LØSNING: TESTeksamen mai 2019

"*MAT110 Statistikk 1*", vår 2019

Versjon 04

Oppgave 1: (telling av lakselus)

a) Utfallsrommet Ω_3 er gitt ved

$$\underline{\underline{\Omega_3}} = \Big\{ (\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}) \ , \ (l_1, l_2, l_3) \ , \ (l_1, \overline{l_2}, \overline{l_3}) \ , \ (\overline{l_1}, l_2, l_3) \ , \ (\overline{l_1}, l_2, \overline{l_3}) \ , \ (l_1, \overline{l_2}, l_3) \ , \ (\overline{l_1}, \overline{l_2}, l_3) \ , \ (l_1, l_2, \overline{l_3}) \Big\}$$

b) Utfallsrommet Ω_3 har et endelig antall utfall.
Derfor er utfallsrommet <u>diskret</u>.

c) De blå utfallene i utfallsrommet Ω_3 er utfall hvor minst to av de tilfeldig trekte fiskene har lakselus:

$$\begin{aligned}\Omega_3 \quad = \quad \Big\{ & (\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}) \ , \ (l_1, l_2, l_3) \ , \\ & (l_1, \overline{l_2}, \overline{l_3}) \ , \ (\overline{l_1}, l_2, l_3) \ , \\ & (\overline{l_1}, l_2, \overline{l_3}) \ , \ (l_1, \overline{l_2}, l_3) \ , \\ & (\overline{l_1}, \overline{l_2}, l_3) \ , \ (l_1, l_2, \overline{l_3}) \ \Big\}\end{aligned}$$

dvs. begivenheten S er:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S}} \quad = \quad \Big\{ & \ , \ (l_1, l_2, l_3) \ , \\ & \ , \ (\overline{l_1}, l_2, l_3) \ , \\ & \ , \ (l_1, \overline{l_2}, l_3) \ , \\ & \ , \ (l_1, l_2, \overline{l_3}) \ \Big\}\end{aligned}$$

som er en delmengde av utfallsrommet Ω_3.

d) Sannsynligheten for begivenheten S er:

$$\underline{\underline{p(S)}} \quad = \quad P(l_1, l_2, l_3) \ + \ P(\overline{l_1}, l_2, l_3) \ + \ P(l_1, \overline{l_2}, l_3) \ + \ P(l_1, l_2, \overline{l_3}) \tag{1}$$

$$= \quad p^3 \ + \ (1-p)p^2 \ + \ p(1-p)p \ + \ p^2(1-p) \tag{2}$$

$$= \quad \underline{\underline{p^3 \ + \ 3p^2(1-p)}} \tag{3}$$

Med $p = 0.5$ blir den numeriske verdien:

$$\underline{\underline{p(S)}} = p^3 + 3p^2(1-p) \tag{4}$$

$$= 0.5^3 + 3 \cdot 0.5^2(1-0.5) \tag{5}$$

$$= 4 \cdot 0.5^3 \tag{6}$$

$$= \underline{\underline{0.5}} \tag{7}$$

e) Utfallsrommet Ω_{10} har 2^{10} forskjellige utfall.
Det nytter dermed ikke å skrive opp alle utfallene eksplisitt som vi gjorde i oppgave **1a**.

Vi beskriver derfor utfallsrommet ved hjelp av symbolikk:

$$\underline{\underline{\Omega_{10} = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_{10}) \;\middle|\; a_i \in \{l_i, \overline{l_i}\},\ i = 1, 2, \ldots, 10 \right\}}} \tag{8}$$

f) Sannsynligheten for et gitt vilkårlig utfall er:

$$\underline{P(u)} \;=\; P(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) \;=\; \underline{P(a_1)P(a_2)\cdots P(a_{10})} \tag{9}$$

