

Ny og bedre versjon 2018

MAT100

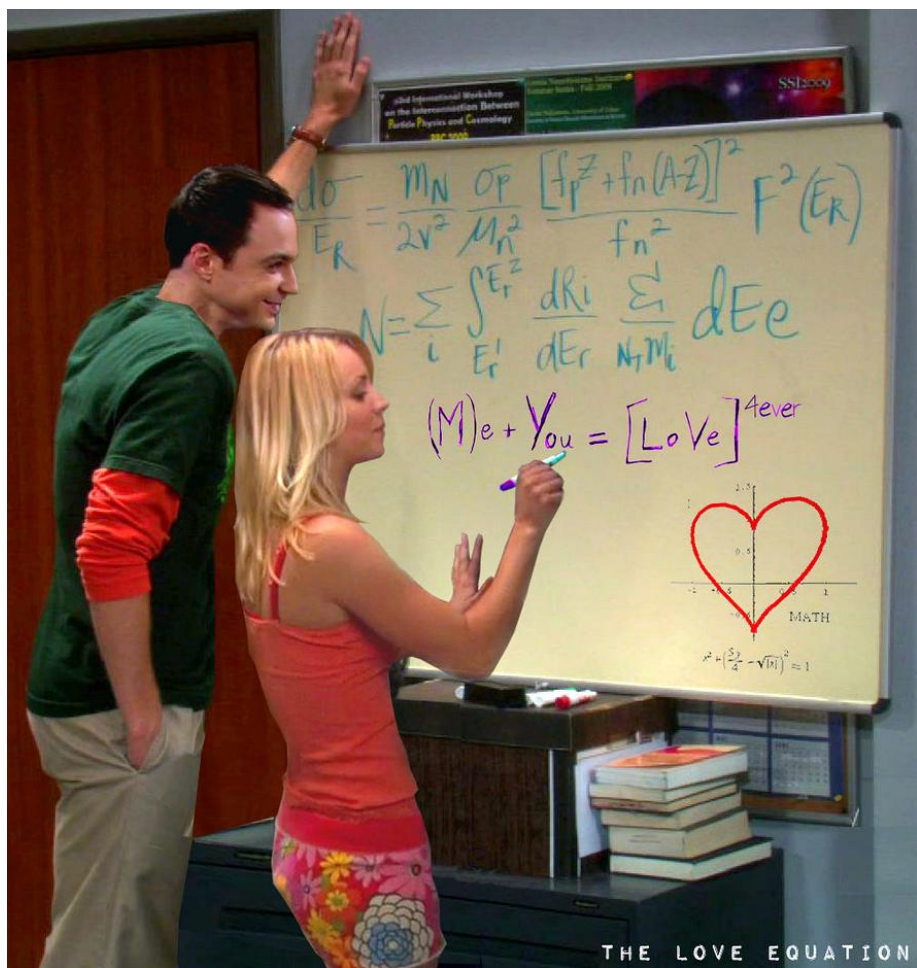
Matematikk

FORMELSAMLING 2018

Per Kristian Rekdal
Bård-Inge Pettersen



Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høyskole i logistikk



Figur 1: Matematikk er viktig.

Innhold

1	Grunnleggende emner	9
1.1	Tall og tallsystemer	10
1.2	Algebraiske uttrykk	11
1.2.1	Distributive Lov (“pilmetoden”)	12
1.3	Kvadratsetningene og konjugatsetningen	13
1.4	Brøkgregning	14
1.4.1	Forkorte og utvide brøker	14
1.4.2	Sum av brøker	15
1.4.3	Multiplikasjon og divisjon med brøker	15
1.5	Potenser	16
1.5.1	Multiplikasjon VS addisjon	18
1.6	Prefiks	19
1.7	Kvadratroten	20
1.8	2. gradsligninger	22
1.8.1	2. gradsligninger med en variabel - <i>ABC</i> -formelen	22
1.8.2	Faktorisering og løsning av 2. gradsligninger	23
1.9	Ulikheter	24
1.10	Absoluttverdi	25
1.11	Regning med prosent	26
2	Funksjoner	29
2.1	Funksjoner	30
2.2	Lineære funksjoner (rette linjer)	31
2.2.1	Ett- og to-punktsformelen	32
2.3	Kvadratiske funksjoner (parabler)	33
2.4	Rasjonale funksjoner	34
3	Derivasjon	35
3.1	Derivasjon	36
3.2	Derivasjonsregler	38
3.3	Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner	39
3.4	Kjerneregelen	40
3.5	Lokale ekstremalpunkt	41
3.6	Lokale ekstremalpunkt: 1. derivasjonstesten	43
3.7	Lokale ekstremalpunkt: 2. derivasjonstesten	44
3.8	Globale ekstremalpunkt	45

4	Eksponential- og logaritmefunksjoner	49
4.1	Eksponentialfunksjonen	50
4.2	Tallet e , Eulers tall	51
4.2.1	Deriverte av e^x	52
4.2.2	Regneregler for e^x	53
4.3	Logaritmer	54
4.3.1	Definisjon	54
4.3.2	Regneregler	55
4.4	Deriverte av $\ln x$	57
5	Følger og rekker	59
5.1	Følger og rekker	60
5.1.1	Regneregler for summasjon	61
5.2	Aritmetiske følger og rekker	62
5.2.1	Sum av en aritmetiske rekke	63
5.3	Geometriske rekker	64
5.3.1	Sum av en geometriske rekke	65
5.4	Konvergente og divergente rekker: $n \rightarrow \infty$	66
5.5	Geometriske rekker: $n \rightarrow \infty$	67
5.6	Oversikt finansmatematikk	68
6	Integrasjon	69
6.1	Definisjon av integral	70
6.2	Fundamentalsetningen for integral	71
6.3	Antideriverte og integral	72
6.3.1	Noen regneregler	73
7	Funksjoner av flere variabler	75
7.1	Funksjoner av to variable	76
7.2	Nivåkurver	77
7.3	Partielle deriverte	78
7.4	Retningsderivert	80
7.5	Maksimum og minimum	81
7.6	Maksimering/minimering under bibetingelser	83

Arbeidskrav og hjelpemidler på eksamen

Språk øvinger/eksamen:

Norsk

Arbeidskrav:

Øvingsoppgaver levert innen gitte frister. For å kunne gå opp til eksamen må følgende arbeidskrav oppfylles:

5 av totalt 7 øvinger må være innleverte og godkjente

Dersom en kandidat stryker har kandidaten mulighet til å ta påfølgende ny og utsatt eksamen, “kontinuasjoneksamen”. Da slipper man å utføre arbeidskravene på nytt. Men dersom kandidaten ikke tar denne kontinuasjoneksamenen og heller ønsker å ta neste ordinære eksamen, da **må** arbeidskravene utføres på nytt.¹

Vurderingsform:

4 timer skriftlig slutteksamen (100 %).

Karakterttype:

Bokstavkarakter

Hjelpemidler eksamen:

Godkjent **kalkulator** og **formelsamling** (se “litteratur” nedenfor).

- Kun originalversjonen av formelsamlingen utgitt av “*SiMolde Bok*” er lov å ha med på eksamen.²
- Det er lov å skrive egne notater i formelsamlingen som dere kan ta med på eksamen. Men: Ikke skriv av hele eksempler og hele oppgaver. Det vil ikke hjelpe dere på eksamen. Eksamensoppgavene blir ikke laget på en slik måte at det vil være til stor nytte.³

¹Altså: arbeidskravene “overvintrer” ikke.

²Dette fordi det skal være lett å se at dere har med den riktige og lovlige formelsamlingen på eksamen.

³Dersom dette blir praktisert i stor grad må vi revurdere denne ordningen i forhold til neste års studenter.

Kalkulator:

Dersom du har en kalkulator fra før så trenger du mest sannsynlig ikke å kjøpe en ny. Man behøver ikke en avansert kalkulator i dette kurset. Kun en enkel kalkulator er nok. Men man kan ikke bruke kalkulatoren på mobiltelefonen siden man ikke har lov å ha med mobilen på eksamen. Dersom du ikke har kalkulator fra før og skal kjøpe deg en så kan det være lurt å kjøpe en som de fleste andre i klassen har. Da kan dere hjelpe hverandre med spørsmål angående kalkulator. De fleste har en Casio, f.eks. en Casio FX-9750GII.

