(versjon 03)

# LØSNING: Oppgavesett nr. 7

"*MAT100 Matematikk*", 2018

**Oppgave 1**: ( partiell deriverte , kjerneregel )

**a**) Partiell deriverte:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^5\right) = 2x^{2-1}y^5 = \underline{\underline{2xy^5}} \tag{1}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^5\right) = x^2 5y^{5-1} = \underline{\underline{5x^2y^4}} \tag{2}$$

og stigningstallet i punktet $(1,1)$ i $x$- og $y$-retningen hhv.:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}}} = 2\cdot 1\cdot 1^5 = \underline{\underline{2}} \tag{3}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = 5\cdot 1^2\cdot 1^4 = \underline{\underline{5}} \tag{4}$$

**b**) Partiell deriverte: [1]

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x+y} = \frac{\partial}{\partial x}\big(x+y\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x+y)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}} \tag{5}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x+y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(x+y\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x+y)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}} \tag{6}$$

og stigningstallet i punktet $(1,1)$ i $x$- og $y$-retningen hhv.:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}}} = \frac{1}{2\sqrt{1+1}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}} \tag{7}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = \frac{1}{2\sqrt{1+1}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}} \tag{8}$$

[1] Her må vi egentlig bruke kjerneregelen siden det ikke er en ”ren” $x$ inne i kvadratroten. Men den deriverte av kjernen er 1, derfor får ikke kjerneregelen noen effekt. For din egen del kan du gjerne bruke kjerneregelen når du kladder slik at du overbeviser seg selv om at dette er riktig, men du behøver ikke ha med alle detaljene i innleveringen.

**c**) Kjerne: $u = yx$. Kjerneregelen:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(y\ln(xy)\Big) = y\,\frac{\partial}{\partial u}\Big(\ln u\Big)\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(yx\Big) = y\,\frac{1}{u}\,y = \frac{y^2}{xy} = \underline{\underline{\frac{y}{x}}} \tag{9}$$

Derivasjon av et produkt og kjerneregelen:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(y\ln(xy)\Big) \qquad \text{(derivasjon av et produkt)} \tag{10}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\Big(y\Big)\ln(xy) + y\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln(xy)\Big) \tag{11}$$

$$= 1\cdot\ln(xy) + y\,\frac{\partial}{\partial u}\Big(\ln u\Big)\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(yx\Big) \tag{12}$$

$$= \ln(xy) + y\,\frac{1}{u}\,x \tag{13}$$

$$= \ln(xy) + \frac{yx}{xy} \tag{14}$$

$$= \underline{\underline{\ln(xy)+1}} \tag{15}$$

Stigningstallet i punktet $(1,1)$ i $x$- og $y$-retningen hhv.:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}} \tag{16}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = \ln(1\cdot 1)+1 = 0+1 = \underline{\underline{1}} \tag{17}$$

**d**) Derivasjonsregelen for en brøk med: $u = 2x + 3y - 1$ og $v = x^2 + y^2$:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x+3y-1}{x^2+y^2}\right) \tag{18}$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{19}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2) - (2x+3y-1)\,2x}{(x^2+y^2)^2} \tag{20}$$

$$= \frac{2x^2+2y^2-4x^2-6xy+2x}{(x^2+y^2)^2} \tag{21}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2x^2+2y^2-6xy+2x}{(x^2+y^2)^2}}} \tag{22}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x+3y-1}{x^2+y^2}\right) \tag{23}$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{24}$$

$$= \frac{3\,(x^2+y^2) - (2x+3y-1)\,2y}{(x^2+y^2)^2} \tag{25}$$

$$= \frac{3x^2+3y^2-4xy-6y^2+2y}{(x^2+y^2)^2} \tag{26}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3x^2-3y^2-4xy+2y}{(x^2+y^2)^2}}} \tag{27}$$

Stigningstallet i punktet $(1,1)$ i $x$- og $y$-retningen hhv.:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}}} = \frac{-2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 - 6\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1}{(1^2+1^2)^2} = \frac{\cancel{-2}+\cancel{2}-6+2}{2^2} = -\frac{4}{4} = \underline{\underline{-1}} \tag{28}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = \frac{3\cdot 1^2 - 3\cdot 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1}{(1^2+1^2)^2} = \frac{\cancel{3}-\cancel{3}-4+2}{2^2} = \frac{-2}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \tag{29}$$