I oppgaven er det oppgitt at $p = 0.5$, hvor $p =$ sannsynligheten for at en vilkårlig valgt fisk har lakselus. Det betyr, for $a_i = l_i$

$$\underline{P(l_i)} \;=\; p \;=\; \underline{0.5} \tag{10}$$

Tilsvarende for $a_i = \overline{l_i}$

$$\underline{P(\overline{l_i})} \;=\; 1 - p \;=\; 1 - 0.5 \;=\; \underline{0.5} \tag{11}$$

Konklusjon:
$P(a_i) = 0.5$ uansett om $a_i = l_i$ eller $a_i = \overline{l_i}$.
Dermed har alle mulige utfall samme sannsynlighet, dvs. uniformt utfallsrom. [1]

Dersom p *ikke* var akkurat lik 0.5, ville modellen *ikke* blitt uniform, siden utfallene da hadde fått forskjellige sannsynligheter for å inntreffe, avhengig av hvor mange lakselus man fikk.

[1] Det viktige i denne oppgaven er at alle mulige utfall samme sannsynlighet, ikke at den numeriske verdien er $P(u) = 0.5^{10}$.

g) Siden utfallsrommet er uniformt (se oppgave **1f**) så kan vi bruke urnemodellen.
La:

$$A \;=\; \text{begivenheten at 7 av de 10 trekte fiskene har lakselus} \tag{12}$$

Dermed: [2]

$$\underline{\underline{P(A)}} \;=\; \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} \;=\; \frac{\binom{10}{7}}{2^{10}} \;=\; \frac{120}{1024} \;=\; \underline{\underline{0.1172}} \tag{14}$$

siden

$$\text{gunstige} \;=\; \binom{10}{7} \qquad (\text{ situasjon 3 }) \tag{15}$$

$$\text{mulige} \;=\; 2^{10} \tag{16}$$

hvor antall gunstige er funnet ved å telle hvor mange måter vi kan trekke 10 kuler uten tilbakelegging fra en urne hvor det er 7 røde kuler og 3 grønne kuler, dvs. totalt 10 kuler i urnen. [3]

---

[2] Siden rekkefølgen ikke spiller noen rolle og siden vi ikke har tilbakelegging så har vi situasjon 3. Dermed:

$$\text{gunstige} \;=\; \binom{10}{7} \qquad (\text{binomialkoeffisienten}) \tag{13}$$

[3] Siden vi i oppgave **1f** viste at utfallsrommet er uniformt og siden hintet i oppgaven sier at man kan bruke urnemodellen så legges det opp til å løse oppgaven på den måten. Det er ikke meningen at dere skal løse oppgaven på to måter. men vi nevner likevel at man kan alternativt løse oppgaven via stokastiske variabler:

$$X \;=\; \text{antall trekte fisker med lakselus i en forsøksserie på totalt } n = 10 \text{ forsøk} \tag{17}$$

Siden det er kun er to mulige utfall for et forsøk og siden fiskene antas å være uavhengige av hverandre når gjelder lakselus så innser vi at X er binomisk fordelt:

$$X \;\sim\; \text{Bin}[n = 10, p = 0.5] \tag{18}$$

Dermed:

$$P(X = x) \;=\; \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \tag{19}$$

Med $n = 10$, $x = 7$ og $p = 0.5$ får vi:

$$\underline{\underline{P(X = 7)}} \;=\; \binom{10}{7} 0.5^7 (1-0.5)^{10-7} \;=\; 120 \cdot 0.5^{10} \;=\; \underline{\underline{0.1172}} \tag{20}$$

altså det samme som lign.(14).

h) La:

$$\begin{aligned} B &= \text{være begivenheten hvor fisk nr.1 og fisk nr.10 har lakselus} \\ C &= \text{være begivenheten hvor minst 8 av de 10 trekte fiskene har lakselus} \end{aligned} \tag{21}$$

Oppgaven spør om sannsynligheten for at C inntreffer gitt B, dvs:
(betinget sannsynlighet)

$$\boxed{P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} \qquad (22)}$$

Urnemodellen: [4]

$$\underline{P(C \cap B)} = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} = \frac{\overbrace{\binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}}^{\text{situasjon 3}}}{2^8} = \frac{28+8+1}{256} = \underline{0.1445} \tag{23}$$

$$P(B) = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}} = \frac{2^8}{2^{10}} = \frac{1}{2^2} = 0.25 \tag{24}$$

hvor antall gunstige finnes ved å trekke 8 kuler uten tilbakelegging fra en urne hvor det er 6, 7 og 8 røde kuler hhv.