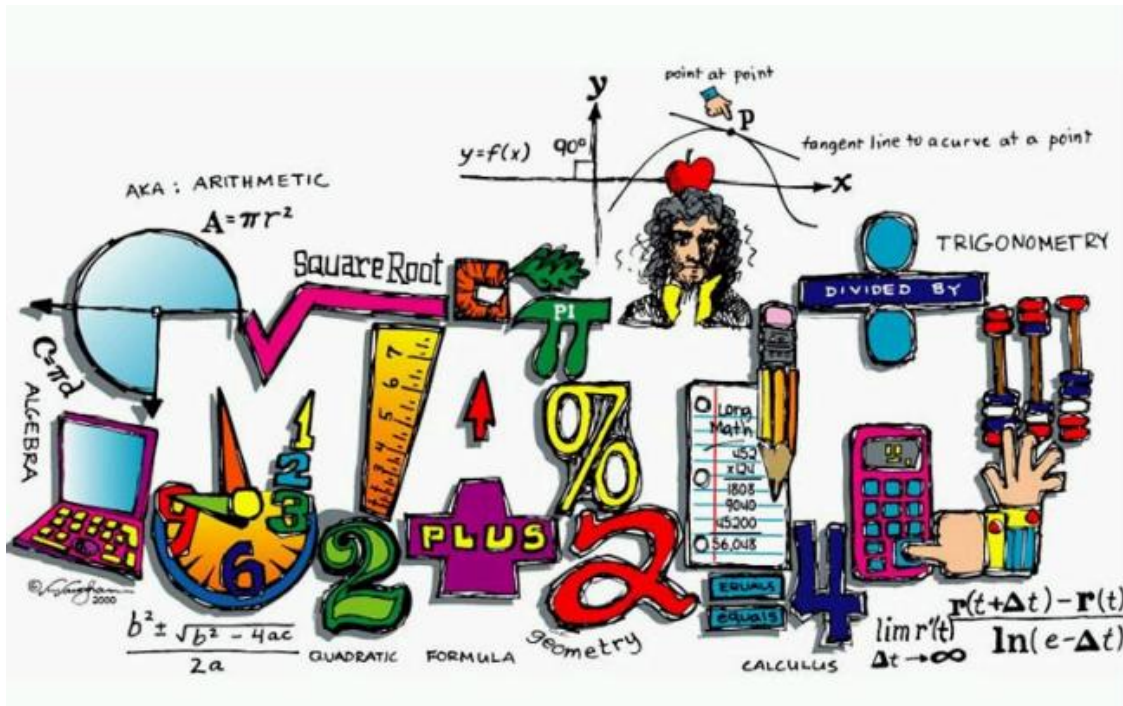
Litteratur:

- Per Kristian Rekdal og Bård-Inge Pettersen: “*Kompendium i MAT100 Matematikk*”, SiMolde Bok, Molde, 2018 (del 1 og del 2).
- Per Kristian Rekdal og Bård-Inge Pettersen: “*Formelsamling i MAT100 Matematikk*”, SiMolde Bok, Molde, 2018.

PS:

Man kan **ikke** bruke tidligere versjoner av kompendiet eller formelsamlingen, f.eks. man kan **ikke** bruke fjorårets versjon. Dette fordi kompendiet og formelsamlingen korrigeres, endres og forbedres hvert år. Da endres også sidetall og ligningssummer. Og vi må ha samme referanser, ligningssummer og sidetall når vi jobber oss gjennom dette kurset.

Grunnleggende emner



Figur 1.1: Grunnleggende emner i matematikk.

1.1 Tall og tallsystemer

Noen fundamentale tallmengder:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \} \quad (\text{naturlige tall}) \quad (1.1)$$

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \} \quad (\text{hele tall}) \quad (1.2)$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \right\} \quad (\text{rasjonale tall}) \quad (1.3)$$

$$\mathbb{R} = \text{mengden av reelle tall} \quad (\text{alle tall p  tall-linja}) \quad (1.4)$$

Mengdesymbol, intervall:

$$[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \} \quad (\text{alle reelle tall mellom } a \text{ og } b) \quad (1.5)$$

(lukket intervall)

$$\langle a, b \rangle = \{ x \mid a < x < b \} \quad (\text{ingen endepunkt mellom } a \text{ og } b) \quad (1.6)$$

( pent intervall)

$$\langle a, b] = \{ x \mid a < x \leq b \} \quad (\text{bare ett endepunktet er med mellom } a \text{ og } b) \quad (1.7)$$

(halv pent intervall)

$$[a, b \rangle = \{ x \mid a \leq x < b \} \quad (\text{bare ett endepunktet er med mellom } a \text{ og } b) \quad (1.8)$$

(halv pent intervall)

1.2 Algebraiske uttrykk

Generelle regler for algebra: (algebra = regler for operasjonene “.” og “+”)

$$\begin{array}{c} \text{like ledd} \\ \underbrace{a + a} = 2a \end{array} \quad (1.9)$$

$$\begin{array}{c} \underbrace{a + b} = b + a \\ \text{ulike ledd} \end{array} \quad (1.10)$$

$$-(a + b) = -a - b \quad (1.11)$$

$$-(a - b) = -a + b \quad (1.12)$$

1.2.1 Distributive Lov (“pilmetoden”)

Denne “parentesreglen” kalles den distributive lov:

$$a(b + c) = ab + ac \quad (1.13)$$

Fra den distributive lov følger at:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \quad (1.14)$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Figur 1.2: “Pilmetoden”.

1.3 Kvadratsetningene og konjugatsetningen

Lign.(1.14) har følgende spesialtilfeller: (kvadratsetningene)

$\overbrace{(a+b)^2}^{\text{faktorisert form}}$	$=$	$a^2 + 2ab + b^2$	(1. kvadratsetning)	(1.15)
$(a-b)^2$	$=$	$a^2 - 2ab + b^2$	(2. kvadratsetning)	(1.16)
$\underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{faktorisert form}}$	$=$	$a^2 - b^2$	(konjugatsetningen)	(1.17)

1.4 Brøkgregning

Definisjon: (brøk)

En brøk er:

$$\text{brøk} = \frac{\text{teller}}{\text{nevner}} = \frac{a}{b} \quad (1.18)$$

hvor a og b er tall.



Husk:

Man kan aldri dividere med 0.

1.4.1 Forkorte og utvide brøker

Forkorting av en brøk: (brøkgregning)

$$\frac{a \cancel{c}}{b \cancel{c}} = \frac{a}{b} \quad (\text{forkorting av en brøk}) \quad (1.19)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a c}{b c} \quad (\text{utvidelse av en brøk}) \quad (1.20)$$

1.4.2 Sum av brøker

Sum av brøk med $\overbrace{\text{samme nevner}}^{\text{felles nevner}}$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad (1.21)$$

1.4.3 Multiplikasjon og divisjon med brøker

Regler for multiplikasjon og divisjon med brøker:

$c \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}$	[1] (Tall multiplisert med brøk)	(1.22)
$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	[2] (Brøk multiplisert med brøk)	(1.23)
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$	[3] (Brøk dividert med brøk)	(1.24)

1.5 Potenser

Definisjon: (potens)

$$a^n = \underbrace{a \ a \ a \ \dots \ a}_{= n \text{ faktorer}} \quad (1.25)$$

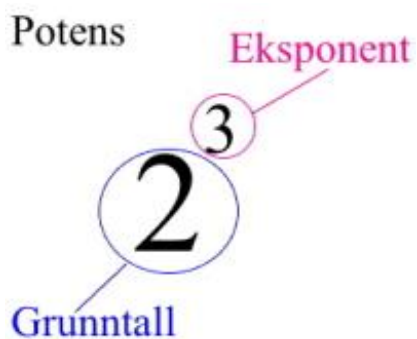
hvor

$$n = \text{heltall} \quad (n \in N) \quad (1.26)$$

$$a = \text{reellt tall} \quad (a \in R) \quad (1.27)$$

■

n kalles *eksponenten* og a kalles *grunntallet*.



Figur 1.3: Potens: grunntall og eksponent.

Regneregler:

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (1.28)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0 \quad \text{kjelleromskrivning} \quad (1.29)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m-n} \quad \text{kjelleromskrivning} \quad (1.30)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (1.31)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (1.32)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0 \quad (1.33)$$

og i tillegg:

$$a^0 = 1 \quad (1.34)$$

$$a^1 = a \quad (1.35)$$

1.5.1 Multiplikasjon VS addisjon

Husk:

1) Multiplikasjon:

$$a \cdot a = a^2 \quad (1.36)$$

2) Addisjon:

$$a + a = 2a \quad (1.37)$$

3) Subtraksjon:

$$-a - a = -2a \quad (1.38)$$

■

1.6 Prefiks

Generelt med 10-potens:

$$\text{tall} = a \cdot 10^n \quad (1.39)$$

hvor $n \in \mathbb{Z}$ og $a \in \langle -10, 10 \rangle$.

10^n	Prefiks	Symbol	Namn	
10^{15}	peta	P	billiard	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	billion	1 000 000 000 000
10^9	giga	G	milliard	1 000 000 000
10^6	mega	M	million	1 000 000
10^3	kilo	k	tusen	1 000
10^2	hekto	h	hundre	100
10^1	deka	da	ti	10
10^{-1}	desi	d	tidel	0,1
10^{-2}	centi	c	hundredel	0,01
10^{-3}	milli	m	tusendel	0,001
10^{-6}	mikro	μ	milliondel	0,000 001
10^{-9}	nano	n	milliarddel	0,000 000 001

Figur 1.4: Prefiks.

1.7 Kvadratrot

Definisjon: (kvadratrot) ($a \geq 0$)¹

$$\sqrt{a} = \text{det positive tallet som, opphøyd i 2, er 'a'} \quad (1.40)$$

■

Regneregler: ($a, b \geq 0$)

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad (1.41)$$

$$\sqrt{a^2} = a \quad (1.42)$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (1.43)$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (1.44)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b \neq 0 \quad (1.45)$$

PS:

Dette er samme regnereglene som for potenser på side 17, men med $n = \frac{1}{2}$:

$$a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad (1.46)$$

¹Man kan **ikke** ta kvadratroten av et negativt tall. (Komplekse tall er ikke et tema i dette kurset.)