**e**) Kjerne: $u = -xy^2$. Kjerneregelen:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-xy^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{u}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(-xy^2\right) = e^{u}\left(-y^2\right) = \underline{\underline{-y^2\, e^{-xy^2}}} \tag{30}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-xy^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{u}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(-xy^2\right) = e^{u}\left(-x2y\right) = \underline{\underline{-2xy\, e^{-xy^2}}} \tag{31}$$

Stigningstallet i punktet $(1,1)$ i $x$- og $y$-retningen hhv.:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}}} = -1^2 \cdot e^{-1\cdot 1^2} = \underline{\underline{-e^{-1}}} \tag{32}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = -2 \cdot 1 \cdot 1e^{-1\cdot 1^2} = \underline{\underline{-2e^{-1}}} \tag{33}$$

**f**) Derivasjonsregelen for en brøk med: $u = \ln x$ og $v = \sqrt{yx} = (yx)^{1/2}$:
Vi gjør noen mellomregninger: [2]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \frac{1}{x} \tag{34}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v'_x = \frac{1}{2\sqrt{yx}}\, y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \tag{35}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{yx}}\right) = \frac{u'_x v - u\, v'_x}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{yx} - \ln x\, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}}{(\sqrt{yx})^2} \tag{36}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)}{yx} = y^{\frac{1}{2}} y^{-1} x^{-\frac{1}{2}} x^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right) = \underline{\underline{y^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)}} \tag{37}$$

Når man skal regne ut partiellderiverte med hensyn på $y$ så trenger man ikke å bruke derivasjon av en brøk fordi man har <u>kun en $y$-avhengighet i nevneren</u>:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{yx}}\right) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-1/2}\right) \tag{38}$$

$$= \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2}\right) y^{-1/2-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} \ln x}} \tag{39}$$

[2]Når vi har regnet ut lign.(35) så har vi brukt kjerneregelen. Detaljene rundt dette behøver dere ikke ha med i innleveringen.

Stigningstallet i punktet $(1,1)$ i $x$- og $y$-retningen hhv.:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}}} \;=\; 1^{-\frac{1}{2}}1^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\ln 1\right) \;=\; 1\cdot 1\cdot(1-0) \;=\; \underline{\underline{1}} \tag{40}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} \;=\; -\frac{1}{2}1^{-\frac{1}{2}}1^{-\frac{3}{2}}\ln 1 \;=\; -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 0 \;=\; \underline{\underline{0}} \tag{41}$$

**g**) Funksjonen $f(x,y) = \sqrt{\ln\left(\frac{3x+y^2}{2+y}\right)}$ kan skrives som en sammensetning av *tre* funksjoner:

$$f(x,y) \;=\; u\big(\,v(\,w(x,y)\,)\,\big) \tag{42}$$

hvor

$$u(v) = \sqrt{v} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{v}} \tag{43}$$

$$v(w) = \ln w \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w} \;=\; \frac{1}{w} \tag{44}$$

$$w(x,y) = \frac{3x+y^2}{2+y} \qquad \frac{\partial w}{\partial x} \;=\; \frac{3}{2+y} \tag{45}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \;=\; \frac{2y(2+y)-(3x+y^2)\cdot 1}{(2+y)^2} \;=\; \frac{4y+y^2-3x}{(2+y)^2} \tag{46}$$

Vi kan dermed bruke kjerneregelen *to* ganger:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}} \;=\; \frac{\partial u}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial x} \tag{47}$$

$$=\; \frac{1}{2\sqrt{v}}\,\frac{1}{w}\,\frac{3}{2+y} \tag{48}$$

$$=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\ln w}}\,\frac{1}{\frac{3x+y^2}{\cancel{2+y}}}\,\frac{3}{\cancel{2+y}} \tag{49}$$

$$=\; \underline{\underline{\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{3x+y^2}{2+y}\right)}}\,\frac{1}{3x+y^2}}} \tag{50}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{51}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{1}{w}\frac{4y+y^2-3x}{(2+y)^2} \tag{52}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln w}}\frac{1}{\frac{3x+y^2}{\cancel{2+y}}}\frac{4y+y^2-3x}{(2+y)^{\cancel{2}}} \tag{53}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{3x+y^2}{2+y}\right)}}\frac{4y+y^2-3x}{(3x+y^2)(2+y)}}} \tag{54}$$