Dermed:

$$\underline{\underline{P(C|B)}} = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1445}{0.25} = \underline{\underline{0.5781}} \tag{25}$$

[4] Det legges opp til at man skal bruke urnemodellen her. Vi nevner likevel at også denne oppgaven kan løses ved å bruke stokastiske variabler analogt til fotnoten i oppgave **1g**.

Oppgave 2: (stokastiske variabler og forventningverdi - telling av lakselus)

a) Tolkning:

$$\underline{\underline{P(X \leq j)}} = \text{sannsynligheten for at en tilfeldig valgt fisk fra et oppdrettsanlegg med lusetall mellom 0.1 og 0.3 har } j \text{ eller mindre antall lakselus} \tag{26}$$

b) Sannsynlighetene $P(X = j)$ med $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ utgjør en gyldig sannsynlighetsfordeling fordi den er normert til 1:

$$\underline{\underline{\sum_{j=0}^{5} P(X = j)}} = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \tag{27}$$

$$= 0.85 + 0.12 + 0.0185 + 0.0070 + 0.0035 + 0.0010 \tag{28}$$

$$= \underline{\underline{1}} \tag{29}$$

c) Forventningsverdien $E[X]$:

$$\underline{\underline{E[X]}} = \sum_{j=0}^{5} x_j \, P(X = j) \tag{30}$$

$$= \sum_{j=0}^{5} j \, P(X = j) \tag{31}$$

$$= 0 \cdot 0.85 + 1 \cdot 0.12 + 2 \cdot 0.0185 + 3 \cdot 0.0070 + 4 \cdot 0.0035 + 5 \cdot 0.0010 \tag{32}$$

$$= \underline{\underline{0.1970}} \tag{33}$$

d) Variansen $Var[X]$:

$$\underline{\underline{Var[X]}} = \sum_{j=0}^{5} \Big(x_j - E[X]\Big)^2 P(X = j) \tag{34}$$

$$= \sum_{j=0}^{3} \Big(j - E[X]\Big)^2 P(X = j) \tag{35}$$

$$= \Big(0 - 0.1970\Big)^2 \cdot 0.85 + \Big(1 - 0.1970\Big)^2 \cdot 0.12$$

$$+ \Big(2 - 0.1970\Big)^2 \cdot 0.0185 + \Big(3 - 0.1970\Big)^2 \cdot 0.0070 \tag{36}$$

$$+ \Big(4 - 0.1970\Big)^2 \cdot 0.0035 + \Big(5 - 0.1970\Big)^2 \cdot 0.0010 \tag{37}$$

$$= \underline{\underline{0.2992}} \tag{38}$$

med tilhørende standardavvik $\sigma[X]$:

$$\underline{\underline{\sigma[X]}} = \sqrt{Var[X]} \tag{39}$$

$$= \sqrt{0.2992} = \underline{\underline{0.5470}} \tag{40}$$

e) Forventet mengde medisin $E[X]$: [5]

$$\underline{E[M]} = E[aX^2 + bX + c] \tag{41}$$

$$= \underline{aE[X^2] + bE[X] + c} \tag{42}$$

hvor (fra oppgave **2c**)

$$E[X] = 0.1970 \tag{43}$$

Varianssetningen

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 \tag{44}$$

gir

$$\boxed{E[X^2] = Var[X] + E[X]^2 \qquad (45)}$$

hvor (fra oppgave **2d**)

$$Var[X] = 0.2992 \tag{46}$$

Dette innsatt i lign.(42) gir

$$\underline{E[M]} = aE[X^2] + bE[X] + c \tag{47}$$

$$= a\Big(Var[X] + E[X]^2\Big) + bE[X] + c \tag{48}$$

$$= 1.2\Big(0.2992 + 0.1970^2\Big) + 2.3 \cdot 0.1970 + 1.4 \tag{49}$$

$$= \underline{2.2587} \tag{50}$$

Forklaring $E[M]$:
Den forventede mengden med medisin som må til for å fjerne lakselusen til fisken er <u>2.2587 gram medisin per 100 gram fôr.</u>

[5] Her brukes regnereglene for forventning, se formelsamling.