Definisjon: (generalisering av kvadratroter)

$$\sqrt[n]{a} \quad , \quad a \geq 0 \quad (1.47)$$

hvor

$$\overbrace{n}^{\text{rotekspONENTEN}} = \text{heltall} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.48)$$

$$\underbrace{a}_{\text{radikand}} = \text{reellt tall} \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (1.49)$$

■

Regneregler: ($a \geq 0$)

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (1.50)$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a \quad (1.51)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m \quad (1.52)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{(a^{\frac{1}{n}})^m} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} \quad (1.53)$$

Legg merke til at for $n = 2$ i lign.(1.50) og (1.51), så reproducerer man lign.(1.41) og (1.42):

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad (1.54)$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (1.55)$$

1.8 2. gradsligninger

1.8.1 2. gradsligninger med en variabel - *ABC*-formelen

Setning: (*ABC*-formelen)²

Løsningen av en 2. gradsligning med en variabel:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.56)$$

er gitt ved den såkalte *ABC*-formelen

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.57)$$

Da kan 2. gradsligningen **FAKTORISERES** slik:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (1.58)$$

■

²Denne læresetningen viser sammenheng mellom nullpunkter og faktorisering.

1.8.2 Faktorisering og løsning av 2. gradsligninger

Setning: (polynomer, nullpunkter og faktorisering: *The fundamentalteoremet for algebra*)

Dersom et en ligning er på faktorisert form

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = 0 \quad (1.59)$$

så er løsningene gitt ved:

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (1.60)$$

■

1.9 Ulikheter

Ulikhetstegn:

$>$	større enn
$<$	mindre enn

og

$\geq$	større enn eller lik
$\leq$	mindre enn eller lik



Figur 1.5: Ulikheter.

1.10 Absoluttverdi

Absoluttverdi:

$$|a| = \begin{cases} a & , \quad \text{når } a \geq 0 \\ -a & , \quad \text{når } a < 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

1.11 Regning med prosent

Definisjon: (prosent)

Forholdet mellom a og b kan uttrykkes i prosent, dvs. “**av hundre prosent**”: ³

$$\frac{a}{b} \cdot 100 \% \quad (1.62)$$



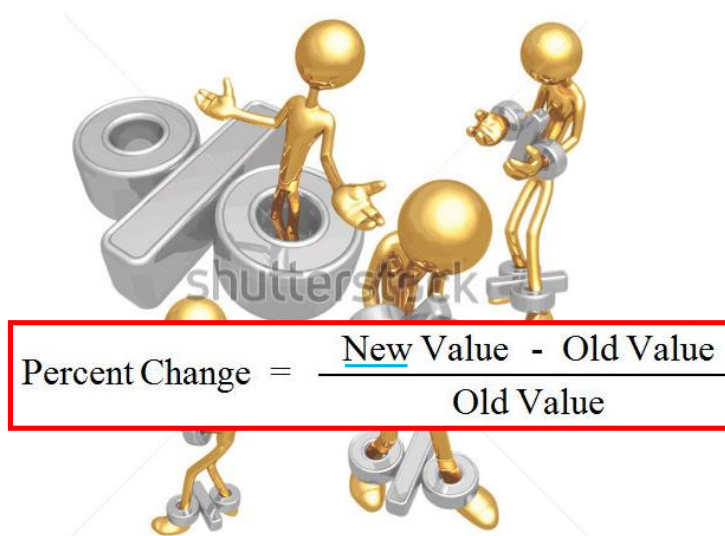
³Hva er promille ‰?

Setning: (%-vis endring)

Når et tall endres fra a til b så er den %-vise endringen iforhold til a :

$$\text{\%-vis endring} = \frac{b - a}{a} \cdot 100 \% \quad (1.63)$$

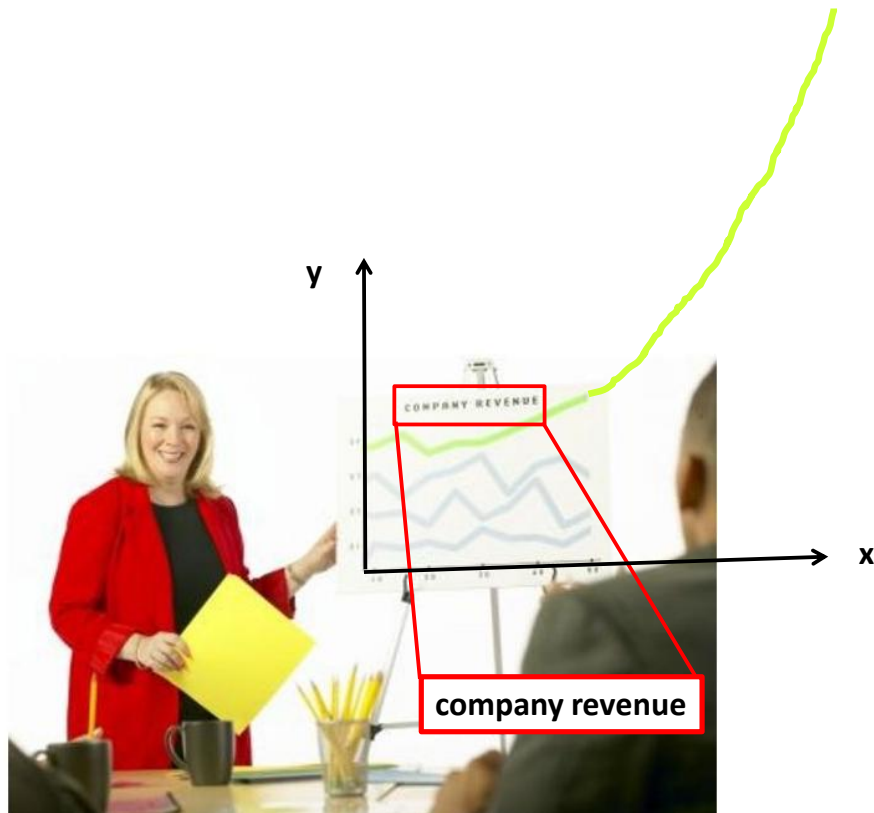
■



Figur 1.6: %-vis endring.

Kapittel 2

Funksjoner



Figur 2.1: Funksjoner.

2.1 Funksjoner

Definisjon: (funksjon) ¹

funksjon f = entydig assosiasjon fra en størrelse x til en annen f

hvor x ofte kalles den uavhengige variabelen eller bare *argumentet*, og $y = f(x)$ kalles ofte *funksjonsverdien*.

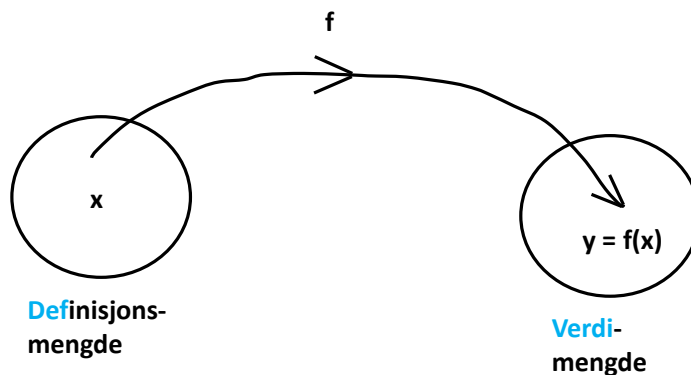
■

Definisjon: (definisjonsmengde og verdimengde)

definisjonsmengde = alle mulige tillatte verdier av x (2.1)

verdimengde = alle mulige funksjonsverdier til $y = f(x)$ tilhørende alle tillatte verdier av x (2.2)

■



Figur 2.2: Funksjon $y = f(x)$.

¹Isteden for “èn og bare èn verdi” kunne vi like gjerne sagt “*entydig*”.

2.2 Lineære funksjoner (rette linjer)

Definisjon: (lineær funksjon)

En $\overbrace{\text{lineær}}^{\text{rett linje}}$ funksjon $y = f(x)$ har formen:

$$f(x) = ax + b \quad (2.3)$$

Her er a og b reelle tall.



2.2.1 Ett- og to-punktsformelen

- 1) Setning: ($\overbrace{\text{ett-punktsformelen}}^{\text{dersom stigningstallet } a \text{ er kjent}}$ for lineære funksjoner)

Dersom stigningstallet a og ett punkt (x_1, y_1) på en rett linje er kjent så er den lineære funksjonen gitt ved:

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1 \quad (2.4)$$

Denne formelen kalles *ett-punktsformelen*. ■

- 2) Setning: ($\overbrace{\text{to-punktsformelen}}^{\text{dersom stigningstallet } a \text{ er ukjent}}$ for lineære funksjoner)

Dersom to punkt (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er kjent på en rett linje, så er den lineære funksjonen gitt ved:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \quad (2.5)$$

Denne formelen kalles *to-punktsformelen*. Stigningstallet er da $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. ■

2.3 Kvadratiske funksjoner (parabler)

Definisjon: (2. gradsfunksjon = parabel = kvadratisk funksjon)

En $\overbrace{\text{2. gradsfunksjon}}^{\text{kvadratisk}}$ $y = f(x)$ har formen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (2.6)$$

hvor a , b og c er konstanter.

