Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

LØSNING: Eksamen 19. des. 2018

"*MAT100 Matematikk*"

a) Løser ut parentesene og samle like ledd: [1]

$$\underline{\underline{(x+y)(x-y)}} = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} + y^2 = \underline{\underline{x^2 - y^2}} \tag{1}$$

b) Trekker sammen og forenkler mest mulig: (må finne fellesnevner)

$$\underline{\underline{\frac{3}{2a} - \frac{6}{3a} + \frac{1}{a}}} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 2a} - \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot 3a} + \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot a} \tag{2}$$

$$= \frac{9}{6a} - \frac{12}{6a} + \frac{6}{6a} \tag{3}$$

$$= \frac{9 - 12 + 6}{6a} = \frac{3}{6a} = \frac{1}{\underline{\underline{2a}}} \tag{4}$$

c) Forkorter brøken: (bruker konjugatsetningen)

$$\underline{\underline{\frac{x^3 - xy^2}{(x+y)^2}}} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x+y)^2} = \frac{x(x-y)\cancel{(x+y)}}{(x+y)\cancel{(x+y)}} = \underline{\underline{\frac{x(x-y)}{x+y}}} \tag{5}$$

[1] Bruker "*pilmetoden*".

d) Skriver alle leddene med *fellesnevneren* $(x+1)(x-1)$:

$$\frac{4}{x+1} + 2 = \frac{2x+6}{x-1} \tag{6}$$

$$\frac{4(x-1)}{\cancel{(x+1)(x-1)}} + \frac{2(x+1)(x-1)}{\cancel{(x+1)(x-1)}} = \frac{(2x+6)(x+1)}{\cancel{(x-1)(x+1)}} \tag{7}$$

$$4(x-1) + 2\underbrace{(x+1)(x-1)}_{=\ x^2-1} = 2\underbrace{(x+3)(x+1)}_{=x^2+4x+3} \tag{8}$$

$$4(x-1) + 2(x^2-1) = 2(x^2+4x+3) \tag{9}$$

$$4x - 4 + \cancel{2x^2} - 2 = \cancel{2x^2} + 8x + 6 \tag{10}$$

$$4x - 8x = 6 + 4 + 2 \tag{11}$$

$$-4x = 12 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{(-4)} \tag{12}$$

$$\underline{\underline{x = -3}} \tag{13}$$

En alternativ og minst like god måte å løse denne ligningen på er å multiplisere med faktorene $(x+1)(x-1)$ på begge sider:

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{x+1}+2 &= \frac{2x+6}{x-1} \qquad \Big| \cdot (x+1)(x-1) && (14)\\
\frac{4}{\cancel{x+1}}\cancel{(x+1)}(x-1)+2(x+1)(x-1) &= \frac{2x+6}{\cancel{x-1}}(x+1)\cancel{(x-1)} && (15)\\
4(x-1)+2(x+1)(x-1) &= (2x+6)(x+1) && (16)\\
4x-4+2(x^2-1) &= 2x^2+2x+6x+6 && (17)\\
4x-4+\cancel{2x^2}-2 &= \cancel{2x^2}+8x+6 && (18)\\
4x-8x &= 6+4+2 && (19)\\
-4x &= 12 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{(-4)} && (20)\\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -3}} && (21)
\end{aligned}
$$

PS:
Du behøver ikke løse ligningen på begge måtene. Det er nok at du løser ligningen på en av måtene. Velg den metoden du liker best.

e) Løser ulikheten:

$$2x - (3 + 7x) \quad > \quad x + 9 \tag{22}$$

$$2x - 3 - 7x \quad > \quad x + 9 \qquad \text{(løser opp parentesen)} \tag{23}$$

$$2x - 7x - x \quad > \quad 9 + 3 \qquad \text{(x'ene på venstre side og tallene på høyre)} \tag{24}$$

$$\underline{-6x \;>\; 12} \tag{25}$$

Når vi deler på -6 (negativt) på begge sider så må vi SNU fortegnet:

$$\frac{-6x}{-6} \quad < \quad \frac{12}{-6} \tag{26}$$

$$\underline{\underline{x < \; -2}} \tag{27}$$

f) Skriver på standardform:

$$570\,000\,000\,000 \;=\; \underline{\underline{5,7 \cdot 10^{11}}} \tag{28}$$

■

Oppgave 2: (derivasjon)

a) Den deriverte av $f(x)$ mhp. x:

$$f(x) \;=\; \frac{7}{x^3} \;=\; 7x^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\frac{d\,f(x)}{dx}}} \;=\; 7\,\big(-3\big)\,x^{-3-1} \;=\; \underline{\underline{-\frac{21}{x^4}}} \tag{29}$$

b) Skriver om $f(z)$ via “kjelleromskrivingen”:

$$f(z) \;=\; z + \frac{1}{z} \;=\; z + z^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\frac{d\,f(z)}{dz}}} \;=\; 1 \;+\; (-1)z^{-2} \;=\; \underline{\underline{1 - \frac{1}{z^2}}} \tag{30}$$

c) Funksjon: $f(x) = e^{3x}$.
Med kjernen $u(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 3x$ kan vi definere den “ytre” funksjonen:

$$g(u) \;=\; e^u \tag{31}$$

Bruk kjerneregelen:

$$\underline{\underline{\frac{d\,f(x)}{dx}}} \;\stackrel{\text{kj.regel}}{=}\; \frac{d\,g(u)}{du}\,\frac{d\,u}{dx} \tag{32}$$

$$=\; \frac{d}{du}\left(e^u\right)\frac{d}{dx}\left(3x\right) \tag{33}$$

$$=\; e^u\,3 \tag{34}$$

$$=\; \underline{\underline{3\,e^{3x}}} \tag{35}$$

d) Funksjon: $f(x) \; = \; \ln\Big(x^2+3\Big)$.

Med kjernen $u(x) \overset{\text{def.}}{=} x^2+3$ kan vi definere den "ytre" funksjonen:

$$g(u) \; = \; \ln u \tag{36}$$

Bruk kjerneregelen:

$$\underline{\underline{\frac{d\,f(x)}{dx}}} \overset{\text{kj.regel}}{=} \frac{d\,g(u)}{du}\,\frac{d\,u}{dx} \tag{37}$$

$$= \frac{d}{du}\Big(\ln u\Big)\,\frac{d}{dx}\Big(x^2+3\Big) \tag{38}$$

$$= \frac{1}{u}\,2x \tag{39}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+3}}} \tag{40}$$

e) Siden

$$f(x) \; = \; e^{\ln(x^3)} \; = \; x^3 \tag{41}$$

så er denne enkel å derivere via "hovedregelen":

$$\underline{\underline{\frac{d\,f(x)}{dx}}} \; = \; \frac{d}{dx}\Big(x^3\Big) \; = \; \underline{\underline{3x^2}} \tag{42}$$

f) Arealet er:

$$\text{areal} \quad = \quad \int_1^2 f(x)\,dx \tag{43}$$

hvor $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Den antidertiverte $\overbrace{F(x)}^{\text{anti}}$ av $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ er:

$$\underline{F(x)} \quad = \quad -x^{-1} + c \quad = \quad \underline{-\frac{1}{x} + c} \tag{44}$$

hvor c er en konstant.
Hvordan ser vi det? Jo, deriver lign.(44). [2]

Når vi har den antideriverte $F(x)$ av funksjon $f(x)$ så kan vi regne ut integralet $\int_1^2 f(x)\,dx$ via *fundamentalsetningen* for integral:

$$\underline{\underline{\int_1^2 f(x)\,dx}} \quad = \quad F(2) - F(1) \tag{45}$$

$$= \quad -\frac{1}{2} + \cancel{c} - \left(-\frac{1}{1} + \cancel{c} \right) \quad = \quad -\frac{1}{2} + 1 \quad = \quad \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \tag{46}$$

■

[2]Husk **hovedregelen** for derivasjon, dvs. $\frac{d}{dx}\left(ax^n\right) = anx^{n-1}$, dvs. man går "èn etasje ned". Antiderivasjon er å gå "èn etasje opp".

