(versjon 03)

LØSNING: Oppgavesett nr. 6

"*MAT100 Matematikk*", 2018

Oppgave 1: (antiderivert)

a) Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = ax^n$ er:

$$\underline{\underline{F(x) \;=\; \frac{a}{n+1}\, x^{n+1} + c}} \tag{1}$$

hvor c er en konstant.
Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(1). [1]

Når vi har den antideriverte $F(x)$ av funksjon $f(x)$ så kan vi regne ut integralet $\int_0^1 f(x)\,dx$ via *fundamentalsetningen* for integral: [2]

$$\underline{\underline{\int_{0}^{1} f(x)\,dx}} \;=\; F(1) - F(0) \tag{2}$$

$$= \frac{a}{n+1}1^{n+1} + \cancel{c} \;-\; \frac{a}{n+1}0^{n+1} - \cancel{c} \;=\; \underline{\underline{\frac{a}{n+1}}} \tag{3}$$

[1]Husk **hovedregelen** for derivasjon, dvs. $\frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$, dvs. man går "èn etasje ned". Antiderivasjon er å gå "èn etasje opp".

[2]Fra lign.(3) ser vi at konstanten c kansellerer når vi har et såkalt bestemt integral, dvs. et integral med en spesifikk øvre og nedre grense. For kompletthets skyld har vi med utregningene i dette løsningsforslaget.

b) Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = a(n+1)x^{n-1}$ er:

$$\underline{\underline{F(x)}} \;=\; a(n+1)\,\frac{1}{n}\,x^n + c \;=\; \underline{\underline{\frac{a(n+1)}{n}\,x^n + c}} \tag{4}$$

hvor c er en konstant.
Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(4). [3]

Fundamentalsetningen for integral gir:

$$\underline{\underline{\int_0^1 f(x)\,dx}} \;=\; F(1) - F(0) \tag{5}$$

$$= \;\frac{a(n+1)}{n}1^n + \cancel{c} \;-\; \frac{a(n+1)}{n}0^n - \cancel{c} \;=\; \underline{\underline{\frac{a(n+1)}{n}}} \tag{6}$$

c) Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = k$ er:

$$\underline{\underline{F(x) \;=\; kx + c}} \tag{7}$$

Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(7).

Fundamentalsetningen for integral:

$$\underline{\underline{\int_0^1 f(x)\,dx}} \;=\; F(1) - F(0) \tag{8}$$

$$= \;k\cdot 1 + \cancel{c} \;-\; k\cdot 0 - \cancel{c} = \;\underline{\underline{k}} \tag{9}$$

[3] Regn gjerne ut den deriverte av lign.(4) på kladd.

d) Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ er:

$$\underline{\underline{F(x) \;=\; \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + c}} \tag{10}$$

Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(10). [4]

Via *fundamentalsetningen* for integral:

$$\underline{\underline{\int_0^1 f(x)\,dx}} \quad = \quad F(1) - F(0) \tag{11}$$

$$= \quad \frac{1}{5}1^5 - \frac{2}{4}1^4 + \frac{1}{3}1^3 + \cancel{c} \;-\; \left(\frac{1}{5}0^5 - \frac{2}{4}0^4 + \frac{1}{3}0^3 + \cancel{c}\right) \tag{12}$$

$$= \quad \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \quad = \quad \frac{1}{\underline{\underline{30}}} \qquad (= \;\; 0.00333...) \tag{13}$$

[4] Regn gjerne ut den deriverte av lign.(10) på kladd.

e) Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ er:

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} = \frac{1}{3/2}x^{3/2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}x^{3/2}}} \tag{14}$$

Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(14). [5]

Via *fundamentalsetningen* for integral:

$$\underline{\underline{\int_0^1 f(x)\,dx}} = F(1) - F(0) \tag{15}$$

$$= \frac{2}{3}1^{3/2} + \cancel{c} - \frac{2}{3}0^{3/2} - \cancel{c} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \tag{16}$$

f) Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$ er:

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{1}{-1/2+1}(1+x)^{-1/2+1} = 2(1+x)^{1/2} = \underline{\underline{2\sqrt{x+1}}} \tag{17}$$

Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(17).