Stigningstallet i punktet $(1,1)$ i $x$- og $y$-retningen hhv.:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{3\cdot1+1^2}{2+1}\right)}}\frac{1}{3\cdot1+1^2} = \underline{\underline{\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{\ln(4/3)}}}} \tag{55}$$

$$\tag{56}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{3\cdot1+1^2}{2+1}\right)}}\frac{4\cdot1+1^2-3\cdot1}{(3\cdot1+1^2)(2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln(4/3)}}\frac{4+1-3}{4\cdot3} \tag{57}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{\ln(4/3)}}\frac{\cancel{2}}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{12}\frac{1}{\sqrt{\ln(4/3)}}}} \tag{58}$$

■

**Oppgave 2**: ( retningsderivert )

**a**) Fra oppgave **1a** fant vi at:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^5 \tag{59}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 5x^2y^4 \tag{60}$$

og

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 2 \tag{61}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 5 \tag{62}$$

Linjen $y = 2x$ gir retningen $a = 1$ enheter langs $x$-aksen og $b = 2$ enheter langs $y$-aksen. Retningsderivert i punktet $(1,1)$ langs denne linjen er dermed gitt ved: [3]

$$\underline{\underline{a\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} + b\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = \underline{\underline{12}} \tag{63}$$

[3]Vi velger $a = 1$ slik at $b =$ stigningstallet til den aktuelle linjen.

**b)** Fra oppgave **1b** fant vi at:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \tag{64}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \tag{65}$$

og

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{66}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{67}$$

Linjen $y = \frac{3}{2}x + 1$ gir retningen $a = 1$ enheter langs $x$-aksen og $b = \frac{3}{2}$ enheter langs $y$-aksen. Retningsderivert i punktet $(1,1)$ langs denne linjen er dermed gitt ved:

$$\underline{\underline{a\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} + b\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2}\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{5}{4\sqrt{2}}}} \tag{68}$$

**c**) Fra oppgave **1e** fant vi at:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y^2 e^{-xy^2} \tag{69}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2xy\, e^{-xy^2} \tag{70}$$

og

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = -e^{-1} \tag{71}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = -2e^{-1} \tag{72}$$

Linjen $y = -x$ gir retningen $a = 1$ enheter langs $x$-aksen og $b = -1$ enheter langs $y$-aksen. Retningsderivert i punktet $(1,1)$ langs denne linjen er dermed gitt ved:

$$\underline{\underline{a\,\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} + b\,\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = 1(-e^{-1}) + (-1)(-2e^{-1}) = e^{-1}\big(-1+2\big) = e^{-1} = \frac{1}{\underline{\underline{e}}} \tag{73}$$

**d**) Fra oppgave **1f** fant vi at:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right) \tag{74}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} \ln x \tag{75}$$

og

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 1 \tag{76}$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 0 \tag{77}$$

Retningen parallelt langs $x$-aksen er gitt ved $a = 1$ enheter langs $x$-aksen og $b = 0$ enheter langs $y$-aksen. Retningsderivert i punktet $(1,1)$ i denne retningen er dermed gitt ved:

$$\underline{\underline{a\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} + b\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}}} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \underline{\underline{1}} \tag{78}$$

■

**Oppgave 3**: ( retningsderivert )

Partiell deriverte:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right) \;=\; 2x^{2-1}y \;=\; 2xy \tag{79}$$

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y\right) \;=\; x^2 1 y^{1-1} \;=\; x^2 \tag{80}$$

og

$$\frac{\partial T(1,1)}{\partial x} \;=\; 2\cdot 1\cdot 1 \;=\; 2 \tag{81}$$

$$\frac{\partial T(1,1)}{\partial y} \;=\; 1^2 \;=\; 1 \tag{82}$$

Retningsderivert i punktet $(1,1)$ i retningen $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ enheter langs $x$-aksen og $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ enheter langs $y$-aksen er gitt ved:

$$\underline{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{\partial T(1,1)}{\partial x} \;+\; \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\frac{\partial T(1,1)}{\partial y}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cdot 2 \;+\; \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\cdot 1 \tag{83}$$