Oppgave 3: (logistikk)

a) Etterspørselen av lampen i mars 2019, dvs. d_3, er:

$$\underline{d_3} = d_1\, 0.2472^{3-1} \tag{47}$$

$$= 125 \cdot 0.2472^2 = \underline{7.64 \;\; \text{lamper}} \tag{48}$$

Det $\underline{\underline{\text{etterspørres 8 lamper}}}$ i mars 2019 ifølge modellen i oppgaven.

b) Rekken $d_i = d_1 k^{i-1}$ er på formen $d_{i+1} = k d_i$, hvor k = en konstant. [3]
Derfor er det en $\underline{\underline{\text{geometrisk rekke}}}$.

c) Summen av en geometrisk rekke er: (se formelsamling)

$$S_n = a\,\frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{49}$$

For vår rekke er kvotienten $k = 0.2472$, $a = d_1 = 125$ og $n = 6$.
Dette setter vi inn i lign.(49):

$$\underline{\underline{S_6}} \overset{\text{lign.(53)}}{=} d_1\,\frac{k^6 - 1}{k - 1} \tag{50}$$

$$= 125\,\frac{0.2472^6 - 1}{0.2472 - 1} = \underline{\underline{166}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{51}$$

[3] $k = 0.2472$ i vårt tilfelle.

d) Dersom Glamox skal selge alle N lampene de første 6 månedene så betyr det at:

$$S_6 \;=\; N \tag{52}$$

hvor S_6 den samlede etterspørselen av den aktuelle lampen de 6 første månedene i 2019.
Denne samlede etterspørselen utgjør summen av en geometrisk rekke.
Formelen for summen av en geometrisk rekke finner vi i formelsamlingen.
Dermed:

$$S_6 \;=\; d_1\,\frac{k^6-1}{k-1} \tag{53}$$

Altså:

$$S_6 \;=\; N \tag{54}$$

$$d_1\,\frac{k^6-1}{k-1} \;=\; N \qquad \Big|\cdot \frac{1}{d_1} \tag{55}$$

$$\frac{k^6-1}{k-1} \;=\; \frac{N}{d_1} \qquad \Big|\cdot \big(k-1\big) \tag{56}$$

$$k^6-1 \;=\; \frac{N}{d_1}\big(k-1\big) \tag{57}$$

$$k^6-1 \;=\; \frac{N}{d_1}k \;-\; \frac{N}{d_1} \tag{58}$$

som gir:

$$\underline{\underline{k^6 \;-\; \frac{N}{d_1}k \;+\; \frac{N}{d_1}k \;-\; 1 \;=\; 0}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{59}$$

e) Oppgitt i oppgaven:

$$k \;=\; k_0\, e^{-a\,p} \tag{60}$$

og løser med hensyn på prisen p alene:

$$k \;=\; k_0\, e^{-a\,p} \qquad \Big|\cdot \frac{1}{k_0} \tag{61}$$

$$\frac{k}{k_0} \;=\; e^{-a\,p} \qquad \Big|\ln \tag{62}$$

$$\ln\left(\frac{k}{k_0}\right) \;=\; \ln\left(e^{-a\,p}\right) \tag{63}$$

$$\ln\left(\frac{k}{k_0}\right) \;=\; -a\,p \qquad \Big|\cdot\left(-\frac{1}{a}\right) \tag{64}$$

$$-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{k}{k_0}\right) \;=\; p \tag{65}$$

altså

$$\underline{\underline{p \;=\; -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{k}{k_0}\right)}} \qquad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{66}$$

f) Med $N = 246$ og $d_1 = 125$ så vet vi, fra oppgaveteksten, at den konstante faktoren k er:

$$k \;=\; 0.5 \tag{67}$$

Dermed kan vi bruke lign.(66):

$$\underline{p} \;=\; -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{k}{k_0}\right) \tag{68}$$

$$=\; -\frac{1}{0.000783}\ln\left(\frac{0.5}{0.8}\right)\ \text{NOK} \;=\; \underline{600\ \ \text{NOK}} \tag{69}$$

Dersom Glamox skal selge ut de 246 aktuelle lampene i løpet av de 6 første månedene i 2019 så må de sette prisen til $\underline{\underline{600\ \text{NOK}\ \ \text{per lampe}}}$.

