

Eksamen i

MAT100 Matematikk

Eksamensdag	: Onsdag 19. desember 2018
Tid	: 09:00 – 13:00 (4 timer)
Faglærer/telefonnummer	: Per Kristian Rekdal / 924 97 051
Hjelpemidler	: KD + formelsamling i MAT100 fra 2018 + generell ordbok (morsmål/norsk/engelsk i papirformat)
Antall sider inkl. forsiden	: 12
Målform	: Norsk (bokmål)

Noen generelle råd:

- **Skriv rett inn. Ikke bruk så mye tid på kladding.**
- **Det er totalt 4 oppgaver.**

Oppgave 1: (grunnleggende emner)

- a) Løs ut parentesene og samle like ledd:

$$(x + y)(x - y) \quad (1)$$

- b) Trekk sammen brøkene og gjør forenklinger:

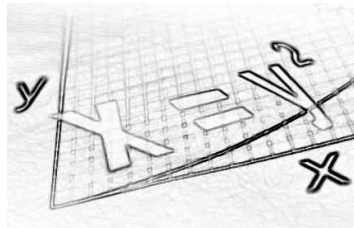
$$\frac{3}{2a} - \frac{6}{3a} + \frac{1}{a} \quad (2)$$

- c) Forkort brøken:

$$\frac{x^3 - xy^2}{(x + y)^2} \quad (3)$$

- d) Løs ligningen, dvs. finn x :

$$\frac{4}{x + 1} + 2 = \frac{2x + 6}{x - 1} \quad (4)$$



Figur 1: Algebra.

e) Løs ulikheten:

$$2x - (3 + 7x) > x + 9 \quad (5)$$

f) Skriv tallet nedenfor på standardform:

$$570\,000\,000\,000 \quad (6)$$



Oppgave 2: (derivasjon og integrasjon)

Deriver funksjonene nedenfor:

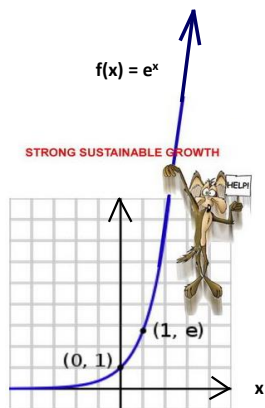
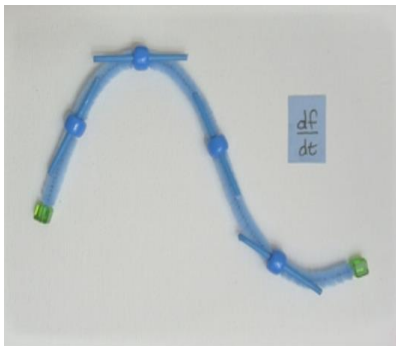
a) $f(x) = \frac{7}{x^3}$

b) $f(z) = z + \frac{1}{z}$

c) $f(x) = e^{3x}$

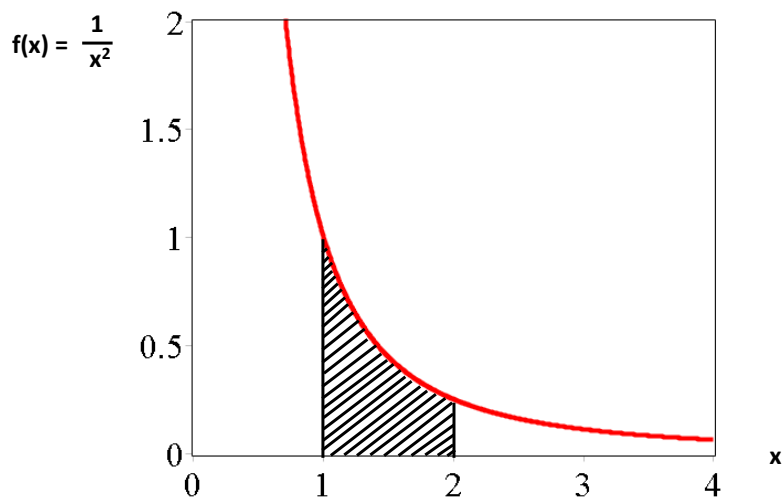
d) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$

e) $f(x) = e^{\ln(x^3)}$



Figur 2: Derivasjon.