$$=\; \underline{\frac{2+a}{\sqrt{1+a^2}}} \tag{84}$$

Den retningsderiverte er mao. en funksjon av $a$, si:

$$\boxed{f(a) \;=\; \frac{2+a}{\sqrt{1+a^2}} \qquad (85)}$$

**1. derivasjonstetsen**: ( kritisk punkt )

For å finne den verdien for $a$ hvor retningsderivert er størst, deriverer vi $f(a)$ og setter lik null:

$$\frac{d\,f(a)}{da} \;=\; 0 \tag{86}$$

Vi setter: $u(a) = 2 + a$ og $v(a) = \sqrt{1+a^2}$. Derivasjon av en brøk:

$$\underline{\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}a}} \;=\; \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{87}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{1+a^2} \;-\; \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}\sqrt{1+a^2}} \cdot (2+a)}{(\,\sqrt{1+a^2}\,)^2} \tag{88}$$

$$= \frac{\sqrt{1+a^2}\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} \;-\; \frac{a(2+a)}{\sqrt{1+a^2}}}{1+a^2} \tag{89}$$

$$= \frac{\frac{1+\cancel{a^2} \;-\; 2a-\cancel{a^2}}{\sqrt{1+a^2}}}{1+a^2} \tag{90}$$

$$= \frac{1-2a}{\sqrt{1+a^2}(1+a^2)} \tag{91}$$

$$= \underline{\frac{1-2a}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{92}$$

Vi finner kritiske punkter ved å løse likningen:

$$\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}a} = 0 \tag{93}$$

$$\frac{1-2a}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \tag{94}$$

$$1-2a = 0 \tag{95}$$

$$\underline{a = \frac{1}{2}} \tag{96}$$

**2. derivasjonstesten**:

Vi har dermed funnet et kritisk punkt for $a = \frac{1}{2}$. Vi må nå bruke 2. derivasjonstesten for å være sikker på et dette kritiske punktet er et *maksimum*:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{\mathrm{d}a^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1-2a}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{97}$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{98}$$

$$= \frac{-2(1+a^2)^{\frac{3}{2}} \; - \; (1-2a)\,\frac{3}{\cancel{2}}(1+a^2)^{\frac{1}{2}}\cancel{2}a}{\left((1+a^2)^{\frac{1}{\cancel{2}}}\right)^{\cancel{2}}} \tag{99}$$

$$= \underbrace{\frac{(1+a^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+a^2)^3}}_{>\,0} \underbrace{\Big(-2(1+a^2) \; - \; 3a(1-2a)\Big)}_{?} \tag{100}$$

For at vi skal ha et maksimum, må $\frac{\mathrm{d}^2 f(a)}{\mathrm{d}a^2} < 0$. Vi må derfor sjekke hvilket fortegn uttrykket med "?" i lign. (100) har for r $a = \frac{1}{2}$:

$$-2(1+a^2) - 3a(1-2a) = -2\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 3\,\frac{1}{2}\overbrace{\left(1 - \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\right)}^{=\,0} \tag{101}$$

$$= -2 \cdot \frac{5}{4} = -\frac{5}{2} < 0 \tag{102}$$

Fra 2. derivasjonstesten kan vi dermed konkludere at $a = \frac{1}{2}$ gir et **maksimum**.

Retningen er dermed bestemt ved:

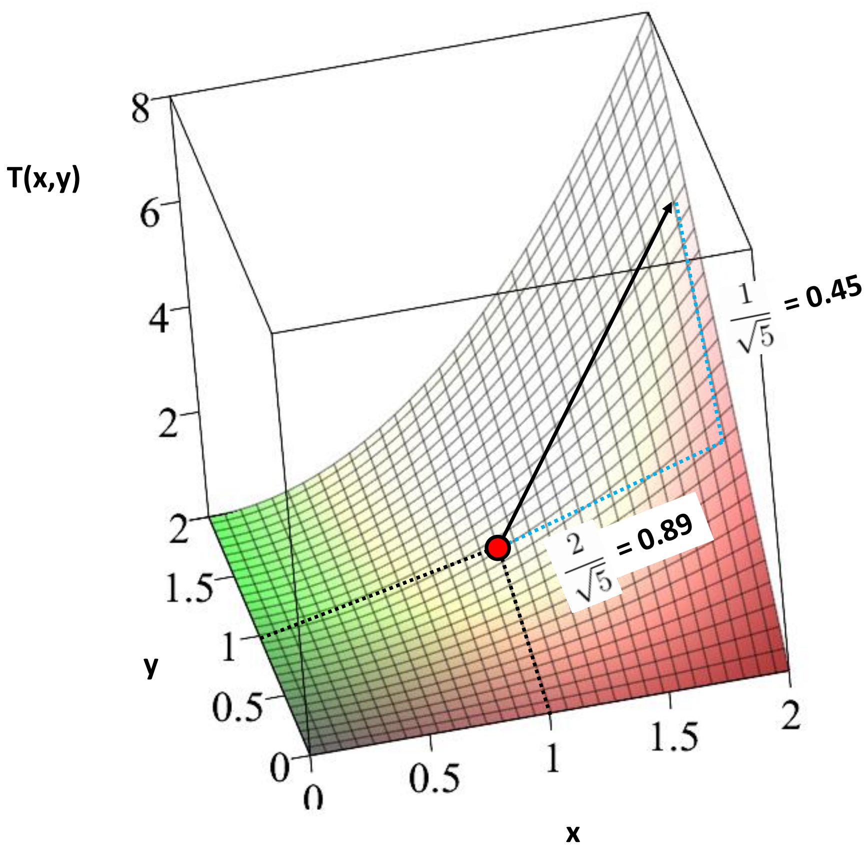
$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{5}}}} \qquad \text{( enheter langs } x\text{-aksen )} \tag{103}$$

$$\underline{\underline{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}}} \qquad \text{( enheter langs } y\text{-aksen )} \tag{104}$$

■

**PS**:

Figur 1 er kun ment som en illustrasjon. Det er ikke meningen at studentene skal plotte denne.




Figur 1: Retningen som gi raskest økning i temperatur.

**Oppgave 4**: ( nyttemaksimering , Lagrange multiplikatorer , "*SØK200 Mikroøkonomi*" )

**a**) Nyttefunksjonen

$$\underline{\underline{U(x,y) \ = \ 2x^2 y}} \tag{105}$$

skal $\underline{\underline{\text{maksimeres}}}$ under bibetingelsen

$$\underline{\underline{g(x,y) \ = \ p_x x + p_y y \ - m \ = \ 0}} \tag{106}$$

**b**) Lagrange-funksjonen er:

$$L(x,y) \ = \ U(x,y) \ - \ \lambda\, g(x,y) \tag{107}$$

hvor $m$ er en konstant. De stasjonære punktene til $L(x,y)$ er, sammen med bibetingelsen $g(x,y)$:

$$\frac{\partial\, L(x,y)}{\partial x} \ = \ 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, L(x,y)}{\partial y} \ = \ 0 \tag{108}$$

$$\frac{\partial\, U(x,y)}{\partial x} - \lambda\, \frac{\partial\, g(x,y)}{\partial x} \ = \ 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, U(x,y)}{\partial y} - \lambda\, \frac{\partial\, g(x,y)}{\partial y} \ = \ 0 \tag{109}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big( 2x^2 y \Big) \quad - \quad \lambda\, \frac{\partial}{\partial x}\Big( p_x x + p_y y \Big) \ = \ 0 \tag{110}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big( 2x^2 y \Big) \quad - \quad \lambda\, \frac{\partial}{\partial y}\Big( p_x x + p_y y \Big) \ = \ 0 \tag{111}$$

$$4xy - \lambda p_x = 0 \tag{112}$$
$$2x^2 - \lambda p_y = 0 \tag{113}$$

$$\frac{4xy}{p_x} = \lambda \tag{114}$$
$$\frac{2x^2}{p_y} = \lambda \tag{115}$$

De to ligningene i lign.(114) og (115) sammen med bibetingensen utgjør 3 uavhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, $x$, $y$ og $\lambda$. Dermed er dette et ligningssytem som kan ha en bestemt ("entydig") løsning. Vi kan nå bruke "innsettingsmetoden" [4]. Eliminere $\lambda$ ved å bruke lign.(114) og (115):