Kommentar:

Man kan også regne ut $E[X^2]$ i lign.(44) via definisjonen av forventning: [6]

$$\underline{E[X^2]} = \sum_{j=0}^{5} x_j^2 \, P(X = j) \tag{51}$$

$$= \sum_{j=0}^{5} j^2 \, P(X = j) \tag{52}$$

$$= 0^2 \cdot 0.85 \; + \; 1^2 \cdot 0.12 \; + \; 2^2 \cdot 0.0185 \; + \; 3^2 \cdot 0.0070 \tag{53}$$

$$= 4^2 \cdot 0.0035 \; + \; 5^2 \cdot 00.10 \tag{54}$$

$$= \underline{0.3380} \tag{55}$$

[6] Det er nok at man gjør det på èn av måtene.

f) Sannsynligheten for at gjennomsnittet $\overline{X}_t$ ligger under lusegrensen:

$$P(\overline{X}_t \leq a) \tag{56}$$

hvor $\quad a = 0.2.$

Siden $X_{kt} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} X \sim P(X = j)$ med 50 variabler, dvs. $k = 1, 2, \ldots, 50$, så er, ifølge sentralgrensesetningen, gjennomsnittet

$$\overline{X}_t = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{kt} \tag{57}$$

normalfordelt:

$$\overline{X}_t \sim N\Big[\, E[\overline{X}_t] \,,\, \sigma[\overline{X}_t] \,\Big] \tag{58}$$

hvor

$$E[\,\overline{X}_t\,] = \overbrace{E[X] = 0.1970}^{\text{oppg. } \mathbf{2c}} \tag{59}$$

$$\sigma[\,\overline{X}_t\,] = \overbrace{\frac{\sigma[X]}{\sqrt{n}} = \frac{0.5470}{\sqrt{50}}}^{\text{oppg. } \mathbf{2d}} \tag{60}$$

Standardiserer:

$$\underline{P(\overline{X}_t \leq a)} \overset{\text{standardiser}}{=} P\left(\frac{\overline{X}_t - E[\overline{X}_t]}{\sigma[\overline{X}_t]} \leq \frac{a - E[\overline{X}_t]}{\sigma[\overline{X}_t]}\right) \tag{61}$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{\overline{X}_t - E[X]}{\sigma[X]/\sqrt{n}}}_{\equiv Z} \leq \frac{a - E[X]}{\sigma[X]/\sqrt{n}}\right) \tag{62}$$

$$= P\left(Z \leq \frac{0.2 - 0.1970}{0.5470/\sqrt{50}}\right) \tag{63}$$

$$= \underline{P\Big(Z \leq 0.04\Big)} \tag{64}$$

Ulikhetstegnet er "rett" vi sammenlignet med tabellen i formelsamlingen.
Tabelloppslag:

$$\underline{\underline{P(\overline{X}_t \leq a)}} \quad = \quad \overbrace{P\big(Z \ \leq \ 0.04\big)}^{=\ 0.5160} \quad = \quad \underline{\underline{0.5160}} \tag{65}$$

■

Oppgave 3: (statistisk modell og estimatorer)

a) Siden $X \sim \text{NBin}[\lambda, \theta]$ så er:

$$E[X_i] \;=\; \lambda \tag{66}$$

for alle $i = 1, 2, ..., N$ fiskene. Forventningen av estimatoren $\hat{\lambda}$ blir da:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{E[\,\hat{\lambda}\,]}} &= E[\,\overline{X}\,] && (67)\\
&= E\Big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\Big] && (68)\\
&= \frac{1}{N}\Big(\underbrace{E[X_1]}_{\lambda} + \underbrace{E[X_2]}_{\lambda} + \underbrace{E[X_3]}_{\lambda} + ... + \underbrace{E[X_N]}_{\lambda}\Big) && (69)\\
&= \frac{\cancel{N}\,\lambda}{\cancel{N}} \;=\; \underline{\underline{\lambda}} && (70)
\end{aligned}$$

dvs. estimatoren $\hat{\lambda}$ er forventingsrett.

