

LØSNING: Oppgavesett nr. 4

“MAT100 Matematikk”, 2018 v02

a) Funksjon: $f(x) = e^{3x}$.

Med kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 3x$ kan vi definere den “ytre” funksjonen:

$$g(u) = e^u \quad (1)$$

Bruk kjerneregelen:

$$\frac{d f(x)}{dx} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{d g(u)}{du} \frac{d u}{dx} \quad (2)$$

$$= \frac{d}{du} \left(e^u \right) \frac{d}{dx} \left(3x \right) \quad (3)$$

$$= e^u 3 \quad (4)$$

$$= \underline{\underline{3 e^{3x}}} \quad (5)$$

b) Funksjon: $f(x) = e^{-x}$.

Med kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} -x$ kan vi definere den “ytre” funksjonen:

$$g(u) = e^u \quad (6)$$

Bruk kjerneregelen:

$$\frac{\frac{d f(x)}{d x}}{\frac{d x}{d x}} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{d g(u)}{d u} \frac{d u}{d x} \quad (7)$$

$$= \frac{d}{d u} \left(e^u \right) \frac{d}{d x} \left(-x \right) \quad (8)$$

$$= e^u (-1) \quad (9)$$

$$= \underline{\underline{-e^{-x}}} \quad (10)$$

c) Funksjon: $f(x) = \ln(x^2 + 3)$.

Med kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} x^2 + 3$ kan vi definere den “ytre” funksjonen:

$$g(u) = \ln u \quad (11)$$

Bruk kjerneregelen:

$$\frac{\frac{d f(x)}{d x}}{\frac{d x}{d x}} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{d g(u)}{d u} \frac{d u}{d x} \quad (12)$$

$$= \frac{d}{d u} \left(\ln u \right) \frac{d}{d x} \left(x^2 + 3 \right) \quad (13)$$

$$= \frac{1}{u} 2x \quad (14)$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x}{x^2 + 3}}} \quad (15)$$

d) Funksjon: $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Med kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{x} = x^{-1}$ ("kjelleromskrivningen") kan vi definere den "ytre" funksjonen:

$$g(u) = \ln u \quad (16)$$

Bruk kjerneregelen:

$$\frac{d f(x)}{\underline{\underline{dx}}} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{d g(u)}{d \textcolor{red}{u}} \frac{d \textcolor{red}{u}}{dx} \quad (17)$$

$$= \frac{d}{d \textcolor{red}{u}} \left(\ln u \right) \frac{d}{dx} \left(x^{-1} \right) \quad (18)$$

$$= \frac{1}{u} (-1) x^{-1-1} \quad (19)$$

$$= - \frac{1}{\textcolor{red}{u} x^2} \quad (20)$$

$$= - \frac{1}{\textcolor{red}{x}^{-1} x^2} \quad (21)$$

$$= - \frac{1}{\underline{\underline{x}}} \quad (22)$$

e) Funksjon: $R(t) = \overbrace{100 \ln(2t+1)}^{= f(t)} + 5t$

La oss først kun se på $f(t) = 100 \ln(2t+1)$

Med kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2t+1$ kan vi definere den “ytr” funksjonen:

$$g(u) = 100 \ln u \quad (23)$$

Bruk kjerneregelen på funksjonen $f(t)$:

$$\underline{\underline{\frac{d f(t)}{dt}}} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{d g(u)}{d u} \frac{d u}{dt} \quad (24)$$

$$= \frac{d}{d u} \left(100 \ln u \right) \frac{d}{dt} (2t+1) \quad (25)$$

$$= 100 \frac{1}{u} 2 \quad (26)$$

$$= \frac{200}{2t+1} \quad (27)$$

Funksjonen $R(t) = f(t) + 5t$:

$$\underline{\underline{\frac{d R(t)}{dt}}} = \frac{d}{dt} (f(t) + 5t) \quad (28)$$

$$= \frac{d f(t)}{dt} + \frac{d}{dt} (5t) \quad (29)$$

$$= \underline{\underline{\frac{200}{2t+1} + 5}} \quad (30)$$

f) Omskriving av funksjonen $N(t)$ i oppgave **3**:

$$\underline{N(t)} = N_{\max} \left(1 - e^{-at} \right) = N_{\max} - \overbrace{N_{\max} e^{-at}}^{= f(t)} \quad (31)$$

$$= \underline{N_{\max} - f(t)} \quad (32)$$

La oss først kun se på $f(t) = N_{\max} e^{-at}$

Med kjernen $\textcolor{red}{u} \stackrel{\text{def.}}{=} -\textcolor{red}{a}t$ kan vi definere den “forenklede” funksjonen:

$$g(u) = N_{\max} e^u \quad (33)$$

Bruk kjerneregelen på funksjonen $f(t)$:

$$\underline{\underline{\frac{d f(t)}{dt}}} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{d g(u)}{d \textcolor{red}{u}} \frac{d \textcolor{red}{u}}{dt} \quad (34)$$

$$= \frac{d}{d \textcolor{red}{u}} \left(N_{\max} e^u \right) \frac{d}{dx} \left(-at \right) \quad (35)$$

$$= N_{\max} e^u (-a) \quad (36)$$

$$= \underline{\underline{-a N_{\max} e^{-at}}} \quad (37)$$

Funksjonen $N(t) = N_{\max} - f(t)$:

$$\underline{\underline{\frac{d N(t)}{dt}}} = \frac{d}{dt} \left(N_{\max} - f(t) \right) \quad (38)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(N_{\max} \right) - \frac{d f(t)}{dt} = 0 - \left(-a N_{\max} e^{-at} \right) \quad (39)$$

$$= \underline{\underline{a N_{\max} e^{-at}}} \quad (40)$$

Fortegnet til $\frac{dN(t)}{dt}$:

En eksponensialfunksjon er **alltid større enn null**: (uansett verdi på a og t)

$$e^{-at} > 0 \quad (41)$$

Siden $a = 0.8 > 0$ og $N_{\max} = 1000 > 0$ er positive så er den deriverte:

$$\frac{dN(t)}{dt} \stackrel{\text{lign. (40)}}{=} aN_{\max}e^{-at} > 0 \quad (42)$$

også positiv for alle t .

Voksende:

Lign.(42), $\frac{dN(t)}{dt} > 0$, viser at $N(t)$ er en voksende funksjon. ¹

■

¹Siden stigningen, altså den deriverte, alltid er positiv så er $N(t)$ voksende.

Oppgave 2: (derivasjon av $\ln x$, kjerneregelen)

a) Siden

$$f(x) = \ln(e^{x^2}) = x^2 \quad (43)$$

så er denne enkel å derivere via ”hovedregelen”:

$$\underline{\underline{\frac{d f(x)}{dx}}} = \frac{d}{dx}(2x) = \underline{\underline{2}} \quad (44)$$

b) Den “**ytre**” funksjonen til $f(x) = \ln(2x^5 + 5x + 1)$ er:

$$g(u) = \ln u \quad (45)$$

hvor $u(x) = 2x^5 + 5x + 1$ er kjernen. **Kjerneregelen** gir da:

$$\underline{\underline{\frac{d f(x)}{dx}}} \stackrel{\text{kj.regel}}{=} \frac{d g(u)}{du} \frac{du}{dx} \quad (46)$$

$$= \underbrace{\frac{d}{du}(\ln u)}_{= \frac{1}{u}} \underbrace{\frac{d}{dx}(2x^5 + 5x + 1)}_{= 2 \cdot 5x^4 + 5} \quad (47)$$

$$= \frac{1}{u} (2 \cdot 5x^4 + 5) \quad (48)$$

$$= \frac{2 \cdot 5x^4 + 5}{u} \quad (49)$$

$$= \underline{\underline{\frac{5(2x^4 + 1)}{2x^5 + 5x + 1}}} \quad (50)$$

- c) Funksjonen $f(x) = x \ln(2x^5 + 5x + 1)$ er på produktform:

$$\underline{f(x)} = x \ln(2x^5 + 5x + 1) = \underline{u \cdot v} \quad (51)$$

eus

hvor $u = x$ og $v = \ln(2x^5 + 5x + 1)$. Derfor må vi bruke regelen for derivasjon av et produkt:

$$\underline{\underline{f'(x)}} = \textcolor{red}{u}'v + u\textcolor{blue}{v}' \quad (52)$$

$$= \underbrace{\textcolor{red}{\frac{d}{dx}}(\textcolor{red}{x})}_{= 1} \ln(2x^5 + 5x + 1) + x \underbrace{\textcolor{blue}{\frac{d}{dx}}(\ln(2x^5 + 5x + 1))}_{= \frac{5(2x^4 + 1)}{2x^5 + 5x + 1} \text{ (se oppgave 2b)}} \quad (53)$$

$$= \underline{\underline{\ln(2x^5 + 5x + 1) + \frac{5x(2x^4 + 1)}{2x^5 + 5x + 1}}} \quad (54)$$

■

Oppgave 3: (derivasjon og eksponensial- og logaritmefunksjoner)

- a) Oppgaven består i å regne ut **funksjonsverder**. Da må vi bruke kalkulator.