■

2.4 Rasjonale funksjoner

Definisjon: ([rasjonale](#) funksjon)

En ligning på formen

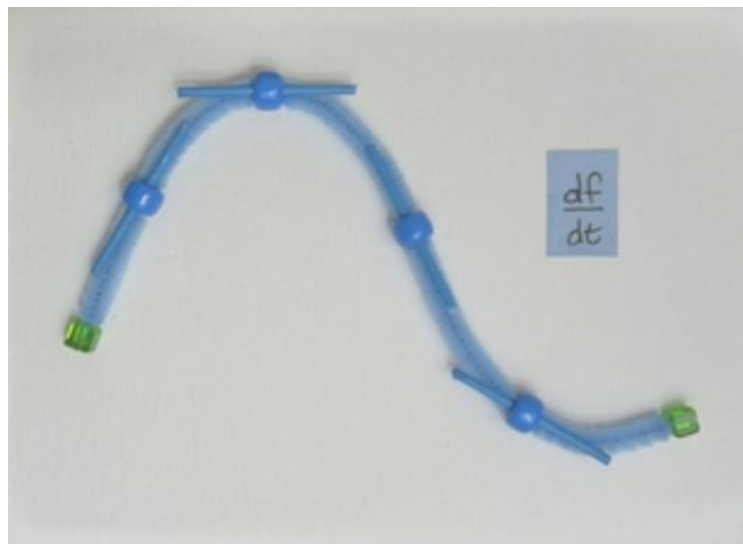
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (2.7)$$

hvor $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer, kalles en *rasjonal* funksjon.

■

Kapittel 3

Derivasjon



Figur 3.1: Deriverte.

3.1 Derivasjon

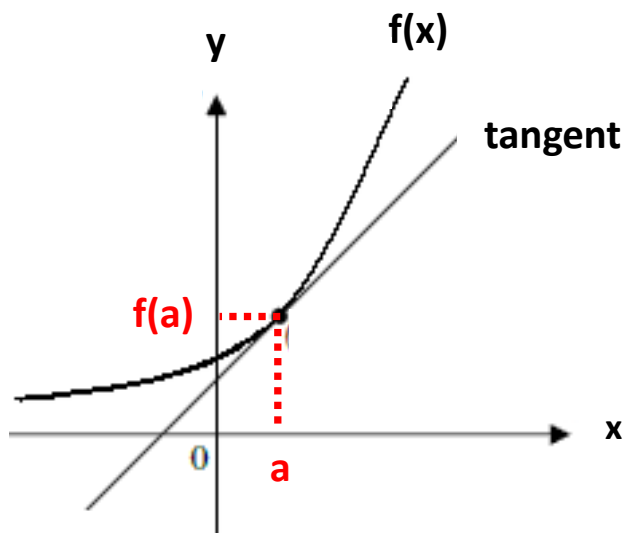
Tolkning: ([deriverte](#), med ord)

$$\frac{df(a)}{dx} = \text{den deriverte til funksjonen } y = f(x) \text{ i punktet } x = a \quad (3.1)$$

$$= \textit{stigningstallet} \text{ til tangenten til grafen i punktet } x = a \quad (3.2)$$

$$= \textit{stigningen} \text{ i punktet } (a, f(a)) \text{ p\u00e5 grafen} \quad (3.3)$$

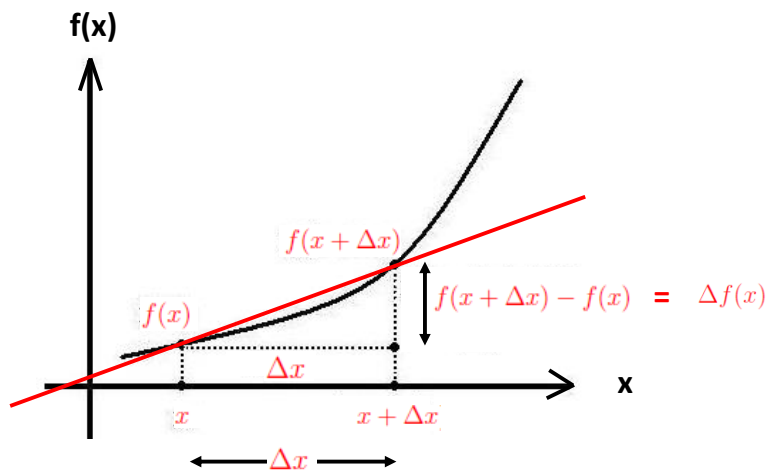
■



Figur 3.2: Den deriverte i punktet $x = a$, dvs. stigningstallet til [tangenten](#) i punktet $x = a$.

Definisjon: ([deriverte](#), teknisk)

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.4)$$



Figur 3.3: Gjennomsnittlig endring.

3.2 Derivasjonsregler

Generell derivasjonsregl: (hovedregel)

$$f(x) = ax^n \Rightarrow \underbrace{\frac{d f(x)}{dx} = n a x^{n-1}}_{\text{hovedregel}}, \quad n \in R \quad (3.5)$$

Fra hovedregelen lign.(3.5) følger det direkte at:

$$a = 1 \text{ og } n = 1 : \quad f(x) = x \Rightarrow \frac{d f(x)}{dx} = 1 \quad (3.6)$$

$$a = 1 \text{ og } n = -1 : \quad f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d f(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{når } x \neq 0 \quad (3.7)$$

$$a = 1 \text{ og } n = 1/2 : \quad f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{d f(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{når } x \neq 0 \quad (3.8)$$

Generelle derivasjonsregler: (bruker kortnotasjonen $f'(x) = \frac{d f(x)}{dx}$)

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \quad (3.9)$$

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) \quad (3.10)$$

$$f(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x) \quad (3.11)$$

$$f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x) \quad (3.12)$$

3.3 Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner

Generelle derivasjonsregler: (produkt- og brøkfunksjoner)

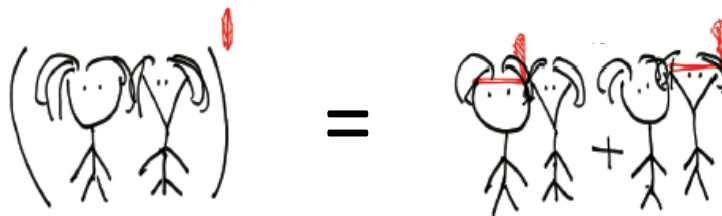
$$f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv' \quad (3.13)$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (3.14)$$

Dette kan også skrives på følgende ekvivalente form:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad (3.15)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \quad (3.16)$$



Figur 3.4: Regneregelen i lign.(3.13) kan huskes via “indianerfjærhuskeregen”.

3.4 Kjernerregelen

Setning: (kjernerregelen)

Dersom vi har en sammensatt funksjon

$$f(x) = g(u(x)) \quad (3.17)$$

hvor

$$u = u(x) \quad (\text{kjernen}) \quad (3.18)$$

er en funksjon av x , så er den deriverte av $f(x)$ gitt ved:

$$f'(x) = g'(u) u' \quad (3.19)$$

hvor $u(x)$ er kjernefunksjonen.

En alternativ måte å skrive denne ligningen på er:

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{d g(u)}{d u} \frac{d u}{d x} \quad (3.20)$$

hvor $u(x)$ er kjernefunksjonen.

■

3.5 Lokale ekstremalpunkt

Definisjon: (lokale ekstremalpunkter , teknisk)

Et punkt x er et lokalt minimumspunkt x dersom det finnes et $\epsilon > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x + d) \quad (3.21)$$

for alle $d \in [x - \epsilon, x + \epsilon]$.

Et punkt x er et lokalt maksimumspunkt x dersom det finnes et $\epsilon > 0$ slik at

$$f(x) \geq f(x + d) \quad (3.22)$$

for alle $d \in [x - \epsilon, x + \epsilon]$.

■

Definisjon: (globale ekstremalpunkter , teknisk)

Et punkt x er et globalt minimumspunkt x dersom det finnes et $\epsilon > 0$ slik at

$$f(x) \leq f(x') \quad (3.23)$$

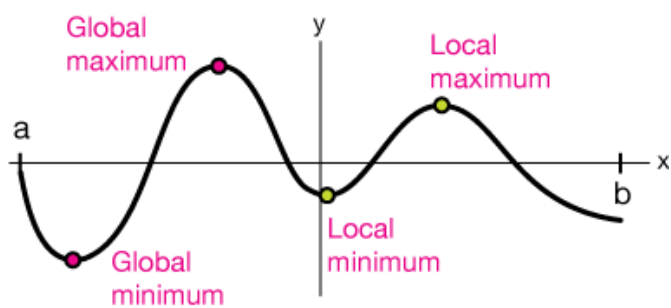
for alle x' .

Et punkt x er et globalt maksimumspunkt x dersom det finnes et $\epsilon > 0$ slik at

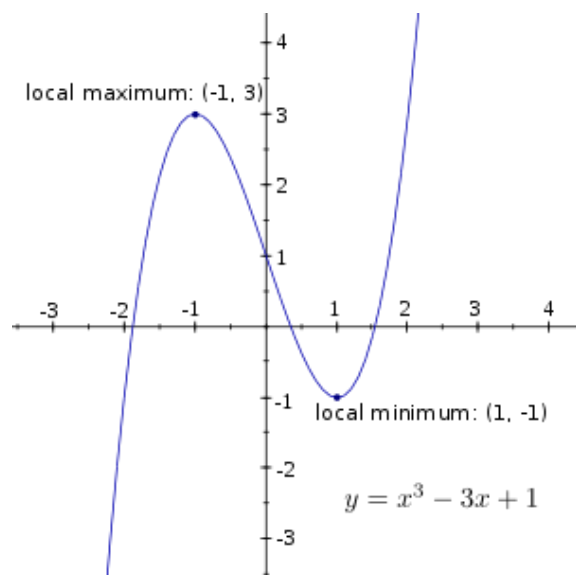
$$f(x) \geq f(x + d) \quad (3.24)$$

for alle x' .

