noen bibetingelser.

b) Prisen på kåpe A :

$$\underline{p_x} = 1200 - 3x + y, \Big|_{x=146, y=105} \quad (7.133)$$

$$= 1200 - 3 \cdot 146 + 105 = \underline{867} \quad (7.134)$$

Trude Nistad må sette prisen på kåpe A til 867 NOK for å maksimere fortjenesten sin.

Prisen på kåpe B :

$$\underline{p_y} = 1500 - 2x - 5y \Big|_{x=146, y=105} \quad (7.135)$$

$$= 1500 - 2 \cdot 146 - 5 \cdot 105 = \underline{683} \quad (7.136)$$

Trude Nistad må sette prisen på kåpe B til 683 NOK for å maksimere fortjenesten sin.

c) Maksimale fortjeneste: (se lign.(7.113))

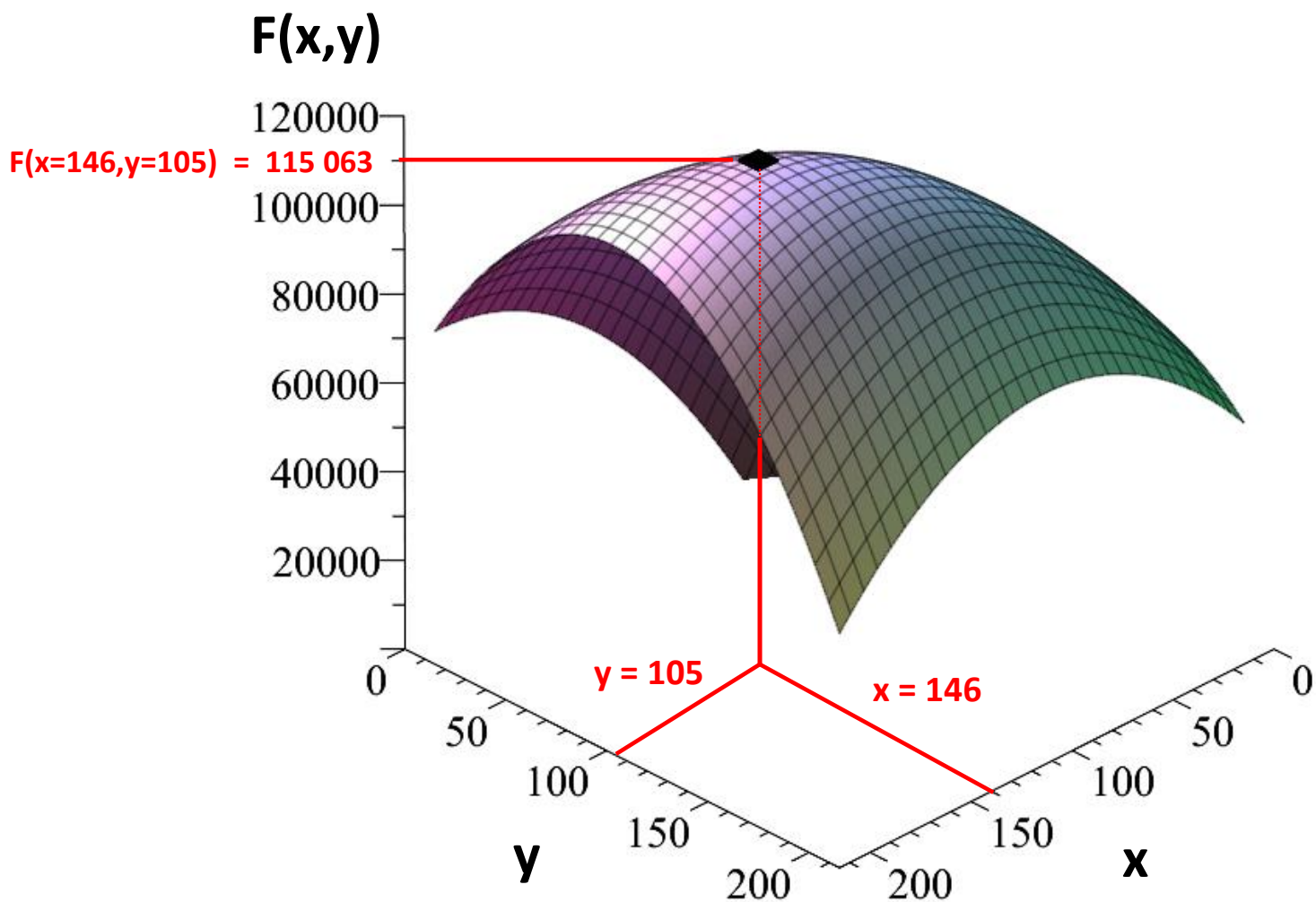
$$\underline{\underline{F(x = 146, y = 105)}} = \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) \Big|_{x=146, y=105} \quad (7.137)$$