For $t = 1$:

$$\underline{\underline{N(1)}} = 1000 \left(1 - e^{-0.8 \cdot 1} \right) = \underline{\underline{550.7}} \quad (55)$$

For $t = 3$:

$$\underline{\underline{N(3)}} = 1000 \left(1 - e^{-0.8 \cdot 3} \right) = \underline{\underline{909.3}} \quad (56)$$

For $t = 10$:

$$\underline{\underline{N(10)}} = 1000 \left(1 - e^{-0.8 \cdot 10} \right) = \underline{\underline{999.7}} \quad (57)$$

For $t = 20$:

$$\underline{\underline{N(20)}} = 1000 \left(1 - e^{-0.8 \cdot 20} \right) = \underline{\underline{999.9999}} \approx 1000 \quad (58)$$

- b) Ut fra oppgave **3a** ser vi at når t øker så går funksjonsverdien til $N(t)$ mot $N_{\max} = 1000$ fordi:

$$e^{-0.8t} \rightarrow 0 \quad (59)$$

når $t \rightarrow \infty$.

- c) Med $a = 0.8 > 0$ så er $e^{-at} \leq 1$, dvs. mindre eller lik 1 for alle $t \geq 0$.
Dermed:

$$N(t) = N_{\max} \underbrace{\left(1 - \overbrace{e^{-at}}^{\leq 1}\right)}_{\leq 1} \leq N_{\max} = 1000 \quad (60)$$

altså $N(t) \leq 1000$ for alle tidspunkt $t \geq 0$.

- d) Vi skal finne tiden t slik at

$$N(t) = 910 \quad (61)$$

Setter inn for $N(t)$:

$$N_{\max} \left(1 - e^{-at}\right) = 910 \quad \left| \cdot \frac{1}{N_{\max}} \right. \quad (62)$$

$$1 - e^{-at} = \frac{910}{N_{\max}} \quad (63)$$

$$1 - \frac{910}{N_{\max}} = e^{-at} \quad (64)$$

Ta ”ln” på begge sider: (”*jekke ned*”-regelen)

$$\ln \left(1 - \frac{910}{N_{\max}}\right) = \ln \left(e^{-at}\right) \quad (65)$$

$$\ln \left(1 - \frac{910}{N_{\max}}\right) = -at \quad (66)$$

$$\ln \left(1 - \frac{910}{N_{\max}} \right) = -a t \quad \left| \cdot \frac{1}{-a} \right. \quad (67)$$

$$\frac{\ln \left(1 - \frac{910}{N_{\max}} \right)}{-a} = t \quad (68)$$

Til slutt setter vi inn tall:

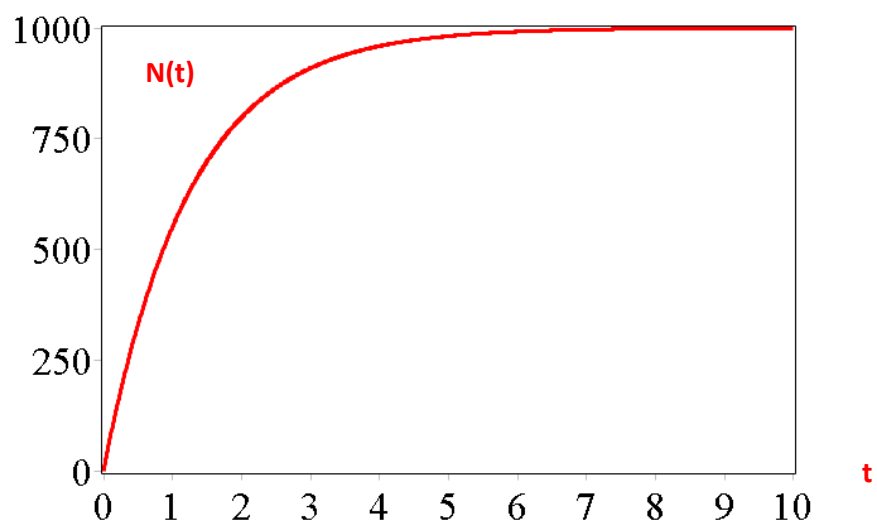
$$\underline{t} = \frac{\ln \left(1 - \frac{910}{N_{\max}} \right)}{-a} \quad (69)$$

$$= \frac{\ln \left(1 - \frac{910}{1000} \right)}{-0.8} = \underline{3} \quad (70)$$

Det tar $t = 3$ dager før produksjonen er på minst 910 panelovener per dag.