■



Figur 3.5: Globale og lokale ekstremalpunkter. ($x \in [a, b]$)



Figur 3.6: Kun lokale ekstremalpunkter. ($x \in \mathbb{R}$)

3.6 Lokale ekstremalpunkt: 1. derivasjonstesten

Setning: (1. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt)

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt ekstremalpunkt } x = c \quad \Rightarrow \quad \frac{d f(c)}{dx} = 0 \quad (3.25)$$

■

3.7 Lokale ekstremalpunkt: 2. derivasjonstesten

Setning: (2. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt)

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt maksimum } x = c \Rightarrow \frac{df(c)}{dx} = 0 \text{ og } \frac{d^2f(c)}{dx^2} < 0 \text{ (negativ)} \quad (3.26)$$

$$\text{lokalt minimum } x = c \Rightarrow \frac{df(c)}{dx} = 0 \text{ og } \frac{d^2f(c)}{dx^2} > 0 \text{ (positiv)} \quad (3.27)$$

■

Det er flere måter å formulere 2. derivasjonstesten på.

Formuleringen nedenfor er ekvivalent med formuleringen ovenfor:

Setning: (2. derivasjonstesten, *lokalt* ekstremalpunkt)

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig, dvs. sammenhengende, funksjon.

$$\text{lokalt maksimum } x = c \Rightarrow \frac{df(c)}{dx} = 0 \text{ og } \frac{df(c)}{dx} \text{ skifter fortegn fra + til minus -} \quad (3.28)$$

$$\text{lokalt minimum } x = c \Rightarrow \frac{df(c)}{dx} = 0 \text{ og } \frac{df(c)}{dx} \text{ skifter fortegn fra - til minus +} \quad (3.29)$$

■

3.8 Globale ekstremalpunkt

Definisjon: (konveks)

Gitt to punkter x_1 og x_2 .

Korden (linjen) mellom x_1 og x_2 er da definert ved:

$$ax_1 + (1 - a)x_2 \tag{3.30}$$

hvor $0 \leq a \leq 1$. En funksjon er konveks dersom

$f(ax_1 + (1 - a)x_2) \leq af(x_1) + (1 - a)f(x_2)$	(3.31)
---	--------

■

Definisjon: (konkav)

Gitt to punkter x_1 og x_2 .

Korden (linjen) mellom x_1 og x_2 er da definert ved:

$$ax_1 + (1 - a)x_2 \tag{3.32}$$

hvor $0 \leq a \leq 1$. En funksjon er konkav dersom

$f(ax_1 + (1 - a)x_2) \geq af(x_1) + (1 - a)f(x_2)$	(3.33)
---	--------

■

Definisjonen på forrige side er litt teknisk og vanskelig å forstå.
Derfor formulerer vi dem med ord sammen med en figur:

Definisjon: ([konveks](#))

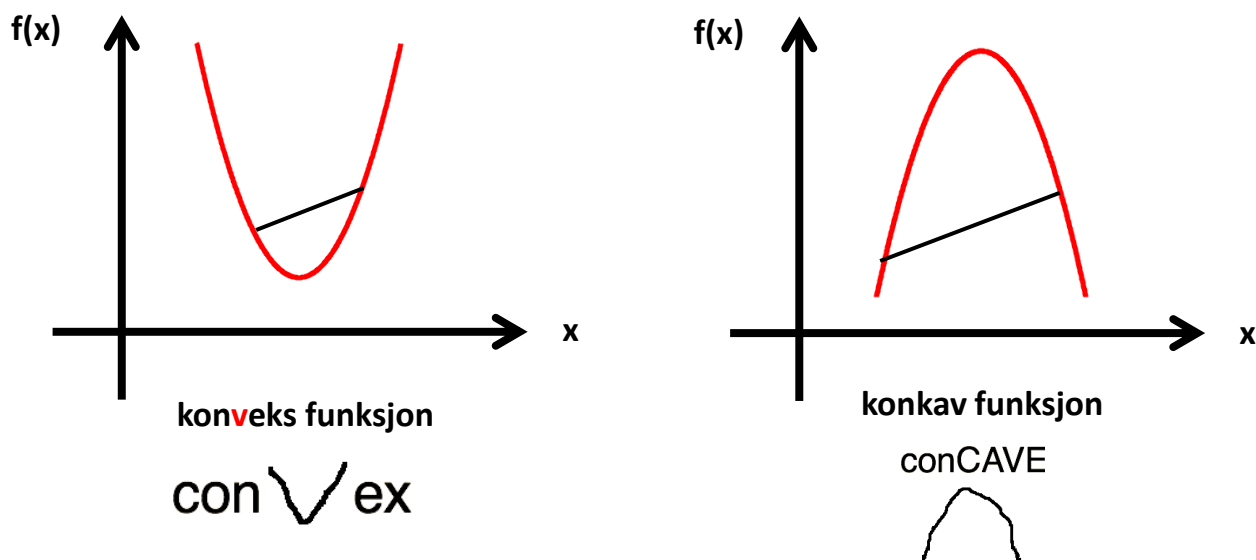
Funksjonen $f(x)$ kalles *konveks* (på et intervall) dersom korden mellom to vilkårlige punkter på grafen alltid ligger på eller **over** grafen til $f(x)$.

■

Definisjon: ([konkav](#))

Funksjonen $f(x)$ kalles *konkav* (på et intervall) dersom korden mellom to vilkårlige punkter på grafen alltid ligger på eller **under** grafen til $f(x)$.

■



Figur 3.7: En **konveks** og en **konkav** funksjon.

Setning 1: (*globalt minimum*)

Anta at $f(x)$ er en konveks funksjon.

Dersom $x = c$ er et lokalt minimum $\left(\frac{df(x)}{dx} = 0\right)$ så er $x = c$ også et globalt minimum.

Anta at $f(x)$ er en konkav funksjon.

Dersom $x = c$ er et lokalt maksimum $\left(\frac{df(x)}{dx} = 0\right)$ så er $x = c$ også et globalt maksimum.

■

Setning 2: (*globalt minimum*)

Anta at $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon.

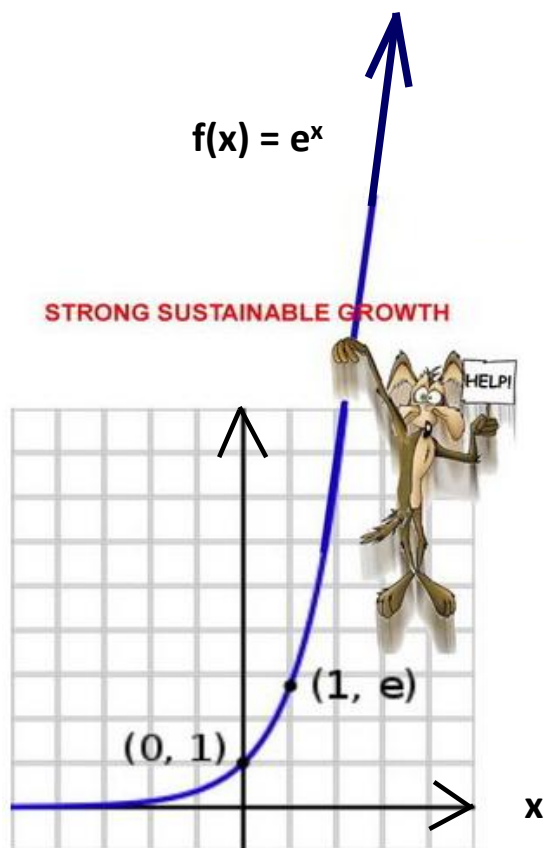
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0 \text{ (positiv eller null) for alle } x \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ er konveks} \quad (3.34)$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0 \text{ (negativ eller null) for alle } x \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ er konkav} \quad (3.35)$$

■

Kapittel 4

Eksponential- og logaritmefunksjoner



Figur 4.1: Eksponentiell vekst.

4.1 Eksponentialfunksjonen

Definisjon: (eksponentialfunksjon)

Eksponentialfunksjon $f(x)$ er definert ved:

$$f(x) = a^x \quad (4.1)$$

hvor x = eksponent, $x \in R$, a = grunntall og $a > 0$.

■

4.2 Tallet e , Eulers tall

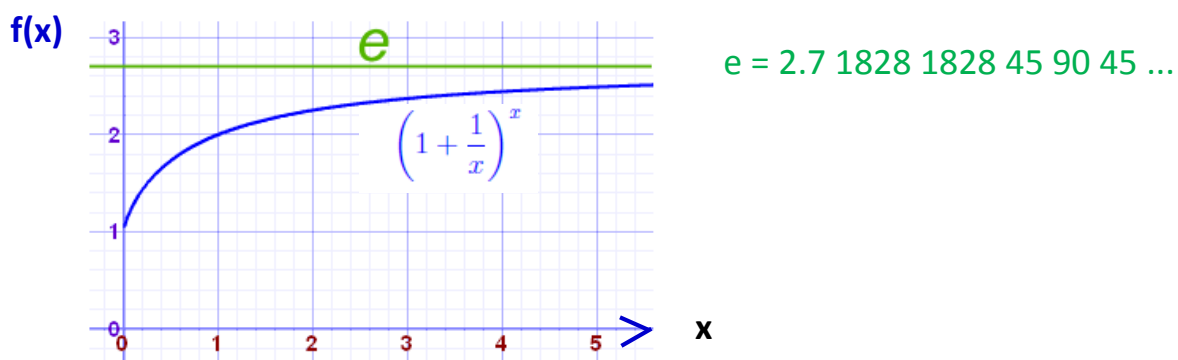
Setning: (Eulers tall e)

