

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Torsdag 21. desember 2017
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling i MAT100 fra 2017 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 13
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**

Oppgave 1: (logistikk og økonomi)

Norsk Hydro på Sunndalsøra produserer aluminium, se figur 1.

Anta at anlegget på Sunndalsøra produserer aluminium i produksjonsserier.

For å bestemme produksjonsplanen for 2018 så ønsker Norsk Hydro å bestemme hvor mange tonn aluminium de skal produsere i hver produksjonsserie slik at de relevante kostnadene minimeres.

Selv om den årlige etterspørselen D av aluminium faktisk er varierende, gjør Hydro en forenkling og antar at denne etterspørselen er konstant.

Norsk Hydro ønsker da å se på en situasjon hvor **lager**kostnadene per år er $HQ/2$ og **oppstarts**kostnadene er DS/Q slik at summen av kostnader $TC(Q)$ per år er gitt ved:

$$TC(Q) = \underbrace{\frac{H}{2} Q}_{\text{lagerkost.}} + \underbrace{\frac{DS}{Q}}_{\text{oppstartskost.}} \quad (1)$$

hvor

$$Q = \text{størrelse på produksjonsserien (i antall tonn)} \quad (\text{“quantity”}) \quad (2)$$

$$H = \text{lagerkostnaden per tonn per år} \quad (3)$$

$$D = \text{etterspørsel per år} \quad (\text{“demand”}) \quad (4)$$

$$S = \text{oppstartskostnad} \quad (5)$$



Foto: Norsk Hydro



Figur 1: Norsk Hydro på Sunndalsøra.

a) La oss se nærmere på hvert av leddene i $TC(Q)$ i lign.(1).

- i) Dersom Q øker, vil da **lager**kostnaden øke eller minke?
- ii) Dersom Q øker, vil da **oppstarts**kostnaden øke eller minke?

Minimum av kostnadsfunksjonen $TC(Q)$ i lign.(1) inntreffer ved kvantumet

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \quad (6)$$

og kalles *EOQ*-formelen. (Denne formelen skal du ikke vise. Bare ta den for gitt).

b) Lagernivået $i(t)$, hvor mange tonn aluminium som er på lager, varierer som funksjon tiden t . Innenfor en lagersyklus er lagernivået $i(t)$ gitt ved: ¹

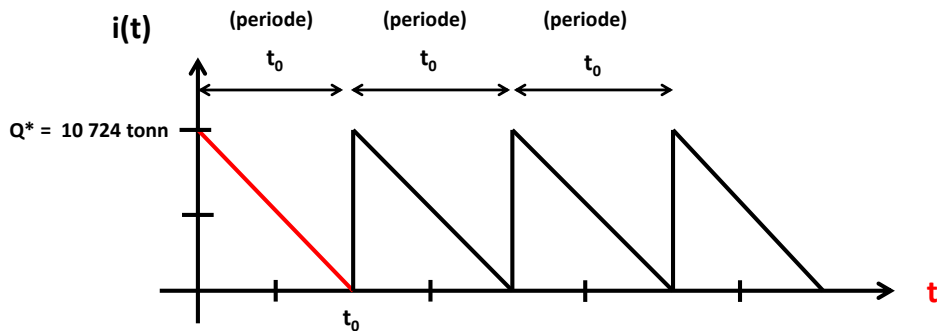
$$i(t) = Q^* - Dt \quad (7)$$

se rød linje i figur 2. Mønsteret repeterer seg som vist i figuren.

Lengden av lagersyklusen, dvs. perioden t_0 , er definert ved nullpunktet $i(t_0) = 0$ til den lineære funksjonen i lign.(7).

Vis at t_0 er gitt ved:

$$t_0 = \frac{Q^*}{D} \quad (8)$$



Figur 2: Lagernivå $i(t)$.

¹Lagersyklus - tiden fra lageret er fullt til lageret er tomt.

Anta at etterspørselen av aluminium for Norsk Hydro på Sunndalsøra er:

$$D = 230\,000 \text{ tonn per år} \quad (9)$$

Anta videre at oppstartstiden for en produksjonsserie av aluminium er 25 timer.

Kostnaden for en slik oppstart er estimert til 50 000 NOK per time.