Realiseringen av $\hat{\lambda}$ er gitt ved: [7]

$$\underline{\underline{\hat{\lambda}(\,x_1, \ldots, x_N\,)}} \;=\; \overline{x} \;=\; \underline{\underline{0.1970}} \tag{71}$$

[7] Tallet $\overline{x} = 0.1970$ var oppgitt i tabell 1 i oppgavene.

b) Vi skal finne en estimator $\hat{\theta}$ for θ basert på ligningen

$$\sigma^2 = \lambda + \frac{\lambda^2}{\theta} \tag{72}$$

hvor $\hat{\sigma}^2 = S_X^2$ er en estimator for σ.

Løser nå lign. (73) mhp. θ:

$$\theta = \frac{\lambda^2}{\sigma^2 - \lambda} \tag{73}$$

Estimatorer: (dette er oppgitt i oppgaven)

$$\hat{\lambda} = \overline{X} \tag{74}$$

$$\hat{\sigma^2} = S_X^2 \tag{75}$$

Dette innsatt i lign.(73):

$$\underline{\underline{\hat{\theta}}} = \frac{\hat{\lambda}^2}{\hat{\sigma}^2 - \hat{\lambda}} = \underline{\underline{\frac{\overline{X}^2}{S_X^2 - \overline{X}}}} \tag{76}$$

Realiseringen av $\hat{\theta}$ er gitt ved: [8]

$$\underline{\underline{\hat{\theta}(\ x_1, \ldots, x_N\ )}} = \frac{\overline{x}^2}{s_X^2 - \overline{x}} = \frac{0.1970^2}{0.2970 - 0.1970} = \underline{\underline{0.3881}} \tag{77}$$

[8] Tallene $\overline{x} = 0.1970$ og $s_X^2 = 0.2970$ var oppgitt i tabell 1 i oppgavene.

c) Siden vi skal regne ut et *asymptotisk* konfidensintervall, dvs. for tilfellet $N \to \infty$, for estimatoren $\hat{\lambda}$ gitt ved:

$$\hat{\lambda} \;=\; \overline{X} \;=\; \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{78}$$

må vi bruke sentralgrensesetningen til å konstruere konfidensintervallet.

Oppgitt i oppgaven:

$$X_1,\, X_2,\, X_3,\, \ldots\,, X_N \;\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\; X \;\sim\; \text{NBin}[\,\lambda,\, \theta] \tag{79}$$

Vi har at:

$$E[\,\hat{\lambda}\,] \;=\; E[\,\overline{X}\,] \;=\; \lambda \qquad \text{(oppgitt i oppgaven)} \tag{80}$$

$$\sigma[\,\hat{\lambda}\,] \;=\; \sigma[\,\overline{X}\,] \;=\; \sqrt{\frac{\lambda + \frac{\lambda^2}{\theta}}{N}} \qquad (Var[X] \text{ oppgitt i oppgaven}) \tag{81}$$

Sentralgrensesetningen sier da at den skalerte variabelen Z er standard normalfordelt:

$$\underline{Z} \;=\; \frac{\overline{X} - E[\overline{X}]}{\sigma[\overline{X}]} \;=\; \frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda + \frac{\lambda^2}{\theta}}{N}}} \;\overset{n\to\infty}{\sim}\; N[0,1] \tag{82}$$

Sentralgrensesetningen gir at

$$\lim_{N\to\infty} P\big(\, z_{\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2} \,\big) \quad = \quad 1-\alpha \tag{83}$$

hvor (se figur 1)