Via *fundamentalsetningen* for integral:

$$\underline{\underline{\int_0^1 f(x)\,dx}} = F(1) - F(0) \tag{18}$$

$$= 2\sqrt{1+1} + \cancel{c} - 2\sqrt{1+0} - \cancel{c} = \underline{\underline{2(\sqrt{2}-1)}} \quad (= 0.8284) \tag{19}$$

[5]Regn gjerne ut den deriverte av lign.(14) <u>på kladd</u>.

g) Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$ er:

$$\underline{\underline{F(x) \; = \; \ln(x+1) + c}} \tag{20}$$

Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(20). [6]

Via *fundamentalsetningen* for integral:

$$\underline{\underline{\int_0^1 f(x)\,dx}} \quad = \quad F(1) - F(0) \tag{24}$$

$$= \quad \ln(1+1) + \cancel{c} \; - \; \underbrace{\ln(0+1)}_{=\,0} - \cancel{c} \quad = \quad \underline{\underline{\ln(2)}} \qquad (= 0.6931) \tag{25}$$

siden $\ln(1) = 0$.

---

[6]Man kan vise at den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$ er gitt ved lign.(20) ved å "*gå baklengs*". Vi bruker kjerneregelen og deriverer lign.(20). Ytre funksjon:

$$g(u) = \ln u \qquad \text{(ytre funksjon)} \tag{21}$$

hvor

$$u = x + 1 \qquad \text{(kjernen)} \tag{22}$$

Deriverer via kjerneregelen:

$$\underline{\frac{d\,F(x)}{dx}} \;=\; \frac{d}{dx}\Big(\ln(x+1) + c\Big) \;=\; \frac{d\,g(u)}{du}\frac{du}{dx} + 0 \;=\; \frac{d}{du}\Big(\ln u\Big)\frac{du}{dx} \;=\; \frac{1}{u}\cdot 1 \;=\; \overbrace{\underline{\frac{1}{x+1}}}^{=\,f(x)} \tag{23}$$

Disse mellomregningene behøver du ikke ha med i din innlevering. Men gjør gjerne litt regning på kladd for deg selv.

h) Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = e^{2x}$ er:

$$\underline{\underline{F(x) \;=\; \frac{1}{2}e^{2x}}} \tag{26}$$

Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(26). [7]

Via *fundamentalsetningen* for integral:

$$\underline{\underline{\int_0^1 f(x)\,dx}} \quad = \quad F(1) - F(0) \tag{27}$$

$$= \quad \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} + \cancel{c} \;-\; \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} - \cancel{c} \quad = \quad \underline{\underline{\frac{1}{2}\Big(e^2 - 1\Big)}} \qquad (= 3.1945) \tag{28}$$

siden $e^0 = 1$.

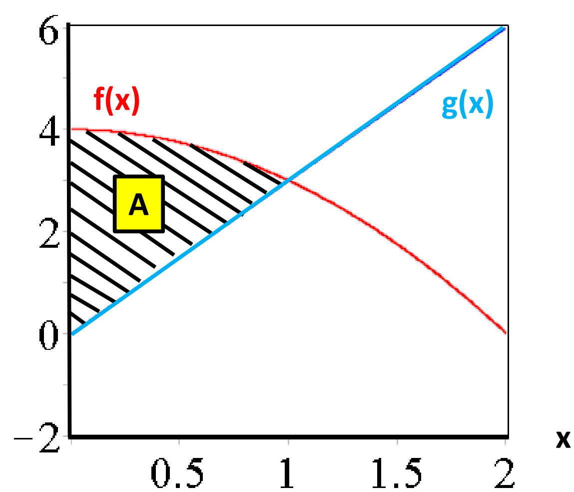
■

[7] Regn gjerne ut den deriverte av lign.(26) på kladd.

Oppgave 2: (integrasjonens fundamentalteorem - areal under grafen)

a) Lager verditabell og plotter $f(x) = 4 - x^2$ og $g(x) = 3x$:

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	4	3.75	3	1.75	0
g(x)	0	1.5	3	4.5	6



Figur 1: Arealet A.