Oppstartskostnaden S blir dermed:

$$S = 25 \cdot 50\,000 \text{ NOK} = 1\,250\,000 \text{ NOK} \quad (10)$$

Lagerkostnaden H per tonn aluminium per år er:

$$H = 5\,000 \text{ NOK per tonn per år} \quad (11)$$

- c) Sett inn tall og vis at antall tonn aluminium Q^* som må produseres i hver produksjonsserie for å minimere kostanden $TC(Q)$ er: ²

$$Q^* = 10\,724 \text{ tonn} \quad (12)$$

- d) Sett inn tall og vis at: ³

$$t_0 = 17 \text{ dager} \quad (13)$$

dvs. det tar 17 dager fra lageret er fullt til lageret er tomt.

■

²Tips: Bruk formelen i lign.(6).

³Tips: Bruk formelen i lign.(8). Husk at det er 365 dager i året.

Oppgave 2: (logistikk og økonomi - utvidet EOQ -formel)

Som tidligere nevnt, formelen i lign.(1) gjelder kun under en del forutsetninger.

En av disse forutsetningene er at hele ordren kan leveres i én leveranse.

Men ved produksjon av aluminium har man i realiteten en produksjonshastighet P , dvs. lageret fylles opp gradvis etterhvert som aluminiumen produseres.

Derfor får man en litt justert kostnadsfunksjon.

Anta at den nye, justerte kostnadsfunksjonen er:

$$K(Q) = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{D}{P}\right) Q + \frac{DS}{Q} \quad (14)$$

hvor

$$P = \text{produksjonshastighet, tonn per år} \quad (15)$$

a) Vis at optimum av den nye kostnadsfunksjonen $K(Q)$ i lign.(14) inntreffer når:

$$\tilde{Q}^* = \sqrt{\frac{2DS}{H(1 - \frac{D}{P})}} \quad (16)$$

Denne formelen er en *utvidelse* av EOQ -formelen.



Figur 3: Aluminium.

- b) For å være sikker på at $\tilde{Q}^*$ i lign.(16) representerer et *minimum* av $K(Q)$, og ikke et maksimum, kan vi f.eks. bruke “2. derivasjonstesten”.

Vis at den 2. deriverte av $K(Q)$ i lign.(14) er

$$\frac{d^2 K(Q)}{dQ^2} = \frac{2 D S}{Q^3}, \quad (17)$$

og argumenter for hvorfor dette resultatet viser at $\tilde{Q}^*$ i lign.(16) representerer et *minimum* av $K(Q)$.

I motsetning til oppgave 1 så består lagersyklusen her, i oppgave 2, av to faser:

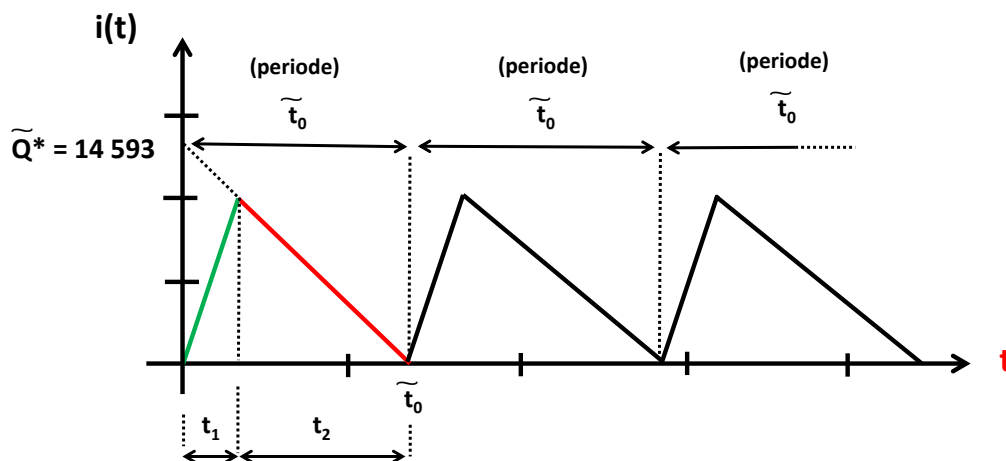
- 1) Fase 1: Produksjon og salg forekommer samtidig: (grønn linje i figur 4)

$$i_g(t) = (P - D)t \quad (18)$$

- 2) Fase 2: Kun salg fra lager: (rød linje i figur 4)

$$i_r(t) = \tilde{Q}^* - Dt \quad (19)$$

Mønsteret repeteres som funksjon av tiden t som vist i figuren:



Figur 4: Lagernivå $i(t)$.