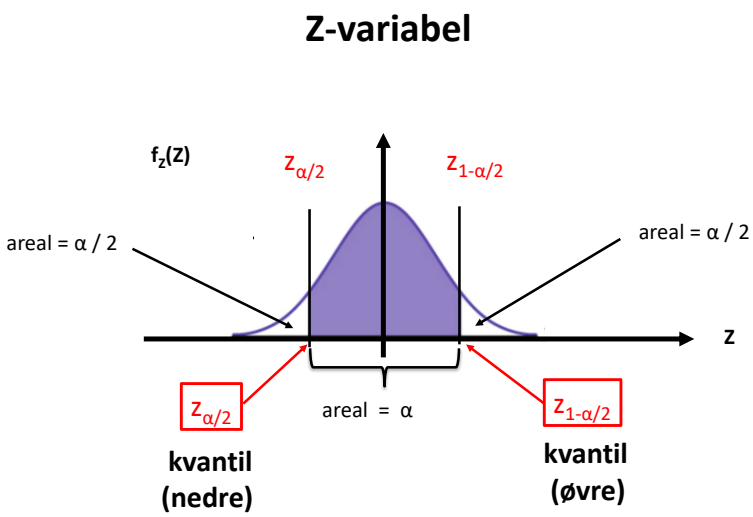
$$z_{\alpha/2} \quad = \quad \text{nedre kvantil til normalfordelingen} \tag{84}$$

$$z_{1-\alpha/2} \quad = \quad \text{øvre kvantil til normalfordelingen} \tag{85}$$

Vi må transformere lign.(83) over på formen

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} P_\lambda\big(\, LB_N^\mu \le \lambda \le UB_N^\mu \,\big) \quad = \quad 1-\alpha} \tag{86}$$

som er definisjonen av et $(1-\alpha)\,100\,\%$-konfidensintervall for λ.



Figur 1: Kvantil.

Setter inn for Z fra lign.(82) inn i lign.(83):

$$\lim_{N\to\infty} P\left(z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}}} \leq z_{1-\alpha/2} \right) = 1-\alpha \tag{87}$$

Deretter multipliserer vi uttrykket i $P(\cdots)$ med $\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}}$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}} \leq \overline{X} - \lambda \leq z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}} \right) = 1-\alpha \tag{88}$$

Deretter multipliserer vi uttrykket i $P(\cdots)$ med -1 hvor vi må huske at retningen på ulikhettegnene <u>snus</u>:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}} \geq -\overline{X} + \lambda \geq -z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}} \right) = 1-\alpha \tag{89}$$

Deretter summerer vi uttrykket i $P(\cdots)$ med $\overline{X}$ for å sette λ alene i midten:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}} \geq \lambda \geq \overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}} \right) = 1-\alpha \tag{90}$$

Deretter snur vi høyre og venstre side i $P(\cdots)$ hvor vi må huske at retningen på ulikhettegnene snus:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}} \leq \lambda \leq \overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda+\frac{\lambda^2}{\theta}}{N}} \right) = 1-\alpha \tag{91}$$

Deretter erstatter vi λ med $\overline{X}$ og θ med $\hat{\theta}$ på høyre og venstre side i $P(\cdots)$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\hat{\theta}}}{N}} \leq \lambda \leq \overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\hat{\theta}}}{N}} \right) = 1 - \alpha \tag{92}$$

Lign.(92) er et uttrykk på formen gitt i lign.(86) med

$$LB_N^\lambda = \overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\hat{\theta}}}{N}} \tag{93}$$

$$UB_N^\lambda = \overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\hat{\theta}}}{N}} \tag{94}$$

Vi har dermed vist at

$$\underline{\underline{\left[\, LB_N^\lambda \,,\, UB_N^\lambda \,\right] = \left[\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\hat{\theta}}}{N}} \,,\, \overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\hat{\theta}}}{N}} \right]}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{95}$$

er et $(1-\alpha)\,100\,\%$ asymptotisk konfidensintervall for λ.