Skjæringspunktet til $f(x)$ og $g(x)$ er:

$$f(x) = g(x) \tag{29}$$

$$4 - x^2 = 3x \tag{30}$$

$$0 = x^2 + 3x - 4 \tag{31}$$

Fra lign.(31) ser vi at vi må finne nullpunktene til en 2. gradsligning.
Bruker ABC-formelen:

$$\underline{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{32}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \underline{\frac{-3 \pm 5}{2 \cdot 1}} \tag{33}$$

som gir:

$$x = 1 \quad , \quad x = -4 \tag{34}$$

Men siden vi skal ha $x \geq 0$ så må vi velge:

$$\underline{x = 1} \tag{35}$$

Arealet A som vist i figur 1 blir dermed:

$$\underline{A} = \int_0^1 \Big(f(x) - g(x) \Big) = \underline{\int_0^1 \overbrace{\Big(4 - x^2 - 3x \Big)}^{= \, h(x)}} \tag{36}$$

Den antidertiverte $\overbrace{H(x)}^{\text{anti}}$ av $h(x) = 4 - x^2 - 3x$ er:

$$\underline{H(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + c} \tag{37}$$

Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(85). [8]

[8]Regn gjerne ut den deriverte av lign.(85) på kladd.

Via *fundamentalsetningen* for integral:

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{A}} &= \int_0^1 \overbrace{\left(4 - x^2 - 3x\right)}^{=\ h(x)} && (38) \\
&= H(1) - H(0) && (39) \\
&= 4 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + \cancel{c} \quad - \quad \left(4 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + \cancel{c}\right) && (40) \\
&= 4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \quad - \quad 0 && (41) \\
&= \underline{\underline{\frac{13}{6}}} \qquad (= 2.1667...) && (42)
\end{aligned}
$$

b) Arealet A:

$$\underline{A} \;=\; A_1 \;+\; A_2 \tag{43}$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(x - \frac{x}{8}\right)}_{=\,\frac{8x}{8} - \frac{x}{8} \,=\, \frac{7x}{8}} dx \;+\; \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right) dx \tag{44}$$

$$= \underline{\frac{7}{8}\int_0^1 x\, dx \;+\; \int_1^2 \left(x^{-2} - \frac{x}{8}\right) dx} \tag{45}$$

Den antidertiverte $\overbrace{P(x)}^{\text{anti}}$ av $p(x) = x$ er:

$$\underline{P(x) \;=\; \frac{1}{2}x^2 + c} \tag{46}$$

Den antidertiverte $\overbrace{Q(x)}^{\text{anti}}$ av $q(x) = x^{-2} - \frac{x}{8}$ er:

$$\underline{Q(x)} = -x^{-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}x^2 + c' \;= \underline{-\frac{1}{x} - \frac{1}{16}x^2 + c'} \tag{47}$$

Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(46) og lign.(47). [9]

Det kan være mest ryddig å regne ut A_1 for seg først, og deretter A_2 for seg etterpå.

[9] Regn gjerne ut den deriverte av lign.(46) og lign.(47) på kladd.

i) <u>Areal A_1</u>:

$$\underline{A_1} = \frac{7}{8}\int_0^1 x\,dx \tag{48}$$

$$= \frac{7}{8}\Big(P(1) - P(0)\Big) \tag{49}$$

$$= \frac{7}{8}\Big(\frac{1}{2}1^2 + \cancel{c} - \frac{1}{2}0^2 - \cancel{c}\Big) \tag{50}$$

$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2} \tag{51}$$

$$= \underline{\frac{7}{16}} \tag{52}$$

ii) <u>Areal A_2</u>:

$$\underline{A_2} = \int_1^2 \left(x^{-2} - \frac{x}{8}\right) dx \tag{53}$$

$$= Q(2) - Q(1) \tag{54}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{16}2^2 + \cancel{c}\right) - \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{16}1^2 + \cancel{c}\right) \tag{55}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{4}{16} + 1 + \frac{1}{16}\right) \tag{56}$$

$$= \underline{\frac{5}{16}} \tag{57}$$

Det totale arealet A er dermed:

$$\underline{\underline{A}} = A_1 + A_2 \tag{58}$$

$$= \frac{7}{16} + \frac{5}{16} = \frac{7+5}{16} = \frac{12}{16} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \qquad (= 0.75) \tag{59}$$