Eulers tall e kan bestemmes av en [grenseverdi](#). Denne grenseverdien er:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (4.2)$$

hvor $e = 2.718281828459045\dots$

■



Figur 4.2: Funksjonen $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

4.2.1 Deriverte av e^x

Definisjon: (eksponentialfunksjon $\overbrace{\text{m/grunntall}}^{\text{NB!}} e$)

Eksponentialfunksjon $f(x)$ med grunntall e er definert ved:

$$f(x) = e^x \quad (4.3)$$

hvor x = eksponent, $x \in R$ og grunntall $e = 2.718281828459045\dots$

■

Setning: (eksponentialfunksjon $\overbrace{\text{m/grunntall}}^{\text{NB!}} e$)

Eksponentialfunksjon $f(x) = e^x$ er lik sin egen deriverte:

$$\frac{d f(x)}{dx} = e^x \quad (4.4)$$

hvor x = eksponent, $x \in R$ og grunntall $e = 2.718281828459045\dots$

■

4.2.2 Regneregler for e^x

$$e^x e^y = e^{x+y} \quad (4.5)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (4.6)$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^x e^{-y} = e^{x-y} \quad (4.7)$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad (4.8)$$

$$(e e)^x = e^x e^x = e^{2x} \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{e}{e}\right)^x = \frac{e^x}{e^x} = 1 \quad (4.10)$$

og i tillegg:

$$e^0 = 1 \quad (4.11)$$

$$e^1 = e \quad (4.12)$$

4.3 Logaritmer

Logaritmer er **inverse** funksjoner til eksponentialfunksjoner.

4.3.1 Definisjon

Definisjon: (logaritmen m/ e som grunntall)

Logaritmen til et tall x er den eksponenten vi må opphøye Eulers tall e i for å få x :

$$e^{\ln x} = x \quad (4.13)$$

altså $\ln(x)$ = den naturlige logaritmen = $\underbrace{\text{det tallet vi må opphøye } e \text{ i for å få } x}_{\text{NB!}}$.

■

4.3.2 Regneregler

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad a, b > 0 \quad (4.14)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad a, b > 0 \quad (4.15)$$

$$\ln(a^p) = p \ln a \quad a > 0 \quad (4.16)$$

og i tillegg:

$$\ln 1 = 0 \quad (4.17)$$

$$\ln e = 1 \quad (4.18)$$

$$\ln e^x = x \quad (4.19)$$

$$e^{\ln x} = x, \quad x > 0 \quad (4.20)$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad a, b > 0 \quad (4.21)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad a, b > 0 \quad (4.22)$$

$$\log(a^p) = p \log a \quad a > 0 \quad (4.23)$$

og i tillegg:

$$\log 1 = 0 \quad (4.24)$$

$$\log 10 = 1 \quad (4.25)$$

$$\log 10^x = x \quad (4.26)$$

$$10^{\log x} = x, \quad x > 0 \quad (4.27)$$

NB:

- Det finnes *ingen enkle* regler for $\log(a + b)$ eller $\log(a - b)$.
- $\log x$ er bare definert for **positive** verdier av x .

4.4 Deriverte av $\ln x$

Setning: (deriverte av $\ln x$)

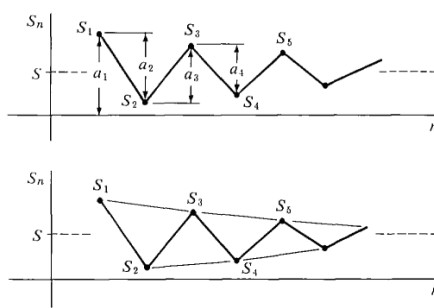
Den deriverte av $f(x) = \ln x$ er:

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad (4.28)$$

■

Kapittel 5

Følger og rekker



Figur 5.1: Følger og rekker.

5.1 Følger og rekker

Definisjon: (følge)

En følge er en funksjon f :

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow M \quad (5.1)$$

fra mengden av positive naturlige tall $\mathbb{N}^+ = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$ til en vilkårlig mengde M .

■

Følger kan bestå av tall, punkter, vektorer, funksjoner eller andre matematiske objekter.

Definisjon: (rekke)

En rekke er summen av leddene i en følge.

■

5.1.1 Regneregler for summasjon

Setning: (regneregler for summetegn)

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + n c \quad (5.4)$$

hvor c er en konstant.



5.2 Aritmetiske følger og rekker

Definisjon: (aritmetisk følge)

En aritmetisk følge er en følge der differansen d mellom et tall a_i og det neste tallet a_{i+1} er konstant:¹

a_1 $=$ a	(startledd)	(5.5)
a_{i+1} $=$ a_i $+$ d	$i = 1, 2, 3, \dots$	(5.6)

hvor $d =$ konstant og kalles differens.



Fra denne definisjonen følger at:

a_n $=$ $a + (n - 1)d$	(5.7)
--	-------

for en aritmetisk følge.

¹En aritmetisk rekke gjenspeiler en prosess som beveger seg fremover, typisk i tid.

5.2.1 Sum av en aritmetiske rekke

Setning: (sum av ARITMETISK rekke)

Anta at vi har den aritmetiske følgen

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (5.8)$$

$$a_{i+1} = a_i + d \quad (5.9)$$

hvor $d = \text{konstant}$. Summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (5.10)$$

av den tilhørende aritmetiske rekken er da:

$$S_n = n \left(a + \frac{(n-1)d}{2} \right) \quad (5.11)$$

■

5.3 Geometriske rekker

Definisjon: (geometrisk følge)

En følge er en **geometrisk** dersom et ledd er lik det foregående **multiplisert** med en *konstant*, dvs.

a_1	$=$	a	(startledd)	(5.12)
a_{i+1}	$=$	$k a_i$	$i = 1, 2, 3, \dots$	(5.13)

hvor k = konstant og kalles *kvotient*.

■

Fra denne definisjonen følger at:

a_i	$=$	$k^{i-1} a_1$	(5.14)
-------	-----	---------------	--------

for en **geometrisk** rekke, hvor $i = 1, 2, 3, \dots$

5.3.1 Sum av en geometriske rekke

Setning: (sum av **GEOMETRISK** rekke, **endelig** n) ²

Anta at vi har den geometriske følgen

$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (5.15)$$

$$a_{i+1} = k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.16)$$

hvor $k = \text{konstant}$ og kalles kvotient. Summen

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (5.17)$$

av den tilhørende geometriske rekken er da: ³

$$S_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad (k \neq 1) \quad (5.19)$$

■

²Sammenlign denne setningen med den på side 67.

³Dersom $k = 1$, dvs. alle leddene er like, så er summen:

$$S_n = a_1 n \quad (k = 1) \quad (5.18)$$

5.4 Konvergente og divergente rekker: $n \rightarrow \infty$

Definisjon: (konvergens og divergens)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \Leftrightarrow \quad \text{rekken konvergerer} \quad (5.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ eksisterer ikke} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rekken divergerer} \quad (5.21)$$

■

5.5 Geometriske rekker: $n \rightarrow \infty$

Setning: (sum av **GEOMETRISK** rekke, uendelig n) ⁴

Gitt en geometrisk følge

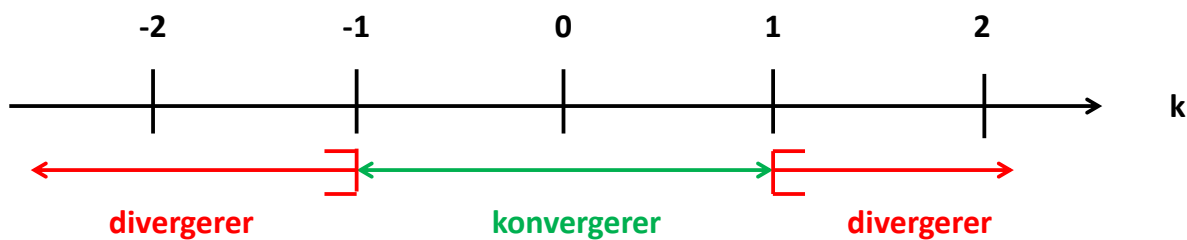
$$a_1 = a \quad (\text{startledd}) \quad (5.22)$$

$$a_{i+1} = k a_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.23)$$

Dersom $-1 < k < 1$ så er summen av rekken $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ gitt ved: ⁵