$$= \left(-3 \cdot 146^2 - 3 \cdot 146 \cdot 105 - 5 \cdot 105^2 + 1191 \cdot 146 + 1488 \cdot 105 - 50000 \right) \text{ NOK}$$

$$= \underline{\underline{115\,063 \text{ NOK}}} \quad (7.138)$$

Plott av fortjenesten $F(x, y)$, hvor:

$$F(x, y) = -3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \quad (7.139)$$



Figur 7.16: Maksfortjeneste når vi ikke har noen bibetingelse.

d) Innsetningsmetoden:

Fortjenesten til Trude Nistad er gitt i lign.(7.113):

$$F(x, y) = -3x^2 - 3x\textcolor{red}{y} - 5\textcolor{red}{y}^2 + 1191x + 1488\textcolor{red}{y} - 50000 \quad (7.140)$$

Ved å sette bibteingelsen $g(x, y) = y - \textcolor{red}{2}x = 0$, dvs.

$$y = \textcolor{red}{2}x \quad (7.141)$$

inn i lign.(7.140) så blir fortjenesten en funksjon av bare en variabel, nemlig $F(x)$:

$$\underline{F(x)} = -3x^2 - 3x \cdot (\textcolor{red}{2}x) - 5 \cdot (\textcolor{red}{2}x)^2 + 1191x + 1488 \cdot (\textcolor{red}{2}x) - 50000 \quad (7.142)$$

$$= -3x^2 - 6x^2 - 20x^2 + 1191x + 2976x - 50000 \quad (7.143)$$

$$= \underline{-29x^2 + 4167x - 50000} \quad (7.144)$$

Dermed har vi fått en funksjon $F(x)$ med en variabel istedet for to.

Bibetingelsen er “innebygd” i $F(x)$. Derfor trenger vi bare å derivere på “vanlig måte”, uten bruk av Lagrange-metoden.

“Vanlig måte”, dvs. i optimum er den deriverte av fortjenesten null:

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad (7.145)$$

$$\frac{d}{dx} \left(-29x^2 + 4167x - 50000 \right) = 0 \quad (7.146)$$

$$-58x + 4167 = 0 \quad (7.147)$$

Løser med hensyn på x og får:

$$\underline{x} = \frac{4167}{58} \approx \underline{72} \quad (7.148)$$

med tilhørende: $\underline{y} = 2x = 2 \cdot 72 = \underline{144}$.

Den 2. deriverte av $F(x)$ er:

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(-29x^2 + 4167x - 50000 \right) \quad (7.149)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(-58x + 4167 \right) = \underline{-58} \quad (7.150)$$

altså negativ. Ifølge 2. derivasjonstesten så tilsvare da $x = 72$ og $y = 144$ et maksimum av fortjenesten $F(x)$.

Alt i alt: Trude Nistad må produsere

$$\underline{\underline{x = 72}} \quad (7.151)$$

kåper av type A og

$$\underline{\underline{y = 144}} \quad (7.152)$$

kåper av type B dersom hun skal maksimere fortjenesten $F(x, y)$ MED bibetingelsen.

e) Lagrange-metoden:

Et optimaliseringsproblem under en bibetingelse under en bibetingelse kan også løses via Lagranges multiplikatormetode.