- c) Vis at tiden t_1 , tiden for fase 1 i lagersyklusen, er gitt ved: ⁴

$$t_1 = \frac{\tilde{Q}^*}{P} \quad (20)$$

- d) Vis at tiden t_2 , tiden for fase 2 i lagersyklusen, er gitt ved: ⁵

$$t_2 = \tilde{Q}^* \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{P} \right) \quad (22)$$

- e) Anlegget på Sunndalsøra har en produksjonsrate på:

$$P = 500\,000 \text{ tonn per år} \quad (23)$$

Regn ut tallverdien for t_2 ved å bruke lign.(22), $\tilde{Q}^* = 14\,593$ tonn per lagersyklus og etterspørselen D er som oppgitt i lign.(9) i oppgave 1.

Oppgi svaret i antall dager. ⁶

■

⁴Tips: t_1 bestemmes av *skjæringspunktet* mellom den grønne og den røde linjen.

⁵Tips: Fra figur 4 ser vi at $t_1 + t_2 = \tilde{t}_0$, dvs.:

$$t_2 = \tilde{t}_0 - t_1 \quad (21)$$

hvor t_1 er gitt ved lign.(20). I tillegg må du finne $\tilde{t}_0$.

⁶Husk at det er 365 dager i året.

Oppgave 3: (logistikk og økonomi - følsomhetsanalyse)

Kostnadsfunksjonen $K(Q)$ fra oppgave 2 er basert på flere antagelser.
Det er ikke sikkert at disse antagelsene er oppfylt.

Spørsmålet er om vi skal utvide EOQ -modellen videre eller om vi skal beholde $K(Q)$ som den er.

For å vurdere dette spørsmålet bestemmer Norsk Hydro seg for å gjøre en [følsomhetsanalyse](#) for konstandsfunksjonen $K(Q)$ fra oppgave 2.

De ønsker altså å finne ut hvor følsom $K(Q)$ er for endringer i Q rundt $\tilde{Q}^*$, se figur 5.

Dermed har de et bedre grunnlag for å vurdere om de skal gjøre ytterligere utvidelser av EOQ -formelen.

La oss anta at det *virkelige* optimale kvantumet Q_{real}^* er en faktor z multiplisert med kvantumet $\tilde{Q}^*$ i lign.(16) fra oppgave 2, dvs. anta at:

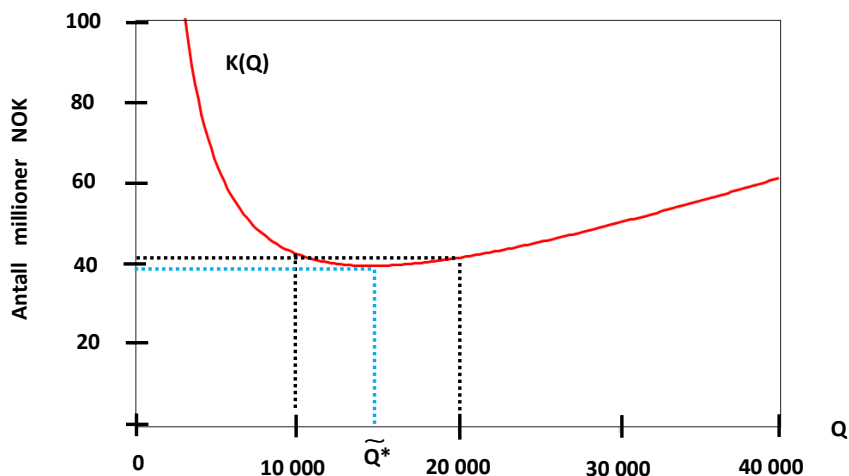
$$Q_{\text{real}}^* = z\tilde{Q}^* \quad (24)$$

hvor z er positiv, dvs. $z > 0$.

Man kan da vise at:

$$\frac{K(Q_{\text{real}}^*)}{K(\tilde{Q}^*)} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (25)$$

(Formelen i lign.(25) skal du ikke vise. Bare ta den for gitt).



Figur 5: Plott av $K(Q)$ fra oppgave 2.

- a) Dersom kostnaden $K(Q_{\text{real}}^*)$ ikke skal avvike med mer enn 5 % fra $K(\tilde{Q}^*)$, dvs. dersom $K(Q_{\text{real}}^*)/K(\tilde{Q}^*) \leq 1.05$, så er:

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \leq 1.05 \quad (26)$$

Vis da at: ⁷

$$z^2 - 2.1z + 1 \leq 0 \quad (27)$$

- b) Faktoriser lign.(27) ved å bruke *ABC*-formelen og vis at den kan skrives:

$$(z - 0.73)(z - 1.37) \leq 0 \quad (28)$$

- c) Sett opp et fortegnsskjema for lign.(28) og vis at intervallet som z må ligge innenfor for at ulikheten i lign.(28) skal gjelde, er gitt ved:

$$0.73 \leq z \leq 1.37 \quad (29)$$



Figur 6: Økonomi og logistikk.