■

Oppgave 4: (Lagrangemetoden - smarthus)

a) Lagrangefunksjonen:

$$L(x,y,\lambda) \;=\; P(x,y) - \lambda g(x,y) \tag{70}$$

hvor $g(x,y) = 0$ er bibetingelsen, som i vårt tilfelle er

$$g(x,y) \;=\; 0.6x + 0.4y - b \tag{71}$$

Dette gir:

$$\underline{\underline{L(x,y,\lambda)}} \;=\; P(x,y) \;-\; \lambda g(x,y) \tag{72}$$

$$=\; \underline{\underline{200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} \;-\; \lambda\Big(0.6x + 0.4y - b\Big)}} \tag{73}$$

b) De kritiske punktene for $f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = 0$ oppfyller ligningssystemet:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{74}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{75}$$

$$g(x,y) = 0 \tag{76}$$

hvor

$$\lambda = \text{Lagrange-multiplikatoren} \tag{77}$$

Partiellderiverte:

$$\underline{\frac{\partial L}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda\left(0.6x + 0.4y - b\right)\right) \tag{78}$$

$$= 200\,\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{1}{3}} - 0.6\lambda \tag{79}$$

$$= \underline{100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 0.6\lambda} \tag{80}$$

$$\underline{\frac{\partial L}{\partial y}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - \lambda\left(0.6x + 0.4y - b\right)\right) \tag{81}$$

$$= 200\,x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}-1} - 0.4\lambda \tag{82}$$

$$= \underline{\frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 0.4\lambda} \tag{83}$$

Løser med hensyn på λ: (bruker at $0.6 = \frac{3}{5}$)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{84}$$

$$100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 0.6\lambda = 0 \tag{85}$$

$$\frac{3}{5}\lambda = 100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} \tag{86}$$

$$\underline{\lambda = \frac{500}{3}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}} \tag{87}$$

Løser med hensyn på λ: (bruker at $0.4 = \frac{2}{5}$)

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{88}$$

$$\frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - 0.4\lambda = 0 \tag{89}$$

$$\frac{2}{5}\lambda = \frac{200}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} \tag{90}$$

$$\underline{\lambda = \frac{500}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}} \tag{91}$$

Eliminerer λ:

$$\lambda = \lambda \tag{92}$$

$$\frac{\cancel{500}}{\cancel{3}} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} = \frac{\cancel{500}}{\cancel{3}} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}} \tag{93}$$

$$y^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \tag{94}$$

$$y^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \tag{95}$$

$$\underline{y = x} \tag{96}$$

Innsatt i bibetingelsen: (setter inn at $y = x$)

$$0.6x + 0.4y = b \tag{97}$$

$$\underbrace{0.6x + 0.4x}_{= x} = b \tag{98}$$

$$\underline{x = b} \tag{99}$$

Siden $y = x$ så er:

$$\underline{y = b} \tag{100}$$

For å <u>maksimere effekten $P(x, y)$</u> så må antall watt produsert av ovnstype A være $\underline{\underline{x^* = b}}$ og antall watt produsert fra ovnstype B må være $\underline{\underline{y^* = b}}$.

c) Starter med venstre side:

$$\underline{\underline{\frac{\mathrm{d}\,P(x^*,y^*)}{\mathrm{d}b}}} = \frac{\mathrm{d}\,P(b,b)}{\mathrm{d}b} \tag{101}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(200\,b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right) \tag{102}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(200\,b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\right) \tag{103}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(200\,b^{\frac{5}{6}}\right) \tag{104}$$

$$= 200\,\frac{5}{6}\,b^{\frac{5}{6}-1} \tag{105}$$

$$= \underline{\frac{500}{3}\,b^{-\frac{1}{6}}} \tag{106}$$

Deretter må vi enten bruke lign.(87) eller lign.(91) for å beregne λ^*.
Vi velger lign.(91):

$$\underline{\lambda(b)} = \frac{500}{3}\,x^{*\frac{1}{2}}y^{*-\frac{2}{3}} \tag{107}$$

$$= \frac{500}{3}\,b^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}} \tag{108}$$

$$= \frac{500}{3}\,b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \tag{109}$$

$$= \underline{\frac{500}{3}\,b^{-\frac{1}{6}}} \tag{110}$$

Vi ser at lign.(106) og lign.(110) er like, dermed:

$$\underline{\underline{\frac{\mathrm{d}\,P(x^*,y^*)}{\mathrm{d}b} = \lambda(b)}} \quad , \qquad \text{q.e.d.} \tag{111}$$

■