$$\lambda = \lambda \tag{116}$$

$$\frac{4\cancel{x}y}{p_x} = \frac{2x^{\cancel{2}}}{p_y} \tag{117}$$

$$\frac{2 \cdot \cancel{2}y}{p_x} = \frac{\cancel{2}x}{p_y} \tag{118}$$

$$\underline{y = \frac{p_x x}{2p_y}} \tag{119}$$

Setter lign.(119) inn i bibetingelsen:

$$p_x x + p_y y = m \tag{120}$$

$$p_x x + \cancel{p_y}\left(\frac{p_x x}{2\cancel{p_y}}\right) = m \tag{121}$$

$$p_x x \, \frac{3}{2} = m \tag{122}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{3}\frac{m}{p_x}}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{123}$$

[4] Med "innsettingsmetoden" mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

Setter lign.(123) inn i (119):

$$\underline{\underline{y}} = \frac{p_x x}{2p_y} \tag{124}$$

$$= \frac{\cancel{p_x}}{\cancel{2}p_y}\frac{\cancel{2}}{3}\frac{m}{\cancel{p_x}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\frac{m}{p_y}}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{125}$$

**c**) Numeriske verdier:

$$\underline{\underline{x}} \overset{\text{lign.(123)}}{=} \frac{2}{3}\frac{m}{p_x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1200\ \cancel{\text{NOK}}}{10\ \cancel{\text{NOK}}} = \underline{\underline{80}} \tag{126}$$

$$\underline{\underline{y}} \overset{\text{lign.(125)}}{=} \frac{1}{3}\frac{m}{p_y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1200\ \cancel{\text{NOK}}}{40\ \cancel{\text{NOK}}} = \underline{\underline{10}} \tag{127}$$

**d**) Tolkning:

Med nyttefunksjonen $U(x, y) = 2x^2y$ så er det størst nytte ved å konsumere:

$\underline{\underline{x = 80 \text{ liter bensin}}}$ og $\underline{\underline{y = 10 \text{ pølsemenyer}}}$

i løpet av ei lang helg.

■

**Oppgave 5**: ( økonomi og logistikk )

**a**) Dette er et minimeringsproblem under en bibetingelse.
Derfor er dette en situasjon som er godt egnet for å bruke Lagrange multiplikator.

Av åpenbare grunner er $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Dessuten er bibetingelsen:

$$g(x,y) \;=\; x+y \;=\; 500 \tag{128}$$

Lagrange-funksjonen blir dermed:

$$\boxed{L(x,y) \;=\; K(x,y) \;-\; \lambda\, g(x,y) \qquad (129)}$$

hvor $K(x,y) = x^2 + 500x \;+\; y^2 + 300y$. De stasjonære punktene til $L(x,y)$ er:

$$\frac{\partial\, L(x,y)}{\partial x} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, L(x,y)}{\partial y} \;=\; 0 \tag{130}$$

$$\frac{\partial\, K(x,y)}{\partial x} - \lambda\,\frac{\partial\, g(x,y)}{\partial x} \;=\; 0 \qquad , \qquad \frac{\partial\, K(x,y)}{\partial y} - \lambda\,\frac{\partial\, g(x,y)}{\partial y} \;=\; 0 \tag{131}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2 + 500x \;+\; y^2 + 300y\Big) \;-\; \lambda\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(x+y\Big) \;=\; 0 \tag{132}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2 + 500x \;+\; y^2 + 300y\Big) \;-\; \lambda\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(x+y\Big) \;=\; 0 \tag{133}$$

$$2x + 500 \;-\; \lambda \;=\; 0 \tag{134}$$

$$2y + 300 \;-\; \lambda \;=\; 0 \tag{135}$$

$$2x + 500 \;=\; \lambda \tag{136}$$

$$2y + 300 \;=\; \lambda \tag{137}$$

De to ligningene i lign.(136) og (137) sammen med bibetingelsen utgjør 3 $\underline{\text{u}}$avhengige ligninger. Vi har 3 ukjente, $x$, $y$ og $\lambda$. Dermed er dette et ligningssystem som kan ha en bestemt ("entydig") løsning. Vi kan nå bruke "innsettingsmetoden" [5]. Vi eliminerer $\lambda$ i lign.(136) og (137):

$$\lambda = \lambda \tag{138}$$

$$2x + 500 = 2y + 300 \tag{139}$$

$$x = y - 100 \tag{140}$$

Setter lign.(140) inn i bibetingelsen:

$$x + y = 500 \tag{141}$$

$$y - 100 + y = 500 \tag{142}$$

$$2y = 600 \tag{143}$$

$$\underline{y = 300} \tag{144}$$

som gir, f.eks. via lign.(140), $\underline{x} = y - 100 = \underline{200}$.