- f) Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ er plottet i figur 3.
Regn ut det skraverte arealet nedenfor.¹



Figur 3: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

■

¹Husk at arealet under en graf er det samme som et **integral**. Arealet starter i vårt tilfelle ved $x = 1$ og slutter ved $x = 2$, se figur 3.

Oppgave 3: (logistikk)

Glamox er en norsk produsent og leverandør av belysning.

Anta at lampen C10-S1, se figur 4, skal fases ut på grunn av nye forskrifter. De nye forskriftene trer i kraft 1. juli 2019.

Anta videre at Glamox har 246 slike lamper på lager per 1. januar 2019. De ønsker derfor å selge alle disse lampene i løpet av de første $n = 6$ månedene i 2019.

Anta at det etterspørres 125 slike lamper i januar 2019, dvs.:

$$d_1 = 125 \text{ lamper} \quad (7)$$

Siden dette er lamper som fases ut så vil etterspørselen reduseres fra måned til måned.

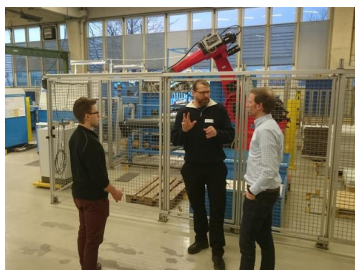
Anta at etterspørselen reduseres med en konstant faktor $k < 1$ per måned, dvs.:

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 k \\ d_3 &= d_1 k^2 \\ &\vdots \\ d_6 &= d_1 k^5 \end{aligned} \quad (8)$$

altså

$$d_i = d_1 k^{i-1} \quad (9)$$

hvor $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ og d_i = etterspørselen av lampen C10-S1 i måned nr. i .



Figur 4: Lampen C10-S1.

- a) Anta at $k = 0.2472$.
Hvor stor vil etterspørselen av lampen i mars 2019 være, dvs. hva er d_3 ?
- b) Hva slags type rekke representerer d_i , hvor $i = 1, 2, \dots, 6$?
Gi en *kort* begrunnelse.

Den samlede etterspørselen av lampen de 6 første månedene i 2019 er:

$$S_6 = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_6 = \sum_{i=1}^6 d_i \quad (10)$$

- c) Med $k = 0.2472$, vis at: ²

$$S_6 = 166 \quad (11)$$

²I denne oppgaven er det meningen at du skal regne ut summen S_6 via en formel (se formelsamling), **ikke** ved å ”for hånd” legge sammen de seks leddene i lign.(10).

Siden Glamox har

$$N = 246 \tag{12}$$

lamper på lager per 1. januar 2019 så vil $246 - 166 = 80$ lamper forbli usolgt. For å unngå å brenne inne med 80 lamper så vurderer Glamox å **sette ned prisen** på lampen.

- d) Ved å sette ned prisen p på lampen så får man en **ny og større** konstant faktor k . Dersom Glamox skal selge alle N lampene de første 6 månedene så betyr det at:

$$S_6 = N \tag{13}$$

Bruk lign.(13) og vis at den nye konstante faktoren k de da må ha er bestemt av ligningen: ³

$$k^6 - \frac{N}{d_1} k + \frac{N}{d_1} - 1 = 0 \tag{14}$$

³Bruk formelen for summen av en geometrisk rekke.

Med

$$N = 246 \quad , \quad d_1 = 125 \quad (15)$$

er det to løsninger av 6. gradsligningen i lign.(14), nemlig $k = 0.5$ og $k = 1$.

Siden etterspørselen reduseres fra måned til måned i 2019, dvs. $k < 1$, så må vi velge løsningen:

$$k = 0.5 \quad (16)$$

Anta videre at det er en sammenheng mellom pris og etterspørsel av den aktuelle lampen slik at den konstante faktoren k og prisen $p \geq 0$ har følgende sammenheng:

$$k = k_0 e^{-ap} \quad (17)$$

hvor

$$k_0 = 0.8 \quad (18)$$

$$a = 0.000783 \quad (19)$$

e) Vis, ved å bruke lign.(17), at prisen p er gitt ved:

$$p = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{k}{k_0} \right) \quad (20)$$

f) Hva slags pris må Glamox sette på lampen dersom de skal selge alle $N = 246$ lampene i løpet av de første 6 månedene i 2019, og dersom etterspørselen i januar 2019 er $d_1 = 125$? ⁴

■

⁴Det viktige her er å forstå hva slags størrelser (tall) man skal bruke for å finne det oppgaven spør etter.