$$S = \frac{a}{1 - k}, \quad -1 < k < 1 \quad (5.24)$$

■



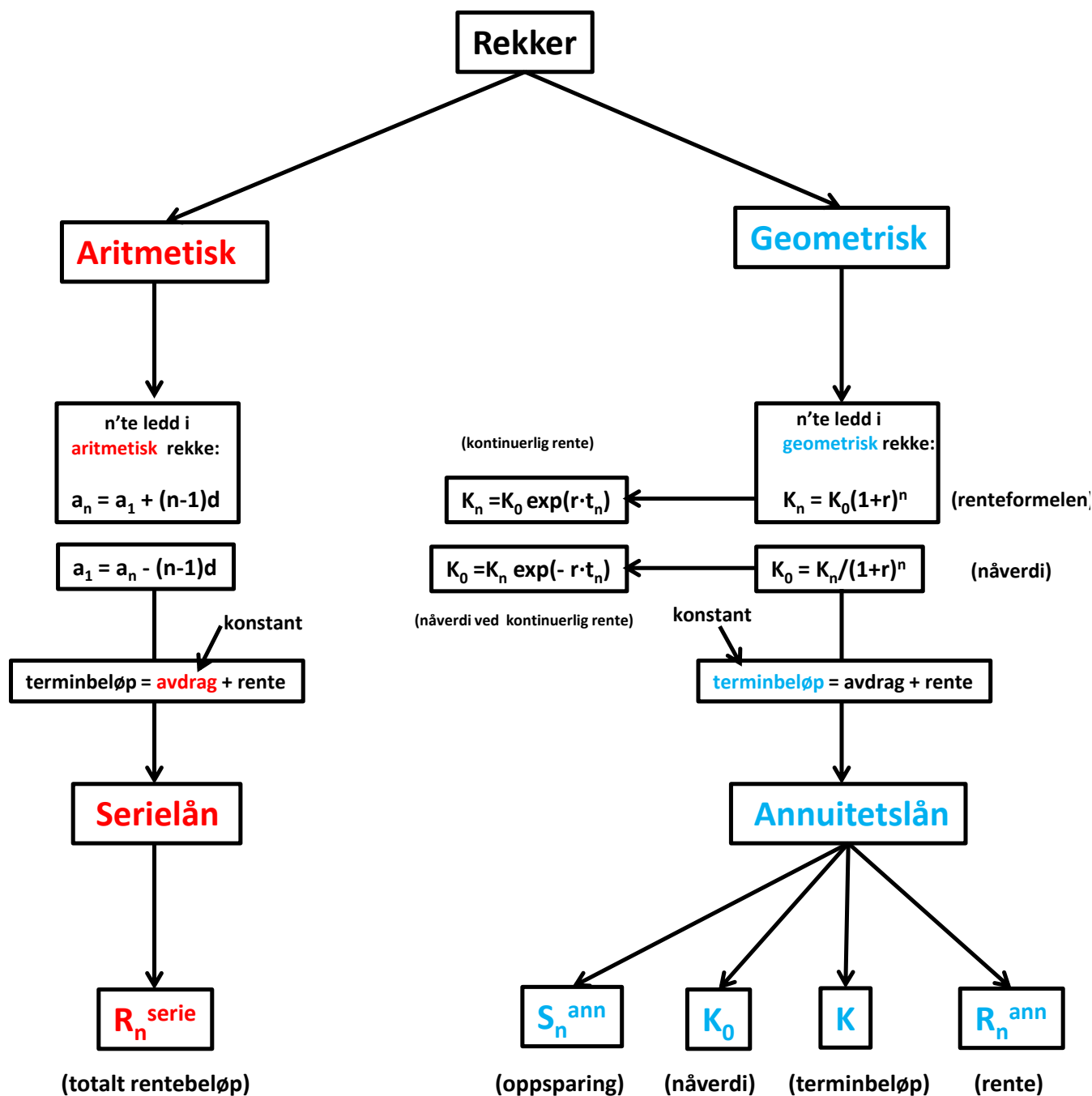
Figur 5.2: Divergens og konvergens.

⁴Sammenlign denne setningen med den på side 65.

⁵For $k \leq -1$ eller $k \geq 1$ **DIVERGERER** den uendelige summen.

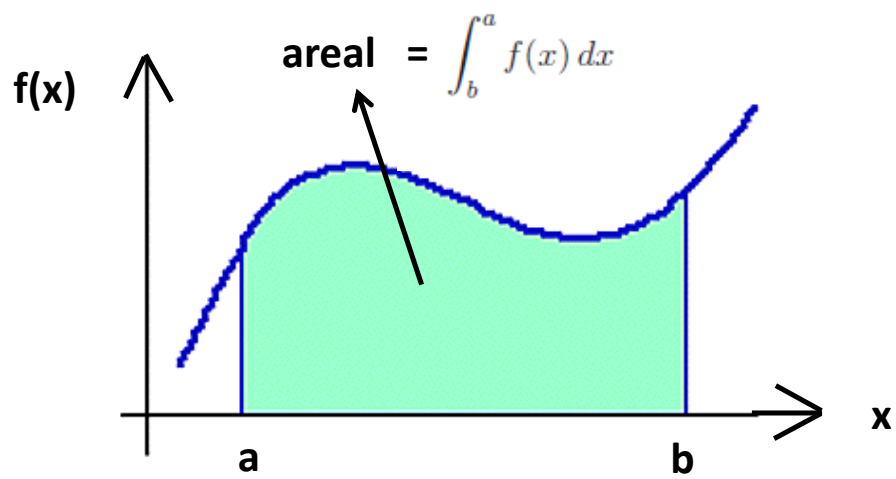
5.6 Oversikt finansmatematikk

Rekker og følger spiller en viktig rolle i finansmatematikk, dvs. pengenes tidsverdi. Figuren nedenfor viser en oversikt over hva vi skal ta opp som tema i dette avsnittet om finansmatematikk.



Kapittel 6

Integrasjon



Figur 6.1: Integral.

6.1 Definisjon av integral

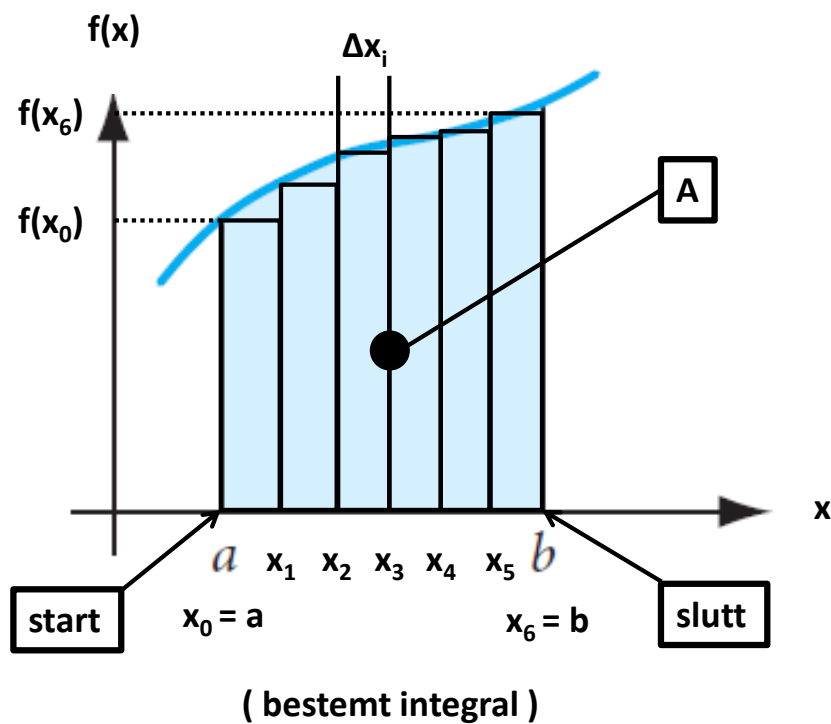
Definisjon: (integral)

$$A = \text{SUM av } \infty \text{ mange små rektangel under grafen } f(x) \text{ mellom } a \text{ og } b \quad (6.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (6.2)$$

$$= \int_a^b f(x) dx \quad (6.3)$$

■



Figur 6.2: Arealet A .

6.2 Fundamentalsetningen for integral

Setning: (*fundamentalsetningen for integral*)

Anta at $f(x)$ er en kontinuertlig funksjon. Da er:

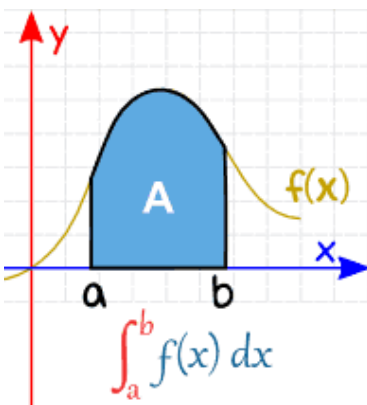
$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad (6.4)$$

hvor

$$\frac{d F(x)}{dx} = f(x) \quad (6.5)$$

altså $F(x)$ = antideriverte av $f(x)$.

■



Figur 6.3: Integral.

6.3 Antideriverte og integral

Definisjon: (antideriverte)

La $f(x)$ være en funksjon. Hvis $F(x)$ er en funksjon slik at

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (6.6)$$

sier vi at $\underbrace{F(x)}_{\text{antiderivert}}$ er en antideriverte til $f(x)$.

■

6.3.1 Noen regneregler

For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ gjelder at:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a \leq c \leq b) \quad (6.7)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (6.8)$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (6.9)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k = \text{konstant}) \quad (6.10)$$

Noen regneregler for antiderivasjon:

$$\int k dx = kx + C \quad (6.11)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (6.12)$$

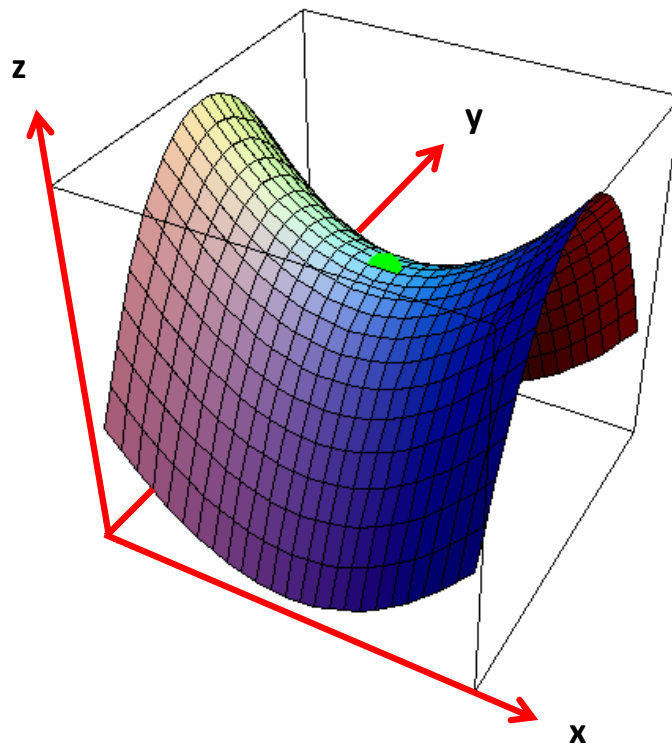
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad x \neq 0 \quad (6.13)$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C \quad x+a \neq 0 \quad (6.14)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C \quad (6.15)$$

Kapittel 7

Funksjoner av flere variabler



Figur 7.1: Sadelpunkt.