Minimal kostand for $K(x,y)$ inntreffer altså for punktet $(x^*, y^*) = (200, 300)$.
For å minimere utgiften $K_{\text{min}}$ bør NEAS produsere og levere:

$$\underline{\underline{x^* = 200}} \quad \text{antall } MWh \text{ per døgn ved Reinset kraftverk} \tag{145}$$

$$\underline{\underline{y^* = 300}} \quad \text{antall } MWh \text{ per døgn ved Ulvund kraftverk} \tag{146}$$

når de skal levere 500 $MWh$ per døgn til Norsk Hydro på Sunndalsøra.

[5] Med "innsettingsmetoden" mener vi her rett og slett at man setter en ligning inn i en annen.

**b)** I oppgave **5a** fant vi at $x^* = 200$ og $y^* = 300$ vil minimere kostnaden $K(x, y)$.
Derfor:

$$\underline{K_{\min}} = K(x^*, y^*) \tag{147}$$

$$= K(200, 300) \tag{148}$$

$$= \Big(200^2 + 500 \cdot 200 \ + \ 300^2 + 300 \cdot 300\Big) \text{ NOK} \ = \ \underline{320\,000 \ \ \text{NOK}} \tag{149}$$

Den minimale kostnaden for NEAS per døgn er $\underline{\underline{320\,000 \ \ \text{NOK}}}$ for de to kraftverkene.

**c)** Økonomiavdelingen til NEAS siar at ekstraugiftene kan være opptil 55 000 NOK
Derfor: ekstra per døgn:

$$3000\epsilon - \frac{25}{2}\epsilon^2 \ = \ 55\,000 \tag{150}$$

For å finne $\epsilon$ så må vi derfor løse 2. gradsligningen

$$-\epsilon^2\frac{25}{2} + 3000\epsilon - 55000 \ = \ 0 \tag{151}$$

som gir

$$\epsilon \ = \ \frac{-3000 \pm \sqrt{3000^2 - 4\big(-\frac{25}{2}\big)\big(-55\,000\big)}}{2\big(-\frac{25}{2}\big)} \tag{152}$$

$$\underline{\epsilon \ = \ 20 \qquad \text{eller} \qquad \epsilon \ = \ 220} \tag{153}$$

Siden $0 \leq \epsilon \leq 120$ så må vi ha $\epsilon = 20$.

Den nye fordelingen av antall MWh mellom krafverkene blir da:

$$\underline{\underline{x^*_{\text{ny}}}} \quad = \quad x^* \; + \; \frac{10}{4}\epsilon \quad = \quad \left(200 \; + \; \frac{10}{4}20\right) \; MWh \; = \; \underline{\underline{250 \quad MWh}} \tag{154}$$

$$\underline{\underline{y^*_{\text{ny}}}} \quad = \quad y^* \; - \; \frac{10}{4}\epsilon \quad = \quad \left(300 \; - \; \frac{10}{4}20\right) \; MWh \; = \; \underline{\underline{250 \quad MWh}} \tag{155}$$

**d**) Fra lign.(154) og (155) ser vi at $x^*_{\text{ny}}$ og $y^*_{\text{ny}}$ er like.
Det er rimelig fordi – med $\epsilon = 20$ – så er leddene i kostnadfunksjonen like:

$$\underline{K_{\text{ny}}(x, y)} \quad = \quad x^2 + 500x \; + \; y^2 + \overbrace{(300 + 10\epsilon)}^{=\,500}\, y \tag{156}$$

$$= \quad \underline{\overbrace{x^2 + 500x}^{\text{ledd 1}} \;\; + \;\; \overbrace{y^2 + 500y}^{\text{ledd 2}}} \tag{157}$$

hvor altså ledd 1 og ledd 2 er like.

■