⁷Her er det meningen at du skal starte fra lign.(26) og komme frem til lign.(27).

- d) Dersom det virkelige optimale kvantumet Q_{real}^* er 20 % større enn $\tilde{Q}^*$, vil da Norsk Hydro bomme med mer eller mindre enn 5 % på lager- og oppstartskostnadene $K(Q)$?

Gi en *kort* begrunnelse for svaret.⁸



⁸Ingen utregninger behøves her. Bruk lign.(29) i din argumentasjon.

Oppgave 4: (økonomi)

Å framstille aluminium er en svært energikrevende prosess.

Anta at totalt forbruk b av elektrisk energi ved Norsk Hydro på Sunndalsøra i 2010 var ⁹

$$b = 5.0 \cdot 10^9 \text{ kWh} \quad (30)$$

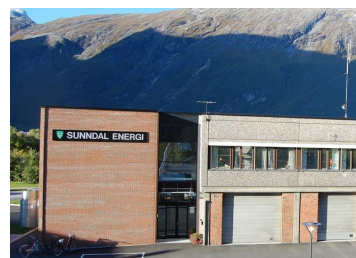
hvor 10^9 er én milliard.

Anta videre at strømforbruket til Norsk Hydro på Sunndalsøra øker med 2 % per år etter år 2010. Med notasjonen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{Hydros strømforbruk i år 2011} \\ a_2 &= \text{Hydros strømforbruk i år 2012} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_n &= \text{Hydros strømforbruk } n \text{ år etter år 2010} \end{aligned} \quad (31)$$

så ser vi da mønsteret

$$\begin{aligned} a_1 &= b 1.02^1 \\ a_2 &= b 1.02^2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_n &= b 1.02^n \end{aligned} \quad (32)$$



Figur 7: Strøm.

⁹kWh = kilowatt timer, men det ikke viktig for denne oppgaven.

- a) Hvor stort vil strømforbruket være i år 2022, dvs. hva er a_{12} ?

Oppgi svaret i antall milliarder kWh.

Norsk Hydro sitt samlede strømforbruk n år etter år 2010 er da:

$$S_n^{\text{forbruk}} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad (33)$$

- b) Hva slags type rekke representerer a_i , hvor $i = 1, 2, \dots, n$?

- c) Vis at summen S_n^{forbruk} er gitt ved:

$$S_n^{\text{forbruk}} = 51b(1.02^n - 1) \quad (34)$$

- d) Hvor stort er Norsk Hydro sitt samlede strømforbruk i $n = 10$ årsperioden fra og med 2011 og til med 2020?

Oppgi svaret i antall milliarder kWh.

Ledelsen i Norsk Hydro ønsker å investere i bedre elektrolyselinjer for anlegget på Sunndalsøra. Anta at kostnaden av en slik oppgradering av anlegget er

$$K_0 = 250 \cdot 10^6 \text{ NOK} \quad (35)$$

dvs. 250 millioner kroner.

Hydro tar opp lån for å finansiere denne oppgraderingen. De tar opp et serielån. Renten er 2.8 %, dvs. $r = 0.028$.

- e) Dersom Norsk Hydro ønsker å betale tilbake lånet i løpet av 20 år, hvor mye rente R_{20}^{serie} betaler de totalt disse årene? ¹⁰

Anta at renten r er konstant alle 20 årene. Oppgi svaret i antall millioner NOK.

Strømforbruket reduseres med 10 % som følge av forbedringen av elektrolyselinjene. Dersom strømprisen er p NOK per kWh så vil Norsk Hydro, n år etter investeringene, ha redusert strømkostnadene med

$$\Delta K_n = 0.1 p S_n^{\text{forbruk}} \quad (36)$$

- f) Vis at antall år n det tar før Norsk Hydro har spart inn investeringskostnaden K_0 og rentekostnaden R_{20}^{serie} som et resultat av reduserte strømkostnader ΔK_n , er gitt ved: ¹¹

$$n = \frac{\ln \left(\frac{K_0 + R_{20}^{\text{serie}}}{5.1 p b} + 1 \right)}{\ln 1.02} \quad (38)$$

¹⁰Se formelsamling for å finne formelen for R_n^{serie} .

¹¹Sett

$$\Delta K_n = K_0 + R_{20}^{\text{serie}} \quad (37)$$

bruk lign.(36) samt lign.(34) og løs med hensyn på n alene.