7.1 Funksjoner av to variable

Definisjon: (funksjon av **to** variable)

$$z = f(x, y) = \text{funksjon av } x \text{ og } y \text{ hvor det for hver verdi av tallparet } (x, y) \text{ kun finnes en og bare en verdi for } f(x, y) \quad (7.1)$$

hvor x og y ofte kalles de uavhengige variabelene eller bare *argumentet* og $z = f(x, y)$ kalles ofte funksjonsverdien.



Definisjon: (**definisjonsmengde** og **verdimengde**)

$$\text{definisjonsmengde} = \text{alle mulige } \underline{\text{tillatte}} \text{ verdier av } x \text{ og } y \quad (7.2)$$

$$\text{verdimengde} = \text{alle mulige funksjonsverdier til } z = f(x, y) \text{ tilhørende alle } \underline{\text{tillatte}} \text{ verdier av } x \text{ og } y \quad (7.3)$$



7.2 Nivåkurver

Definisjon: (nivåkurve)

Gitt funksjonen $z = f(x, y)$ av to variable x og y . Nivåkruven i høyde c over (eller under) xy -planet kan da skrives:

$$c = f(x, y) \quad (7.4)$$

Dette er skjæringskurven mellom grafen f og det horisontrale planet $z = c$.



7.3 Partielle deriverte

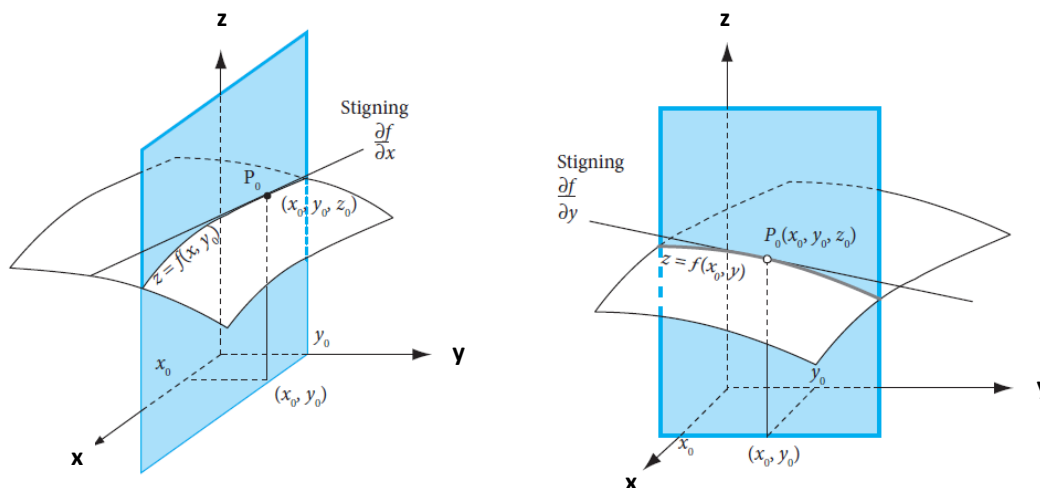
Definisjon: ([partiell](#) deriverte, deriverte med to variabler, med ord) ¹

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \text{den deriverte til funksjonen } z = f(x, y) \text{ mhp. } x \quad (7.5)$$

$$\text{i punktet } x = x_0 \text{ og } y = y_0 \quad (7.6)$$

$$= \text{stigningstallet til tangenten til grafen i punktet } x = x_0 \text{ og } y = y_0 \text{ i } x\text{-retning} \quad (7.7)$$

■



Figur 7.2: Venstre: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. Høyre: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

¹mhp. = med hensyn på

Definisjon: ([partiell](#) deriverte, teknisk)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (7.9)$$

■

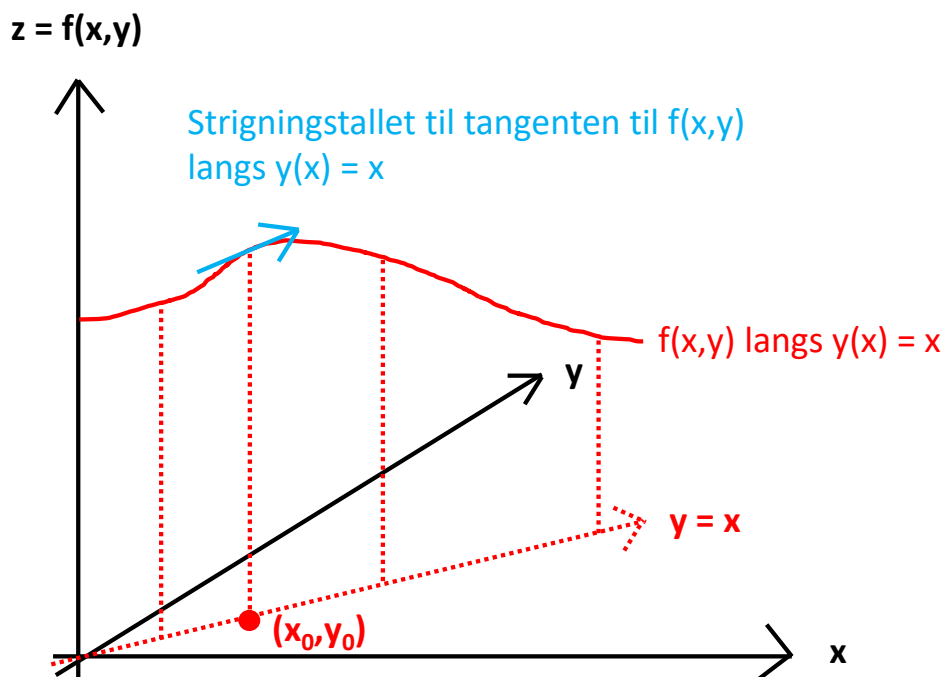
7.4 Retningsderivert

Definisjon: ([retningsderiverte](#))

Den [retningsderiverte](#), dvs. stigningstallet, til en funksjon $f = f(x, y)$ langs retningen a enheter langs x -aksen og b enheter langs y -aksen er definert ved:

$$\text{retningsderivert} = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} \quad (7.10)$$

■



Figur 7.3: Retningsderivert.

7.5 Maksimum og minimum

Definisjon: (stasjonært punkt)

Punktet (x_0, y_0) til funksjonen $f(x, y)$ med to variabler kalles stasjonært dersom følgende betingelser er oppfylt:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad (7.11)$$

■

Setning: (**klassifisering** av stasjonære punkter)

La $f(x, y)$ være en funksjon som har kontinuerlige 1. og 2. ordens deriverte i hele sitt definisjonsområde D_f . La videre:

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial \textcolor{red}{x}^2} \quad (7.12)$$

$$B \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial \textcolor{red}{x} \partial \textcolor{blue}{y}} \quad (7.13)$$

$$C \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial \textcolor{blue}{y}^2} \quad (7.14)$$

Det stasjonære punktet (x_0, y_0) bestemt av:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \textcolor{red}{x}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \textcolor{red}{y}} = 0 \quad (7.15)$$

er da klassifisert på følgende måte:

$$\textcolor{red}{AC - B^2 > 0} \text{ og } \textcolor{red}{A > 0} : \quad (x_0, y_0) \text{ er et } \textcolor{blue}{\text{minimumspunkt}} \quad (7.16)$$

$$\textcolor{red}{AC - B^2 > 0} \text{ og } \textcolor{red}{A < 0} : \quad (x_0, y_0) \text{ er et } \textcolor{blue}{\text{maksimumspunkt}} \quad (7.17)$$

$$\textcolor{red}{AC - B^2 < 0} \text{ og } \textcolor{red}{A < 0} : \quad (x_0, y_0) \text{ er et } \textcolor{blue}{\text{sadelpunkt}} \quad (7.18)$$

$$\textcolor{red}{AC - B^2 = 0} \text{ og } \textcolor{red}{A < 0} : \quad \text{testen fungerer ikke} \quad (7.19)$$

■

7.6 Maksimering/minimering under bibetingelser

Setning: (maks/min med **Lagrange multiplikatorer**)

Funksjonen $f(x, y)$ skal maksimeres/minimeres under bibetingelsen $g(x, y) = 0$.

Dette optimaliseringsproblemet kan løses på følgende måte:

- 1) Skriv opp **Lagrange-funksjonen**:

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (7.20)$$

hvor λ = Lagrange-multiplikatoren, en ukjent konstant.

- 2) Finn de **stasjonære punktene** til $L(x, y; \lambda)$, dvs. regn ut:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \quad (7.21)$$

- 3) De 3 ligningene:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0 \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0 \quad (7.23)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (7.24)$$

danner et ligningssystem som kan løses mhp. x og y .

■