$\blacksquare$

Oppgave 3: (areal under graf , *SCM200 Lager- og produksjonsstyring*)

a) Setter lagernivået $i(t) = (a-D)t + i_0$ inn i $K(T) \;=\; \int_0^T c(t)\,dt$: ($c(t) = h\,i(t)$)

$$\underline{\underline{K(T)}} \;=\; \int_0^T \overbrace{h\,i(t)}^{=\,c(t)}\,dt \tag{60}$$

$$= \; h\int_0^T \Big((a-D)t + i_0 \Big)\,dt \tag{61}$$

$$= \; h\,(a-D)\int_0^T t\,dt \;+\; h\,i_0\int_0^T 1\,dt \tag{62}$$

$$= \; h\,(a-D)\int_0^T t\,dt \;+\; h\,i_0\int_0^T 1\,dt \tag{63}$$

$$= \; h\,(a-D)\left(\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{2}0^2\right) \;+\; h\,i_0\Big(T-0\Big) \tag{64}$$

$$= \; \underline{\underline{h\,(a-D)\,\frac{1}{2}T^2 \;+\; h\,i_0\,T}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{65}$$

fordi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^2\right) \;=\; t \tag{66}$$

og

$$\frac{d}{dt}\Big(t\Big) \;=\; 1 \tag{67}$$

b) Det tar $T = 5000$ timer før tanken er tom.
Bruker formelen i lign.(65):

$$\underline{K(5000)} \overset{\text{lign.(65)}}{=} h(a-D)\frac{1}{2}T^2 + hi_0 T \tag{68}$$

$$= \Big(0.04 \cdot (1.5 - 3.5)\frac{1}{2}5000^2 + 0.04 \cdot 10\,000 \cdot 5000\Big) \text{ NOK} \tag{69}$$

$$= \underline{1\,000\,000 \text{ NOK}} \tag{70}$$

Den totale lagerkostanden som påløper før tanken er tom er $\underline{\underline{K(5000) = 1\,000\,000 \text{ NOK}}}$, altså 1 millioner NOK.

c) Den totale lagerkostnaden $K(T_0)$ kan regnes ut via geometri:

$$\underline{\underline{K(T_0)}} = \int_0^{T_0} c(t)\, dt \tag{71}$$

$$= \text{det blå arealet som vist i figuren i oppgaven} \tag{72}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \text{bredde} \cdot \text{høyde} \tag{73}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 400 \text{ NOK} = \underline{\underline{1\,000\,000 \text{ NOK}}} \tag{74}$$

som stemmer med svaret i oppgave **3b**, dvs. stemmer med lign.(70).

d) Setter lagernivået $i(t) = i_0\, e^{-bt}$ inn i $K(T) \; = \; \int_0^T c(t)\, dt$:

$$\underline{\underline{K(T)}} \;=\; h \int_0^T i(t)\, dt \tag{75}$$

$$= \; h \int_0^T i_0\, e^{-bt}\, dt \tag{76}$$

$$= \; h\, i_0 \int_0^T e^{-bt}\, dt \tag{77}$$

$$= \; h\, i_0 \Big(-\frac{1}{b} e^{-bT} - \Big(-\frac{1}{b} e^{-b\cdot 0} \Big) \Big) \tag{78}$$

$$= \; -\frac{h\, i_0}{b} \Big(e^{-bT} - 1 \Big) \tag{79}$$

$$= \; \underline{\underline{\frac{h\, i_0}{b} \Big(1 - e^{-bT} \Big)}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{80}$$

fordi

$$\frac{d}{dt} \Big(e^{-bt} \Big) \;=\; -\frac{1}{b}\, e^{-bt} \tag{81}$$

e) Det tar $T = 5000$ timer før tanken er tom.
Bruker formelen i lign.(80):

$$\underline{K(5000)} \stackrel{\text{lign.(80)}}{=} \frac{h\, i_0}{b}\left(1 - e^{-bT}\right) \tag{82}$$

$$= \frac{0.04 \cdot 10\,000}{0.0005}\left(1 - e^{-0.005 \cdot 5000}\right) \ \text{NOK} \tag{83}$$

$$= \underline{734\,332 \ \ \text{NOK}} \tag{84}$$

Den totale lagerkostanden som påløper etter $T_0 = 5000$ timer er $\underline{\underline{K(5000) \ = \ 734\,332 \ \text{NOK}}}$,

Kommentar: [10]

At denne lagerkostanaden er mindre enn lagerkostanden i oppgave **3b** ser vi direkte fra figuren i oppgaven siden arealet under grafen mindre enn den lineære kostnadsfunksjonen.