- e) Lager verditabell og plotter $N(t)$ for $t \in [0..10]$.

t	0	2	4	6	8	10
N(t)	0	798	959	992	998	999.7



■

Oppgave 4: (eksponensial- og logaritmefunksjoner)

a) Nei, det finnes ikke noen *enkle* regneregler for $\ln(x + y)$ og $\ln(x - y)$.

b) Nei, man kan ikke ta logaritmen til et negativt tall, altså man kan IKKE ta $\ln(-2.3)$.

c) Setter sammen de rette uttrykkene som gir rett formel:

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad (71)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (72)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad (73)$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad (74)$$

$$(e e)^x = e^{2x} \quad (75)$$

$$\left(\frac{e}{e}\right)^x = 1 \quad (76)$$

$$e^0 = 1 \quad (77)$$

$$e^1 = e \quad (78)$$

d) Setter sammen de rette uttrykkene som gir rett formel:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad a, b > 0 \quad (79)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad a, b > 0 \quad (80)$$

$$\ln(a^p) = p \ln a \quad a > 0 \quad (81)$$

$$\ln 1 = 0 \quad (82)$$

$$\ln e = 1 \quad (83)$$

$$\ln e^x = x \quad (84)$$

$$e^{\ln x} = x, \quad x > 0 \quad (85)$$

e) Setter sammen de rette uttrykkene som gir rett formel:

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad a, b > 0 \quad (86)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad a, b > 0 \quad (87)$$

$$\log(a^p) = p \log a \quad a > 0 \quad (88)$$

$$\log 1 = 0 \quad (89)$$

$$\log 10 = 1 \quad (90)$$

$$\log 10^x = x \quad (91)$$

$$10^{\log x} = x, \quad x > 0 \quad (92)$$

■

Oppgave 5: (diskret vs kontinuerlig rente)

a) Tar utgangspunkt i **renteformelen** og løser med hensyn på **n** alene:

$$K_n = K_0 (1+r)^n \quad \left| \cdot \frac{1}{K_0} \right. \quad (93)$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \quad (94)$$

$$\frac{K_n}{K_0} = (1+r)^n \quad \text{ta } \ln \text{ (eller log) på hver side av ligningen} \quad (95)$$

$$\ln \left(\frac{K_n}{K_0} \right) = \ln(1+r)^n \quad \text{bruker regneregel: } \ln x^n = n \ln x \quad (96)$$

$$\ln \left(\frac{K_n}{K_0} \right) = n \ln(1+r) \quad \left| \cdot \frac{1}{\ln(1+r)} \right. \quad (97)$$

$$\frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)} = n \quad (98)$$

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (99)$$

b) Bruker lign.(99) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{n} \stackrel{\text{lign.(99)}}{=} \frac{\ln(\frac{K_n}{K_0})}{\ln(1+r)} \quad (100)$$

$$= \frac{\ln(\frac{15\,000 \text{ NOK}}{10\,000 \text{ NOK}})}{\ln(1+0.03)} \stackrel{\text{kalkis}}{=} \underline{13.7} \quad (101)$$

Med tilbudet fra DnB tar det 13.7 år å spare til 15 000 NOK.

- c) Tar utgangspunkt i den kontinuerlige renteformelen og løser med hensyn på t alene:

$$K_t = K_0 e^{rt} \quad \left| \cdot \frac{1}{K_0} \right. \quad (102)$$

$$\frac{K_t}{K_0} = e^{rt} \quad \text{ta } \ln \text{ på hver side av ligningen} \quad (103)$$

$$\ln \left(\frac{K_t}{K_0} \right) = \ln e^{rt} \quad \text{bruker regneregel: } \ln x^n = n \ln x \quad (104)$$

$$\ln \left(\frac{K_t}{K_0} \right) = r t \quad \left| \cdot \frac{1}{r} \right. \quad (105)$$

$$\frac{\ln(\frac{K_t}{K_0})}{r} = t \quad (106)$$

$$\underline{\underline{t = \frac{\ln(\frac{K_t}{K_0})}{r}}}, \quad \text{q.e.d.} \quad (107)$$

- d) Bruker lign.(107) og setter inn de oppgitte tallene:

$$\underline{t} \stackrel{\text{lign.(99)}}{=} \frac{\ln(\frac{K_t}{K_0})}{r} \quad (108)$$

$$= \frac{\ln(\frac{15\,000 \text{ NOK}}{10\,000 \text{ NOK}})}{0.028} \stackrel{\text{kalkis}}{=} \underline{14.5} \quad (109)$$

Med tilbudet fra Sparebanken Møre tar det 14.5 år å spare til 15 000 NOK.

- e) Det tar kortest tid å spare til 15 000 NOK med tilbudet fra DnB.
DnB har det beste tilbudet.

■