Oppgave 4: (Lagrange optimering - smarthus)

Scandic Seilet hotell har kontaktet Høgskolen i Molde for å få hjelp til å oppnå mest mulig effektiv oppvarming av konsertsalen i Bjørnsonhuset, som er et moderne kommunalt kulturhus integrert i hotellet, se figur 5.

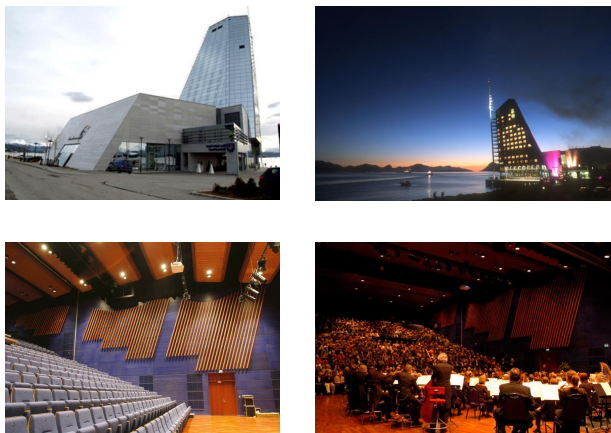
Anta at konsertsalen varmes opp av to typer varmeovner. Disse varmovnene er plassert rundt omkring i salen. Oppvarming måles i enheten *watt*, som er energioverføring per sekund, dvs. effekt. Anta at hver dag må salen ha et visst samlet effektbehov b , i watt, tilført fra ovnene for å opprettholde fast romtemperatur.

Ovnstypene, kall dem type A og type B, er forskjellige og er plassert på ulike posisjoner i salen. Hotellet ønsker å bestemme hvor mange watt som *totalt* skal produseres fra hver av de to ovnstypene slik at *effekten* av ovnene blir maksimal.

Følgende variabler defineres:

$$x = \text{antall watt produsert fra ovnene av type A på en gitt dag} \quad (21)$$

$$y = \text{antall watt produsert fra ovnene av type B på en gitt dag} \quad (22)$$



Figur 5: Scandic Seilet hotell og Bjørnsonhuset.

Noe av effekten fra varmeovnene forsvinner til omgivelsene.

For ovnene av type A er det kun 60% av den forbrukte effekten går med til å dekke det daglige oppvarmingsbehovet. Tilsvarende for type B ovner, som er en gammel type, går kun 40 % av effekten til å oppvarming.

Kravet om at b antall watt skal produseres på en gitt dag, kan dermed skrives som:

$$0.6x + 0.4y = b \quad (23)$$

Anta at den totale effekten $P(x, y)$ til ovnene, for valgt fordeling x og y , er estimert ved funksjonen: ⁵

$$P(x, y) = 200 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

a) Skriv opp Lagrangefunksjonen $L(x, y, \lambda)$ for $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(23). ⁶

b) Vis, ved hjelp av Lagrange-metoden, at $P(x, y)$ under bibetingelsen gitt ved lign.(23) har følgende kritiske punkt, nemlig:

$$x^* = b, \quad y^* = b \quad (25)$$

som maksimerer effekten. ⁷

⁵ P står for "power", som er "effekt".

⁶Altså her kreves ingen regning.

⁷Ta for gitt at det kritiske punktet er et *maksimumspunkt*.

Hvor *sensitiv* er den optimale effekten $P(x^*, y^*)$ som funksjon av behovet av watt b ? Dette er et viktig spørsmål siden behovet b endrer med flere faktorer, f.eks. med temperaturen ute.

Et velkjent resultat innen Lagrange-teorien er:

$$\boxed{\frac{d P(x^*, y^*)}{d b} = \lambda(b)} \quad (26)$$

hvor

$$\lambda(b) = \text{optimal Lagrange-multiplikator, en funksjon av } b \quad (27)$$

$$P(x^*, y^*) = \text{optimal effekt, en funksjon av } b \quad (28)$$

c) Vis at lign.(26) stemmer i vårt tilfelle. ⁸

■

⁸Tips: Her må du blant annet bruke noen av resultatene fra mellomregningene i oppgave 4b. Dette er regnet som en A-oppgave.