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{L(x, y; \lambda) = F(x, y) - \lambda g(x, y)} \quad (7.153)$$

De **stasjonære punktene** til $F(x, y)$ er:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \quad (7.154)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (7.155)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (y - 2x) = 0 \quad (7.156)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (y - 2x) = 0 \quad (7.157)$$

$$-6x - 3y + 1191 + 2\lambda = 0 \quad (7.158)$$

$$-3x - 10y + 1488 - \lambda = 0 \quad (7.159)$$

$$3x + 1.5y - 595.5 = \lambda \quad (7.160)$$

$$-3x - 10y + 1488 = \lambda \quad (7.161)$$

De to ligningene i lign.(7.160) og (7.161) sammen med bibetingelsen utgjør **3 uavhengige ligninger**. Vi har **3 ukjente**, x , y og λ . Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt (“entydig”) løsning. Vi kan nå bruke “**innsettingsmetoden**”¹³. Siden λ ikke er en interessant størrelse i denne oppgaven kan vi eliminere λ i lign.(7.160) og (7.161):

$$\lambda = \lambda \quad (7.162)$$

$$3x + 1.5y - 595.5 = -3x - 10y + 1488 \quad (7.163)$$

$$1.5y + 10y = -3x - 3x + 1488 + 595.5 \quad (7.164)$$

$$11.5y = -6x + 2083.5 \quad (7.165)$$

$$\underline{y = -0.52x + 181.17} \quad (7.166)$$

og størrelsen λ er eliminert. Setter lign.(7.166) inn i bibetingelsen:

$$y - 2x = 0 \quad (7.167)$$

$$y = 2x \quad (7.168)$$

$$-0.52x + 181.17 = 2x \quad (7.169)$$

$$181.17 = 2.52x \quad (7.170)$$

$$\underline{x = 72} \quad (7.171)$$

som gir, f.eks. via lign.(7.166), $\underline{y = 2x = 144}$.

¹³Med “**innsettingsmetoden**” mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

Alt i alt: Trude Nistad må produsere

$$\underline{\underline{x = 72}} \tag{7.172}$$

kåper av type A og

$$\underline{\underline{y = 144}} \tag{7.173}$$

kåper av type B dersom hun skal maksimere fortjenesten $F(x, y)$ MED bibetingelsen.
Selvfølgelig, samme svar som da vi brukte “innsetningsmetoden” i oppgave [d](#).

f) Prisen på kåpe A :

$$\underline{p_x} = 1200 - 3x + y, \Big|_{x=72, y=144} \quad (7.174)$$

$$= 1200 - 3 \cdot 72 + 144 = \underline{1128} \quad (7.175)$$

Trude Nistad må sette prisen på kåpe A til 1128 NOK
for å maksimere fortjenesten sin.

Prisen på kåpe B :

$$\underline{p_y} = 1500 - 2x - 5y \Big|_{x=72, y=144} \quad (7.176)$$

$$= 1500 - 2 \cdot 72 - 5 \cdot 144 = \underline{636} \quad (7.177)$$

Trude Nistad må sette prisen på kåpe B til 636 NOK
for å maksimere fortjenesten sin.

g) Maksimale fortjeneste: (se lign.(7.113))

$$\underline{\underline{F(x = 72, y = 144)}} = \left(-3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \right) \Big|_{x=72, y=144} \quad (7.178)$$