d) Se på uttrykket

$$\overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\hat{\theta}} \tag{96}$$

i konfidensintervallet i lign.(95). Fra lign.(76) har vi:

$$\hat{\theta} \;=\; \frac{\overline{X}^2}{S_X^2 - \overline{X}} \tag{97}$$

Innsatt:

$$\underline{\overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\hat{\theta}}} \;=\; \overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\frac{\overline{X}^2}{S_X^2 - \overline{X}}} \tag{98}$$

$$= \;\; \overline{X} + \frac{\overline{X}^2}{\overline{X}^2}(S_X^2 - \overline{X}) \;=\; \overline{X} + S_X^2 - \overline{X} \;=\; \underline{S_X^2} \tag{99}$$

Innsatt i lign. (95) gir

$$\underline{\underline{\left[\; LB_N^\lambda \;,\; UB_N^\lambda \;\right] \;=\; \left[\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{S_X}{\sqrt{N}} \;,\; \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S_X}{\sqrt{N}}\right]}} \quad , \quad \text{q.e.d.} \tag{100}$$

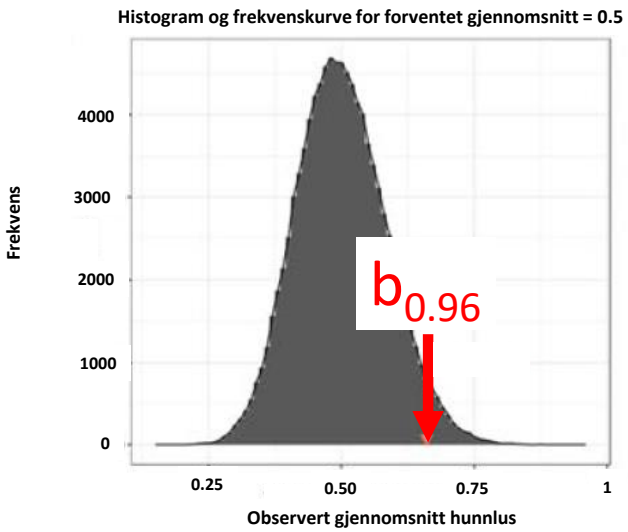
■

Oppgave 4: (krav som indikerer overskridelse av lusegrensa)

a) Krav 1 kan skrives som: [9]

$$\underline{\underline{P(\ \overline{X}_t\ >\ b_{0.96}\ )\ =\ 0.04}} \tag{102}$$

gitt at det sanne lusetallet er under grensen, dvs. gitt at $E[X] < 0.2$, hvor $b_{0.96}$ er 96 %-kvantilen for $\overline{X}_t$. (se se figur 2)



Figur 2: Kvantilen $b_{0.96}$ til $\overline{X}_t$.

[9] Man kan også inkludere den røde setningen inn i P med en mer kompakt notasjon:

$$\underline{\underline{P_{E[X]<a}(\ \overline{X}_t\ >\ b_{0.96}\ )\ =\ 0.04}} \tag{101}$$

b) Sannsynligheten for at krav 2 inntreffer er gitt ved: [10]

$$\underline{\underline{P(B) \;=\; P\big(\; \overline{X}_t > a \;\; \textbf{og} \;\; \overline{X}_{t+1} > a \;\; \textbf{og} \;\; \overline{X}_{t+2} > a \;\; \textbf{og} \; \overline{X}_{t+3} > a \;\big)}} \tag{104}$$

gitt at det sanne lusetallet er under grensen, dvs. gitt at $E[X] < 0.2$.

■

[10] Man kan også inkludere den røde setningen inn i P med en mer kompakt notasjon:

$$\underline{\underline{P(B) \;=\; P_{E[X<0.2]}\big(\; \overline{X}_t > a \;\; \textbf{og} \;\; \overline{X}_{t+1} > a \;\; \textbf{og} \;\; \overline{X}_{t+2} \geq a \;\; \textbf{og} \; \overline{X}_{t+3} > a \;\big)}} \tag{103}$$