■

[10] Dette er bare en ekstrakommentar som man ikke behøver å ha med på innleveringen.

Oppgave 4: (sannsynlighetsregning)

a) Siden den antideriverte $\overbrace{F(\tau)}^{\text{anti}}$ av $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$ er:

$$\underline{F(\tau) \;=\; -e^{-\lambda\tau}} \tag{85}$$

gir *fundamentalsetningen* for integral at:

$$\underline{\underline{\text{Prob}(\tau_2 \leq 40)}} \;=\; \int_0^{40} \lambda e^{-\lambda\tau}\, d\tau \tag{86}$$

$$= \; F(40) - F(0) \tag{87}$$

$$= \; -e^{-\lambda\cdot 40} - (-e^{-\lambda\cdot 0}) \tag{88}$$

$$= \; 1 - e^{-40\lambda} \tag{89}$$

$$= \; 1 - e^{-40\cdot 0.00076} \tag{90}$$

$$\approx \; \underline{\underline{0.03}} \tag{91}$$

b) Ligningen

$$\text{Prob}(\tau_2 \leq 40) \;=\; 0.03 \tag{92}$$

sier at

sannsynligheten for at to påfølgende akuttsituasjoner
inntreffer innen 40 minutter er 0.03, dvs. ved 3 av 100 akuttsituasjoner

c) Oppgitt i oppgaven:

$$\text{Prob}(\tau_3 \leq 40) \;=\; u(40)v(40) - u(0)v(0) - \int_0^{40} u'(\tau)v(\tau)\,d\tau \tag{93}$$

hvor det også var oppgitt av:

$$u(\tau) = \lambda^2\tau \tag{94}$$
$$v'(\tau) = e^{-\lambda\tau} \tag{95}$$

Vi deriverer $u(\tau)$ og antideriverer $v'(\tau)$:

$$u'(\tau) = \lambda^2 \tag{96}$$
$$v(\tau) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau} \tag{97}$$

Da har vi alt vi trenger:

$$\underline{\underline{\text{Prob}(\tau_3 \leq 40)}} \;=\; \int_0^{40} \lambda^2\tau\, e^{-\lambda\tau} d\tau \tag{98}$$

$$= u(40)v(40) - u(0)v(0) - \int_0^{40} u'(\tau)v(\tau)\,d\tau \tag{99}$$

$$= \left[\lambda^2 40\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\cdot 40}\right) - 0\right] - \int_0^{40} \lambda^2\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\right)d\tau \tag{100}$$

$$= -40\lambda e^{-40\lambda} + \overbrace{\int_0^{40} \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau}^{\text{Prob}(\tau_2 \leq 40)\;=\;0.03} \tag{101}$$

$$= \text{Prob}(\tau_2 \leq 40) - 40\lambda e^{-40\lambda} \tag{102}$$

$$= 0.03 - 0.02950 \tag{103}$$

$$= \underline{\underline{0.0005}} \tag{104}$$

d) Ligningen

$$\text{Prob}(\tau_3 \leq 40) \quad = \quad 0.0005 \tag{105}$$

sier at

sannsynligheten for at tre påfølgende akuttsituasjoner
inntreffer innen 40 minutter er 0.0005, dvs. ved 0.5 av 1000 akuttsituasjoner

Siden Helse Midt-Norge ønsker å redusere sannsynligheten til mindre enn 0.001, dvs. 1 av 1000 akuttsituasjoner, har de oppnådd målet sitt ved å bemanne en ekstra ambulanse.

Flere tiltak må derfor **ikke** å gjennomføres.

■