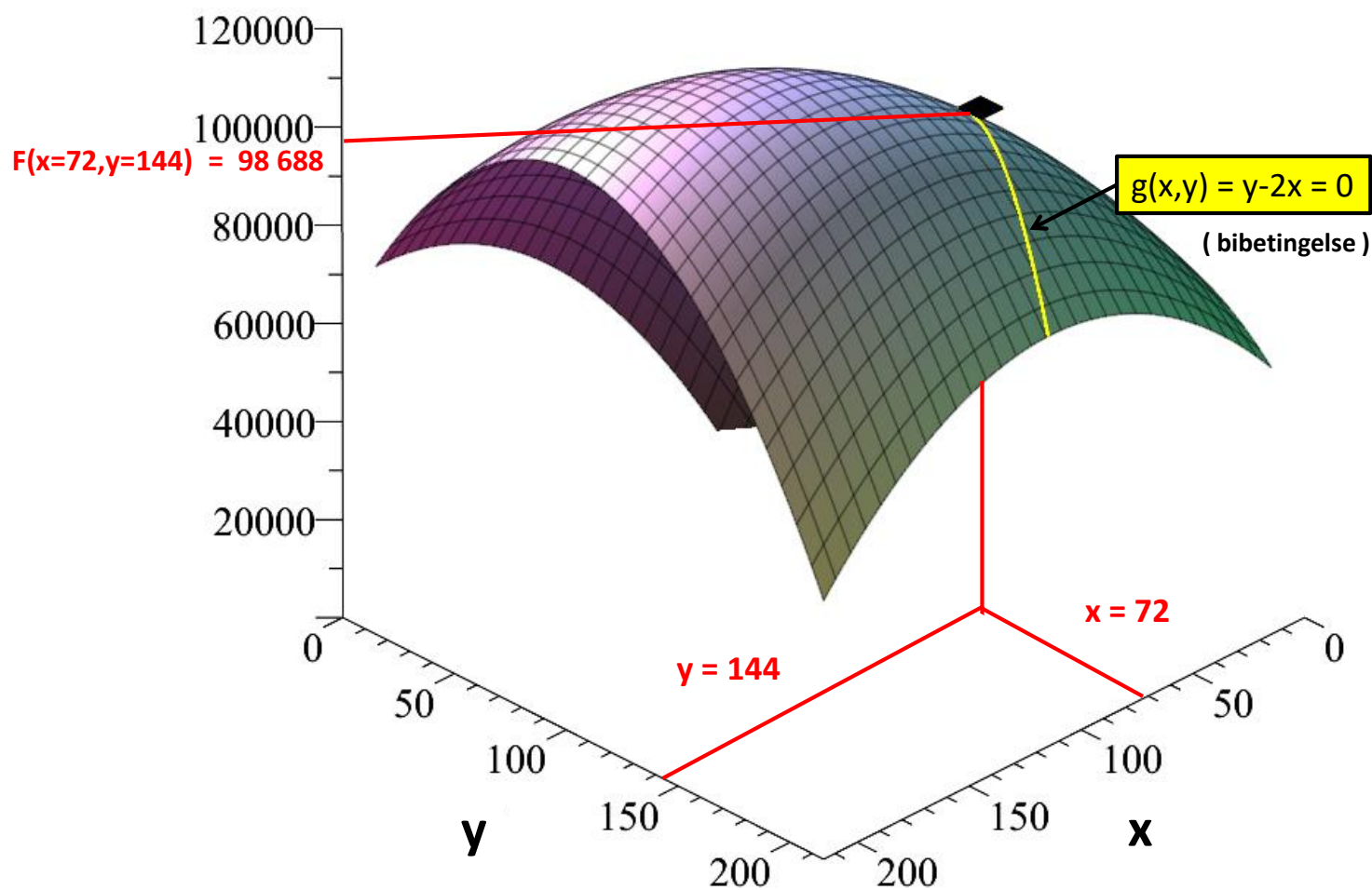
$$= \left(-3 \cdot 72^2 - 3 \cdot 72 \cdot 144 - 5 \cdot 144^2 + 1191 \cdot 72 + 1488 \cdot 146 - 50000 \right) \text{ NOK}$$

$$= \underline{\underline{98\,688 \text{ NOK}}} \quad (7.179)$$

■

Plott av fortjenesten $F(x, y)$, hvor:

$$F(x, y) = -3x^2 - 3xy - 5y^2 + 1191x + 1488y - 50000 \quad (7.180)$$



Figur 7.17: Maksfortjeneste når vi har bibetingelsen $g(x, y) = y - 2x = 0$ (gul kurve).